MINISTERUL EDUCAȚIEI AL REPUBLICII MOLDOVA

Михай МАРИНЧУК
Спиридон РУСУ

Физика

Учебник для 10 класса

10

Ştiința, 2012

CZU 53(075.3)
M 26

Elaborat conform curriculumului disciplinar în vigoare și aprobat prin Ordinul ministrului educației (nr. 265 din 27 aprilie 2012). Editat din sursele financiare ale *Fondului Special pentru Manuale*.

Contribuția autorilor la elaborarea manualului:

Mihai Marinciuc – capitolele I, II (punctele 2.1–2.3, 2.8), III, IV (punctele 4.1, 4.2, 4.4–4.9)
Spiridon Rusu – capitolele II (punctele 2.4–2.7), IV (punctul 4.3), V, lucrări de laborator

Comisia de experți:

Ion Stratan, doctor în fizică, conferențiar, Universitatea Tehnică a Moldovei
Galina Tihovschi, prof., grad did. I, Liceul Teoretic „Evrica", Rezina
Andrei Petrușca, prof., grad did. superior, Liceul Teoretic „Natalia Dadiani", Chișinău

Recenzenți:

Oleg Bursuc, doctor în științe ale educației, coordonator, Consiliul pentru Cercetări și Schimburi Internaționale (IREX), Chișinău
Alexei Colîbneac, Maestru în Arte, profesor universitar, Academia de Muzică, Teatru și Arte Plastice, Chișinău
Mihai Șleahtițchi, doctor în psihologie și pedagogie, conferențiar, Universitatea Liberă Internațională din Moldova, Chișinău
Anatolie Cerbu, doctor în științe fizico-matematice, conferențiar, Academia de Transporturi, Informatică și Comunicații, Chișinău
Tatiana Cartaleanu, doctor în filologie, conferențiar, Universitatea Pedagogică de Stat „Ion Creangă", Chișinău

Traducere din limba română: *Claudia Șerban*, *Anatolie Homenco*

Redactor: *Valentina Rîbalchina*
Lector: *Claudia Șerban*
Corector: *Tatiana Bolgar*
Redactor tehnic: *Nina Duduciuc*
Machetare computerizată: *Anatol Andrițchi*
Copertă: *Vitalie Ichim*

Întreprinderea Editorial-Poligrafică *Știința*,
str. Academiei, nr. 3; MD-2028, Chișinău, Republica Moldova;
tel.: (+373 22) 73-96-16, fax: (+373 22) 73-96-27; e-mail: prini@stiinta.asm.md

Descrierea CIP a Camerei Naționale a Cărții

Маринчук, Михай

Физика: Учеб. для 10 кл. / Михай Маринчук, Спиридон Русу; trad. din lb. rom.: Claudia Șerban, Anatolie Homenco; Min. Educației al Rep. Moldova. – Ch.: Î.E.P. *Știința*, 2007 (Tipografia „SEREBIA" SRL). – 188 p.

ISBN 978-9975-67-845-2

53(075.3)

ISBN 978-9975-67-845-2

СОДЕРЖАНИЕ

ПРИМЕЧАНИЕ: Темы, ничем не отмеченные, обязательны для обоих профилей. Отмеченные знаком (°) обязательны для реального профиля.

Введение

Основным свойством окружающей нас природы является изменение, движение. Это изменение, движение весьма многообразно и сложно и изучается в рамках естественных наук: физики, химии, биологии, астрономии, геологии и т.д.

Механика (по-гречески μηχανή – *машина*; *наука о машинах, механизмах*) **–** изучает наиболее простую форму движения – **механическое движение.**

Механическое движение тела – это изменение его положения в пространстве относительно других тел с течением времени.

Примеры механического движения мы находим повсюду: когда открываем глаза, поднимаемся с постели, открываем дверь или водопроводный кран, отправляемся в школу и т.д.

Механика состоит из двух разделов, в которых рассматриваются два типа основных проблем механического движения.

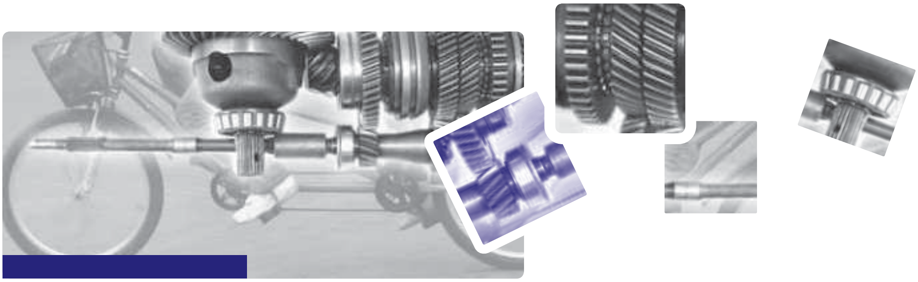
Кинематика (по-гречески χίνημα – *движение*) – изучает **виды движения тел и его характеристики, не рассматривая причины**, определяющие тот или иной вид движения. Для описания движения используются формулы, графики и таблицы. Кинематику образно называют **геометрией движения**.

Динамика (по-гречески δύναμις – *сила*) – изучает различные **виды движения тел в зависимости от причин**, которые их обусловили. Исходя из этого, в динамике можно найти ответ на вопрос: “Почему тело движется таким образом?”, а в кинематике на него нет ответа.

Особой частью динамики является **статика**, которая изучает только состояние покоя (равновесия) тел и устанавливает соответствующие условия их равновесия.

В природе существует еще один вид часто встречаемого движения – это движение, повторяющееся через определенные промежутки времени. Например: движение тела, подвешенного на пружине или на нити; движение металлической линейки, один конец которой закреплен; движение веток деревьев под действием ветра; пульсация сердца; вибрации легких, голосовых связок и перепонок ушей, позволяющие нам дышать, говорить и слышать, и т.д. Эти движения называются **колебательными**. Заметим, что под действием некоторой силы любое тело может совершать колебания, даже если в некоторых случаях они кратковременны.

Распространение колебаний в пространстве и во времени называется **волновым движением.** Волны могут быть различной природы. В зависимости от вида колебаний и среды, в которой они распространяются, волны бывают: поверхностные – на поверхности воды; звуковые – в упругих средах; сейсмические – в Земной коре и т.д.



Глава I

КИНЕМАТИКА

1.1 МАТЕРИАЛЬНАЯ ТОЧКА И АБСОЛЮТНО ТВЕРДОЕ ТЕЛО – МОДЕЛИ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В МЕХАНИКЕ

Вам уже известно, что механическое движение – это наиболее простая форма движения. Но не всегда оно является таким уж простым. Проследив за падением листа (*рис. 1.1*), вы заметите, что он и вращается, и покачивается в воздухе. Перелистывая учебник, страницу за страницей, видите, как сначала страница изгибается, деформируется, затем различные ее части начинают двигаться по-разному, страница распрямляется. Эти примеры убеждают нас в том, что нередко встречаются случаи, когда детальное описание механического движения достаточно сложно.

Рис. 1.1

Возникает закономерный вопрос: а всегда ли необходимо знать в подробностях характер движения тела?

Чтобы ответить на него, рассмотрим следующий пример. Представьте себе пассажира, который ожидает на перроне прибытия поезда, находящегося в нескольких километрах от вокзала. Для пассажира, как и для диспетчера вокзала, следящего за движением поезда по электронной схеме (*рис. 1.2*), важно знать расстояние до поезда в данный момент, чтобы сделать вывод, движется ли он согласно расписанию. Для них не имеют значения ни размеры поезда (много меньшие расстояния до него), ни форма поезда, определяемая контуром той части железнодорожного пути, на котором он находится.

Рис. 1.2

При изучении движения космического корабля к Луне или какой-либо планете, в наших расчетах можно пренебречь размерами корабля (как и в случае с поездом), так как они во много раз меньше расстояния между кораблем и космическим телом. Итак, в некоторых случаях движения размерами рассматриваемого тела или системы тел в сравнении с расстояниями до других тел или пройденным путем можно пренебречь. Таким образом, мы пришли к модели, часто используемой в механике – модели **материальной точки**.

Тело, пространственными размерами которого можно пренебречь в сравнении с пройденным путем или расстояниями до других тел, называется *материальной точкой.*

Из определения следует, что материальная точка необязательно должна быть маленьким телом. Главное, что в данных условиях его размерами можно пренебречь.

Рис. 1.3

Очевидно, в других условиях рассматриваемое тело уже не будет считаться материальной точкой. Когда поезд подходит к вокзалу (*рис. 1.3*), его размеры становятся важными для пассажира, который с нетерпением ждет объявления диктора относительно порядка нумерации вагонов: первые вагоны находятся слева или справа от выхода на перрон.

Следовательно, модель **материальной точки** можно использовать только в том случае, если выполняются соответствующие условия.

Рассмотрим вторую модель, используемую в механике. Известно, что форма и размеры тела в определенной мере зависят и от тел, с которыми данное тело взаимодействует. Так, длина пружины может быть больше или меньше, лезвие может быть более или менее изогнуто и т.д. Значит, окружающие тела могут изменять размеры и форму данного тела, то есть вызывать его деформацию. В природе не существуют недеформируемые тела, но в одинаковых условиях одни деформируются больше, а другие – меньше .

В ряде случаев изменениями размеров и формы тел можно пренебречь, тогда используется модель **абсолютно твердого тела**.

***Абсолютно твердым* или просто *твердым* называется тело, которое в данных условиях не изменяет своих размеров и формы, то есть не деформируется.**

Другими словами, *абсолютно твердым* (*твердым*) является тело, расстояние между двумя произвольными точками которого остается неизменным с течением времени.

Можно использовать и другие модели как для тел, так и для физических явлений. Их необходимость следует из того факта, что свойства тел и реальные природные физические явления очень сложны. Поэтому выделяют некоторые свойства (или факторы), не оказывающие существенного влияния на изучаемое явление, и пренебрегают ими. Этот прием известен под названием **абстрагирования**, а созданные системы называются **абстракциями**. Достоверность такой системы доказывается правильностью предсказаний, полученных на ее основе. Таким образом, достигается приближенное, но более простое описание изучаемой системы, что позволяет установить ряд количественных соотношений между величинами, характеризующими систему. Далее в результаты, полученные ранее, могут быть внесены поправки, обусловленные факторами, которыми вначале пренебрегли.

ВОПРОСЫ

1. Что называется материальной точкой? Приведите примеры.
2. Какие тела называют абсолютно твердыми?
3. Несколько автомобилей находятся перед шлагбаумом в ожидании переезда через железную дорогу. Можно ли считать материальной точкой поезд, идущий мимо автомобилей?
4. Проанализируйте следующие ситуации: пчела ползет по лепесткам цветка в поисках нектара; пчела летит к улью; пчела подлетает к летку (отверстию в стенке улья, через которое влетают и вылетают пчелы), чтобы попасть в улей. В каком из этих случаев пчелу можно считать материальной точкой и в каком нет? Аргументируйте ответ.

1.2 СИСТЕМА ОТСЧЕТА. ПРОСТРАНСТВО И ВРЕМЯ

a. Относительность движения. Система отсчета

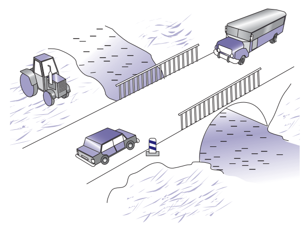


Рис. 1.4

В определении механического движения подчеркивается, что изменение положения тела происходит „относительно других тел”. Например, положение автомобиля может быть определено относительно придорожного километрового столба, моста, к которому приближается автомобиль, автобуса, идущего ему навстречу, или трактора, пересекающего дорогу, по которой едет автомобиль (*рис. 1.4*) и т.д. Пассажир автобуса находится в состоянии покоя относительно самого автобуса, но движется относительно других тел. Таким образом, движение автобуса или пассажира может быть описано одновременно относительно нескольких тел. Следовательно:

> **Движение любого тела, также как и его состояние покоя, как частный случай движения, являются *относительными*.**

Отсюда приходим к выводу, что прежде чем исследовать движение того или иного тела, нужно указать тело, относительно которого описывается движение. Это тело считают неподвижным и называют **телом отсчета**. Для определения положения материальной точки относительно какого-либо тела отсчета с ним нужно жестко связать систему координат; кроме того, необходим инструмент для измерения расстояний. Тело отсчета, начало системы координат и направление осей выбирают произвольно. Описание движения должно быть наиболее простым для наблюдателя, изучающего это движение.

Например, движение тела, находящегося на палубе морского корабля, можно рассматривать как относительно палубы, так и относительно Земли. При описании движения космического корабля к Луне (*рис. 1.5*) могут быть использованы различные тела отсчета: запуск корабля и движение его вблизи Земли удобнее рассматривать, считая Землю телом отсчета; движение корабля от Земли к Луне может быть описано как относительно Земли, так и относительно Луны или Солнца; приближение к Луне и прилунение корабля описать проще, если за тело отсчета принять Луну. В определении механического движения отмечается так-

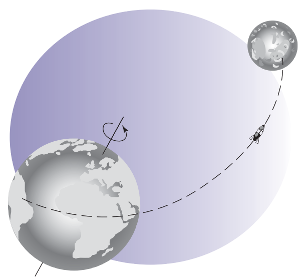


Рис. 1.5

же, что изменение положения тела происходит с течением времени. Поэтому, для описания движения, необходим инструмент для измерения времени – часы, неподвижные относительно тела отсчета. Вся совокупность перечисленных выше элементов, необходимых для описания механического движения тел, составляет **система отсчета**.

Тело отсчета, система координат (жестко связанная с ним), инструмент для измерения расстояний и часы (неподвижные относительно тела отсчета) образуют *систему отсчета* (система условно считается неподвижной) (*рис.1.6*).

б. Единицы длины и времени

Для определения координат материальной точки в определенный момент времени необходимо уметь измерять длины и промежутки времени. Устанавливается, сколько единиц длины или времени содержится в измеряемой величине (рассматриваемая величина равна соответствующему числу единиц измерения). **Измерение физической величины состоит в сравнении ее с эталоном – величиной той же природы – условно принятым за единицу**. В настоящее время используется система единиц, известная как *Международная система* (СИ), в которую входят **семь основных единиц**, выбранных определенным образом, для семи физических величин. Единицы остальных физических величин выражаются через основные и называются **производными единицами**. По мере изучения курса будут определяться и единицы физических величин. Из гимназического курса вам уже известны две основные единицы: длины и времени – **метр** (м) и **секунда** (с).

Рис. 1.6

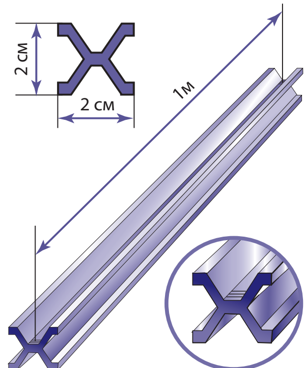


Рис. 1.7

В 1791 году метр был определен как 1/40 000 000 часть длины земного меридиана, на котором расположен Париж. Затем были выполнены соответствующие измерения и на их основе был изготовлен эталон метра из сплава платины (90%) и иридия (10%), который был утвержден 10 декабря 1799 года. Эталон представляет собой брусок специальной формы, имеющий на концах три тонких линии. Длина 1 м равна расстоянию между средними линиями (*рис. 1.7*). Эталон до сих пор хранится в Международном бюро мер и весов в Севре, близ Парижа. Более точные измерения показали, что длина выбранного меридиана больше величины, полученной ранее, но эталон метра не был изменен. Просто он больше не соответствует первоначальному определению.

Для измерения времени еще в древности использовалась периодичность смены дня и ночи, обусловленная вращением Земли вокруг собственной оси. Продолжительность этого промежутка, названного сутками, оказалась слишком большой, поэтому его разделили на части: сутки содержат 24 **часа** (это деление было предложено еще в Вавилоне), 1 **час** содержит 60 **минут**, 1 минута содержит 60 **секунд**. В СИ 1 **секунда** принята в качестве основной единицы времени. Итак, имеем:

$$1\text{с} = \frac{1}{24 \cdot 60 \cdot 60} = \frac{1}{86\,400} \text{ часть суток.}$$

Секунда, определенная таким способом, называется **астрономической секундой**.

Отметим, что исходя из таких определений метра и секунды, были созданы инструменты, позволяющие измерять длины и промежутки времени с довольно большой точностью, достаточной для повседневной деятельности человека. Для специальных исследований нужны эталоны, определенные гораздо точнее, чем описанные выше, и которые можно изготовить, если существующие эталоны пропадут в результате непредвиденных обстоятельств. Было установлено, что из-за воздействия Луны и Солнца на Землю ее вращение вокруг собственной оси тормозится, а это ведет к увеличению продолжительности суток на 0,001 с за столетие. На продолжительность суток влияют также и вековые изменения размеров и формы Земли, землетрясения и т.д. Установлено, что вследствие некоторых очень сильных землетрясений продолжительность суток скачком изменяется на величину до 0,004 с. Возникла необходимость использования физической системы с гораздо более стабильной периодичностью. Оказалось, что этому требованию отвечает излучение атомов, положенное в основу определения некоторых новых эталонов.

В 1972 году было принято новое определение секунды.

Секунда равна 9 192 631 770 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя уровнями сверхтонкой структуры атома цезия – 133.

Излучение атомов криптона было положено в 1960 году в основу определения нового эталона метра. Однако в 1983 году он был заменен другим эталоном, применяемым до настоящего времени.

Метр равен расстоянию, которое проходит в вакууме свет за промежуток времени, равный 1/299 792 458 доле секунды.

Отметим, что эти эталоны используются только в специальных исследованиях, в которых необходимы высокоточные измерения.

в. Пространство и время в классической механике

Движение тел происходит в пространстве и с течением времени. Пространство определяет порядок расположения (расстановки) тел, а время – порядок следования явлений. Эти понятия являются фундаментальными в физике. В классической, или ньютоновской, механике, основные принципы которой были сформулированы Ньютоном, **пространство и время считаются абсолютными, не зависящими как друг от друга, так и от других тел, которые находятся и движутся в пространстве**. Из этого следуют важные выводы: расстояние между двумя точками (длина отрезка) одинаково для наблюдателей, находящихся в различных системах отсчета; это относится также к продолжительности промежутка времени между двумя событиями – при ее определении наблюдатели из разных систем отсчета получают одно и то же значение. В начале XX века было установлено, что эти концепции пространства и времени ограничены и должны быть существенно изменены.

ВОПРОСЫ

1. Что собой преставляет относительность движения? Проиллюстрируйте примерами, отличающимися от приведенных в тексте.
2. Что называется телом отсчета?
3. Что представляет собой система отсчета?

4. В чем отличие основных и производных единиц измерения?
5. Как вы понимаете абсолютный характер пространства и времени?
6. Какое тело отсчета является предпочтительным при изучении движения планет? А их спутников?
7. Рыбак пересекает реку на лодке с веслами. Какие тела могут быть приняты за тела отсчета при описании движения весла?
8. Можно ли принять за тело отсчета тело, движение которого изучается?

1.3 ТРАЕКТОРИЯ. ПЕРЕМЕЩЕНИЕ И ПРОЙДЕННЫЙ ПУТЬ

a. Описание движения материальной точки

Движение материальной точки считается известным (описанным), если может быть указано ее положение в любой момент времени.

Существуют различные способы описания движения.

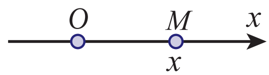


Рис. 1.8

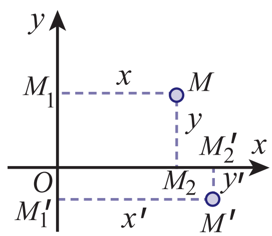


Рис. 1.9

Координатный способ. Рассмотрим материальную точку, которая *движется вдоль прямой линии*, – автомобиль или поезд на прямолинейном участке пути. В данном случае систему координат рационально выбрать таким образом, чтобы одна из ее осей, например ось Ox, была направлена вдоль этой прямой (*рис. 1.8*). Положение точки M на оси определяется значением координаты x, равным расстоянию от точки M до начала координат O, взятым со знаком плюс, если для попадания из O в M необходимо перемещаться в положительном направлении оси x, и со знаком минус – в противном случае. При движении материальной точки M ее координата изменяется с течением времени, то есть является функцией времени:

$$\boldsymbol{x = x\,(t).} \qquad (1.1)$$

Данное уравнение описывает движение материальной точки вдоль прямой линии и называется **кинематическим уравнением движения**.

Допустим, что материальная точка движется по *плоской поверхности* – лодка по стоячей воде озера или шар по бильярдному столу. Удобно выбрать систему координат с двумя взаимно перпендикулярными осями, лежащими в этой плоскости (*рис. 1.9*). Положение материальной точки M в плоскости определяется двумя координатами x и y, равными расстояниям от нее до осей координат и взятыми со знаками плюс или минус согласно установленному в предыдущем случае условию. Например, координаты точки M:

$$x = OM_2 = MM_1 \text{ и } y = OM_1 = MM_2;$$

координаты точки M':

$$x' = OM_2' = M'M_1' \text{ и } y' = -\,OM_1' = -\,M'M_2'.$$

При движении материальной точки ее координаты изменяются, то есть:

$$\boldsymbol{x = x\,(t), \;\; y = y\,(t).} \qquad (1.2)$$

Итак, движение материальной точки по плоской поверхности описывается двумя кинематическими уравнениями движения. В случае движения материальной точки M в пространстве проводят три взаимно перпендикулярные оси координат (*рис. 1.10*). Положение материальной точки M определяется тремя координатами x, y, z, равными расстояниям от точки до плоскостей, перпендикулярных соответствующим осям. Расстояния берутся со знаками плюс или минус согласно правилу, установленному выше. Например, точка M имеет координаты: $x = M_1M_2$, $y = OM_2$, $z = MM_1$, а точка M': $x' = -M_1'M_2'$, $y' = -OM_2'$, $z' = M'M_1'$.

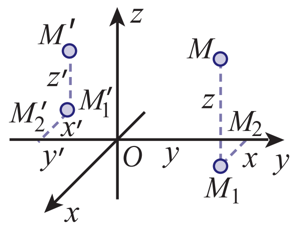


Рис. 1.10

При движении материальной точки три координаты, определяющие ее положение, изменяются с течением времени, следовательно:

$$\boldsymbol{x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t).} \qquad (1.3)$$

Полученные три кинематические уравнения движения полностью описывают движение материальной точки в пространстве.

В дальнейшем будем изучать движение тела вдоль прямой линии и в плоскости.

Векторный способ. Положение материальной точки относительно системы координат, жестко связанной с телом отсчета, может быть определено также с помощью вектора, называемого **радиус-вектором**. Напомним, что вектор представляет собой направленный отрезок прямой. Он характеризуется модулем (численным значением), точкой приложения (началом) и направлением. Начало радиус-вектора $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ всегда совпадает с началом координат O, а конец – с материальной точкой M (*рис. 1.11*). Модуль радиус-вектора равен расстоянию от начала координат до точки M.

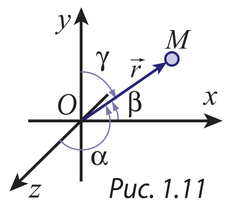


Рис. 1.11

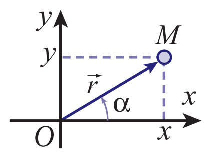


Рис. 1.12

Знание радиус-вектора $\vec{r}$ предполагает знание его модуля и углов, которые он образует с координатными осями, или знание координат его конца M.

Для описания движения тела в плоскости изобразим радиус-вектор движущейся в этой плоскости материальной точки (*рис. 1.12*). Обозначим через α угол между осью Ox и радиус-вектором. Знание модуля радиус-вектора и угла α позволяет вычислить координаты материальной точки и наоборот. Из рисунка получаем $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$ и обратные соотношения: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{x}$.

Отметим, что полученные соотношения справедливы для любых значений угла α.

Во время движения точки M ее радиус-вектор изменяется по модулю и направлению, начало же остается фиксированным (в O); радиус-вектор $\vec{r}$ всегда направлен от O к M.

$$\boldsymbol{\vec{r} = \vec{r}(t).} \qquad (1.4)$$

Данное уравнение полностью описывает движение материальной точки.

б. Траектория

Материальная точка во время движения переходит из одного положения в другое.

Совокупность положений, занимаемых последовательно точкой, образует линию, называемую *траекторией*.

Траектория позволяет увидеть одновременно всю картину движения в целом, все точки, через которые прошла или пройдет во время движения материальная точка. Отметим, что в основном траектория – это воображаемая линия – и только иногда она материализуется телами, например, линия железной дороги определяет траекторию поезда; проволока, проходящая сквозь шарик, определяет траекторию шарика во время его скольжения по проволоке и т.д.

Форма траекторий положена в основу первой классификации механических движений материальной точки: **прямолинейные** движения (траектории представляют собой прямые линии) и **криволинейные** движения (траектории – кривые линии в плоскости или пространстве).

в. Перемещение и пройденный путь

Рассмотрим траекторию некоторой материальной точки (*рис. 1.13*) и два положения, занимаемые ею на траектории: положение M в момент времени t и положение M' в последующий момент времени $t' = t + \Delta t$.

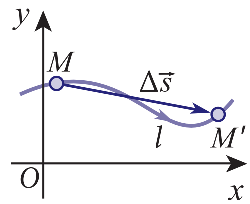


Рис. 1.13

Вектором перемещения **или просто** ***перемещением материальной точки за промежуток времени*** $\boldsymbol{\Delta t = t' - t}$ **называется вектор** $\Delta\vec{s} = \overrightarrow{MM'}$**, соединяющий ее начальное положение** M **и конечное** M'**.**

Очевидно, модуль перемещения (длина вектора перемещения) является минимальным расстоянием между этими положениями и не зависит от формы траектории между ними.

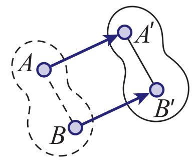


Рис. 1.14

Путем, пройденным материальной точкой за промежуток времени $\boldsymbol{\Delta t}$**, называется длина траектории** l **между положениями** M **и** M'**.**

Перемещение материальной точки является векторной величиной и его нельзя сравнивать с пройденным путем, являющимся скалярной величиной. Путь можно сравнивать только с модулем перемещения, который не может быть больше пройденного пути: $|\Delta\vec{s}| \le l$.

г°. Поступательное движение твердого тела

Поступательным движением твердого тела **называется движение, при котором** ***отрезок прямой*****, соединяющий две произвольные точки тела, остается** ***параллельным*** **самому себе (*рис. 1.14*).**


Рис. 1.15


Рис. 1.16

Вокруг нас мы часто видим тела, совершающие поступательное движение: чемодан на колесиках, съезжающий по наклонной плоскости (*рис. 1.15*); кабину подвесной канатной дороги, поднимающейся вверх или спускающейся вниз, пол которой все время остается горизонтальным (*рис. 1.16*), сидения во вращающемся колесе обозрения, спинки которых все время вертикальны (*рис. 1.17*) и т.д.

Рис. 1.17

Рассмотрим поступательное движение тела на *рисунке 1.14*. Отрезок AB, соединяющий произвольные точки A и B, занимает положение $A'B'$. В соответствии с определением абсолютно твёрдого тела отрезки AB и $A'B'$ имеют одинаковые длины, а в соответствии с определением поступательного движения такого тела эти отрезки параллельны друг другу. Следовательно, четырехугольник $ABB'A'$ – параллелограмм. А это значит, что за промежуток времени, в течение которого происходит движение, перемещения точек A и B одинаковы: $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$. Поскольку точки выбраны произвольно, то получается, что перемещения всех точек твердого тела при поступательном движении равны между собой, то есть все точки имеют идентичные траектории. Этот факт позволяет считать материальной точкой абсолютно твердое тело, движущееся поступательно, даже если размерами тела нельзя пренебречь.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Какие способы описания движения материальной точки вам известны?
2. Дайте определение радиус-вектора.
3. Что называется траекторией материальной точки?
4. Как определяется вектор перемещения? Пройденный путь?
5. Какое движение абсолютно твердого тела называется поступательным? Как движутся точки тела?
6. Может ли модуль перемещения тела быть равным пройденному пути? А больше? Меньше? Аргументируйте ответ.
7. Перемещение материальной точки за некоторый промежуток времени равно нулю. Можно ли утверждать, что в этот промежуток времени тело покоилось? Обоснуйте ответ.
8. Что показывает счетчик автомобиля: модуль перемещения или пройденный путь?
9. В некоторый момент времени координаты материальной точки равны: $x = 8$ м, $y = 6$ м. Постройте в тетради оси координат, укажите положение точки и ее радиус-вектор. Вычислите модуль радиус-вектора и величину угла между радиус-вектором и осью *Ox* и сравните с измерениями, сделанными по *рисунку 1.12* на стр. 14.
10. Тело брошено вертикально вверх с высоты $h = 3$ м над поверхностью Земли; оно поднимается на $H = 7$ м выше места бросания, затем падает на Землю. Найдите модуль перемещения и путь, пройденный телом в этом движении.
11. Группа туристов проходит путь $l_1 = 1{,}6$ км в направлении на север, затем еще $l_2 = 1{,}2$ км в направлении на запад. Определите модуль перемещения группы туристов и найдите, на сколько он меньше пройденного пути.
12. Шарик движется по желобу в форме полукольца радиусом $R = 0{,}5$ м от одного конца до другого. Определите модуль перемещения шарика и пройденный путь.
13. Спортсмен пробегает дистанцию $L = 200$ м. Беговая дорожка представляет собой полуокружность, за которой следует прямолинейный участок длиной $l = 100$ м. Чему равен модуль перемещения спортсмена?

1.4 ДЕЙСТВИЯ НАД ВЕКТОРАМИ

а. Сложение векторов

В физике, в том числе в механике, широко используются векторные величины. Две из них: радиус-вектор и перемещение вы уже знаете.

Из курса математики VIII класса вам известны некоторые элементы векторной алгебры. По ходу изучения физики мы ознакомимся с векторами подробнее.

Правило сложения векторов может быть установлено сравнительно просто из анализа одного из примеров движения. Представьте себе перекресток двух улиц и пешехода, который находится в точке A и должен попасть в точку B (*рис. 1.18*). Переход из A в B по прямой линии запрещен правилами движения. Поэтому пешеход сначала пересекает одну из улиц и попадает в точку C, затем пересекает другую улицу и достигает точки B. Пешеход осуществил свое намерение.

Согласно определению, вектор $\vec{s} = \overrightarrow{AB}$ представляет собой перемещение пешехода за весь промежуток времени. Это перемещение складывается из двух перемещений, $\vec{s}_1 = \overrightarrow{AC}$ и $\vec{s}_2 = \overrightarrow{CB}$, совершенных последовательно. Значит, можно записать:

$$\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2. \qquad (1.5)$$

Правило сложения векторов иллюстрирует следующий пример. Рассмотрим два вектора: $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (*рис. 1.19, а*) и обозначим их сумму вектором $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. На *рисунке 1.19, б* представлен вектор $\vec{a}$, затем произведен параллельный перенос вектора $\vec{b}$ таким образом, чтобы его начало совпало с концом вектора $\vec{a}$. Начало вектора суммы $\vec{c}$, называемого **результирующим**, совпадает с началом первого вектора $\vec{a}$, а конец – с концом второго вектора $\vec{b}$. Тот же результат будет получен, если отмеченную выше операцию выполним в обратном порядке, то есть вначале представим вектор $\vec{b}$, а затем вектор $\vec{a}$ (*рис. 1.19, в*). Данное правило сложения векторов известно как **правило треугольника**.

Результат сложения векторов будет таким же, если выполнить другое построение: изобразим складываемые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ так, чтобы их начала совпадали, построим на них параллелограмм, затем из общего начала векторов проведем диагональ. Вектор суммы $\vec{c}$ исходит из этого начала и заканчивается в противоположной вершине параллелограмма (*рис. 1.19, г*). Это – **правило параллелограмма**.

Мы получили два эквивалентных правила сложения векторов. При использовании правила треугольника строят только две стороны параллелограмма и его диагональ.

При сложении большего числа векторов одно из изложенных выше правил применяется соответствующее число раз, причем результат не зависит от порядка сложения векторов

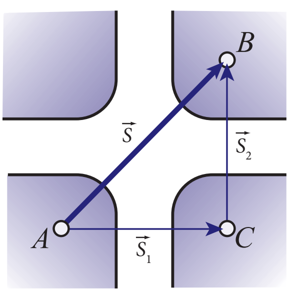


Рис. 1.18

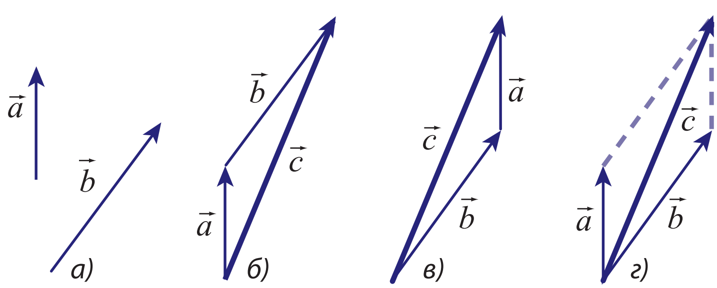


Рис. 1.19

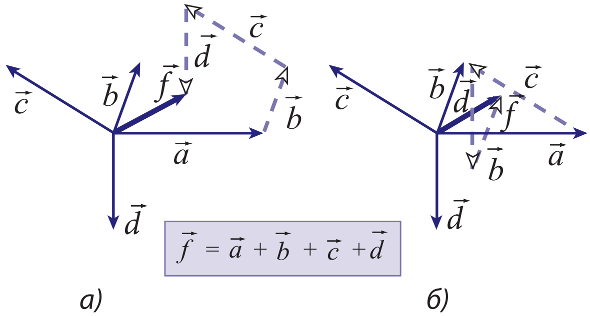


Рис. 1.20

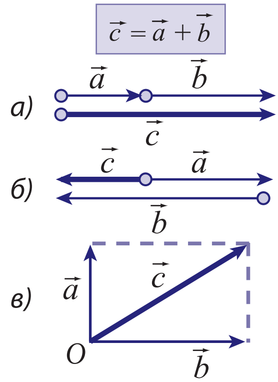


Рис. 1.21

(*рис. 1.20*). Модуль вектора суммы может быть определен как графически, с выполнением соответствующих построений в выбранном масштабе, так и аналитически. Например, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ лежат на одной прямой и имеют одинаковое направление (*рис. 1.21, а*), тогда модуль суммы равен сумме модулей; если же векторы направлены противоположно (*рис. 1.21, б*), то вектор суммы направлен так же, как вектор, чей модуль больше, а модуль суммы равен разности модулей складываемых векторов. Если же векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют между собой прямой угол (*рис. 1.21, в*), то модуль вектора суммы определяется по теореме Пифагора: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. В общем случае используется соответствующий математический аппарат, например **теорема косинусов**.

б. Вычитание векторов

Рассмотрим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Их разность $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ может быть определена несколькими способами.

Заметим, что $\vec{a} = \vec{b} + \vec{d}$, то есть вектор $\vec{a}$ является суммой векторов $\vec{b}$ и $\vec{d}$. Построим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, совместив их начала. Очевидно, вектор $\vec{d}$ – это отрезок, направленный от конца вектора $\vec{b}$ к концу вектора $\vec{a}$ (*рис. 1.22, а*).

Преобразуем выражение $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$. Таким образом, вектор разности $\vec{d}$ получается сложением векторов $\vec{a}$ и $(-\vec{b})$, причем векторы $\vec{b}$ и $(-\vec{b})$ имеют одинаковый модуль и направлены вдоль одной прямой, но в противоположные стороны (*рис. 1.22, б*).

Из *рисунка 1.22* видно, что обоими способами получается одинаковый результат.

Знание операции вычитания векторов позволяет выразить вектор перемещения материальной точки $\Delta\vec{s}$ через радиус-векторы $\vec{r}$ и $\vec{r}\,'$, определяющие положения материальной точки в начале и конце промежутка времени. Из *рисунка 1.23* видно, что $\Delta\vec{s} = \vec{r}\,' - \vec{r} = \Delta\vec{r}$, где через $\Delta\vec{r} = \vec{r}\,' - \vec{r}$ обозначено приращение (изменение) радиус-вектора материальной точки.

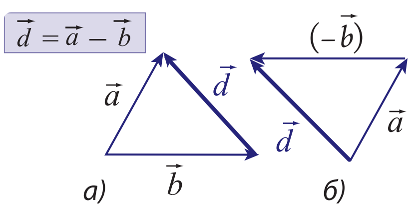


Рис. 1.22

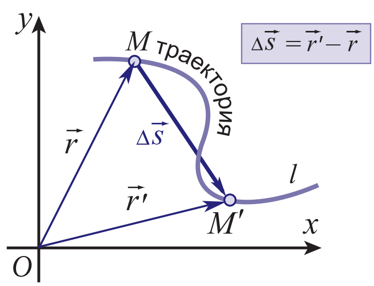


Рис. 1.23

Вектор перемещения материальной точки за некоторый промежуток времени равен приращению радиус-вектора материальной точки за это время.

в. Составляющие и проекции вектора

Из изложенного выше ясно, что определение модуля вектора суммы или разности двух векторов относительно просто, если эти векторы коллинеарны или взаимно перпендикулярны. Однако, если угол между векторами произвольный или оперируют с бóльшим числом векторов, процедура сложения (вычитания) значительно усложняется. Для ее упрощения вводят понятия составляющих и проекций векторов.

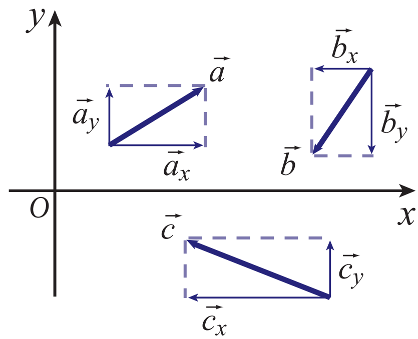


Рис. 1.24

Любой вектор, расположенный в плоскости координат xOy, может быть представлен в виде суммы двух векторов, параллельных осям координат (*рис.1.24*). Эти векторы, параллельные осям координат, сумма которых равна данному вектору, называются **составляющими вектора**. Таким образом, составляющие некоторого вектора – **векторные величины**. Составляющая обозначается так же, как соответствующий вектор, но с индексом, показывающим, какой оси она параллельна. Так, $\vec{c}_x$ – это составляющая вектора $\vec{c}$, параллельная оси Ox, а $\vec{c}_y$ – составляющая того же вектора, параллельная оси Oy. Согласно определению, $\vec{c}_x + \vec{c}_y = \vec{c}$.

Используя составляющие векторов, заданную систему векторов, ориентированных в плоскости произвольно, заменяют системой векторов, численностью вдвое большей, из которой одна половина параллельна оси Ox, а другая – параллельна оси Oy. После сложения векторов из каждой половины получаем два взаимно перпендикулярных вектора. Таким образом, процедура сложения векторов существенно упростилась.

Для проведения вычислений аналитическим способом введем еще одно понятие – **проекции вектора на ось**, в частности, на ось координат. **Проекцией вектора на ось называется алгебраическая скалярная величина**, равная модулю составляющей вектора, параллельной данной оси, взятому со знаком плюс, если составляющая и ось направлены одинаково, и со знаком минус, если направления составляющей вектора и оси противоположны.

Проекция вектора $\vec{a}$ на ось Ox обозначается a_x, проекция вектора $\vec{b}$ на ось Oy обозначается b_y и т.д. Как видно из *рисунка 1.24*, проекциями векторов являются:

$$a_x = |\vec{a}_x|,\quad a_y = |\vec{a}_y|,\quad b_x = -|\vec{b}_x|,\quad b_y = -|\vec{b}_y|,\quad c_x = -|\vec{c}_x|,\quad c_y = |\vec{c}_y|.$$

Существует и другое, эквивалентное этому, определение проекции вектора на ось. Рассмотрим вектор $\vec{a}$ на *рисунке 1.25*. Опустим перпендикуляры из его начала и конца на координатные оси. Таким образом получаются проекции соответствующих точек на оси. Проекция вектора на ось равна разности координат проекции конца и начала, то есть $a_x = x_2 - x_1$ и $a_y = y_2 - y_1$. Замечаем, что $a_x > 0$ и $a_y < 0$, что следует и из предыдущего определения.

Проекции вектора могут быть вычислены как длины катетов прямоугольных треугольников. Зная угол α (*рис.1.25*), находим проекции: $a_x = a \sin\alpha$, $a_y = -a\cos\alpha$. Из этого же рисунка получаем связь между модулем вектора и его проекциями на оси координат:

$$\boldsymbol{a} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}. \qquad (1.6)$$

Покажем применение понятия проекции вектора для вычисления суммы трех векторов $\vec{s}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ (*рис. 1.26*). Из рисунка видно, что проекция вектора суммы на ось Ox равна: $s_x = x_4 - x_1 = (x_4 - x_3) + (x_3 - x_2) + (x_2 - x_1) = c_x + b_x + a_x$.

Подобным образом получаем: $s_y = a_y + b_y + c_y$.

Проекция вектора суммы некоторой системы векторов равна сумме проекций этих векторов на соответствующую ось.

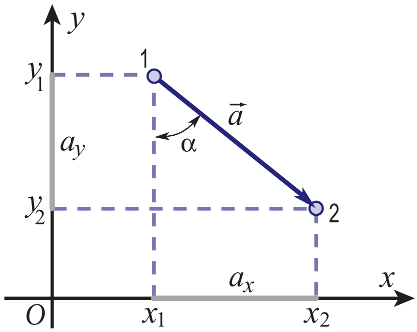


Рис. 1.25

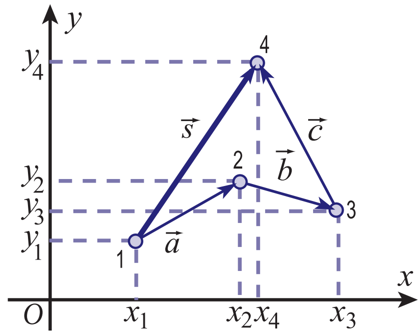


Рис. 1.26

С учетом соотношения (1.6) модуль вектора суммы равен:

$$\boldsymbol{s} = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} = \sqrt{(a_x + b_x + c_x)^2 + (a_y + b_y + c_y)^2}. \qquad (1.7)$$

Для разности векторов соответствующие проекции берутся со знаком минус.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Как складываются два вектора по правилу треугольника? А по правилу параллелограмма?
2. Что такое составляющие вектора?
3. Как определяется проекция вектора на ось?
4. Чему равна проекция вектора на ось, если вектор перпендикулярен оси?
5. Когда сумма двух векторов равна нулю?
6. В каком случае модуль суммы двух векторов равен разности модулей складываемых векторов?
7. Модуль вектора суммы двух векторов с одинаковыми модулями равен модулю одного из них. Чему равен угол между складываемыми векторами?
8. Три вектора с равными модулями, расположенные в одной плоскости, образуют между собой углы в 120^o. Чему равен модуль суммы этих векторов?
9. Проекции вектора $\vec{a}$ на оси координат равны: $a_x = 2\sqrt{3}$ единиц, $a_y = 2$ единицы. Найдите модуль этого вектора и углы, образованные им с осями координат.
10. Проекции вектора $\vec{a}$ на оси координат равны: $a_x = 6$ единиц и $a_y = -4$ единицы, а вектора $\vec{b}$ – равны: $b_x = -2$ единицы и $b_y = 2$ единицы. Найдите модуль вектора суммы $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ и модуль вектора разности $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$.
11. Материальная точка переместилась из положения M_1 с координатами $x_1 = 6$ м, $y_1 = -2$ м в положение M_2 с координатами $x_2 = 2$ м, $y_2 = 1$ м. Выберите систему координат с удобным масштабом, укажите положения M_1 и M_2, постройте соответствующие радиус-векторы, а также вектор перемещения $\Delta\vec{s} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Определите на базе построенного графика модуль вектора перемещения. Проверьте результат соответствующими вычислениями.

1.5 РАВНОМЕРНОЕ ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ. СКОРОСТЬ

Движение материальной точки называется *равномерным прямолинейным*, если точка совершает равные перемещения за любые одинаковые промежутки времени.

Пусть $\Delta\vec{s}_1$, $\Delta\vec{s}_2$, $\Delta\vec{s}_3$, … – перемещения, совершаемые материальной точкой за промежутки времени Δt_1, Δt_2, Δt_3, … соответственно. Согласно определению, данному выше, $\Delta\vec{s}_1 = \Delta\vec{s}_2 = \Delta\vec{s}_3 = \ldots$ для любых промежутков $\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t_3 \ldots$. Если один из этих промежутков разделен на две равные части, тогда и перемещение, соответствующее одной половине промежутка, равно половине перемещения, совершенного за целый промежуток времени. Это утверждение остается справедливым и для случая разбиения промежутка времени на большее число равных частей.

Равенство векторов перемещения материальной точки возможно только, если они направлены вдоль одной прямой. Итак, приходим к выводу, что в условиях, предусмотренных в определении, данном выше, траектория материальной точки представляет собой прямую линию, то есть движение является прямолинейным. Из равенства перемещений и промежутков времени соответственно следует равенство отношений:

$$\frac{\Delta\vec{s}_1}{\Delta t_1} = \frac{\Delta\vec{s}_2}{\Delta t_2} = \ldots = \frac{\Delta\vec{s}_1 + \Delta\vec{s}_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \ldots = \text{const}.$$

Таким образом, в равномерном прямолинейном движении отношение перемещения материальной точки к соответствующему промежутку времени является постоянной величиной, не зависящей от выбранного промежутка времени.

Отношение перемещения материальной точки к соответствующему промежутку времени называется *скоростью равномерного прямолинейного движения материальной точки*:

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t} = \text{const}. \tag{1.8}$$

Промежуток времени $\Delta t > 0$, следовательно, скорость имеет такое же направление, что и вектор перемещения, то есть можно сформулировать другое определение этого же движения.

Равномерное прямолинейное движение материальной точки – это движение с постоянной скоростью $\vec{v}$.

Условимся обозначать единицы физических величин соответствующими символами, взятыми в квадратные скобки. Например, единица перемещения $[\Delta\vec{s}]$ = м, а единица промежутка времени $[\Delta t]$ = с. Для скорости в СИ получим:

$$[\vec{v}] = \frac{[\Delta\vec{s}]}{[\Delta t]} = \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Единица скорости является **производной единицей**, так как выражается через основные единицы.

Для более простого описания прямолинейного движения материальной точки удобно направить ось координат, например Ox, вдоль траектории (*рис.1.27*). Отметим на оси начальное положение материальной точки M_0 (в момент $t_0 = 0$) и конечное положение M (в момент t). Перемещение материальной точки за промежуток $\Delta t = t - 0 = t$ равно вектору $\overrightarrow{M_0M} = \vec{s}$, а скорость $\vec{v} = \frac{\vec{s}}{t}$. Отсюда, выразив перемещение за промежуток $\Delta t = t$, получим **закон равномерного прямолинейного движения**:

$$\vec{s} = \vec{v}\,t, \qquad (1.9)$$

Перемещение движущейся прямолинейно и равномерно материальной точки прямо пропорционально времени движения.

В проекции на ось Ox получаем:

$$s_x = v_x t. \qquad (1.10)$$

Из *рисунка 1.27* видно, что проекция перемещения $s_x = x - x_0$, следовательно, $x - x_0 = v_x t$. Отсюда, координата материальной точки x, движущейся равномерно и прямолинейно, равна:

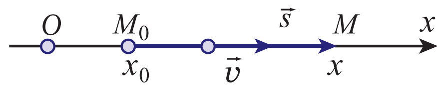


Рис. 1.27

$$x = x_0 + v_x t \qquad (1.11)$$

и представляет собой **кинематическое уравнение равномерного прямолинейного движения.**

Из (1.11) видно, что для $v_x > 0$, когда направление скорости $\vec{v}$ совпадает с положительным направлением оси Ox, координата x увеличивается со временем, а для $v_x < 0$ она уменьшается. Уравнение движения (1.11) позволяет определять координату материальной точки в любой момент времени, то есть описывает данное движение. Построим графики проекций скорости и координаты материальной точки в равномерном прямолинейном движении.

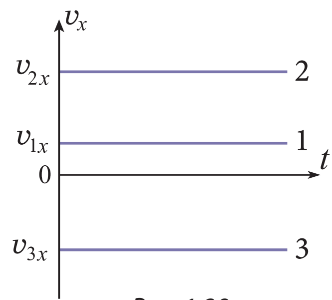


Рис. 1.28

Проекция скорости остается постоянной с течением времени, ее график представляет собой прямую, параллельную оси времени (*рис. 1.28*). Прямая 2 соответствует движению со скоростью v_{2x}, большей, чем скорость v_{1x}, а прямая 3 – движению в отрицательном направлении оси Ox (проекция $v_{3x} < 0$).

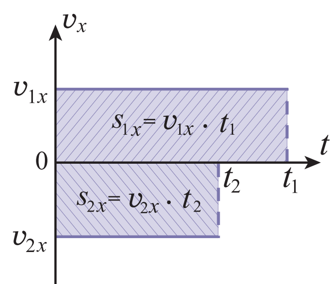


Рис. 1.29

Знание графика проекции скорости материальной точки позволяет вычислять проекцию ее перемещения. Как видно из графика, представленного на *рисунке 1.29*, и в согласии с формулой (1.10) проекция перемещения $s_{1x} = v_{1x} \cdot t_1$ численно равна площади заштрихованного прямоугольника, ограниченного графиком и осью времени. Если проекция скорости $v_{2x} < 0$, тогда и проекция перемещения соответственно отрицательна.

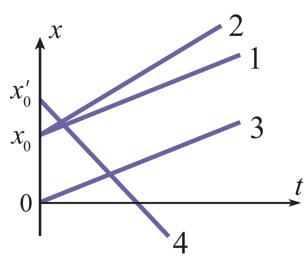


Рис. 1.30

Известно, что стороны фигур выражаются в метрах (м), а их площади – в квадратных метрах (м^2). Прямоугольник под графиком проекции скорости имеет одну сторону (по оси абсцисс), выражающуюся в с, вторую сторону – в м/с, а „площадь" выражается в метрах. Аналогия с геометрией не является полной, поэтому следует подчеркнуть, что равен-

ГЛАВА I

ство проекции перемещения площади под графиком только численное, единица перемещения отлична от единицы площади ($м^2$).

Согласно уравнению движения (1.11) в начальный момент ($t_0 = 0$) координата материальной точки равна x_0, затем она возрастает линейно, если $v_x > 0$ (график 1 на *рис. 1.30*). График 2 соответствует движению с большей скоростью, обе материальные точки начинают движение из одного положения. График 3, параллельный графику 1, описывает движение из начала координат со скоростью $v_{3x} = v_{1x}$. График 4 соответствует движению, которое начинается в точке с координатой x'_0, при этом проекция скорости $v_{4x} < 0$, то есть материальная точка движется в отрицательном направлении оси Ox.

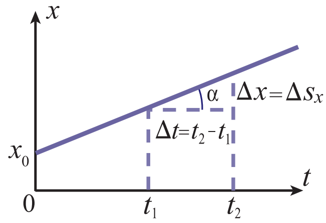


Рис. 1.31

При равномерном прямолинейном движении материальной точки пройденный путь равен модулю перемещения, так как направление движения все время остается неизменным. Итак, $l = |s_x| = |v_x|t$.

Если знание графика проекции скорости позволяет определять проекцию перемещения, а значит, и координаты, то график координаты позволяет вычислять проекцию скорости. Для этого из графика определяем приращение координаты (оно равно проекции перемещения) за некоторый промежуток времени Δt (*рис. 1.31*), затем вычисляем:

$$\boldsymbol{v_x = \frac{\Delta s_x}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}}. \tag{1.12}$$

Из этого же рисунка видим, что данное выражение представляет собой отношение катета, противолежащего углу α, к катету прилежащему, то есть отношение, подобное тому, которое определяет тангенс угла. Отметим, однако, что тангенс угла – величина безразмерная, в то время как отношение катетов треугольника на *рисунке 1.31* имеет размерность, оно измеряется в единицах скорости (м/с). Поэтому следует быть внимательным при использовании в подобных случаях понятия тангенса, подчеркивая, что равенство рассматриваемых величин только численное.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

На *рисунке 1.32* представлены графики движения двух тел. Используя графики:

а) определить промежутки времени и пройденные телами пути до встречи;

б) определить скорости тел;

в) записать уравнения движения тел;

г) определить расстояние между телами через $\Delta t = 4$ с после встречи.

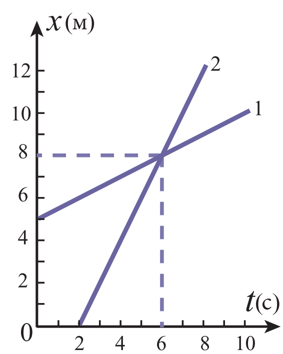


Рис. 1.32

РЕШЕНИЕ

а) Встрече тел соответствует точка пересечения графиков, то есть это происходит в момент времени $t_{вс.} = 6$ с в точке с координатой $x_{вс.} = 8$ м. Тело 1 начинает движение из точки с координатой $x_{01} = 5$ м в момент времени $t_{01} = 0$, следовательно, до встречи оно проходит путь

$l_1 = x_{вс.} - x_{01} = 3$ м за время $\Delta t_1 = t_{вс.} - t_{01} = 6$ с. Тело 2 начинает двигаться в момент $t_{02} = 2$ с, имея координату $x_{02} = 0$. До встречи оно проходит путь $l_2 = x_{вс.} - x_{02} = 8$ м за время $\Delta t_2 = t_{вс.} - t_{02} = 4$ с.

б) Направление скоростей обоих тел совпадает с положительным направлением оси Ox, их величины равны:

$$\upsilon_1 = \frac{l_1}{\Delta t_1} = 0{,}5 \text{ м/с и } \upsilon_2 = \frac{l_2}{\Delta t_2} = 2 \text{ м/с.}$$

в) Уравнение движения первого тела получается из общего выражения $x = x_0 + \upsilon_x t$, в которое подставляем значения, полученные выше: $x_1 = x_{01} + \upsilon_1 t = 5 + 0{,}5t$. Второе тело начинает движение на 2 с позже первого, причем $x_{02} = 0$; уравнение его движения таково: $x_2 = \upsilon_2 (t - t_{02}) = 2(t - 2)$. В это выражение можно подставлять только значения $t \geq 2$ с.

г) Расстояние между телами $d = |x_1 - x_2| = |5 + 0{,}5\,t - 2\,(t - 2)| = |9 - 1{,}5\,t|$. Промежуток времени $\Delta t = 4$ с после встречи тел соответствует моменту времени $t_1 = t_{вс.} + \Delta t = 10$ с. Расстояние d в этот момент равно 6 м.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Какое движение тела (материальной точки) называется равномерным прямолинейным?
2. Что называется скоростью тела в равномерном прямолинейном движении?
3. Какое определение дается равномерному прямолинейному движению с использованием понятия скорости?
4. Как может быть найдена проекция перемещения материальной точки, движущейся равномерно прямолинейно, если известен график скорости?
5. Что показывает спидометр автомобиля: проекцию скорости или ее модуль?
6. Автомобиль, который движется равномерно прямолинейно со скоростью $\upsilon_1 = 54$ км/ч, прошел за $t_1 = 10$ с такой же путь, что и мотоциклист за $t_2 = 12$ с. Чему равна скорость мотоциклиста, если считать его движение также равномерным прямолинейным?
7. Поезд длиной $l = 160$ м пересекает реку по мосту длиной $L = 290$ м. Сколько времени идет поезд по мосту, имея постоянную скорость $\upsilon = 18$ км/ч?
8. Материальная точка движется равномерно прямолинейно. В момент времени $t_1 = 2$ с ее координата $x_1 = 5$ м, а в момент $t_2 = 4$ с координата становится равной $x_2 = 2$ м. Напишите уравнение движения материальной точки.
9. Два тела движутся вдоль оси Ox согласно уравнениям $x_1 = -3 + 2t$ и $x_2 = 17 - 3t$, в которых время t выражено в с, а координата x – в м. Постройте графики зависимости от времени координат и проекций скорости тел; найдите момент встречи тел и пути, пройденные ими до встречи.

1.6° КИНЕМАТИКА ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Выше (п. 1.2, *а*) было отмечено, что движение является относительным, то есть может быть описано одновременно относительно нескольких систем отсчета. Установим, как связаны характеристики движения одного и того же тела, полученные в разных системах отсчета.

Проанализируем конкретные примеры. Ученик едет в автобусе. Предположим, он сел на одно из свободных сидений (*рис. 1.33, а*). Относительно автобуса ученик находится в состоянии покоя, однако относительно автобусной остановки (Земли) он движется вместе с автобусом. Следовательно, этот ученик находится в состоянии покоя относительно одной системы отсчета, но движется относительно другой. Поэтому говорят, что состояние покоя относительно, оно зависит от выбора системы отсчета. Перемещение ученика относительно системы отсчета, связанной с автобусом (движущейся системы отсчета), равно нулю: $\vec{s}_1 = 0$, а относительно системы отсчета, связанной с Землей (условно считаемой неподвижной), оно равно перемещению автобуса $\vec{s}_2$, то есть:

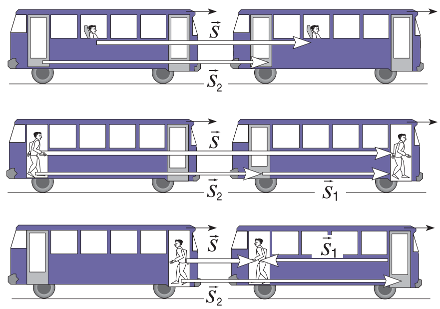


Рис. 1.33

$$\vec{\boldsymbol{s}} = \vec{\boldsymbol{s}}_2 \text{ если } \vec{\boldsymbol{s}}_1 = \mathbf{0}. \qquad (1.13)$$

Другая ситуация. Ученик входит в автобус через заднюю дверь и проходит до передней двери во время движения автобуса. Как видно из *рисунка 1.33, б*, перемещение ученика относительно Земли $\vec{s}$ равно его перемещению $\vec{s}_1$ относительно автобуса плюс перемещение $\vec{s}_2$ последнего:

$$\vec{\boldsymbol{s}} = \vec{\boldsymbol{s}}_1 + \vec{\boldsymbol{s}}_2. \qquad (1.14)$$

Перемещения ученика относительно двух выбранных систем отсчета различны, следовательно, они относительны, то есть зависят от выбора системы отсчета.

Если же ученик входит через переднюю дверь автобуса и переходит в его конец, увидев одноклассника, то относительность движения еще более очевидна: относительно автобуса ученик перемещается в одном направлении (в направлении своего перемещения $\vec{s}_1$), а относительно Земли – в противоположном направлении (спиной вперед!). Из *рисунка 1.33, в* видно, что и в этом случае перемещения тела удовлетворяют соотношению (1.14).

Тела из приведенных выше примеров двигались вдоль одной оси. Рассмотрим теперь более сложный случай.

Представим себе, что по реке одновременно перемещаются, начав движение из одного пункта, плот и лодка, которая держит курс перпендикулярно направлению течения реки (*рис. 1.34*). Плот и лодка одинаково вовлечены в движение потока воды, поэтому все время остаются на одной прямой, перпендикулярной течению реки. За то время, пока лодка достигнет противоположного берега реки, она, как и плот, переместится в направлении течения воды на $\vec{s}_2$. Перемещение лодки относительно плота, а значит, и относительно течения реки, равно $\vec{s}_1$.

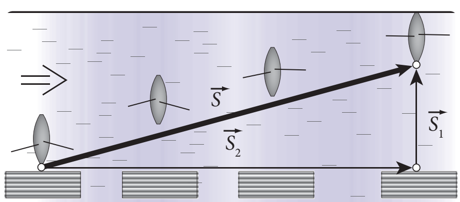


Рис. 1.34

Из рисунка видно, что перемещение лодки относительно берега $\vec{s}$ удовлетворяет соотношению $\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$, то есть мы вновь получаем выражение (1.14).

Движение тела и его характеристики относительно движущейся системы отсчета называются *относительными*: *относительное перемещение, относительная скорость*.

Движение тела и его характеристики относительно системы отсчета, которую условно считают неподвижной, называются *абсолютными*: *абсолютное перемещение, абсолютная скорость*.

Движение тела, обусловленное только движением самой подвижной системы отсчета, называется *переносным*. Его характеристики соответственно называются *переносным перемещением, переносной скоростью*.

Из вышеизложенных определений следует, что для выявления переносного движения и получения его характеристик необходимо представить себе тело, которое покоится в движущейся системе отсчета.

Также, исходя из определений, соотношение (1.14) можно сформулировать следующим образом:

Абсолютное перемещение тела равно сумме относительного и переносного перемещений.

В этом состоит **закон сложения перемещений**.

На первый взгляд кажется, что выражения (1.14) и (1.5) идентичны. В обоих случаях складываются векторы перемещения. Но в выражении (1.5) складываются векторы перемещения тела за последовательные интервалы времени Δt_1 и Δt_2 и таким образом получается перемещение тела за целый промежуток времени ($\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$). В соотношении же (1.14) фигурирует перемещение тела за один и тот же интервал времени, но относительно разных систем отсчета, и перемещение тела, обусловленное движением подвижной системы отсчета. Будем считать, что и относительное движение тела, и движение подвижной системы отсчета являются прямолинейными и равномерными. Тогда движение относительно неподвижной системы отсчета также будет прямолинейным и равномерным.

Обозначим через Δt время движения (время абсолютно, то есть длительность Δt одинакова в обеих системах отсчета). Разделив члены соотношения (1.14) на Δt, получим:

$$\frac{\vec{s}}{\Delta t} = \frac{\vec{s}_1}{\Delta t} + \frac{\vec{s}_2}{\Delta t}. \qquad (1.15)$$

Согласно определениям, данным выше, величина $\vec{\upsilon} = \frac{\vec{s}}{\Delta t}$ представляет собой абсолютную скорость (относительно неподвижной системы отсчета), $\vec{\upsilon}_1 = \frac{\vec{s}_1}{\Delta t}$ – относительную скорость (относительно движущейся системы отсчета) и $\vec{\upsilon}_2 = \frac{\vec{s}_2}{\Delta t}$ – переносную скорость, то есть скорость, которую тело имеет благодаря движению подвижной системы отсчета.

Отсюда выражение (1.15) можно выразить в виде:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2. \qquad (1.16)$$

Абсолютная скорость материальной точки равна сумме относительной и переносной скоростей.

Это закон **сложения скоростей**.

Таким образом, не только перемещение материальной точки, но и ее скорость является относительной величиной, зависящей от выбора системы отсчета.

Закон, выраженный формулой (1.16), известен также как **закон сложения скоростей в классической механике**. Позднее вы увидите, что он выполняется только для скоростей, много меньших скорости света c в вакууме. Для скоростей, сравнимых с c, его следует заменить общим законом сложения скоростей, который при скоростях, малых по сравнению с c, переходит в закон (1.16).

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Спортсмен переплывает реку шириной L в направлении, перпендикулярном берегу, и достигает противоположной стороны в точке, расположенной напротив исходного положения, затем возвращается обратно в то же место. Второй раз он проплывает против течения реки такое же расстояние L, после чего также возвращается в исходную точку. В каком случае спортсмен тратит больше времени и во сколько раз? Скорость спортсмена в спокойной воде $\upsilon_1 = 0{,}90$ м/с, скорость течения реки $\upsilon_2 = 0{,}54$ м/с.

РЕШЕНИЕ

Дано:
$\upsilon_1 = 0{,}90$ м/с
$\upsilon_2 = 0{,}54$ м/с

$\dfrac{t_1}{t_2}$ – ?

На *рисунке 1.35* точкой A показано исходное положение спортсмена, точками B и C – его положение на противоположном берегу и вдоль реки соответственно.

Расстояния $AB = AC = L$. При пересечении реки из A в B и обратно скорость спортсмена относительно воды $\vec{\upsilon}_1$ должна быть направлена под таким углом к скорости течения реки $\vec{\upsilon}_2$, чтобы его скорость $\vec{\upsilon}$ относительно берега была перпендикулярна последнему. Из рисунка видно, что $\upsilon = \sqrt{\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2}$. Следовательно, время перемещения из A в B и обратно равно $t_1 = \dfrac{2L}{\upsilon} = \dfrac{2L}{\sqrt{\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2}}$.

Скорость спортсмена относительно берега при перемещении его из A в C равна $(\upsilon_1 - \upsilon_2)$, а обратно – $(\upsilon_1 + \upsilon_2)$.

Полное время в этом случае равно $t_2 = \dfrac{L}{\upsilon_1 - \upsilon_2} + \dfrac{L}{\upsilon_1 + \upsilon_2} = \dfrac{2L\upsilon_1}{\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2}$.

Найдем отношение времен $\dfrac{t_1}{t_2} = \dfrac{\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2}{\upsilon_1\sqrt{\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2}} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{\upsilon_2}{\upsilon_1}\right)^2}$; $\dfrac{t_1}{t_2} = 0{,}8$, откуда получаем $t_2 = 1{,}25\, t_1$.

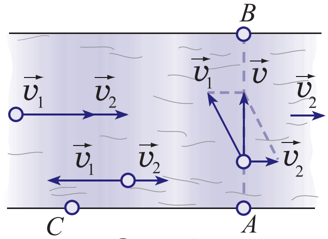


Рис. 1.35

Таким образом, во втором случае спортсмен затратил в 1,25 раза больше времени, чем в первом случае.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Когда характеристики движения называются абсолютными? А переносными?
2. Как формулируется закон сложения скоростей?
3. Как вы объясните тот факт, что большинство запусков космических ракет производится в направлении с запада на восток (см. *рис. 1.5*)?
4. Скорость велосипедиста равна $\upsilon_1 = 12$ м/с, а скорость ветра, дующего ему навстречу, $\upsilon_2 = 4$ м/с; обе скорости взяты относительно Земли. Определите скорость ветра относительно велосипедиста.
5. Скорость течения реки равна $\upsilon_1 = 1{,}2$ м/с. Моторная лодка перемещается против течения со скоростью $\upsilon_2 = 3$ м/с относительно берега. С какой скоростью будет двигаться лодка по течению, если режим работы двигателя одинаков в обоих случаях?
6. По двум параллельным путям железной дороги в одном направлении перемещаются два поезда: товарный длиною $L = 640$ м, со скоростью $\upsilon_1 = 36$ км/ч, и пассажирский со скоростью $\upsilon_2 = 64{,}8$ км/ч. Определите, в течение какого времени пассажир будет видеть товарный поезд, пока его обгоняет пассажирский.
7. Эскалатор поднимает пассажира, стоящего на нем, за время $t_1 = 1$ мин. По неподвижной лестнице пассажир поднимается за время $t_2 = 3$ мин. За какое время поднимется пассажир, двигаясь по лестнице подвижного эскалатора?

8. Спортсмен переплывает реку в направлении, перпендикулярном берегу, со скоростью $\upsilon = 0{,}5$ м/с относительно берега. Определите скорость течения реки, если известно, что она в $\sqrt{2}$ раз меньше скорости спортсмена относительно воды.
9. Лодка пересекает реку шириной $L = 60$ м, ее скорость относительно воды перпендикулярна направлению течения реки. Зная, что скорость лодки в стоячей воде равна $\upsilon_1 = 3$ м/с, а скорость течения реки $\upsilon_2 = 1$ м/с, определите: *а)* скорость лодки относительно берега; *б)* расстояние, на которое переместится лодка течением воды; *в)* модуль перемещения лодки относительно берега реки.

1.7 ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ РАВНОПЕРЕМЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ. УСКОРЕНИЕ

a. Прямолинейное неравномерное движение. Средняя скорость. Мгновенная скорость

В повседневной жизни мы редко встречаем тела, которые движутся прямолинейно равномерно. В большинстве случаев они совершают разные перемещения за равные промежутки времени, то есть их движения неравномерны. Например, автобус, который отходит от остановки, в первую секунду совершает перемещение меньшее, чем во вторую, а во вторую – меньшее, чем в третью. Тормозящий автомобиль в последнюю секунду совершает перемещение меньшее, чем в предпоследнюю, и т.д. Для характеристики *прямолинейного неравномерного движения тела* (материальной точки) и для сравнения неравномерных движений различных тел вводится понятие **средней скорости**. Допустим, что перемещение материальной точки за промежуток времени $\Delta t = (t_2 - t_1)$ равно $\Delta\vec{s}$.

***Средней скоростью тела за какой-либо промежуток времени* называется физическая величина, равная отношению перемещения к соответствующему промежутку времени:**

$$\vec{\upsilon}_{\text{ср.}} = \frac{\Delta\vec{s}}{t_2 - t_1}. \qquad (1.17)$$

Вектор средней скорости направлен так же, как перемещение тела, то есть вдоль прямой, совпадающей с его траекторией. Средняя скорость характеризует движение материальной точки за весь промежуток времени $(t_2 - t_1)$. Знание ее не позволяет найти перемещение за некоторую часть этого промежутка, например, за первую треть. Следовательно, необходимо ввести величину, которая позволила бы детальнее описывать неравномерное движение. Такой величиной является скорость материальной точки в данный момент времени, называемая **мгновенной скоростью**.

Рассмотрим конкретный пример: мотоциклист движется по прямолинейному участку шоссе и нужно определить его мгновенную скорость в момент прохождения мимо километрового столба. Точнее, это означает определить ее для некоторой точки, например, вала переднего колеса в момент, когда он проходит мимо передней плоскости столба P (*рис. 1.36*).

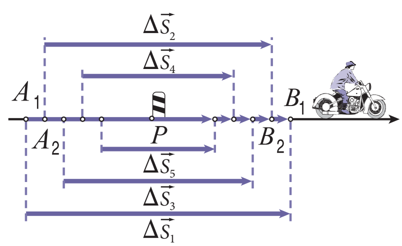


Рис. 1.36

Допустим, что за промежуток времени Δt_1 мотоциклист попал из положения A_1 в B_1, совершив перемещение $\Delta\vec{s}_1$. Его средняя скорость за этот промежуток равна $\vec{\upsilon}_{\text{ср. 1}} = \dfrac{\Delta\vec{s}_1}{\Delta t_1}$.

Возьмем немного меньший промежуток времени Δt_2. Теперь перемещение также меньше и равно $\Delta\vec{s}_2$, а средняя скорость за этот промежуток $\vec{v}_{ср.2}=\frac{\Delta\vec{s}_2}{\Delta t_2}$.

В общем случае $\vec{v}_{ср.2}$ отличается от $\vec{v}_{ср.1}$. Если брать все меньшие и меньшие промежутки времени $\Delta t_3>\Delta t_4>\Delta t_5...$, то будут соответственно уменьшаться и перемещения $\Delta\vec{s}_3$, $\Delta\vec{s}_4$, $\Delta\vec{s}_5$ ..., для которых средние скорости равны:

$$\vec{v}_{ср.3}=\frac{\Delta\vec{s}_3}{\Delta t_3},\ \vec{v}_{ср.4}=\frac{\Delta\vec{s}_4}{\Delta t_4},\ \vec{v}_{ср.5}=\frac{\Delta\vec{s}_5}{\Delta t_5}\ ... .$$

Вычисляя среднюю скорость для все меньших промежутков времени, в конце концов получим значение мгновенной скорости. Обозначим через $\Delta\vec{s}$ достаточно малое перемещение материальной точки и через Δt соответствующий промежуток времени. Тогда мгновенная скорость материальной точки будет равна:

$$\vec{v}=\frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t}. \tag{1.18}$$

Чем меньше промежуток времени Δt, тем более он приближается к определенному моменту времени, и тем ближе средняя скорость на этом промежутке к мгновенной скорости. При прямолинейном неравномерном движении мгновенная скорость, которая в дальнейшем будет называться просто скоростью, имеет разные значения для разных моментов времени, то есть является функцией времени:

$$\vec{v}=\vec{v}(t). \tag{1.19}$$

Она возрастает по модулю, когда материальная точка начинает движение, и убывает при торможении. Если траектория материальной точки произвольна (*рис. 1.23*), то мгновенная скорость равна отношению достаточно малого приращения ее радиус-вектора $\Delta\vec{r}$ к соответствующему промежутку времени Δt, то есть $\vec{v}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$, при этом рассматриваемый промежуток времени стремится к нулю.

Замечание. Когда материальная точка движется в одном и том же направлении, модуль ее перемещения $|\Delta\vec{s}|=l$ равен пройденному пути , и модуль средней скорости равен:

$$v_{ср.}=\frac{l}{t_2-t_1}. \tag{1.20}$$

Однако, при движении материальной точки сначала в одном направлении, а затем в противоположном, модуль перемещения меньше пройденного пути. Если материальная точка возвращается в исходное положение, то модуль перемещения будет равен нулю, а значит, и средняя скорость, вычисленная по формуле (1.17), равна нулю, как если бы материальная точка не двигалась в течение этого промежутка времени. Поэтому, если направление движения изменяется, а также при движении по криволинейной траектории, удобнее использовать так называемую **среднюю путевую скорость**. Она определяется как скалярная величина, равная отношению длины пройденного пути к промежутку времени, за который этот путь пройден. Это отношение совпадает с выражением (1.20). Когда мы утверждаем, что автобус прошел трассу Кишинэу–Орхей со скоростью 45 км/ч, то этим констатируем, что он прошел участок шоссе (траектории) от Кишинэу до Орхея длиной 45 км за один час.

б. Прямолинейное равнопеременное движение. Ускорение

Как уже известно, прямолинейное равномерное движение происходит с постоянной скоростью – это самый простой вид движения. Теперь исследуем прямолинейное движение, при котором скорость тела изменяется определенным образом.

Прямолинейное движение тела, при котором изменение его мгновенной скорости одинаково за любые равные промежутки времени, называется *равнопеременным.*

Согласно определению, изменения скорости тела $\Delta\vec{v}_1, \Delta\vec{v}_2, \Delta\vec{v}_3, \ldots$ за равные промежутки времени $\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t_3 = \ldots$ удовлетворяют условию $\Delta\vec{v}_1 = \Delta\vec{v}_2 = \Delta\vec{v}_3 = \ldots$. Кроме того, если один из интервалов Δt_i разделить на несколько более мелких, то каждому из них будет соответствовать изменение скорости во столько же раз меньшее по сравнению с изменением скорости за весь интервал Δt_i.

Из сказанного выше следует равенство отношений $\dfrac{\Delta\vec{v}_1}{\Delta t_1} = \dfrac{\Delta\vec{v}_2}{\Delta t_2} = \dfrac{\Delta\vec{v}_3}{\Delta t_3} \ldots = \text{const}$.

Это **отношение, постоянное** для данного движения, называется **ускорением** (в латинском языке ускорение означает „торопить”):

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \tag{1.21}$$

Единица ускорения в СИ равна $[\vec{a}] = \dfrac{[\Delta\vec{v}]}{[\Delta t]} = \dfrac{\text{м/с}}{\text{с}} = \dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Из (1.21) следует, что:

Ускорение является физической величиной, характеризующей быстроту изменения скорости тела (материальной точки). Ускорение прямолинейного равнопеременного движения – величина постоянная: $\vec{a} = \text{const}$.

Скорость материальной точки при прямолинейном равномерном движении остается постоянной, то есть ее приращение, а также ускорение равны нулю. Таким образом, **прямолинейное равномерное движение – это движение с нулевым ускорением**.

Рассмотрим прямолинейное равноускоренное движение материальной точки. Выберем ось координат Ox в направлении движения (*рис. 1.37*). Допустим, что в начальный момент $t_0 = 0$ точка занимает положение M_0 с координатой x_0, имея начальную скорость $\vec{v}_0$, а в момент t – положение M с координатой x, при этом скорость становится равной $\vec{v}$. Следовательно, за промежуток времени $\Delta t = t - t_0 = t$ скорость материальной точки изменилась на $\Delta\vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0$. Ее ускорение равно:

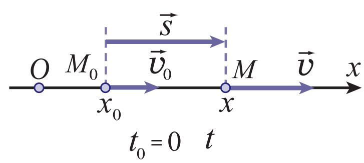


Рис. 1.37

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t}. \tag{1.22}$$

Отсюда выражаем скорость материальной точки в момент t:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t. \tag{1.23}$$

Для проекции скорости на ось Ox (*рис. 1.37*) получаем:

$$v_x = v_{0x} + a_x t. \tag{1.24}$$

Из этих соотношений видно, что скорость материальной точки в прямолинейном равнопеременном движении является линейной функцией времени. Если проекции скорости υ_{0x} и ускорения a_x имеют одинаковый знак, то модуль проекции υ_x возрастает со временем, если же противоположный знак, модуль проекции υ_x убывает со временем. В первом случае движение называется **ускоренным**, во втором – **замедленным**.

в. Графики проекций ускорения и скорости

Проекция ускорения материальной точки в прямолинейном равнопеременном движении – величина постоянная: $a_x = \mathrm{const}$. Ее график – прямая линия, параллельная оси времени (*рис. 1.38*). Из рисунка видно, что график 2 соответствует движению с ускорением большим, чем в движении, представленном графиком 1: $a_{2x} > a_{1x}$. График 3 соответствует равнопеременному движению, проекция ускорения которого отрицательна ($a_{3x} < 0$), то есть ее ориентация противоположна положительному направлению оси *Ox*.

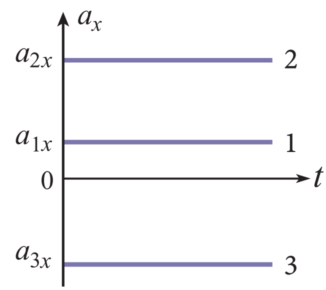


Рис. 1.38

График проекции скорости υ_x как линейной функции времени (1.24) представляет собой прямую. На *рисунке 1.39* изображены различные возможные графики. График 1 описывает прямолинейное равноускоренное движение с начальной скоростью υ_{0x} и ускорением a_{1x}, причем обе проекции положительны, то есть соответствующие векторы ориентированы в положительном направлении оси *Ox*. График 2 соответствует движению с такой же начальной скоростью, что и в движении 1, но с бóльшим ускорением: $a_{2x} > a_{1x}$, так как скорость возрастает быстрее. На графике 3, параллельном графику 1, представлено движение с нулевой начальной скоростью и ускорением $a_{3x} = a_{1x}$. Скорости тел в движениях, представленных графиками 1, 2, 3, возрастают со временем, то есть движения являются равноускоренными.

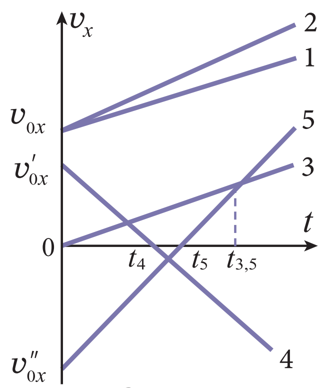


Рис. 1.39

График 4 соответствует равнопеременному движению с проекцией начальной скорости $\upsilon'_{0x} > 0$ и ускорением $a_{4x} < 0$. С течением времени скорость материальной точки уменьшается, то есть ее движение равнозамедленное. В момент t_4 прямая 4 пересекает ось времени, следовательно, в этот момент скорость равна нулю, материальная точка останавливается. После этого (для $t > t_4$) проекция скорости становится отрицательной, тело движется в направлении, противоположном первоначальному, со скоростью, возрастающей по модулю. Таким образом, движение, описанное графиком 4, является равнозамедленным до момента t_4, затем становится равноускоренным.

График 5 описывает движение, которое сначала происходит в отрицательном направлении оси *Ox* и является равнозамедленным до момента t_5, когда скорость становится равной 0, после чего движение продолжается в положительном направлении оси *Ox*, то есть является равноускоренным.

Очевидно, точки пересечения графиков скоростей для разных тел отвечают моментам времени, в которые соответствующие тела имеют одинаковые скорости. Например, тела 3 и 5 имеют одинаковые скорости в момент $t_{3,5}$.

Используя график проекции скорости, можно определить проекцию ускорения материальной точки (*рис. 1.40*). Рассмотрим промежуток времени Δt и определим из графика приращение проекции скорости Δv_x за этот промежуток. Для проекции ускорения получаем: $a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$.

Проведя аналогию, можем утверждать, что способ определения проекции ускорения, исходя из графика скорости материальной точки в равнопеременном движении, подобен способу определения проекции скорости материальной точки на основе графика для ее координаты.

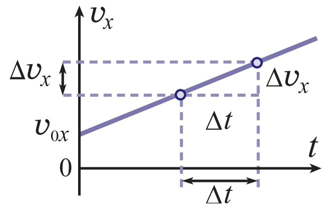


Рис. 1.40

г. Закон равнопеременного движения материальной точки

Чтобы вывести выражение для координаты материальной точки в равнопеременном движении, рассмотрим график проекции скорости (*рис. 1.41*). Напомним результат, полученный выше, для прямолинейного равномерного движения: проекция перемещения материальной точки в этом движении численно равна площади прямоугольника, образованного графиком проекции скорости, осью времени и ординатами, отвечающими началу и концу соответствующего промежутка времени (см. *рис. 1.29*). В отличие от прямолинейного равномерного движения, при котором проекция скорости остается постоянной, в равнопеременном движении проекция скорости материальной точки изменяется на протяжении интервала $0 \div t$ от значения v_{0x} до значения $v_x = v_{0x} + a_x t$.

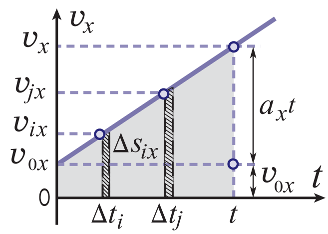


Рис. 1.41

Для вычисления проекции перемещения s_x в данном случае поступим следующим образом: мысленно разобьем интервал времени на большое число маленьких частей (промежутков) $\Delta t_1, \Delta t_2 \ldots \Delta t_i, ..., \Delta t_j \ldots$. Перемещение материальной точки за весь интервал времени равно сумме ее перемещений за все малые части, на которые был разделен этот интервал (движение прямолинейное и в одном и том же направлении!). При вычислении проекции перемещения материальной точки за достаточно малый промежуток времени Δt_i примем во внимание, что изменение скорости на нем много меньше самого значения скорости, что видно и из графика на *рисунке 1.41*. Если пренебречь этим изменением проекции скорости, то движение материальной точки в течение промежутка Δt_i можно считать равномерным, со скоростью v_{ix}. Следовательно, проекция соответствующего перемещения Δs_{ix} будет численно равна части площади под графиком – площади заштрихованной полоски шириной Δt_i и высотой v_{ix}. Проекция перемещения материальной точки за другой малый промежуток Δt_j численно равна площади соответствующей полоски другой ширины Δt_j и другой высоты v_{jx}.

Суммирование проекций перемещений за все малые промежутки времени сводится к сложению площадей всех полосок – таким образом получается площадь фигуры под графиком. Она представляет собой трапецию с основаниями, равными v_{0x} и $(v_{0x} + a_x t)$ и высотой t. Для проекции перемещения получаем:

$$s_x = \frac{v_{0x} + (v_{0x} + a_x t)}{2} \cdot t = v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}.$$

Это **закон прямолинейного равнопеременного движения**.

Имея в виду, что проекция перемещения $s_x = x - x_0$ (см. *рис.1.37*), для координаты материальной точки имеем:

$$\boldsymbol{x = x_0 + v_{0x}\, t + \frac{a_x t^2}{2}}. \qquad (1.25)$$

Это **уравнение прямолинейного равнопеременного движения**. В зависимости от знака проекций v_{0x} и a_x координата x и проекция скорости v_x могут возрастать или убывать.

д. Формула Галилея

Сведем вместе результаты, полученные выше при рассмотрении прямолинейного равнопеременного движения. Для проекции перемещения и скорости материальной точки в этом движении получены соотношения:

$$\begin{cases} \boldsymbol{s_x = v_{0x}t + \dfrac{a_x t^2}{2}}, \\ \boldsymbol{v_x = v_{0x} + a_x t}. \end{cases} \tag{1.26}$$

Эти два уравнения содержат пять величин: s_x, v_x, v_{0x}, a_x и t. Следовательно, они позволяют определить две из перечисленных величин, если известны три остальные. Таким способом решаются все задачи, касающиеся данного вида движения.

В ряде задач время не дано, и его найти и не требуется. В этом случае удобно использовать соотношение, которое получается из уравнений (1.26) после исключения из них времени t. Из второго уравнения соотношения (1.26) подставим время $t = \dfrac{v_x - v_{0x}}{a_x}$ в первое уравнение:

$$s_x = v_{ox}\left(\frac{v_x - v_{0x}}{a_x}\right) + \frac{a_x}{2}\left(\frac{v_x - v_{0x}}{a_x}\right)^2 = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}$$

или

$$\boldsymbol{v_x^2 - v_{0x}^2 = 2a_x s_x}. \tag{1.27}$$

Полученное соотношение известно как **формула Галилея**. Оно не содержит времени и позволяет определять одну из величин, если известны остальные три.

е°. Отношение путей, пройденных материальной точкой за равные промежутки времени

Проанализируем одно особое свойство равноускоренного движения с нулевой начальной скоростью ($v_{0x} = 0$). Допустим, мы провели ось Ox по направлению скорости, которое в рассматриваемом случае остается неизменным. Следовательно, пройденный путь равен проекции перемещения $l = s_x = \dfrac{a_x t^2}{2}$.

Галилео Галилей (1564–1642), итальянский физик и астроном.

Открыл принцип инерции, установил относительный характер механического движения, сформулировал классический принцип относительности и закон сложения скоростей. Им установлены закономерности свободного падения, движения тела по наклонной плоскости и колебаний маятника. Галилей изобрел зрительную трубу, с помощью которой открыл горы на Луне, четыре спутника планеты Юпитер, звездную природу Млечного Пути. Он усовершенствовал зрительную трубу и сконструировал телескоп, позволивший ему обнаружить фазы Венеры, пятна на Солнце. Галилей, как сторонник гелиоцентрической системы Коперника, был осужден инквизицией.

Рассмотрим равные последовательные промежутки времени τ. Путь, пройденный материальной точкой за первый промежуток τ, равен $l_1 = \frac{a_x\tau^2}{2}$.

Путь, пройденный за следующий, второй промежуток τ, равен пути, пройденному за промежуток (2τ) от начала движения, минус путь, пройденный за первый промежуток τ, то есть:

$$l_2 = \frac{a_x(2\tau)^2}{2} - \frac{a_x\tau^2}{2} = 3\frac{a_x\tau^2}{2}.$$

Путь, пройденный за третий последовательный промежуток, равный τ, равен разности путей, пройденных за время (3τ) и (2τ):

$$l_3 = \frac{a_x(3\tau)^2}{2} - \frac{a_x(2\tau)^2}{2} = 5\frac{a_x\tau^2}{2}.$$

Аналогично получаем: $l_4 = 7\frac{a_x\tau^2}{2}$, $l_5 = 9\frac{a_x\tau^2}{2}$. Следовательно, из этих выражений вытекает закономерность:

$$\boldsymbol{l_1 : l_2 : l_3 : l_4 : \ldots} = 1: 3: 5: 7: \ldots . \qquad (1.28)$$

В прямолинейном равноускоренном движении с нулевой начальной скоростью пути, пройденные материальной точкой за последовательные равные промежутки времени, относятся как последовательные нечетные числа.

Это отношение путей может быть использовано для изучения равноускоренного движения, в частности, стробоскопическим методом, который состоит в получении на одной фотографии изображений тела через равные промежутки времени. Практически это осуществляется фотографированием в темноте движущегося тела. Объектив фотоаппарата все время открыт, а тело через равные промежутки времени освещается короткими световыми импульсами.

ж. Движение тела по вертикали

Весьма распространенным примером прямолинейного равнопеременного движения является движение тела по вертикали на высоте, много меньшей радиуса Земли. Так движется свободное тело, брошенное вертикально вверх, и свободно падающее тело (без начальной скорости или с начальной скоростью, направленной вниз или вверх).

Галилео Галилей первым начал изучать свободное падение тел. Он бросал различные тела со знаменитой наклонной Пизанской башни (*рис.1.42*) и сравнивал время их падения (время оценивалось по количеству ударов сердца или по объему воды, вытекающей через отверстие какого-либо сосуда с водой, откуда пошло выражение „много воды утекло с тех пор!”).

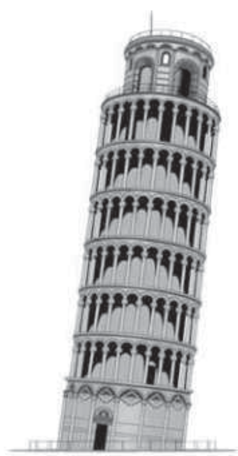


Рис. 1.42

В результате многочисленных опытов Галилей пришел к выводу, что все тела падают одинаково. На первый взгляд кажется, что этот вывод противоречит действительности. Вспомним падение листа (см. *рис.1.1*), рассмотренное в начале этой главы. Лист, вообще говоря, не падает вертикально, как например, металлический шар. Причина странного падения листа очевидна: на движение листа большое влияние оказывает воздух, воздушные потоки, которые могут поднимать его вверх. Следовательно, опыт нужно проводить таким образом, чтобы исключить влияние воздуха.

Возьмем трубку Ньютона – стеклянную трубу длиною около 1 м, один конец которой запаян, а на другой конец надета крышка, имеющая трубку с краном. Это позволяет откачивать воздух из трубы, а затем герметически закрывать ее.

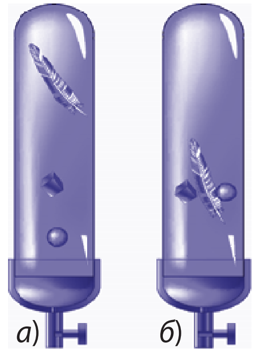


Рис. 1.43

В трубе находятся различные тела, например, птичье перышко, деревянный кубик, свинцовая дробинка. Тела находятся на запаянном конце трубы. Перевернем трубу крышкой вниз. Что мы замечаем? Тела падают по-разному: первой падает дробинка, последним – перышко (*рис. 1.43, а*). Удалим часть воздуха из трубы и повторим опыт. Что наблюдается после переворачивания трубы? Тела падают в том же порядке, но разница во времени падения стала меньше. При почти полной откачке воздуха наблюдается почти одновременное падение тел (*рис. 1.43, б*). Таким образом, предположение относительно влияния воздуха на падение различных тел, как и вывод, сделанный Галилеем, подтверждаются опытом.

Этот вывод, касающийся идентичности падения тел в вакууме, остается справедливым и для падения тел в воздухе, если они сделаны из вещества с большой плотностью, а их скорости не слишком велики (опыт подтверждает гораздо меньшее влияние воздуха на падение свинцовой дробинки).

Экспериментально установлено, что свободно падающее тело движется равноускоренно. Это ускорение, одинаковое для всех тел и называемое **ускорением свободного падения**, направлено вертикально вниз. В отличие от других ускорений его обозначают $\vec{g}$. Величина ускорения свободного падения зависит от географической широты местности, где находится тело, и от его высоты над поверхностью Земли. Позднее будут выяснены причины зависимости ускорения свободного падения от этих факторов

На уровне моря ускорение свободного падения имеет значения: на полюсах $g = 9{,}8324$ м/с^2, на широте 45° $g = 9{,}8067$ м/с^2, на экваторе $g = 9{,}7805$ м/с^2. При решении задач берутся значения, указанные в условии: $g = 9{,}81$ м/с^2, $g = 9{,}8$ м/с^2 или (для упрощения вычислений) $g = 10$ м/с^2.

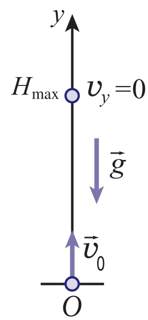


Рис. 1.44

Проанализируем конкретную ситуацию. Тело брошено с поверхности Земли вертикально вверх со скоростью $\vec{\upsilon}_0$. Выберем координатную ось Oy с началом в точке бросания и направленную вертикально вверх (*рис. 1.44*). Вектор ускорения свободного падения $\vec{g}$, направленный вертикально вниз, изобразим немного сбоку от оси, чтобы не усложнять рисунок. При таком выборе оси координат проекция ускорения $a_y = -g$, проекция начальной скорости $\upsilon_{0y} = \upsilon_0$, начальная координата $y_0 = 0$. Общие выражения (1.24) и (1.25) в данном случае принимают вид:

$$\boldsymbol{\upsilon_y = \upsilon_0 - gt,} \tag{1.29}$$

$$\boldsymbol{y = \upsilon_0 t - \frac{gt^2}{2}.} \tag{1.30}$$

Важной характеристикой движения тела, брошенного вверх, является максимальная высота подъема. Очевидно, подъем тела продолжается в течение времени пока проекция скорости положительна, то есть до момента, в который $\upsilon_y = 0$. Таким образом, из выражения (1.29) определяем время подъема тела: $0 = \upsilon_0 - gt_{\text{под.}}$, откуда

$$\boldsymbol{t_{\text{под.}} = \frac{\upsilon_0}{g}.} \tag{1.31}$$

Подставив эту величину в (1.30), определим максимальную высоту подъема тела:

$$H_{max} = \frac{v_0^2}{2g}. \qquad (1.32)$$

В момент падения тела на Землю координата тела $y = 0$. Подставив это значение в (1.30), получим уравнение для полного времени движения. Оно имеет вид: $0 = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$ или $t\,(v_0 - \frac{gt}{2}) = 0$. Это уравнение имеет два корня. Первый, $t = 0$, соответствует моменту бросания. Второй корень определяет полное время движения:

$$t_{дв.} = \frac{2v_0}{g}. \qquad (1.33)$$

Сравнивая (1.33) с (1.31), замечаем, что время движения вдвое больше времени подъема, следовательно, время спуска равно времени подъема. Этот вывод справедлив только для случая, когда тело падает в месте бросания.

Рассмотрим еще один случай: тело брошено с некоторой высоты h с начальной скоростью $\vec{v}_0$, направленной вертикально вниз. Если ось координат Oy выбрана так, как на *рисунке 1.45, а*, то $y_0 = h$, $v_{0y} = -v_0$ и $a_y = -g$. Выражения (1.24) и (1.25) для проекции скорости и координаты имеют следующий вид:

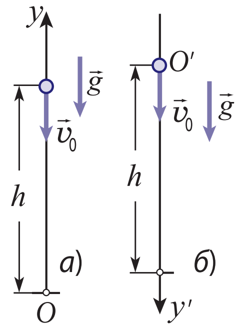


Рис. 1.45

$$v_y = -v_0 - gt, \quad y = h - v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Координата точки падения тела на Землю $y = 0$.

Ось координат $O'y'$ может быть выбрана, как на *рисунке 1.45, б*. В этом случае $y'_0 = 0$, $v_{0y'} = v_0$, $a'_y = g$, а движение тела описывается выражениями: $v_{y'} = v_0 + gt$, $y' = v_0 t + \frac{gt^2}{2}$.

Координата точки приземления тела $y' = h$.

Разумеется, в обоих случаях получаются одни и те же значения вычисляемых величин.

Однако если скорость тела направлена не вертикально вниз, а вертикально вверх, то в формулах для проекций скорости и координаты знаки перед скоростью v_0 будут противоположны тем, которые написаны в вышеприведенных выражениях.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Тело (материальная точка) проходит первую треть пути со скоростью $v_1 = 7{,}5$ м/с, а оставшийся путь – со скоростью $v_2 = 10$ м/с. Определите среднюю скорость тела на всем пути.

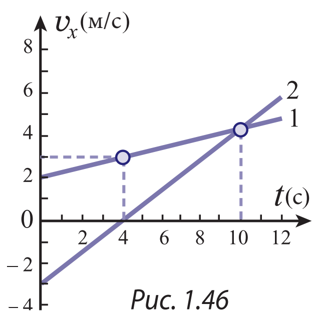


Рис. 1.46

РЕШЕНИЕ

Дано:
$v_1 = 7{,}5$ м/с
$v_2 = 10$ м/с
$l_1 = l/3$
$l_2 = 2l/3$
$v_{ср.}$ – ?

Движение тела состоит из двух равномерных движений: путь $l_1 = \frac{1}{3}l$, где l – весь пройденный путь, тело проходит со скоростью v_1 за время $t_1 = \frac{l_1}{v_1} = \frac{l}{3v_1}$, затем путь $l_2 = \frac{2}{3}l$ тело проходит со скоростью v_2 за время $t_2 = \frac{l_2}{v_2} = \frac{2l}{3v_2}$. Средняя скорость на всем пути равна: $v_{ср} = \frac{l_1 + l_2}{t_1 + t_2} = \frac{l}{\frac{l}{3v_1} + \frac{2l}{3v_2}} = \frac{3v_1 v_2}{2v_1 + v_2}$; $v_{ср} = 9$ м/с.

2. Два тела (материальные точки) начинают двигаться вдоль одной прямой из одной точки. Пользуясь графиками проекций скоростей тел (*рис. 1.46*): *а)* опишите качественно движение тел; *б)* определите ускорения тел; *в)* напишите выражения для проекций скоростей и координат тел; *г)* определите момент времени, когда тела встретятся; *д)* вычислите пути, пройденные телами до встречи.

РЕШЕНИЕ

а) Выберем за начало координат O точку, в которой тела находились в начальный момент времени ($t_0 = 0$). Следовательно, начальные координаты $x_{10} = x_{20} = 0$. Согласно графику 1 *рисунка 1.46* тело 1 движется равноускоренно с начальной скоростью в положительном направлении оси Ox. Тело 2 движется равнозамедленно в отрицательном направлении оси Ox до момента $t_1 = 4$ с, когда его скорость становится равной нулю, то есть оно останавливается. Далее тело 2 движется равноускоренно в положительном направлении оси Ox, скорость его увеличивается и в момент $t_2 = 10$ с она равна скорости тела 1, а затем превосходит ее. Таким образом, до момента $t_2 = 10$ с тела удаляются друг от друга, затем сближаются до встречи.

б) Приращение скорости первого тела за промежуток времени от $t_0 = 0$ до $t_1 = 4$ с равно $\Delta\upsilon_{1x} = 1$ м/с, следовательно, проекция его ускорения $a_{1x} = \dfrac{\Delta\upsilon_{1x}}{\Delta t} = 0{,}25$ м/с^2. За тот же промежуток времени проекция скорости второго тела изменяется от (-3) м/с до 0, то есть $\Delta\upsilon_{2x} = 0 - (-3)$ м/с $= 3$ м/с, а проекция его ускорения $a_{2x} = \dfrac{\Delta\upsilon_{2x}}{\Delta t} = 0{,}75$ м/с^2.

в) Проекции начальных скоростей тел равны $\upsilon_{10x} = 2$ м/с и $\upsilon_{20x} = -3$ м/с. Для произвольного момента времени t соответствующие величины получаются согласно формуле (1.24): $\upsilon_{1x} = 2 + 0{,}25\,t$ и $\upsilon_{2x} = -3 + 0{,}75\,t$. Начальные координаты тел равны нулю, то есть для момента времени t, используя формулу (1.25), можем записать: $x_1 = 2t + 0{,}25\dfrac{t^2}{2}$ и $x_2 = -3t + 0{,}75\dfrac{t^2}{2}$.

г) В момент встречи тела имеют одинаковые координаты: $x_1 = x_2$. Приравняв координаты, для времени t получаем уравнение: $t(5 - 0{,}25\,t) = 0$. Оно имеет два корня: первый из них $t_1 = 0$ соответствует начальному моменту, когда тела находились в начале координат, второй корень $t_3 = 20$ с определяет момент их встречи.

д) Из выражений для координат получаем их значение в момент встречи $x_1 = x_2 = 90$ м. Первое тело не изменяет направления своего движения, и пройденный им путь равен модулю изменения координаты: $l_1 = x_1 - x_0 = 90$ м. Для определения пути, пройденного вторым телом до встречи, нужно учесть, что вначале оно двигалось в отрицательном направлении оси Ox. В момент остановки ($t_1 = 4$ с) его координата равна $x_2 = -6$ м. Таким образом, тело 2 прошло в отрицательном направлении оси Ox путь, равный 6 м, затем тот же путь в обратном направлении до начала координат и еще 90 м до места встречи. То есть второе тело до встречи прошло путь $l_2 = (2 \cdot 6 + 90)$ м $= 102$ м.

3. Тело, брошенное с поверхности Земли вертикально вверх, находится на высоте $h = 58{,}8$ м от нее дважды, с интервалом времени $\Delta t = 4$ с. Определить, какой максимальной высоты достигает тело, и скорость, с которой оно было брошено. Принять $g = 9{,}8$ м/с^2.

РЕШЕНИЕ

Дано:
$h = 58{,}8$ м
$\Delta t = 4$ с
$g = 9{,}8$ м/с^2

H_{max} – ? υ_0 – ?

Первый раз тело находится на высоте h, поднимаясь вверх, второй раз – через интервал Δt, опускаясь вниз (*рис. 1.47*). То есть, за время Δt тело поднимается с высоты h до H_{max}, затем опускается с H_{max} до h. Поскольку время подъема равно времени спуска, то ясно, что за время $\dfrac{\Delta t}{2}$ тело в свободном падении проходит путь

$(H_{max} - h)$. На высоте H_{max} скорость равна нулю, поэтому $(H_{max} - h) = \frac{1}{2} g \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2$, отсюда максимальная высота $H_{max} = h + \frac{g(\Delta t)^2}{8}$; $H_{max} = 78{,}4$ м. Наиболее просто начальная скорость вычисляется с помощью формулы Галилея: $\upsilon_y^2 - \upsilon_{0y}^2 = 2a_y s_y$. Из *рисунка 1.47* видно: $\upsilon_y = 0$, $\upsilon_{0y} = \upsilon_0$, $a_y = -g$ и $s_y = H_{max}$. В данном случае формула Галилея принимает вид: $0 - \upsilon_0^2 = 2(-g)H_{max}$, откуда следует, что начальная скорость $\upsilon_0 = \sqrt{2gH_{max}}$; $\upsilon_0 = 39{,}2$ м/с.

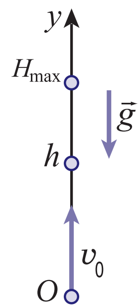


Рис. 1.47

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Что называется средней скоростью тела?

2. Как определяется мгновенная скорость?

3. Какую скорость показывает спидометр автомобиля: среднюю или мгновенную?

4. При каком движении мгновенная скорость тела все время равна средней? Аргументируйте ответ.

5. Какое движение называется прямолинейным равнопеременным?

6. Как определяется ускорение материальной точки? Что оно характеризует?

7. Что представляет собой график проекции скорости материальной точки при равнопеременном движении?

8. Может ли тело иметь ускорение в момент, когда его мгновенная скорость равна нулю? Ответ проиллюстрируйте примерами.

9. Как может быть найдена проекция ускорения материальной точки, движущейся прямолинейно равнопеременно, если использовать график проекции ее скорости?

10. Как определить проекцию перемещения материальной точки, если известен график проекции ее скорости?

11°. Установите закономерность (1.28), используя график зависимости скорости тела от времени на *рис. 1.48*.

12. Как может быть определено время подъема тела, брошенного вертикально вверх?

13. Как найти максимальную высоту подъема тела, брошенного вертикально вверх?

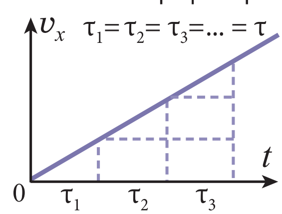


Рис. 1.48

14. Одну треть времени тело движется со скоростью $\upsilon_1 = 21$ м/с, а остальные две трети – со скоростью $\upsilon_2 = 30$ м/с. Вычислите среднюю скорость тела.

15. Материальная точка за время $t_1 = 2$ с прошла путь $l_1 = 5$ м, затем в течение времени $t_2 = 3$ с она двигалась равномерно со скоростью $\upsilon_2 = 5$ м/с. Определите среднюю скорость материальной точки в этом движении.

16. Велосипедист, пройдя 6 км со скоростью 12 км/ч, сделал остановку, затем последние 10 км прошел со скоростью 10 км/ч. Сколько времени длилась остановка велосипедиста, если его средняя скорость на всем пути равна 8 км/ч?

17. Мотоциклист, двигавшийся со скоростью $\upsilon_1 = 72$ км/ч, уменьшил свою скорость до $\upsilon_2 = 54$ км/ч за промежуток времени $\Delta t = 25$ с. Чему равно ускорение мотоциклиста? Как оно направлено относительно скорости?

18. Автомобиль с начальной скоростью $\upsilon_0 = 7$ м/с начал двигаться с ускорением $a = 0{,}25$ м/с^2. Чему будет равна его скорость через $\Delta t = 20$ с?

19. На *рисунке 1.49* показан график проекции скорости тела, которое в исходный момент ($t = 0$) находилось в начале координат. Определите координату тела в момент $t_1 = 10$ с, модуль его перемещения и путь, пройденный к этому моменту.

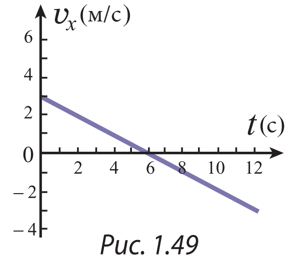


Рис. 1.49

20. За какое время автомобиль, который начинает двигаться с ускорением $a = 0{,}6$ м/с^2, пройдет путь $l = 30$ м?

21. Автомобиль, двигавшийся со скоростью $\upsilon_0 = 54$ км/ч, тормозит и останавливается через $\Delta t = 6$ с после начала торможения. Вычислите путь, пройденный автомобилем при торможении.

22. Лыжник спустился со склона длиной $l = 100$ м за время $\Delta t = 20$ с, имея ускорение $a = 0{,}3$ м/с^2. Чему равна скорость лыжника в начале и конце спуска?

23. Свободно падающее тело достигло поверхности Земли через $t = 6$ с. С какой высоты падало тело и с какой скоростью оно достигло поверхности Земли?*

24. Шар брошен вертикально вверх со скоростью $\upsilon_0 = 49$ м/с. Через какое время он окажется на высоте $h = 102{,}9$ м? Объясните полученный результат.

25. Тело свободно падает с высоты $h = 176{,}4$ м. Какой путь оно проходит за последнюю секунду перед приземлением? А за предпоследнюю?

26. Аэростат равномерно поднимается вертикально вверх со скоростью $\upsilon_0 = 4{,}9$ м/с. В момент, когда аэростат находится на высоте $h = 147$ м, из него выпадает мяч. Через какое время и с какой скоростью он достигнет Земли?

27. Два тела брошены вертикально вверх из одной точки одно за другим с интервалом времени $\tau = 1$ с. Начальная скорость обоих тел $\upsilon_0 = 29{,}4$ м/с. Через какое время после бросания второго из них тела столкнутся?

1.8 РАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ПО ОКРУЖНОСТИ. ЦЕНТРОСТРЕМИТЕЛЬНОЕ УСКОРЕНИЕ

a. Равномерное движение по окружности. Период и частота вращения

Кроме прямолинейного движения (равномерного и неравномерного) существует и криволинейное движение (простейший случай – равномерное движение по окружности).

Важность изучения этого движения определяется двумя факторами.

Во-первых, движение по окружности весьма распространено. Все точки твердых тел, вращающихся вокруг неподвижных осей – турбин и роторов электрических станций, валов и зубчатых колес станков, крыльев ветряных мельниц, стрелок часов, – движутся по окружностям. Во-вторых, любую криволинейную траекторию можно представить в виде последовательности малых дуг некоторых окружностей (*рис. 1.50*). Поэтому некоторые утверждения, касающиеся движения по окружности, справедливы для произвольного криволинейного движения.

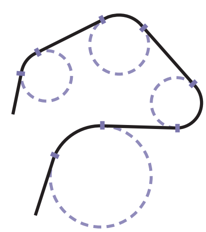


Рис. 1.50

Для определения направления мгновенной скорости материальной точки, движущейся по окружности, допустим, что за промежуток времени Δt_1 она переместилась из положения M_0 в поло-

* В задачах 23–27 принять g = 9,8 м/с^2.

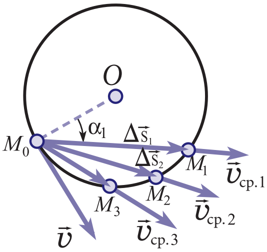


Рис. 1.51

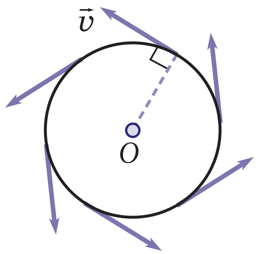


Рис. 1.52

жение M_1 (*рис. 1.51*). Перемещение материальной точки – это хорда $\Delta\vec{s}_1 = \overrightarrow{M_0M_1}$, а соответствующая средняя скорость $\Delta\vec{\upsilon}_{ср.1} = \frac{\Delta\vec{s}_1}{\Delta t_1}$ направлена так же, как эта хорда. Рассмотрим меньший промежуток времени $\Delta t_2 < \Delta t_1$. К его концу материальная точка занимает положение M_2, находящееся ближе к начальному M_0. Как перемещение $\Delta\vec{s}_2$, так и средняя скорость $\Delta\vec{\upsilon}_{ср.2} = \frac{\Delta\vec{s}_2}{\Delta t_2}$, ориентированные вдоль хорды M_0M_2, имеют теперь другое направление, но также проходящее через начальное положение M_0. Замечаем, что при уменьшении промежутка времени угол α между средней скоростью и радиусом M_0O увеличивается. По мере того, как промежуток времени Δt становится все меньше, этот угол α все больше приближается к 90°. Приходим к выводу, что мгновенная скорость материальной точки перпендикулярна радиусу окружности, по которой она движется, то есть направлена по касательной к окружности (*рис. 1.52*). Отметим, что этот вывод справедлив для любого криволинейного движения – **мгновенная скорость материальной точки направлена по касательной к траектории в данной точке**. Из *рисунка 1.51* видно также, что разность между модулем перемещения $|\Delta\vec{s}_i|$ и соответствующим пройденным путем Δl_i (длиной дуги M_0M_i, где i = 1,2,3, ...) уменьшается одновременно с уменьшением промежутка времени. Поэтому для модуля мгновенной скорости можем написать:

$$\boldsymbol{\upsilon} = \frac{|\Delta\vec{\boldsymbol{s}}|}{\Delta \boldsymbol{t}_1} = \frac{\Delta \boldsymbol{l}}{\Delta \boldsymbol{t}}, \qquad (1.34)$$

где промежуток Δt очень мал.

Движение по окружности является равномерным, если за любые равные промежутки времени материальная точка проходит одинаковые пути.

Следовательно, за равные малые промежутки времени $\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t_3 = \ldots$ материальная точка проходит одинаковые пути $\Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l_3 = \ldots$. Поэтому мгновенная скорость остается постоянной по модулю:

$$\upsilon = \frac{\Delta l_1}{\Delta t_1} = \frac{\Delta l_2}{\Delta t_2} = \frac{\Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3} = \ldots = \text{const}.$$

Движение материальной точки по окружности с постоянной по модулю скоростью называется равномерным движением по окружности.

Чтобы охарактеризовать это движение, вводят специальные величины. Окружность представляет собой замкнутую кривую и движение материальной точки повторяется через определенный промежуток времени, характерный для данного движения. Например, острие минутной стрелки через каждые 3 600 с оказывается против цифры 3 (или другой).

Минимальный промежуток времени, за который в точности повторяется движение материальной точки по окружности, то есть она проходит через одну и ту же точку с определенной скоростью, называется *периодом вращения T* или *периодом*.

Обозначим через Δt промежуток времени, за который тело совершает N полных оборотов, то есть проходит N длин окружностей. Согласно определению, период вращения

$$T = \frac{\Delta t}{N}. \tag{1.35}$$

***Частотой вращения* ν называется величина, равная числу оборотов, совершенных за единицу времени:**

$$\nu = \frac{N}{\Delta t}. \tag{1.36}$$

Между частотой вращения и периодом существует очевидная связь:

$$\nu = \frac{1}{T} \text{ и } T = \frac{1}{\nu}. \tag{1.37}$$

Единицы периода и частоты в СИ: $[T]$ = с и $[\nu]$ = с$^{-1}$.

На практике используется также число **оборотов в минуту**, обозначаемое n. $[n] = \frac{\text{об.}}{\text{мин}}$.

Понятия периода и частоты вращения имеют смысл только при равномерном движении по окружности.

У твердого тела с неподвижной осью вращения период (как и частота вращения) одинаков для всех его точек, то есть имеет единственное значение для всего тела. В противном случае оно бы деформировалось, что противоречит определению абсолютно твердого тела.

Если известны радиус r окружности, которую описывает материальная точка, и период, то можно вычислить ее скорость. За один период материальная точка проходит путь, равный длине окружности $l = 2\pi r$, следовательно, ее скорость

$$v = \frac{l}{T} = \frac{2\pi r}{T}. \tag{1.38}$$

С учетом выражения (1.37) для скорости можно написать:

$$v = 2\pi \nu r. \tag{1.39}$$

Из выражений для скорости видно, что скорости точек твердого тела тем больше, чем дальше они расположены от оси вращения.

б. Центростремительное ускорение

Скорость материальной точки при равномерном движении по окружности, оставаясь постоянной по модулю, изменяется по направлению. Вы уже знаете, что быстрота изменения скорости характеризуется ускорением, которое определяется выражением (1.21): $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$.

Скорость материальной точки при прямолинейном равнопеременном движении остается постоянной по направлению, изменяется только ее модуль. В случае равномерного движения по окружности ситуация обратная: изменяется направление скорости, модуль же ее остается постоянным.

Следовательно, ускорение материальной точки в этом случае будет определяться выражением, отличным от того, что получено для прямолинейного равнопеременного движения.

Рассмотрим материальную точку, которая движется с постоянной по модулю скоростью v по окружности радиуса r. Допустим, что в момент t_0 материальная точка занимает положение M_0 и имеет скорость, равную $\vec{v}_0$, а в момент t – положение M, имея скорость $\vec{v}$ (*рис. 1.53*).

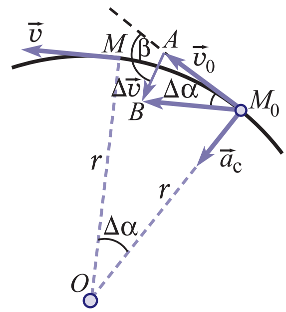


Рис. 1.53

Для определения приращения скорости $\Delta\vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0$ за промежуток времени $\Delta t = t - t_0$ перенесем вектор $\vec{v}$ параллельно самому себе так, чтобы его начало совпало с началом вектора $\vec{v}_0$ (с точкой M_0). Вектор разности двух векторов $\Delta\vec{v}$ – это вектор, соединяющий концы векторов $\vec{v}_0$ и $\vec{v}$. Эти векторы имеют равные модули ($|\vec{v}_0| = |\vec{v}| = v$), то есть треугольник M_0AB – равнобедренный. Векторы скоростей перпендикулярны радиусам соответствующих положений материальной точки ($\vec{v}_0 \perp M_0O$ и $\vec{v} \perp MO$), следовательно, угол AM_0B равен углу $\Delta\alpha$ между радиусами (*рис. 1.53*).

При определении ускорения промежуток времени Δt считается очень малым, значит, и угол $\Delta\alpha$ тоже очень мал. В этом случае дуга M_0M может быть заменена хордой M_0M, длина которой представляет собой модуль перемещения, равный пути, пройденному материальной точкой: $M_0M = |\Delta\vec{s}| = \Delta l = v\Delta t$. В таком приближении сектор круга M_0OM можно считать равнобедренным треугольником. Итак, мы получили два равнобедренных треугольника – M_0AB и OM_0M, которые к тому же подобны как имеющие одинаковые углы при вершине ($\Delta\alpha$). Приравняем отношения сходственных сторон:

$$\frac{AB}{M_0A} = \frac{M_0M}{M_0O}.$$

Как видно из *рисунка 1.53*: $AB = |\Delta\vec{v}|$, $M_0A = |\vec{v}_0| = v$, $M_0M = v\Delta t$ и $M_0O = r$. Равенство отношений принимает вид:

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{v} = \frac{v\Delta t}{r}.$$

Отсюда выражаем модуль ускорения

$$\boldsymbol{a} = \frac{|\Delta\vec{\boldsymbol{v}}|}{\Delta \boldsymbol{t}} = \frac{\boldsymbol{v}^2}{\boldsymbol{r}}. \qquad (1.40)$$

Ускорение направлено так же, как вектор $\Delta\vec{v}$. Из *рисунка 1.53* видно, что угол между векторами $\Delta\vec{v}$ и $\vec{v}_0$ равен $\beta = 90^\circ + \frac{\Delta\alpha}{2}$. Если промежуток времени Δt очень мал, то и угол $\Delta\alpha$ очень мал, то есть угол $\beta \approx 90^\circ$. В этом случае вектор $\Delta\vec{v}$ перпендикулярен вектору скорости $\vec{v}_0$ и направлен внутрь окружности. Следовательно, вектор ускорения, перенесенный параллельно так, чтобы его начало совпало с положением M_0, занимаемым материальной точкой, направлен к центру окружности. Поэтому ускорение материальной точки, движущейся по окружности равномерно, называется **центростремительным** и обозначается $a_ц$. Получаем:

$$\boldsymbol{a}_ц = \frac{\boldsymbol{v}^2}{\boldsymbol{r}}. \qquad (1.41)$$

С учетом выражений (1.38) и (1.39), определяющих скорость материальной точки, перепишем (1.41) следующим образом:

$$\boldsymbol{a}_ц = \frac{4\pi^2}{T^2}\boldsymbol{r} = 4\pi^2\nu^2\boldsymbol{r}. \qquad (1.42)$$

Это выражение показывает, что центростремительное ускорение какой-либо точки вращающегося твердого тела прямо пропорционально расстоянию от этой точки до оси вращения.

в. Угловая скорость

Рассмотрим абсолютно твердое тело с неподвижной осью вращения. Допустим, что тело вращается равномерно, то есть его точки совершают равномерное движение по окружностям. Пути, которые они проходят за один и тот же промежуток времени, а значит, и скорости и ускорения будут различными в зависимости от расстояний точек до оси вращения.

Возьмем две произвольные точки A и B некоторого тела (абсолютно твердого тела) с неподвижной осью вращения (*рис.1.54*). Опустим из этих точек перпендикуляры AA_0 и BB_0 на ось вращения. За промежуток времени Δt точка A опишет дугу AA', радиус AA_0 повернется на угол $\Delta\alpha$. За то же время точка B опишет другую дугу BB', но радиус повернется на тот же угол $\Delta\alpha$. Это следует из того факта, что тело является абсолютно твердым и расстояния между любыми его точками не изменяются во время движения.

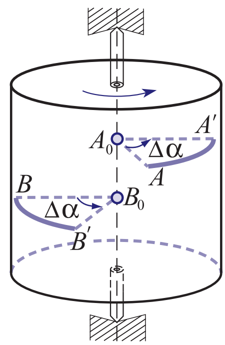


Рис. 1.54

Угол $\Delta\alpha$, одинаковый для всех точек абсолютно твердого тела, называется *углом поворота* или *угловым перемещением* этого *тела*.

Для характеристики быстроты вращения твердого тела вводится понятие ***мгновенной угловой скорости* ω, *как отношение угла поворота* $\Delta\alpha$ *к очень малому промежутку времени* Δt:**

$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}. \tag{1.43}$$

Угловая скорость ω характеризует вращение твердого тела, то есть движение по окружности всех его точек. Углы поворота выражаются в **радианах (рад)**. Радиан – это центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности, следовательно, угловая скорость выражается в **рад/с**. Радиан как отношение длины дуги к радиусу – величина безразмерная. При подстановке конкретных значений угловой скорости в формулы выражение “рад” опускают.

Мы можем легко установить связь между угловой скоростью ω и периодом T. За промежуток времени, равный периоду $\Delta t = T$, угол поворота тела $\Delta\alpha = 2\pi$. Подставив это значение в формулу (1.43), получим:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu. \tag{1.44}$$

Чтобы не путать угловую скорость ω со скоростью υ некоторой точки твердого тела, последнюю называют линейной скоростью.

Формула (1.44) позволяет выражать линейную скорость (1.39) и центростремительное ускорение (1.41) через угловую скорость:

$$\upsilon = \omega r, \quad a_{ц} = \omega^2 r. \tag{1.45}$$

Равномерное движение по окружности, при котором точки твердого тела имеют постоянные по модулю линейные скорости (υ = const), может быть определено как вращение с постоянной угловой скоростью (ω= const).

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Что называется равномерным движением по окружности?
2. Что представляют собой траектории точек твердого тела с неподвижной осью вращения?

3. Какие движения называются периодическими? Приведите примеры.
4. Как определяется период вращения?
5. Куда направлен вектор средней скорости материальной точки при движении по окружности? А мгновенной?
6. Куда направлено ускорение материальной точки при равномерном движении по окружности? Какой угол образует оно с мгновенной скоростью?
7. Как определяется угловая скорость? В каких единицах она выражается?
8. Частота вращения диска радиусом $r = 0{,}2$ м равна $\nu = 15$ с$^{-1}$. Определите скорость точек на краю диска.
9. Скорость точек на краю махового колеса диаметром $d = 0{,}3$ м равна $\upsilon = 1{,}57$ м/с. Чему равен период вращения махового колеса?
10. Чему равна скорость точки на экваторе Земли, обусловленная суточным вращением последней? Радиус Земли принять $R = 6\,400$ км.
11. Одна из точек тела, равномерно вращающегося вокруг неподвижной оси, имеет скорость $\upsilon_1 = 8$ м/с, а другая, расположенная на $d = 0{,}15$ м ближе к оси, – скорость $\upsilon_2 = 5$ м/с. Чему равно расстояние от второй точки до оси вращения?
12. Минутная стрелка часов в $k = 3$ раза длиннее секундной. Вычислите отношение скоростей точек, лежащих на концах стрелок.
13. Велосипедист едет по трассе в форме полуокружности радиусом $r = 60$ м со скоростью $\upsilon = 12$ м/с. Чему равно центростремительное ускорение велосипедиста?
14. Центростремительное ускорение материальной точки, движущейся по окружности со скоростью $\upsilon_1 = 0{,}6$ м/с, равно $a_{ц1} = 0{,}9$ м/с^2. Чему равно центростремительное ускорение точки при движении по той же окружности со скоростью $\upsilon_2 = 0{,}8$ м/с?
15. Два колеса, имеющие радиусы $r_1 = 5$ см и $r_2 = 15$ см, соединены ременной передачей. Определите угловую скорость второго колеса, если период вращения первого колеса равен $T_1 = 0{,}628$ с.
16. Точка на краю диска радиусом $r = 0{,}2$ м, вращающегося равномерно, имеет центростремительное ускорение $a_ц = 1{,}8$ м/с^2. Чему равна угловая скорость диска?
17. Некоторая точка вращающегося тела имеет скорость $\upsilon = 3{,}2$ м/с и центростремительное ускорение $a_ц = 25{,}6$ м/с^2. Определите угловую скорость тела и расстояние от этой точки до оси вращения.

1.9° ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ ПО ПАРАБОЛИЧЕСКИМ ТРАЕКТОРИЯМ

Движение материальной точки, брошенной под углом к горизонту, представляет собой еще одну форму криволинейного движения. Допустим, что материальная точка брошена с поверхности Земли со скоростью $\vec{\upsilon}_0$, образующей угол α с горизонтом. Выберем систему координат с началом O в точке бросания, ось Ox направим горизонтально, ось Oy – вертикально. Таким образом, вектор начальной скорости $\vec{\upsilon}_0$ будет лежать в координатной плоскости xOy (*рис. 1.55*).

Ускорение тела равно ускорению свободного падения $\vec{g}$, направленному вертикально вниз. Следовательно, проекции ускорения тела на оси координат равны:

$$a_x = 0, \quad a_y = -g. \tag{1.46}$$

Для анализа движения тела в плоскости xOy после бросания разложим это движение на два составляющих движения вдоль осей: Ox и Oy (*рис. 1.55*).

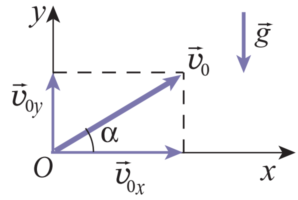


Рис. 1.55

Первое из соотношений (1.46) показывает, что движение вдоль оси Ox является равномерным. Скорость тела v_x остается постоянной и равна начальной скорости $v_x = v_{0x} = v_0 \cos\alpha$ (*рис. 1.55*).

В начальный момент времени координата $x_0 = 0$, поэтому для координаты x в соответствии с формулой (1.11) для прямолинейного равномерного движения можем записать: $x = v_x t = v_0 t \cdot \cos\alpha$.

Движение в направлении оси Oy – это движение тела, брошенного вертикально вверх из начала координат с начальной скоростью $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$ (*рис. 1.55*). Подставив это значение в формулы (1.29) и (1.30), получим:

$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt,$$

$$y = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Таким образом, в случае тела, брошенного из начала координат со скоростью $\vec{v}_0$ под углом α к горизонту, получаем следующие соотношения:

1) для проекций скорости:

$$\boldsymbol{v_x = v_0 \cos\alpha,} \qquad (1.47)$$

$$\boldsymbol{v_y = v_0 \sin\alpha - gt;} \qquad (1.48)$$

2) для координат:

$$\boldsymbol{x = v_0 t \cos\alpha,} \qquad (1.49)$$

$$\boldsymbol{y = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}.} \qquad (1.50)$$

В первую очередь установим, по какой траектории движется тело. Для получения ее уравнения исключим время из уравнений (1.49) и (1.50). Получаем $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$ и

$$\boldsymbol{y = \mathrm{tg}\alpha \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2.} \qquad (1.51)$$

Это уравнение параболы, ветви которой направлены вниз (коэффициент при x^2 отрицателен). Точки пересечения параболы с осью Ox (*рис. 1.56*) определяются из условия $y = 0$. Получаем два значения x: $x_1 = 0$ и $x_2 = \dfrac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$. Первое значение очевидно, оно указывает на тот факт, что тело брошено из начала координат, через которое проходит парабола. Второе значение дает путь, пройденный материальной точкой по горизонтали до падения на Землю (*рис.1.56*), называемый **дальностью полета**:

$$\boldsymbol{L = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.} \qquad (1.52)$$

Это выражение показывает, что при данной скорости v_0 максимальная дальность полета достигается при $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ ($\sin 2\alpha = 1$). Получаем $L_{max} = \dfrac{v_0^2}{g}$.

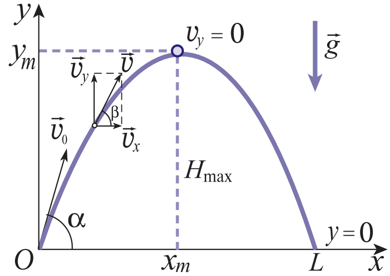


Рис. 1.56

Другой характерной точкой параболы является ее вершина. Как видно из *рисунка 1.56*, координата вершины y_m равна максимальной высоте подъема тела $H_{\max}$, а координата x_m равна расстоянию по горизонтали от этой точки до места бросания. Значения этих координат могут быть вычислены из условия, что на максимальной высоте скорость тела по вертикали υ_y равна нулю: $\upsilon_y = 0$. Это же условие использовалось для определения максимальной высоты подъема тела, брошенного вертикально вверх. Подставив $\upsilon_y = 0$ в (1.48), получим время подъема:

$$t_{\text{под.}} = \frac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g}, \tag{1.53}$$

затем из (1.50) – максимальную высоту подъема:

$$H_{\max} = \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\alpha}{2g}. \tag{1.54}$$

Для координаты x_m из (1.49) и (1.53) получаем $x_m = \dfrac{\upsilon_0^2 \sin\alpha\,\cos\alpha}{g} = \dfrac{L}{2}$, откуда видно, что парабола симметрична относительно прямой $x = x_m$.

Полное время полета (движения) $t_{\text{дв.}}$ получается из выражения (1.50) при подстановке координаты точки падения $y = 0$:

$$t_{\text{дв.}} = \frac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g}, \tag{1.55}$$

то есть полное время полета в два раза больше времени подъема (1.53).

Подставив время (1.55) в формулу (1.49) для координаты x, получим для дальности полета выражение (1.52).

Угол $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ соответствует частному случаю движения тела, брошенного вертикально вверх, а формулы (1.53) – (1.55) переходят в формулы (1.31) – (1.33), полученные для этого частного случая.

Выражения (1.47) и (1.48) позволяют определять модуль скорости тела в любой момент времени:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{(\upsilon_0 \cos\alpha)^2 + (\upsilon_0 \sin\alpha - gt)^2} \tag{1.56}$$

и угол β, образованный скоростью и горизонталью. Как видно из *рисунка 1.56*:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_x} = \frac{\upsilon_0 \sin\alpha - gt}{\upsilon_0 \cos\alpha}. \tag{1.57}$$

Принимая во внимание выражение (1.53) для времени подъема $t_{\text{под.}}$, обнаруживаем, что $\operatorname{tg}\beta > 0$ для $t < t_{\text{под.}}$ и $\operatorname{tg}\beta < 0$ для $t > t_{\text{под}}$. Это же следует и из формы траектории (*рис. 1.56*), если принять во внимание, что мгновенная скорость направлена по касательной к траектории.

Рассмотрим более общий случай: тело брошено с некоторой высоты h_0 со скоростью $\vec{\upsilon}_0$ под углом α к горизонту (*рис. 1.57*). По сравнению с предыдущим случаем изменение претерпевает только выражение (1.50) для координаты y, которое принимает вид:

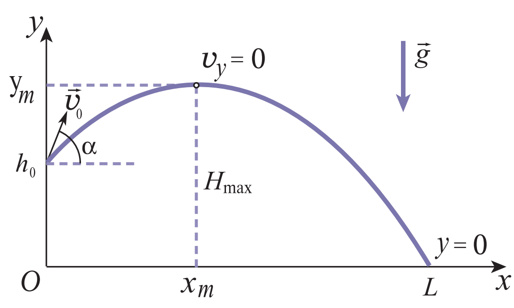


Рис. 1.57

$$y = h_0 + v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}. \qquad (1.58)$$

Разберем еще один частный случай: тело, находящееся на высоте h_0 над поверхностью Земли, брошено горизонтально. Угол $\alpha = 0$, и формулы (1.47) – (1.49) и (1.58) теперь принимают вид:

$$v_x = v_0, \ v_y = -gt, \qquad (1.59)$$

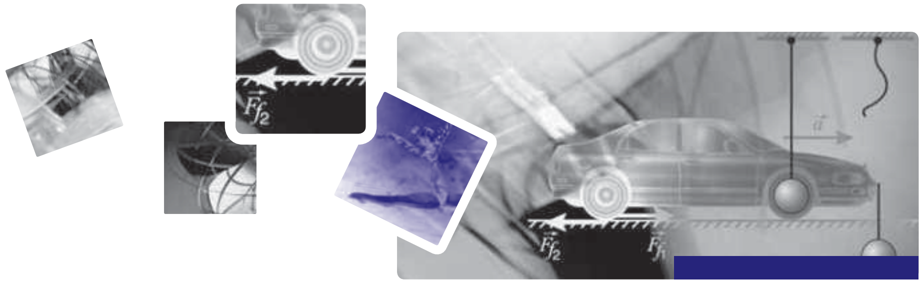
$$x = v_0 t, \ y = h_0 - \frac{gt^2}{2}. \qquad (1.60)$$

Эти выражения позволяют вычислять все величины, описывающие движение тела, брошенного горизонтально.

Из анализа случаев движения, рассмотренных выше, приходим к выводу, что движение тела с постоянным ускорением ($\vec{a}=$ const) в общем случае является движением по параболической траектории. И только в частном случае, когда начальная скорость $\vec{v}$ коллинеарна постоянному ускорению $\vec{a}$, движение тела происходит прямолинейно равнопеременно.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Получите выражение (1.54) для максимальной высоты полета H_{max}, исходя из уравнения траектории (1.51).
2. Рассмотрите два тела, брошенных с поверхности Земли под разными углами $\alpha_1 = \alpha$ и $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha$, где $\alpha < 45°$, но с равными по модулю начальными скоростями. Чему равны дальности полета этих тел? Максимальные высоты подъема? Чем отличаются их траектории?
3. Можно ли утверждать, что движение с постоянным ускорением ($\vec{a}=$ const) всегда является прямолинейным равноускоренным движением? Обоснуйте ответ.
4. Дальность полета тела, брошенного горизонтально со скоростью $v_0 = 20$ м/с, равна высоте, с которой оно было брошено. Найдите эту высоту.
5. Тело брошено с башни горизонтально со скоростью $v_0 = 12$ м/с. Зная, что его скорость в момент касания грунта составляет угол $\beta = 30^\circ$ с вертикалью, определите:
   а) модуль скорости тела в момент касания грунта;
   б) время, через которое тело достигло Земли;
   в) высоту башни, с которой оно было брошено;
   г) расстояние от основания башни до места приземления.
6. С какой минимальной скоростью должно быть брошено тело под углом к горизонту, чтобы его максимальная дальность полета была равна $L = 40$ м?
7. Ребенок бросает мяч со скоростью $v_0 = 20$ м/с под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. Зная, что через $t = 2$ с мяч ударяется о вертикальную стену, определите, на какой высоте произошел удар, его скорость в момент удара и угол, который она образует с горизонтом.
8. Тело брошено с высоты $h_0 = 15$ м со скоростью $v_0 = 40$ м/с под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. Определите:
   а) максимальную высоту подъема тела;
   б) полное время, за которое оно достигает Земли;
   в) путь, пройденный телом по горизонтали до места касания грунта.



Глава II

ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ. СИЛЫ В ПРИРОДЕ

2.1 ЗАКОН ИНЕРЦИИ. ИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

При описании движения в рамках кинематики подчеркивалось, что система отсчета выбирается из соображений удобства и она может быть связана с любым телом. Таким образом, с точки зрения кинематики, все системы отсчета эквивалентны (равноправны). Каковы же, с точки зрения динамики, ответы на вопросы: «Почему тело движется именно таким, а не иным образом? Существуют ли привилегированные системы отсчета или все они равноправны?» Ответ на последний вопрос впервые был получен Галилеем в результате анализа ряда наблюдений и опытов. Рассмотрим некоторые из них.

Небольшой желоб закрепляют слегка наклонно так, чтобы его нижний конец касался поверхности стола (*рис. 2.1*). Из одного и того же положения по желобу несколько раз спускают металлический шарик. Перед каждым новым спуском поверхность стола, по которой продолжает двигаться шарик после скатывания по желобу, накрывают другим материалом. Измеряют путь, пройденный шариком до остановки.

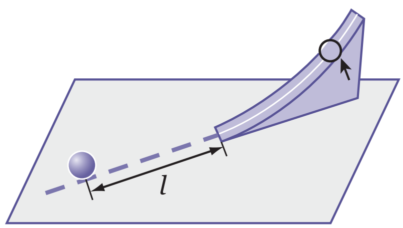


Рис. 2.1

Сначала стол накрывают куском шерстяной ткани, по которой шарик проходит до остановки путь l_1. В случае, когда в продолжение желоба положен кусок картона, путь l_2, пройденный шариком, больше: $l_2 > l_1$. Еще больше путь l_3, пройденный шариком по горизонтальной стеклянной поверхности (шарик упадет с нее при недостаточной длине). Эти результаты ясно показывают, что путь, пройденный шариком по горизонтали, зависит от свойств тела, по которому он продолжает двигаться, от особенностей его поверхности. Движение шарика тормозится как телом, по которому он движется, так и окружающим воздухом. Чем более гладкой является поверхность, тем меньше торможение движения, шарик движется дольше и проходит больший путь.

После серии опытов Галилей пришел к выводу: **тело никогда не прекратит двигаться прямолинейно и равномерно, если на него не будут воздействовать окружающие тела**.

Представим себе „идеальный" эксперимент такого рода: тело движется в вакууме, подставкой ему служит „магнитная подушка". Мы устанавливаем, что его скорость практически не изменяется со временем, движение является прямолинейным и равномерным.

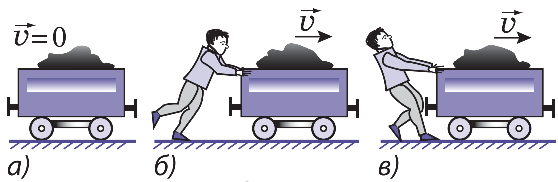


Рис. 2.2

Рассмотрим другой опыт. Груженая тележка покоится на горизонтальной поверхности. Замечаем, что она продолжает покоиться до тех пор, пока другие тела не действуют на нее (*рис. 2.2, а*). Чтобы заставить ее двигаться, то есть вывести из состояния покоя, необходимо внешнее воздействие (*рис. 2.2, б*). Однако если тележка движется, то для ее остановки также необходимо определенное внешнее воздействие (*рис. 2.2, в*). На основании этих опытов и подобных других было отмечено свойство тел сохранять состояние прямолинейного равномерного движения или покоя до тех пор, пока другие тела не заставят их изменить это состояние. Это свойство было названо **инерцией**. Очевидно, данное свойство проявляется в чистом виде в случае свободных тел (так называются тела, на которые извне не действуют другие тела). В описанных опытах на шарик и тележку действуют Земля и тело, на поверхности которого они находятся. Однако эти действия не влияют на состояние движения рассматриваемых тел, поэтому говорят, что они **компенсируются**, или **уравновешиваются**. Для того чтобы убедиться в существовании компенсации действий тел, разберем следующий опыт (*рис. 2.3*). Шарик покоится под действием Земли и нити, на которой он подвешен (*рис. 2.3, а*). При разрезании нити (*рис. 2.3, б*) действие последней исключается, компенсация действий нарушена, шарик падает на Землю, то есть выводится из состояния покоя нескомпенсированным действием со стороны Земли.

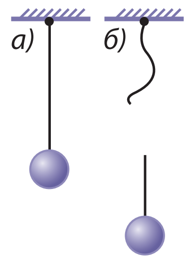


Рис. 2.3

Подводя итог изложенному выше, приходим к выводу, впервые высказанному Галилеем, а затем обобщенному Ньютоном и включенному им в число законов механики как **первый закон** или **закон инерции**:

> **Всякое тело сохраняет состояние покоя или прямолинейного равномерного движения до тех пор, пока воздействие со стороны других тел не заставит его изменить это состояние.**


Рис. 2.4

Отметим, что рассмотренные выше опыты были выполнены и проанализированы в системе отсчета, связанной с Землей, следовательно, сформулированный закон выполняется в этой системе отсчета. Однако можно убедиться, что существуют системы отсчета, в которых закон инерции не выполняется. Например, наблюдатель находится на вращающемся диске или карусели (*рис.2.4*). Он видит, что окружающие деревья и дома вращаются вокруг него, хотя на них в горизонтальной плоскости не действуют другие тела.

Системы отсчета, в которых выполняется закон инерции, называются инерциальными, или галилеевыми системами отсчета, а те, в которых этот закон не выполняется, называются неинерциальными. Для того чтобы установить, является ли рассматриваемая система отсчета инерциальной или нет, нужно проверить экспериментально, справедлив ли закон инерции в этой системе отсчета.

Из сказанного выше следует, что система отсчета, связанная с Землей, называемая также **геоцентрической**, является инерциальной. Однако надо осознавать, что на самом деле она лишь приближенно является инерциальной, так как все тела на поверхности Земли имеют центростремительное ускорение благодаря ее суточному вращению. Это ускорение, однако, намного меньше ускорения свободного падения и в большинстве задач на движение центростремительное ускорение можно не учитывать, а систему отсчета, связанную с Землей, считать инерциальной.

С гораздо большей степенью точности инерциальной является система отсчета с началом в центре Солнца и осями координат, направленными на определенные звезды (**гелиоцентрическая** система). В соответствии с законом инерции состояние прямолинейного равномерного движения тел является их нормальным состоянием (о таких телах обычно говорят, что они движутся по инерции). Они и могут только непрерывно двигаться. Тела, которые покоятся относительно Земли, обращаются вокруг ее оси, вместе с Землей обращаются вокруг Солнца, а вместе с ним движутся во Вселенной. Мы часто замечаем, что движение тел вокруг нас со временем замедляется и они останавливаются. Это, однако, не противоречит закону инерции – движение тел замедляется вследствие воздействия других окружающих тел, которые вынуждают движущиеся тела постепенно уменьшать свою скорость, вплоть до остановки.

ВОПРОСЫ

1. В чем проявляется свойство инерции тел? Приведите примеры, которые отличаются от изложенных в учебнике.
2. Как формулируется закон инерции?
3. Какие системы отсчета являются инерциальными?
4. Как можно установить, является ли система отсчета инерциальной?
5. Проделайте следующий опыт. Сделайте несколько одинаковых бумажных колец и тонкую деревянную палочку. Используйте два подвеса и смонтируйте механическое устройство, показанное на *рисунке 2.5*. Возьмите в руку металлический прут, слегка надавите им на середину деревянной палочки, потом давите все сильнее и сильнее. Вдруг вы заметите, что одно из бумажных колец порвалось. Замените его целым и продолжайте опыт. На этот раз резко ударьте металлическим прутом по деревянной палочке. Вы обнаружите, что теперь сломалась деревянная палочка, а бумажные кольца остались целыми. Как вы объясните этот опыт?

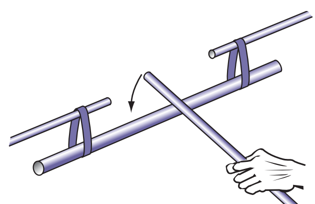


Рис. 2.5

6. Почему, прежде чем использовать медицинский термометр, его обычно встряхивают? Объясните это явление.

2.2 МАССА И СИЛА. ОСНОВНОЙ ЗАКОН ДИНАМИКИ

а. Фундаментальные взаимодействия

Всё многообразие явлений, наблюдаемых во Вселенной, определяется взаимодействиями между телами. Благодаря взаимодействию небесные тела располагаются в определенном порядке, а структура вещества в различных состояниях стабильна. Все процессы, происходящие в природе, также являются результатом взаимодействий между телами.

Несмотря на то, что вещество состоит из огромного числа различных частиц, взаимодействующих между собой, согласно современным представлениям существует только четыре типа взаимодействий, называемых фундаментальными: **гравитационное**, **электромагнитное**, **слабое** и **сильное**.

Гравитационное взаимодействие универсально. Оно осуществляется между всеми телами, но становится существенным для очень больших тел Вселенной или для одного из них (например, взаимодействие между автомобилем и Землей). Благодаря этому взаимодействию атмосфера, моря и океаны, а также все тела вокруг нас притягиваются Землей, Луна вращается вокруг Земли, а Земля вместе с Луной – вокруг Солнца.

Электромагнитное взаимодействие существует между всеми телами и частицами, обладающими электрическим зарядом. Именно это взаимодействие определяет поведение макроскопических заряженных тел, молекул, атомов и ионов, из которых состоят тела. Электромагнитное взаимодействие связывает электроны и ядра в атомы и молекулы, а атомы и молекулы – в разные вещества с различными свойствами.

Как гравитационное, так и электромагнитное взаимодействия осуществляются на расстоянии. Их интенсивность уменьшается при увеличении расстояния между частицами или телами, радиус их действия неограничен.

Слабое взаимодействие свойственно всем элементарным частицам, за исключением фотонов, и проявляется в процессах их взаимного превращения. Слабые взаимодействия имеют очень малый радиус действия, они происходят между частицами, находящимися на расстояниях, меньших 10^{-18} м.

Сильное, или *ядерное, взаимодействие* осуществляется между частицами, составляющими ядра атомов, удерживая их в связанном состоянии. Радиус его действия порядка размеров ядер и менее, то есть 10^{-15} м.

Частицы, составляющие атомное ядро, протоны и нейтроны, а также другие элементарные частицы будут изучаться в XII классе.

б. Масса

С VI класса вам известно, что инерция тел характеризуется физической величиной, называемой **массой**. Сейчас мы рассмотрим опыт, позволяющий сравнивать массы различных тел между собой, в том числе сравнивать их массы с массой тела, принятого за эталон массы. Возьмем две тележки, которые могут двигаться по прямолинейному участку гладкого пути. На каждой из них укреплен полосовой магнит, расположенный вдоль направления движения. Кроме того, каждая тележка снабжена акселерометром – прибором для определения ускорения движения (акселерометры используются главным образом на летательных аппаратах). Приблизим тележки одноименными полюсами друг к другу (*рис. 2.6, а*). В какой-то момент

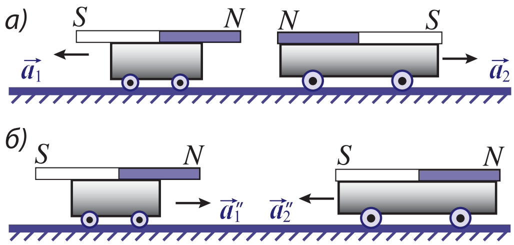


Рис. 2.6

освободим тележки: они отталкиваются и удаляются друг от друга. Регистрируем их ускорения: в один из моментов времени (при определенном расстоянии друг от друга) ускорения тележек равны a_1 и a_2, а в более поздний момент (при большем расстоянии) значения ускорений a_1' и a_2'. Устанавливаем, что $a_1' < a_1$ и $a_2' < a_2$. Вычислив отношения ускорений, получаем: $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_2'}{a_1'}$.

Повторим опыт, расположив тележки разноименными полюсами друг к другу (*рис. 2.6, б*). После освобождения вследствие магнитного притяжения тележки сближаются. В какой-то момент их ускорения равны a_1'' и a_2'', а в один из последующих моментов они имеют значения a_1''' и a_2'''. Убедимся, что $a_1''' > a_1''$ и $a_2''' > a_2''$, а их отношения равны: $\frac{a_2''}{a_1''} = \frac{a_2'''}{a_1'''}$.

Таким образом, проведя эксперименты такого рода, замечаем, что всякий раз, когда ускорение одной тележки увеличивается (уменьшается), ускорение другой тележки также увеличивается (уменьшается), то есть ускорения тележек возрастают или убывают одновременно. Взяв отношения всех соответствующих ускорений тележек, получим закономерность, а именно:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_2'}{a_1'} = \frac{a_2''}{a_1''} = \dots, \tag{2.1}$$

то есть **отношение ускорений двух взаимодействующих тел является постоянной величиной независимо от характера их взаимодействия.**

О теле, которое в результате взаимодействия получило меньшее ускорение, то есть больше сопротивляется изменению своей скорости, говорят, что оно более инертно, чем другое. Для характеристики этого свойства тел оказывать сопротивление изменению своей скорости используется физическая величина, называемая **массой** (ее еще называют **инертной массой**). Обозначим массы взаимодействующих между собой тел m_1 и m_2 и напишем зависимость, которая определяет их отношение:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}, \tag{2.2}$$

то есть по определению:

Отношение масс двух тел обратно пропорционально отношению ускорений этих тел, полученных в результате взаимодействия между ними.

Таким образом, исходя из описанного эксперимента и на основе зависимости (2.2), могут быть определены отношения масс различных тел.

Очевидно, что для нахождения массы любого отдельного тела необходимо сначала выбрать какое-нибудь тело в качестве эталона, масса которого условно принята за единицу массы.

Эталон массы представляет собой цилиндр из сплава платины (90%) и иридия (10%), диаметр и высота которого равны 39 мм. Этот эталон хранится в особых условиях (*рис. 2.7*) в Международном бюро мер и весов в Севре. Копии эталона хранятся во многих странах. Масса эталона считается равной единице массы и называется килограмм (кг – основная единица Международной системы (СИ)).

Если мы определим ускорение какого-либо тела a и взаимодействующего с ним эталона массы $a_{эт.}$, то, обозначив их массы m и $m_{эт.}$, в соответствии с (2.2) получим $\frac{m}{m_{эт.}} = \frac{a_{эт.}}{a}$.

Следовательно, масса тела

$$\boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{m}_{эт.}\,\boldsymbol{a}_{эт.}}{\boldsymbol{a}}. \qquad (2.3)$$

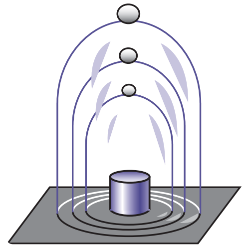


Рис. 2.7

Исследуя взаимодействие этого тела (с уже известной массой) с другим и определив их ускорения, можем найти массу второго тела и т.д.

Описанный метод нахождения массы тел не является единственным. В случае макроскопических тел чаще всего используется взвешивание тел, в основе которого лежит сравнение масс по действию, оказываемому Землей на рассматриваемые тела. Массы микроскопических частиц – молекул, атомов, электронов и т.д. – находятся специальными методами.

Отметим два важных свойства массы тела:

1. Тело, составленное из тел, массы которых равны m_1, m_2, …, m_n, ведет себя как одно с массой, равной сумме масс, составляющих его тел:

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{m}_2 + \ldots + \boldsymbol{m}_n. \qquad (2.4)$$

Это свойство массы называется **аддитивностью** (в латинском языке *additivus* – полученный сложением).

2. В механике масса тела считается величиной постоянной, не зависящей от системы отсчета, выбранной для описания его движения. В 1905 году было установлено, что это свойство обнаруживается только у тел, скорости которых много меньше скорости света в вакууме, равной c = 300 000 км/с.

в. Сила

Тела приобретают ускорения в результате их взаимодействия с другими телами. Следовательно, если тело движется с ускорением, то оно сообщено другим телом (или другими телами), которое действует на данное. Величина ускорения может быть различной, это означает, что и соответствующие действия также различны.

Физическая величина, которая характеризует действие одного тела на другое, называется *силой* (обычно обозначается $\vec{F}$).

Сила определяется **точкой приложения** (к телу, на которое она действует), **модулем** и **направлением**. Прямая, на которой лежит вектор силы, называется **линией действия**. Единицей силы в СИ является **ньютон** (Н), его определение будет дано позднее.

Вблизи поверхности Земли все свободные тела падают с одинаковым ускорением $\vec{g}$ (см. п.1.7, *ж*). Это ускорение, сообщенное телу Землей, является проявлением ее действия на свободное тело. Тот факт, что ускорение свободного падения направлено вертикально вниз, позволяет нам предположить, что и сила, его вызывающая, также направлена вертикально вниз. Сила, с которой Земля действует на тело вблизи нее и сообщает ему ускорение свободного падения, называется **силой тяжести** (обозначается $\vec{G}$).

Рассмотрим другой пример. Верхний конец пружины закреплен, а нижний снабжен кольцом, к которому на крючках можно подвешивать тела (*рис. 2.8, а*). Длину недеформированной пружины обозначим l_0. При подвешивании к пружине тела ее длина увеличивается на Δl (*рис. 2.8, б*). Подвешенное тело покоится. Следовательно, действие на тело со стороны Земли уравновешено действием деформированной пружины. Таким образом, действие одних тел может вызывать деформацию других.

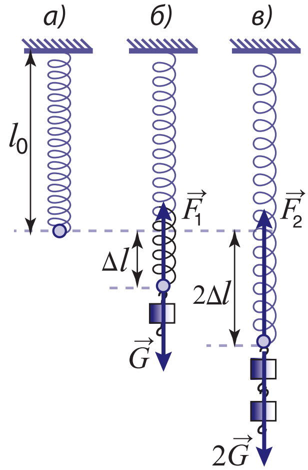


Рис. 2.8

На подвешенное тело со стороны Земли действует сила тяжести $\vec{G}$, а со стороны деформированной пружины сила $\vec{F}_1$, направленная вертикально вверх и называемая **силой упругости**. Сила упругости уравновешивает силу тяжести, их сумма равна нулю $\vec{F}_1 + \vec{G} = 0$. Эти две силы имеют равные модули, ту же линию действия, но противоположные направления. Отметим, что точки приложения сил, действующих на тело, вообще говоря, различны. Однако приближение, используемое в механике, согласно которому тела можно считать материальными точками, позволяет показывать силы, исходящими из **общей точки приложения**.

Если мы подвесим еще одно такое же тело, удлинение пружины станет равным $2\Delta l$ (*рис. 2.8, в*). Условие равновесия тел принимает вид $\vec{F}_2 + 2\vec{G} = 0$, где $\vec{F}_2$ – сила упругости в данном случае. Обнаруживаем, что удвоение силы тяжести сопровождается удвоением силы упругости и увеличением удлинения пружины также в два раза.

Следовательно, упругая пружина может быть использована для сравнения величин сил. Она является главной частью **динамометра** (*рис. 2.9*) – прибора, применяемого для измерения сил. На его шкале указаны в ньютонах значения сил, вызывающих соответствующие удлинения пружины.


Рис. 2.9

Резюмируя изложенное выше, констатируем, что сила – это векторная физическая величина, которая характеризуется точкой приложения, модулем и направлением. Действуя на тело, сила сообщает ему ускорение или вызывает деформацию. Сила определяется двумя телами: телом, на которое она действует, и телом, которое действует с этой силой.

г. Основной закон динамики

Ускорение тела вызывается силой, действующей на него. Для установления связи, которая существует между этими величинами, проделаем следующий опыт.

Исследуем движение тележки по длинному гладкому горизонтальному столу, к концу которого прикреплен неподвижный блок. На тележке находятся несколько одинаковых тел с крючками. К тележке привязана нить, перекинутая через блок. Подвесим одно из тел с тележки к свободному концу нити (*рис. 2.10, а*). Освободим тележку и определим время t_1, за которое она пройдет путь s_1. Повторим опыт и определим время t_2, за которое тележка проходит путь s_2. Устанавливаем равенство отношений $\frac{s_1}{s_2} = \frac{t_1^2}{t_2^2}$, то есть путь, пройденный из состояния покоя, пропорционален квадрату времени. Эта зависимость характерна для равноускоренного движения с нулевой начальной скоростью: $s = \frac{at^2}{2}$. Используя полученные данные, вычисляем ускорение $a_1 = \frac{2s_1}{t_1^2}$, сообщенное тележке силой тяжести $\vec{G}$ одного подвешенного тела.

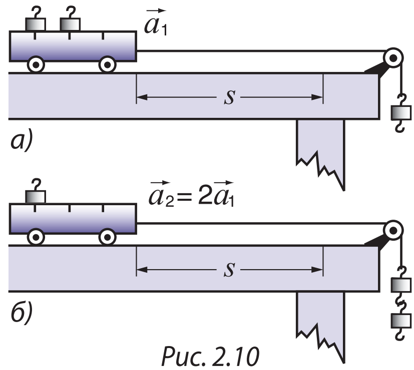


Рис. 2.10

Возьмем еще одно тело с тележки и присоединим к подвешенному (*рис. 2.10, б*). Масса движущихся тел осталась прежней, а сила тяжести, сообщающая ускорение, удвоилась, стала равной $2\vec{G}$. Убеждаемся, что и ускорение тел удвоилось: $a_2 = 2a_1$.

Присоединив к подвешенным телам третье тело с тележки, обнаруживаем, что сила тяжести $3\vec{G}$ сообщает ускорение $a_3 = 3a_1$. Следовательно, ускорение системы тел постоянной массы прямо пропорционально силе, вызывающей это ускорение:

$$a \sim F \text{ (для } m = \text{const.).}$$

Чтобы изучить зависимость ускорения от массы тела (при постоянной силе), соединим с первой тележкой на столе вторую, идентичную той и имеющую такие же три одинаковых тела, что и первая. Таким образом, масса системы тел удвоилась. Проведя опыт с одним подвешенным телом, получим ускорение, равное $\frac{a_1}{m}$, а в случае двух подвешенных тел – $\frac{a_2}{m}$ и т.д. Следовательно, одна и та же сила сообщает системе тел с вдвое большей массой ускорение, в два раза меньшее, то есть ускорение обратно пропорционально массе:

$$a \sim \frac{1}{m} \text{ (для } F = \text{const.).}$$

Из вышеприведенных результатов следует:

$$a \sim \frac{F}{m} \text{ или } ma \sim F.$$

Чтобы перейти к равенству, нужно ввести коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц величин. В СИ этот коэффициент считается равным единице, следовательно, полученная зависимость принимает вид:

$$\boldsymbol{ma = F}. \tag{2.5}$$

Сила и ускорение – векторные величины, имеющие одинаковое направление, то есть выражение (2.5) может быть записано в векторной форме:

$$m\vec{a} = \vec{F}. \tag{2.6}$$

Произведение массы тела на его ускорение равно силе, сообщающей телу это ускорение.

Данная формулировка выражает **основной закон динамики**, называемый также **вторым законом динамики**, или **вторым законом Ньютона**. Используя зависимость (2.6), можно найти силу, действующую на тело, если известно его ускорение, и обратно, зная силу, можно определить ускорение тела, а следовательно, и характер движения.

В выражении (2.5) подразумевается, что все точки тела имеют одинаковое ускорение, это наблюдается только в случае тела, которое можно считать материальной точкой, или абсолютно твердого тела, движущегося поступательно (если тело деформируется, расстояния между его точками изменяются со временем, значит, их скорости и ускорения различны). Подставив в формулу (2.5) массу тела m = 1 кг и ускорение a = 1 м/с^2, получим единицу силы в СИ – ньютон (Н):

$$[F] = [m]\cdot[a] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н}.$$

Ньютон – это сила, которая телу массой 1 кг сообщает ускорение, равное 1 м/с^2.

Эксперименты, подтверждающие основной закон динамики, были проведены в системе отсчета, связанной с Землей, которая считается инерциальной. Следовательно, данный закон применим только в инерциальных системах отсчета.

Если мы подставим $\vec{F} = 0$ в формулу (2.6), то получим ускорение $\vec{a} = 0$, а это означает, что скорость $\vec{v}$ = const, следовательно, движение является прямолинейным и равномерным. То есть в отсутствие действия извне ($\vec{F} = 0$) тело движется прямолинейно и равномерно ($\vec{v}$ = const). Создается впечатление, что закон инерции является следствием основного закона динамики. Однако ситуация иная: основной закон выполняется лишь в инерциальных системах отсчета, а они могут быть выбраны только с использованием закона инерции. Таким образом, вывод о прямолинейном и равномерном движении тела в отсутствие внешнего воздействия показывает, что первый и второй законы динамики находятся в согласии, а не противоречат друг другу.

Исаак НЬЮТОН (1643–1727), английский ученый.

Достиг выдающихся результатов в механике, оптике, астрономии и математике.

Ньютон проанализировал исследования своих предшественников и свои собственные в области механики, обобщил их и изложил в фундаментальном труде „Математические начала натуральной философии” (1687). Там он впервые сформулировал три закона (закон инерции, основной закон динамики, закон действия и противодействия), которые составляют фундамент механики, позднее названной классической или ньютоновской. В этой работе был изложен и закон всемирного тяготения, установленный им. Исходя из этого закона и законов динамики, Ньютон обосновал экспериментальные законы Кеплера, касающиеся движения планет, объяснил особенности движения Луны, приливы и отливы, развил теорию формы Земли, отметив ее сплюснутость на полюсах. Он получил выражение для силы сопротивления, которая действует на тело, движущееся в жидкости или газе. Создал основы дифференциального и интегрального исчисления.

Ньютон внес важный вклад в оптику. В 1666 году, используя трехгранную призму, разложил белый свет на различные цвета, изучил дисперсию света. Изучал интерференцию и дифракцию света, цвета тонких пленок, обнаружил интерференционную картину в виде колец (кольца Ньютона). Сконструировал телескоп-рефлектор с оригинальной оптической системой (телескоп Ньютона), в котором одна из линз была заменена вогнутым сферическим зеркалом. Результаты исследований в этой области были изложены в работе „Оптика” (1704).

Научная деятельность Ньютона имеет особую значимость в истории развития физики. Согласно А. Эйнштейну „Ньютон был первым, кто попытался сформулировать простые законы, определяющие протекание во времени обширной гаммы явлений природы” и „... своими работами оказал глубокое и сильное влияние на наши взгляды на природу”.

д°. Принцип суперпозиции сил

Зависимость (2.6) установлена для тела, на которое действует одна сила. Однако чаще всего тела подвержены действию нескольких сил. Для выяснения, как формулируется основной закон динамики в этом случае, рассмотрим тело массой m, на которое действует несколько сил: $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$. Ускорения, сообщенные этими силами, равны:

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{F}_1}{m}, \vec{a}_2 = \frac{\vec{F}_2}{m}, ..., \vec{a}_n = \frac{\vec{F}_n}{m}. \qquad (2.7)$$

Опыт показывает, что:

При одновременном действии нескольких сил каждая из них сообщает телу ускорение независимо от действия других сил, а ускорение тела равно геометрической сумме ускорений, сообщенных каждой из сил:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + ... + \vec{a}_n. \qquad (2.8)$$

Этот результат известен под названием **принципа суперпозиции сил** или **принципа независимости действия сил**.

Подставив соотношения (2.7) в (2.8), получим $\vec{a} = \frac{\vec{F}_1}{m} + \frac{\vec{F}_2}{m} + ... + \frac{\vec{F}_n}{m}$ или

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... \vec{F}_n. \qquad (2.9)$$

Это общий вид основного закона динамики для тела, подверженного действию нескольких сил.

Сила $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... \vec{F}_n$ называется равнодействующей силой, приложенной к телу. Следовательно:

$$m\vec{a} = \vec{F}. \qquad (2.10)$$

Произведение массы тела на ускорение равно равнодействующей силе, приложенной к телу и сообщающей ему это ускорение.

Рисунок 2.11 демонстрирует это утверждение для случая, когда на тело действуют две силы.

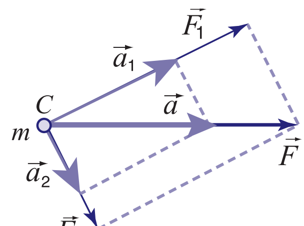


Рис. 2.11

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Что можно утверждать относительно отношения ускорений двух тел, полученных в результате взаимодействия между ними?
2. Какое свойство тела характеризуется его массой?
3. В результате взаимодействия между двумя телами ускорение первого тела втрое больше, чем ускорение второго. Что можно утверждать относительно масс этих тел?
4. Как можно определить массу какого-либо тела?
5. Как вы понимаете тот факт, что масса является величиной аддитивной?
6. Что является результатом действия сил на тело?
7. Что является единицей силы в СИ? Как она определяется?
8. Из основного закона динамики выразим массу тела: $m = \frac{F}{a}$. Можно ли, исходя из этого соотношения, утверждать, что масса тела прямо пропорциональна силе, действующей на него? Обоснуйте ответ.

9. При каких условиях тело движется равноускоренно? Аргументируйте ответ, исходя из основного закона динамики.
10. Можно ли утверждать, что закон инерции является следствием основного закона динамики? Аргументируйте ответ.
11°. Зависит ли ускорение, сообщаемое телу данной силой, от других сил, которые одновременно действуют на это тело?
12. При взаимодействии между телами A и B ускорение тела A втрое больше ускорения тела B. Ускорение, полученное телом B вследствие взаимодействия с телом C, в два раза меньше, чем ускорение тела C. Определите массу тела C, если $m_A = 0{,}4$ кг.
13. На тело действует сила, модуль которой равен 42 Н. Чему равна масса тела, если ускорение, приобретенное под действием этой силы, равно 6 м/с^2?
14. Телу массой в 1,5 кг некоторая сила сообщает ускорение $0{,}3 \text{ м/с}^2$. Найдите массу тела, которому эта же сила сообщит ускорение $0{,}4 \text{ м/с}^2$.
15. Сила 15 Н сообщает телу ускорение, равное $1{,}2 \text{ м/с}^2$. Какое ускорение сообщит этому телу сила 60 Н?
16. Тело движется прямолинейно со скоростью 4 м/с. В какой-то момент на него начинает действовать в направлении скорости сила, равная 0,8 Н. В результате скорость увеличивается до 6 м/с за время, пока тело пройдет путь, равный 15 м. Найдите массу тела.
17°. Равнодействующая двух взаимно перпендикулярных сил равна 10 Н. Одна из сил равна 6 Н. Какое ускорение сообщит вторая сила телу массой 4 кг?

2.3 ЗАКОН ДЕЙСТВИЯ И ПРОТИВОДЕЙСТВИЯ

Как известно, при взаимодействии тела действуют с некоторыми силами одно на другое. Существует ли какая-либо связь между этими силами, и если да, то какова она?

Начнем с отношения (2.2) между массами и ускорениями, полученными в результате взаимодействия:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1} \text{ или } m_1 a_1 = m_2 a_2. \qquad (2.11)$$

Из опыта, представленного на *рисунке 2.6*, видно, что векторы ускорений $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ направлены противоположно, поэтому, переходя от скалярного отношения (2.11) к векторному, получим:

$$m_1\vec{a}_1 = -m_2\vec{a}_2. \qquad (2.12)$$

Согласно основному закону (2.6) произведение $m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_{12}$ представляет собой силу, действующую на тело 1 со стороны тела 2, соответственно $m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_{21}$ – это сила, действующая на тело 2 со стороны тела 1, следовательно, выражение (2.12) принимает вид:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \qquad (2.13)$$

Это математическое **выражение третьего закона динамики** (третий закон Ньютона), называемого также **законом действия и противодействия**.

Два тела действуют друг на друга с силами, равными по модулю, расположенными вдоль одной прямой, но направленными в противоположные стороны.

Чтобы проиллюстрировать этот закон, выполним эксперимент с тележками, на которых закреплены полосовые магниты. С помощью двух одинаковых пружин прикрепим эти тележки к двум вертикальным стенкам. Если расположить тележки одноименными магнитными полюсами друг к другу (*рис. 2.12, а*), то полюса отталкиваются и пружины сжимаются одинаково, то есть силы упругости $\vec{F}_{упр.1} = -\vec{F}_{упр.2}$. Обозначим через $\vec{F}_{12}$ и $\vec{F}_{21}$ силы взаимодействия между магнитами. Каждая тележка покоится, следовательно, $\vec{F}_{упр.1} + \vec{F}_{12} = 0$ и $\vec{F}_{упр.2} + \vec{F}_{21} = 0$, откуда следует $\vec{F}_{упр.1} = -\vec{F}_{12}$ и $\vec{F}_{упр.2} = -\vec{F}_{21}$.С учетом установленной выше связи между силами упругости получим $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, то есть выражение (2.13).

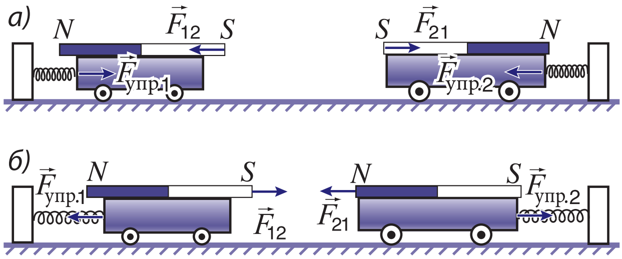


Рис. 2.12

Если тележки расположить разноименными полюсами друг к другу (*рис.2.12, б*), то можно убедиться, что удлинения пружин одинаковы. Рассуждая, как и в предыдущем случае, вновь получим выражение (2.13). Результат будет тем же и при изменении расстояния между вертикальными стенками, к которым прикреплены концы пружин.

Проанализируем еще один пример: на столе лежит губка, а на ней – тело в форме параллелепипеда (*рис. 2.13*). На тело со стороны Земли действует сила тяжести $\vec{G}$. Но тело не падает, а покоится. Вертикально вверх на него действует со стороны губки сила $\vec{F}_{г.г}$ так, что $\vec{G} + \vec{F}_{г.г} = 0$. Видно, что губка деформирована, следовательно, на нее действует сила $\vec{F}_{г.т}$ со стороны тела, положенного на нее. Эти силы $\vec{F}_{г.г}$ и $\vec{F}_{г.т}$ удовлетворяют отношению (2.13), то есть $\vec{F}_{г.г} = -\vec{F}_{г.т}$. Сила, приложенная к губке со стороны тела, обычно называется **действием**, а та, которая действует на тело со стороны губки, называется **противодействием**.

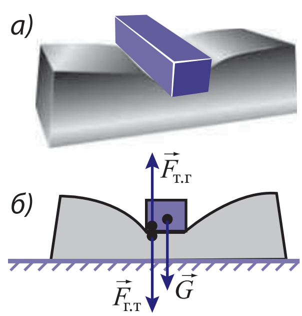


Рис. 2.13

В связи с этим законом динамики необходимо отметить следующее:

1. Силы взаимодействия между двумя телами всегда имеют одинаковую физическую природу: в первом примере силы $\vec{F}_{12}$ и $\vec{F}_{21}$ – магнитные, а во втором – силы $\vec{F}_{г.г}$ и $\vec{F}_{г.т}$ обусловлены деформациями взаимодействующих тел.

2. Силы взаимодействия приложены к разным телам и, следовательно, не могут уравновешивать друг друга.

3. Силы взаимодействия возникают одновременно. С этой точки зрения термины „сила действия” и „сила противодействия” не совсем удачны, так как создается иллюзия, что сначала появляется сила действия, а через какое-то время – сила противодействия. Если в случае тела, находящегося на губке, сила $\vec{F}_{г.т}$, приложенная к губке, может быть названа „силой действия”, тогда силу $\vec{F}_{т.г}$, приложенную к телу, надо бы назвать „силой противодействия”. Однако в случае взаимодействия магнитов ни одной из двух сил взаимодействия: $\vec{F}_{12}$ и $\vec{F}_{21}$ нельзя отдать преимущество.

Рассмотренные выше три закона динамики не являются независимыми законами, а составляют одну общую совокупность законов, тесно связанных между собой. Справедливость законов подтверждается тем, что результаты и следствия, полученные на их основе для конкретных механических систем, находятся в согласии с действительностью.

ВОПРОСЫ

1. Возможна ли ситуация, в которой одно тело действует на другое, а второе не действует на первое?
2. Могут ли уравновесить друг друга силы взаимодействия двух тел? Аргументируйте ответ.
3. Ученик держит в руках динамометр и растягивает его пружину, действуя на крючки динамометра двумя одинаковыми силами по 25 Н. Каковы показания динамометра?
4. Нить рвется, если к ней подвешено тело, для которого сила тяжести не меньше 15 Н. Порвется ли нить, если ее натягивать, прикладывая к концам силы по 10 Н каждая?

2.4° ВСЕМИРНОЕ ТЯГОТЕНИЕ

a. Закон всемирного тяготения

Свободно падающие тела движутся с ускорением. Из второго закона динамики следует, что на них действует некая сила со стороны другого тела. Что представляет собой эта сила и какова ее природа? Поскольку все тела вблизи поверхности Земли, независимо от их массы, имеют одно и то же ускорение $g = 9{,}81$ м/с^2, можно предположить, что она обусловлена Землей и представляет собой силу тяготения (притяжения), направленную к ее центру. Эта сила была названа **силой тяжести**. Согласно второму закону Ньютона, на свободно падающее тело массой m действует сила тяжести $\vec{G} = m\vec{g}$.

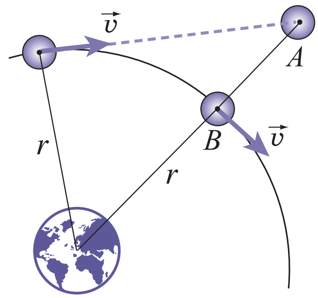


Рис. 2.14

Согласно одной из легенд, Ньютон, наблюдая падение яблока, задался вопросом: „Если свободно падающее яблоко устремляется к Земле, то не будет ли и Луна, которая тоже свободна, также падать по направлению к Земле?" Таким образом Ньютон пришел к выводу, что на Луну должна действовать сила, имеющая такую же природу, что и сила тяжести, действующая на яблоко. Она была названа **силой тяготения (гравитационной)**, и именно под ее действием траектория движения отклоняется от прямолинейной до почти круговой, что вызывает непрерывное „падение" Луны по направлению к Земле. В самом деле, если бы сила тяготения не действовала, то через небольшой промежуток времени Луна, двигаясь прямолинейно со скоростью $\vec{v}$, достигла бы точки A (*рис. 2.14*). Однако благодаря ей Луна „падает" до точки B, проходя путь AB.

Чтобы получить выражение для силы тяготения, рассмотрим ее действие на тела вблизи земной поверхности и на Луну. Мы уже знаем, что в земных условиях эта сила сообщает телам ускорение $g = 9{,}81$ м/с^2, называемое ускорением свободного падения. Ускорение, которое имеет Луна, двигаясь по почти круговой орбите, является центростремительным и определяется из выражения (1.42):

$$a_ц = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2}{T^2}r,$$

где r – радиус орбиты, то есть расстояние от Земли до Луны, а T – период обращения Луны вокруг Земли. Расстояние между Землей и Луной $r = 384403$ км $\approx 3{,}84 \cdot 10^8$ м, а период $T = 27{,}3$ суток $= 27{,}3 \cdot 24 \cdot 3600$ с. Значит, центростремительное ускорение Луны равно:

$$a_ц = \frac{4\pi^2 \cdot 3{,}84 \cdot 10^8}{(27{,}3 \cdot 24 \cdot 3\,600)^2} \approx 2{,}72 \cdot 10^{-3}\,\frac{м}{с^2}.$$

Устанавливаем, что центростремительное ускорение Луны много меньше ускорения свободного падения на поверхности Земли, а их отношение равно:

$$\frac{g}{a_ц} = \frac{9{,}81}{2{,}72 \cdot 10^{-3}} \approx 3\,600.$$

Такая связь между ускорениями приводит к пониманию, что если у поверхности Земли на тело действует определенной величины сила тяготения, то она уменьшится примерно в 3 600 раз при перенесении тела на траекторию Луны. Следовательно, сила тяготения уменьшается одновременно с увеличением расстояния между взаимодействующими телами по определенному закону.

Чтобы установить этот закон, Ньютон предположил, что Земля ведет себя как тело, масса которого сосредоточена в его центре. В таком случае расстояние между Землей и телом на ее поверхности равно радиусу Земли $R = 6\,371$ км $\approx 6{,}37 \cdot 10^6$ м. Заметим, что расстояние между центрами Земли и Луны примерно в 60 раз больше радиуса Земли: $\frac{r}{R} = \frac{3{,}84 \cdot 10^8 м}{6{,}37 \cdot 10^6 м} \approx 60$. Сравнив эти два отношения, Ньютон пришел к выводу, что $\frac{g}{a_ц} = \left(\frac{r}{R}\right)^2$ и центростремительное ускорение, сообщаемое Луне силой тяготения Земли, равно $a_ц = \frac{gR^2}{r^2}$.

Исходя из результатов, полученных при анализе движения Луны вокруг Земли, Ньютон предположил, что все тела во Вселенной взаимно притягиваются с определенной силой тяготения, которая сообщает им ускорение, обратно пропорциональное квадрату расстояния r между ними:

$$\boldsymbol{a \sim \frac{1}{r^2}}. \qquad (2.14)$$

Согласно второму закону динамики $F \sim a$. Тогда из (2.14) следует, что $F \sim 1/r^2$. С помощью третьего закона динамики можно показать, что сила тяготения пропорциональна произведению масс взаимодействующих тел.

В 1687 году Ньютон сформулировал **закон всемирного тяготения**:

***Сила тяготения*, действующая между двумя точечными телами Вселенной, прямо пропорциональна произведению их масс, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и направлена вдоль прямой, соединяющей центры тел:**

$$\boldsymbol{F = K\frac{m_1 m_2}{r^2}}. \qquad (2.15)$$

Гравитационное взаимодействие между телами – это всегда наличие пары сил действие-противодействие. Тело массы m_1 действует на тело массы m_2 силой $\vec{F}_{21}$, направленной от тела 2 к телу 1 (*рис. 2.15*). Одновременно тело массы m_2 действует на тело массы m_1 силой $\vec{F}_{12}$, направленной противоположно $\vec{F}_{21}$, но равной ей по модулю.

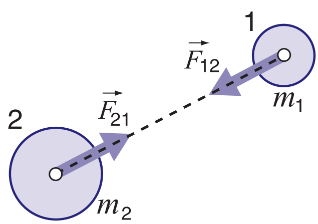


Рис. 2.15

Закон всемирного тяготения был сформулирован для точечных тел, то есть тел, размеры которых много меньше, чем расстояние между ними. Можно, однако, показать, что он справедлив и в случае однородных сферических тел, если за *r* принять расстояние между их центрами.

Постоянная *K* в (2.15) имеет одно и то же значение для любых двух тел Вселенной и называется **постоянной всемирного тяготения** или **гравитационной постоянной**. Она численно равна силе взаимодействия, выраженной в ньютонах, между двумя точечными телами массой 1 кг каждое, расположенными на расстоянии 1 м друг от друга. В СИ ее единица:

$$[K] = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{кг}^2} = \frac{\text{м}^3}{\text{кг}\cdot\text{с}^2}.$$

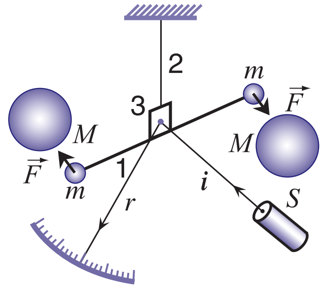


Рис. 2.16

Впервые численное значение гравитационной постоянной было определено экспериментально в 1798 году английским физиком и химиком Г. Кавендишем (1731–1810). С этой целью он использовал крутильные весы, принцип действия которых схематически представлен на *рисунке 2.16*. На концах легкого стержня 1 закреплены два небольших свинцовых шара, каждый диаметром 5 см и массой $m = 0{,}775$ кг. Стержень подвешен с помощью легкой упругой нити 2, на которой неподвижно укреплено небольшое зеркальце 3. По соседству с малыми, устанавливаются два больших свинцовых шара диаметром 20 см и массой $M = 49{,}5$ кг каждый. Вследствие притяжения между двумя парами тел с массами *m* и *M* малые шары смещаются в сторону больших, немного закручивая вертикальную нить 2. Угол поворота нити измерялся с помощью светового луча *i*, падающего от источника *S* и отраженного от зеркальца 3 на проградуированную шкалу. Определив этот угол, пропорциональный силе притяжения между шарами, Кавендиш получил для постоянной *K* очень малое числовое значение:

$$\boldsymbol{K = 6{,}67\cdot 10^{-11}\,\frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{кг}^2}}. \qquad (2.16)$$

Это означает, что два тела массой 1 кг каждое, находящиеся на расстоянии 1 м друг от друга, притягиваются с силой $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н.

Результат, полученный Кавендишем, был подтвержден многочисленными опытами подобного рода. Было установлено, что значение постоянной всемирного тяготения не зависит ни от природы тел, ни от свойств окружающей среды, в которой они находятся, и является величиной постоянной.

б. Гравитационное поле

Как известно, сила характеризует действие, которое одно тело оказывает на другое либо при непосредственном контакте, либо через некоторые материальные связи (стержни, нити и т.д.). Например, футболист действует с определенной силой на мяч только в момент удара, а подъемный кран поднимает грузы с помощью троса. Качественно иной является ситуация с гравитационными силами, которые действуют между телами, находящимися на расстоянии друг от друга. Как же передается действие в этом случае? Вначале предполагалось, что взаимодействие между телами происходит мгновенно, а пространство между ними является нематериальной средой, никоим образом не влияющей на тела. И несмотря на то, что в таком случае допускалось существование движения без материи, а это абсурдно, ошибка господствовала в физике больше столетия и составила суть так называемой теории дальнодействия.

Идея существования материальной среды, посредством которой осуществляется взаимодействие между телами на расстоянии, принадлежит М. Фарадею (1791–1867). В 30-е годы XIX века, исследуя взаимодействие электрических зарядов, Фарадей ввел понятие поля, которое позднее было применено и при изучении гравитационных взаимодействий. В соответствии с этим понятием какое-либо тело не действует непосредственно на другое, а придает окружающему пространству особые свойства, превращая его в материальную среду, осуществляющую это действие. Таким образом, материя может существовать в двух различных формах: вещества и поля. В отличие от вещества поле нельзя ощущать органами чувств и о его существовании можно судить только по действию, производимому на другие тела. Итак, **гравитационное поле** (поле тяготения) **является формой существования материи**. Посредством гравитационного поля и происходит взаимодействие тел согласно закону всемирного тяготения. Для количественного описания этого поля было введено понятие **напряженности гравитационного поля**.

Векторная величина, равная отношению гравитационной силы, действующей на тело, к массе этого тела называется *напряженностью гравитационного поля* (*поля тяготения*):

$$\vec{\Gamma} = \frac{\vec{F}}{m}. \tag{2.17}$$

В СИ напряженность гравитационного поля измеряется в Н/кг.

Для нахождения напряженности гравитационного поля $\vec{\Gamma}$ в произвольной точке пространства нужно измерить силу $\vec{F}$, действующую на точечное тело массой m, называемое **пробным телом**. Если источником поля является точечное тело массой M, то из (2.15) и (2.17) для модуля напряженности поля тяготения получим:

$$\Gamma = K\frac{M}{r^2}, \tag{2.18}$$

откуда видно, что напряженность поля не зависит от массы пробного тела, а только от массы M тела, создающего поле, и расстояния r от него.

Если поле создано несколькими телами, то его напряженность $\vec{\Gamma}$ равна геометрической сумме напряженностей полей, создаваемых каждым из тел в отдельности:

$$\vec{\Gamma} = \vec{\Gamma}_1 + \vec{\Gamma}_2 + \dots \vec{\Gamma}_n. \tag{2.19}$$

Выражение (2.19) представляет собой **принцип суперпозиции (наложения) гравитационных полей**. Сила тяготения всегда направлена к центру тел, создающих поле, поэтому гравитационное поле называется **центральным**.

Для более детального анализа поля тяготения Земли рассмотрим пробное тело массой m, находящееся на ее поверхности. Приравняв силу тяжести $G = mg$, действующую на пробное тело, силе тяготения F из закона всемирного тяготения (2.15), получим соотношение:

$$g = K\frac{M_з}{R^2}, \tag{2.20}$$

где $M_з$ и R – масса и радиус Земли соответственно.

Сравнивая (2.18) и (2.20), устанавливаем, что в земных условиях ускорение свободного падения совпадает с напряженностью поля тяготения и не зависит от массы тела, помещенного в это поле. Вот почему в опытах Галилея все тела, независимо от их массы, падали с одинаковым ускорением g. Если пробное тело находится на высоте h от поверхности Земли, то расстояние от ее центра равно $(R + h)$ и тогда вместо формулы (2.20) для ускорения свободного падения на высоте h получим:

$$g_h = K\frac{M_з}{(R+h)^2}. \qquad (2.21)$$

Из (2.21) следует, что как сила тяжести $G_h = mg_h$, так и ускорение свободного падения g_h уменьшаются при удалении тела от поверхности Земли.

Взяв отношение выражений (2.21) и (2.20), получим $\frac{g_h}{g} = \frac{R^2}{(R+h)^2}$ или

$$g_h = g\frac{R^2}{(R+h)^2}. \qquad (2.22)$$

Поскольку радиус Земли R = 6 371 км, то из формулы (2.22) следует, что даже на высотах порядка сотен километров ускорение свободного падения существенно не изменится. Итак, для высот, много меньших радиуса Земли, $g_h \approx g = \text{const}$.

в. Искусственные спутники

Проанализируем движение тела массой m в земном поле тяготения. Если тело свободно опущено из точки A на высоте h над Землей (*рис. 2.17*), то оно движется в направлении ее радиуса и падает на поверхность в точке B. Допустим, что в точке A тело имеет скорость $\vec{v}_A$, направленную перпендикулярно вертикали. В этом случае тело будет двигаться по параболе и упадет в точке B_1. Если скорость v_A возрастает, то тело падает в точках, все более удаленных от B, пока при скорости $v_A = v_h$ оно уже не достигает Земли, а движется по круговой траектории радиуса $r = R + h$. Таким образом, движение тела становится подобным движению Луны (естественного спутника Земли); такое тело называется **искусственным спутником**.

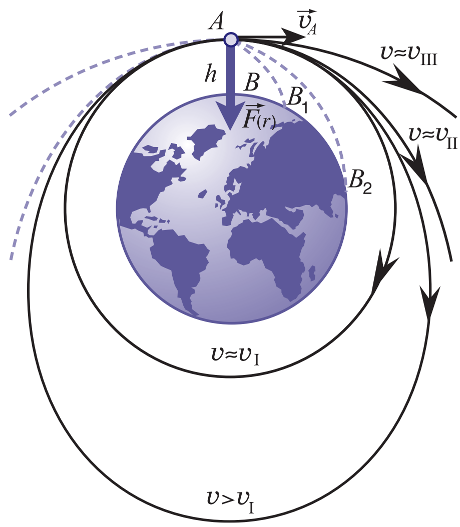


Рис. 2.17

Определим скорость v_h, при которой тело становится искусственным спутником. Очевидно, единственной силой, действующей на тело, является сила тяжести $F = mg_h$, которая сообщает ему центростремительное ускорение $a_ц = v_h^2/r$. Из основного закона динамики $F = ma_ц$ получаем $mg_h = m\frac{v_h^2}{R+h}$, откуда следует:

$$v_h = \sqrt{g_h(R+h)}. \qquad (2.23)$$

Подставив g_h из (2.22) в (2.23), получим:

$$v_h = R\sqrt{\frac{g}{R+h}}. \tag{2.24}$$

Отметим, что скорость, которую нужно сообщить телу в направлении, перпендикулярном радиусу окружности, по которой оно будет двигаться, став искусственным спутником, зависит от высоты h над земной поверхностью. Если искусственный спутник движется по круговой траектории вблизи Земли ($h<<R$), то его скорость равна:

$$v_1 = \sqrt{gR} = \sqrt{9{,}81\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\cdot 6{,}37\cdot 10^6\,\text{м}} \approx 7{,}9\,\frac{\text{км}}{\text{с}}$$

и она называется **первой космической скоростью**. Период обращения такого спутника (время одного полного оборота вокруг Земли) равен: $T = \frac{2\pi R}{v_1} \approx 84$ мин.

В случае, когда скорость запуска спутника больше первой космической скорости v_1, его траектория превращается в эллипс (*рис. 2.17*). По мере роста скорости запуска появляется возможность преодоления земного поля тяготения. Минимальная скорость, при которой тело может покинуть область притяжения к Земле, равна $v_{II} = \sqrt{2}\,v_I \approx 11{,}2$ км/с и называется **второй космической скоростью**. В этом случае траектория тела превратится из эллипса в параболу и оно никогда не сможет вернуться на Землю (*рис. 2.17*). Тело может попасть в поле тяготения другой планеты солнечной системы и после определенного изменения скорости станет ее искусственным спутником.

Известна и **третья космическая скорость** $v_{III} = 16{,}7$ км/с, при которой тело движется по гиперболической траектории (*рис. 2.17*). Это минимальная скорость, которую нужно сообщить телу, чтобы оно покинуло солнечную систему.

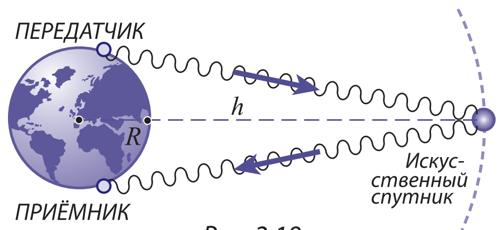


Рис. 2.18

В системах обеспечения межконтинентальной связи особую роль играют так называемые **синхронные** или **геостационарные спутники** (*рис. 2.18*). Синхронный спутник движется по такой круговой орбите, что период его обращения совпадает с периодом вращения Земли вокруг своей оси. При этом спутник все время остается над одной и той же точкой Земли,то есть находится на геостационарной орбите. Поскольку Земля совершает один полный оборот за $T_0 = 24$ часа, а $v_h = \frac{2\pi}{T_0}(R+h)$, то из (2.24) получаем:

$$\frac{4\pi^2(R+h)^2}{T_0^2} = \frac{R^2 g}{R+h},$$

откуда следует, что высота синхронного спутника над Землей равна:

$$h = \sqrt[3]{\frac{R^2 T_0^2 g}{4\pi^2}} - R \approx 35\,850\text{ км} \approx 5{,}6R.$$

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Радиус планеты Нептун в $k = 3{,}6$ раза больше радиуса Земли, а плотность в $n = 2{,}4$ раза меньше. Определите ускорение свободного падения на поверхности этой планеты.

РЕШЕНИЕ

Дано:
$k = R_Н/R_З = 3{,}6$
$n = \rho_З/\rho_Н = 2{,}4$
$g_З = 9{,}81$ м/с^2

$g_Н$ – ?

Согласно выражению (2.20) ускорение свободного падения на поверхности Земли равно $g_З = K\dfrac{M_З}{R_З^2}$. Считая Землю шаром с объемом $V = \dfrac{4}{3}\pi R_З^3$ и выразив ее массу $M_З = \rho_З V = \dfrac{4}{3}\pi R_З^3 \rho_З$, получим:

$$g_З = \frac{K}{R_З^2}\cdot\frac{4}{3}\pi R_З^3\,\rho_З = \frac{4}{3}\pi K R_З \rho_З.$$

Аналогично для ускорения свободного падения на поверхности Нептуна имеем: $g_Н = \dfrac{4}{3}\pi K R_Н \rho_Н$. Взяв отношение последних двух выражений, получим: $\dfrac{g_Н}{g_З} = \dfrac{R_Н\rho_Н}{R_З\rho_З} = \dfrac{k}{n}$, откуда $g_Н = \dfrac{k}{n}g_З = \dfrac{3{,}6}{2{,}4}\cdot 9{,}81 \approx 14{,}7$ м/с^2.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Сформулируйте закон всемирного тяготения и объясните, как направлена сила тяготения.
2. Каков физический смысл постоянной всемирного тяготения и чему равна ее единица в СИ?
3. Опишите метод Кавендиша для определения гравитационной постоянной.
4. Что представляет собой поле тяготения?
5. Что называется напряженностью гравитационного поля?
6. Почему ускорение свободного падения вблизи Земли одинаково для всех тел?
7. Какое выражение определяет ускорение свободного падения тела на какой-либо высоте над поверхностью Земли? Объясните, как оно зависит от высоты.
8. Что представляет собой первая космическая скорость? А вторая?
9. Какой искусственный спутник называется синхронным?
10. Вычислите массу Земли, если известны ее радиус $R = 6\,370$ км и ускорение свободного падения на ее поверхности $g = 9{,}81$ м/с^2.
11. Определите массу Солнца, если известны скорость вращения Земли вокруг него $v = 30$ км/с и радиус земной орбиты $r = 1{,}5\cdot 10^{11}$ м.
12. Период обращения Луны вокруг Земли равен $T \approx 27$ суток. Определите радиус орбиты, по которой движется Луна.
13. Астероид имеет сферическую форму радиуса $R = 30$ км и плотность $\rho = 3{,}3\cdot 10^3$ кг/м^3. Определите ускорение свободного падения на поверхности астероида.
14. Определите первую космическую скорость в условиях планеты Марс, считая ее радиус равным 3 400 км и ускорение свободного падения – 3,8 м/с^2.
15. Искусственный спутник находится на круговой орбите на высоте $h = 3R$, где R – радиус Земли. Во сколько раз период обращения спутника по этой орбите больше периода обращения по околоземной орбите?

2.5 СИЛА УПРУГОСТИ. ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛЫ УПРУГОСТИ

Если на тело действуют внешние силы, то оно деформируется, то есть изменяет свои размеры и/или форму. Как показывает опыт, во многих случаях после прекращения действия внешней силы деформация исчезает полностью или частично. Следовательно, существует сила, которая, согласно третьему закону Ньютона, равна по модулю внешней и устраняет произведенную деформацию. Она является проявлением внутренней структуры тела и называется **силой упругости**. В самом деле, любое тело состоит из атомов и молекул, а атомы, в свою очередь, состоят из положительно заряженных ядер и электронов, имеющих отрицательный заряд. Таким образом, между атомами любого тела существуют силы электрического взаимодействия, которые ведут к установлению устойчивого равновесия, если силы притяжения и отталкивания между ядрами и электронами соседних атомов равны друг другу. Под влиянием внешних сил расстояния между атомами изменяются и результирующая сил притяжения и отталкивания становится отличной от нуля. Она равна по модулю внешней силе, противоположно ей направлена и стремится восстановить первоначальное состояние равновесия. Если, например, под действием внешней силы тело было сжато, то расстояния между его атомами уменьшились и между ними будут преобладать силы отталкивания, которые возвращают атомы в положение устойчивого равновесия, а тело восстанавливает первоначальные размеры и форму. Таким образом:

Сила упругости **– это сила электрической природы, возникающая при деформации тела, всегда направленная противоположно взаимному смещению его частиц.**

Для установления количественной связи между величиной деформации и силой упругости, рассмотрим удлинение упругой нити длиной l_0 и площадью поперечного сечения S_0 под действием деформирующей силы F. Выражение $l - l_0 = \Delta l$ названное **абсолютным удлинением**, характеризует величину деформации. Опыт показывает, что абсолютное удлинение зависит как от размеров нити, так и от величины деформирующей силы. Действительно, при одном и том же значении деформирующей силы F нить длиной l_0 удлиняется на Δl, а нить из того же материала длиной $2l_0$ – на $2\Delta l$. Следовательно, $\Delta l \sim l_0$:

абсолютное удлинение нити прямо пропорционально ее начальной длине.

Нить с площадью поперечного сечения S_0 удлиняется на Δl , а нить из того же материала сечением $2S_0$ удлиняется на $\Delta l/2$. Следовательно, $\Delta l \sim 1/S_0$:

абсолютное удлинение нити обратно пропорционально площади ее поперечного сечения.

Изменяя величину деформирующей силы, заметим, что при малых деформациях так же изменится и абсолютное удлинение нити, то есть $\Delta l \sim F$:

абсолютное удлинение нити прямо пропорционально деформирующей силе.

Полученные выводы представим в виде $\Delta l \sim Fl_0/S_0$ или:

$$\Delta l = \frac{1}{E} \cdot \frac{Fl_0}{S_0}, \qquad (2.25)$$

где коэффициент пропорциональности E характеризует природу упругого материала и носит названия **модуля Юнга** или **модуля упругости**.

Сила упругости, возникающая в нити, $F_{упр.}$ равна по модулю деформирующей силе, но противоположна ей по направлению. Из (2.25) получим:

$$\boldsymbol{F_{\text{упр.}} = \frac{ES_0}{l_0}\Delta l.} \tag{2.26}$$

Обозначив $k = ES_0/l_0$, получим:

$$\boldsymbol{F_{\text{упр.}} = k\Delta l.} \tag{2.27}$$

При малых деформациях сила упругости прямо пропорциональна величине деформации.

Коэффициент пропорциональности k – **жесткость** (коэффициент упругости) – зависит от упругих свойств тела (размеров, формы, материала). Зависимость (2.27) была установлена английским физиком Робертом Гуком, и названа **законом Гука**.

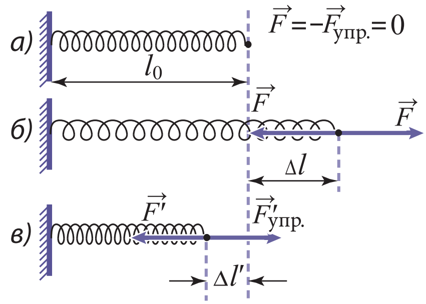


Рис. 2.19

На *рисунке 2.19* представлены силы: упругости $\vec{F}_{\text{упр.}}$ и вызывающая деформацию $\vec{F}$ для пружины с пренебрежимо малой массой. Деформация в данном случае хорошо видна, однако во многих случаях ее нельзя обнаружить невооруженным глазом. Например, резинка (ластик), лежащая на стальной пластинке, под действием собственной силы тяжести заметно на глаз не деформируется (*рис. 2.20, а*), однако, если стальную пластину положить на резинку, то сила тяжести пластины будет существенно деформировать резинку (*рис. 2.20, б*).

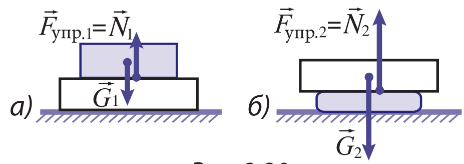


Рис. 2.20

Тело, подвешенное к концу резинового шнура длиной l_0 (*рис. 2.21, а*), производит заметную деформацию, в то время как деформация стальной нити такой же длины практически не видна (*рис. 2.21, б*).

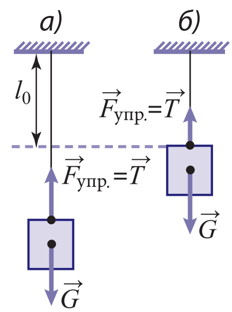


Рис. 2.21

Силу упругости $\vec{F}_{\text{упр.}}$, которая действует на тело со стороны опоры или подвеса (*рис. 2.20* и *2.21*), обычно называют **силой нормальной реакции**, или **реакции опоры** (обозначают $\vec{N}$) и силой натяжения, или **реакции подвеса** (обозначают $\vec{T}$). Она всегда возникает при соприкосновении взаимодействующих тел и направлена перпендикулярно поверхности соприкосновения или вдоль нитей, стержней или пружин.

Тела, представленные на *рисунках 2.20* и *2.21*, покоятся, их ускорение $\vec{a} = 0$, следовательно, сумма сил, действующих на каждое из тел, равна нулю, то есть $\vec{N} = -\vec{G}$ и $\vec{T} = -\vec{G}$.

Нормальная реакция $\vec{N}$ (*рис. 2.20* и *2.22, а*) – это сила, которая действует со стороны горизонтальной опоры на расположенное на ней тело. В свою очередь, согласно третьему закону Ньютона, тело давит на опору с силой упругости $\vec{P} = -\vec{N}$. С учетом выражения $\vec{N} = -\vec{G}$ получаем $\vec{P} = \vec{G}$, то есть сила давления $\vec{P}$ на опору

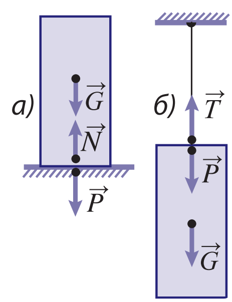


Рис. 2.22

имеет тот же модуль и направление, что и сила тяжести $\vec{G}$. Однако силы $\vec{P}$ и $\vec{G}$ имеют различную природу: сила тяжести $\vec{G}$ как равнодействующая сил тяготения, действующих на все точки тела со стороны Земли, является объемной силой, приложенной в одной точке тела. Сила давления $\vec{P}$ – это сила упругости, приложенная к опоре и распределенная по поверхности соприкосновения с телом.

Аналогичные рассуждения приводят нас к выводу, что и в случае тела, подвешенного на нити (*рис. 2.22, б*), существует сила упругости $\vec{P} = \vec{G}$, приложенная к нити подвеса.

Сила $\vec{P}$, упругая по своей природе, характеризует действие тела на горизонтальную опору или вертикальную нить подвеса и называется *весом тела*.

Как было установлено выше, если опора или точка подвеса нити покоятся, то силы $\vec{P}$ и $\vec{G}$ имеют одинаковые модули и направление. Однако в общем случае они имеют различные модули в зависимости от состояния движения опоры или точки подвеса. Проанализируем эту зависимость на следующем примере: человек массой m находится в лифте, который может перемещаться по вертикали в обоих направлениях с постоянным ускорением $\vec{a}$. Пол кабины лифта является опорой, на которую действует человек с силой $\vec{P}$, равной по модулю силе нормальной реакции $\vec{N}$.

Согласно основному закону динамики получаем:

$$\vec{G} + \vec{N} = m\vec{a}. \qquad (2.28)$$

В самом простом случае, когда ускорение лифта равно нулю (*рис. 2.23, а*), то есть опора покоится или движется равномерно, из (2.28) следует:

$$G - N = 0 \text{ или } N = G = mg.$$

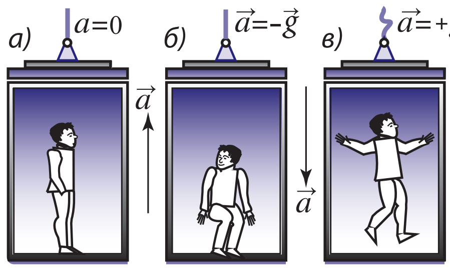


Рис. 2.23

Так как $P = N$, то в этом случае человек давит на опору с силой, равной его силе тяжести. Если лифт движется с ускорением, направленным вертикально вверх (*рис. 2.23, б*), то, спроектировав векторы уравнения (2.26) на направление ускорения, получим $N - G = ma$, откуда:

$$N = G + ma = m\,(g + a).$$

Это значит, что сила, с которой человек давит на опору, увеличивается, и при $a = g$ она удваивается. В таких случаях говорят, что из-за деформации сжатия человек испытывает **перегрузку**. При запуске космических кораблей или при их торможении во время спуска могут возникнуть очень большие перегрузки. Установлено, что при ускорении 4 g человек уже не может перемещаться относительно окружающих тел. Человеческий организм может выдерживать перегрузки до (10 ÷ 12) g.

Совершенно иной будет ситуация, если ускорение лифта направлено вниз (*рис. 2.23, в*). После проектирования векторов уравнения (2.28) на направление ускорения имеем:

$$G - N = ma \text{ или } N = m\,(g - a). \qquad (2.29)$$

Из (2.29) следует, что человек давит на опору с силой меньшей, чем сила тяжести G. Если лифт с человеком свободно падает ($\vec{a} = \vec{g}$), то эта сила становится равной нулю, в этом случае говорят, что человек находится в состоянии **невесомости**.

Рассмотрим теперь движение тела под действием силы упругости. К пружине, один конец которой закреплен, привязана тележка, на которой находится некоторое тело (*рис. 2.24, а*). Приложив деформирующую силу, которая сместит тележку вправо, а затем освободив ее от этой силы, мы обнаружим, что тележка будет периодически двигаться влево и вправо относительно начального положения *O*. Если тело подвешено к концу пружины (*рис. 2.24, б*), то это периодическое движение будет происходить по вертикали. Такое движение называется **колебательным**.

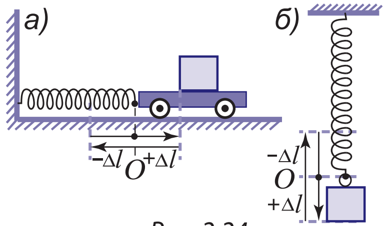


Рис. 2.24

Иной будет ситуация, если начальная скорость тела перпендикулярна направлению действия силы упругости. В этом случае сила упругости отклоняет тело от движения по прямолинейной траектории, сообщая ему центростремительное ускорение. В результате тело движется по окружности.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Шар массой m = 100 г, подвешенный к концу упругой нити длиной l_0 = 30 см, вращается в горизонтальной плоскости. Определите линейную скорость шара и жесткость нити, если ее удлинение равно Δl = 5 см и она образует с вертикалью угол α = 30°.

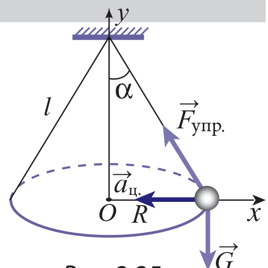


Рис. 2.25

Дано:	СИ:
m = 100 г	0,1 кг
l_0 = 30 см	0,3 м
Δl = 5 см	0,05 м
α = 30°	
k – ? υ – ?	$\frac{\text{Н}}{\text{м}}$; $\frac{\text{м}}{\text{с}}$

РЕШЕНИЕ

На шар действует сила тяжести $\vec{G} = m\vec{g}$, направленная вертикально вниз, и сила упругости $\vec{F}_{\text{упр.}}$ вдоль нити (*рис. 2.25*). Их равнодействующая сообщает шару центростремительное ускорение $\vec{a}_{\text{ц}}$, направленное к центру окружности радиуса R и равное $\vec{a}_{\text{ц}} = \upsilon^2/R$. Согласно основному закону динамики:

$$\vec{F}_{\text{упр.}} + \vec{G} = m\vec{a}_{\text{ц}}. \quad (2.30)$$

Выберем систему координат xOy с началом координат в центре окружности (*рис. 2.25*), тогда из уравнения (2.30) в проекциях на оси Ox и Oy получим: $-F_{\text{упр.}} \sin\alpha = -\frac{m\upsilon^2}{R}$ и $F_{\text{упр.}} \cos\alpha - mg = 0$ соответственно. Как видно из рисунка, $R = (l_0 + \Delta l)\sin\alpha$ и, приняв во внимание (2.27), получим следующие два уравнения: $k\Delta l \sin\alpha = \frac{m\upsilon^2}{(l_0 + \Delta l)\sin\alpha}$; $k\Delta l \cos\alpha = mg$. Из второго уравнения $k = \frac{mg}{\Delta l \cdot \cos\alpha}$, а из первого после подстановки k находим скорость: $\upsilon = \sqrt{g(l_0 + \Delta l)\sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha}$. Подставив численные значения, получаем $k \approx 23{,}1$ Н/м и $\upsilon \approx 1$ м/с.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Что представляет собой сила упругости и какова ее природа?
2. Сформулируйте закон Гука. Что такое жесткость тела и какова ее единица в СИ?

3. Что представляет собой сила нормальной реакции и сила натяжения?
4. Объясните, при каких условиях возникают состояния перегрузки и невесомости.
5. Как движется тело под действием только силы упругости?
6. На сколько удлинится пружина при действии деформирующей силы 15 Н, если ее удлинение равно 5 см при действии силы 10 Н?
7. Две пружины одинаковой длины соединены последовательно, а на их свободные концы действуют две равные по модулю и противоположно направленные силы. Чему равна жесткость пружины, удлинившейся на 2 мм, если другая пружина, жесткость которой 100 Н/м, удлинилась на 2 см?
8. Две пружины с жесткостями $k_1 = 200$ Н/м и $k_2 = 300$ Н/м соединены: *а)* последовательно, *б)* параллельно. Найдите жесткости систем пружин (в случаях *а)* и *б)*).
9. На сколько удлинится стальная проволока длиной 2 м и диаметром 0,15 мм под действием силы 2,25 Н? Модуль Юнга для стали $E = 200$ ГПа.
10. Вычислите модуль Юнга для меди, если проволока из такого материала длиной 1 м и поперечным сечением 1 мм^2 удлиняется на 2 мм под действием силы 240 Н.
11. Максимальная сила натяжения, которую может выдержать трос, равна 2 кН. При каком ускорении оборвется трос, если с его помощью вертикально вверх поднимают тело массой 160 кг?
12. Шар массой $m = 150$ г может скользить без трения вдоль горизонтального стержня, который вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через один из его концов. Шар связан с осью вращения с помощью пружины, длина которой равна 25 см в недеформированном состоянии, а жесткость – 10 Н/м. С какой линейной скоростью вращается шар, если удлинение пружины равно 5 см?

2.6 СИЛА ТРЕНИЯ. ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА ПРИ НАЛИЧИИ СИЛЫ ТРЕНИЯ

Реальное движение любого тела встречает сопротивление со стороны окружающей среды или других тел, с которыми данное тело соприкасается. Как следствие, его скорость уменьшается, движение замедляется и тело останавливается. А поскольку замедленное движение характеризуется ускорением, направленным противоположно вектору скорости, то очевидно, что существует сила, которая действует вдоль линии, по которой происходит движение, и направленная в сторону, противоположную этому движению. Что представляет собой эта сила и как она возникает?

При рассмотрении в микроскоп даже самой гладкой поверхности твердых тел обнаруживаются многочисленные шероховатости или неровности. Поэтому реальная площадь S' поверхности соприкосновения двух тел намного меньше (~ 10^4 раз), чем видимая S (*рис. 2.26*). Давление, оказываемое на точки соприкосновения, столь велико, что в них возникают пластические деформации, в результате чего площадь соприкосновения S' увеличивается, а давление p уменьшается. Этот процесс продолжается до тех пор, пока равнодействующая сил давления $F_д = pS'$ не уравновесится силой реакции опоры N (*рис. 2.26*). В точках соприкосновения действуют силы молекулярного взаимодействия, электрические по своей природе. Их результирующая

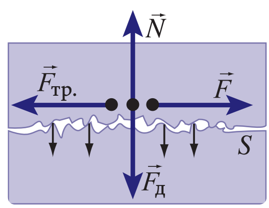


Рис. 2.26

пропорциональна N, она образует микроспайки между соприкасающимися телами. Для того чтобы тело сместить по поверхности другого, к нему надо приложить некоторую силу $\vec{F}$ (*рис. 2.26*). Сила $\vec{F}_{тр.}$, равная ей по модулю, но направленная в противоположную сторону, называется **силой трения**. Она всегда возникает при непосредственном контакте между телами, является электрической по своей природе, лежит в плоскости скольжения тел и направлена в сторону, противоположную движению.

Рассмотрим тело, лежащее на горизонтальной поверхности. Будем действовать на него силой тяги, параллельной плоскости контакта, посредством нити, перекинутой через блок, к концу которой прикреплена чаша весов с постепенно увеличивающимся числом небольших гирь на ней (*рис. 2.27, а*). Замечаем, что вначале тело не движется. Следовательно, сила тяги $\vec{F}$ уравновешена силой трения, возникающей на поверхности соприкосновения. При добавлении гирь сила тяги постепенно увеличивается и до тех пор, пока тело находится в состоянии покоя, возрастает и сила трения, так что $|\vec{F}_{тр.}| = |\vec{F}|$. Это равенство сохраняется до тех пор, пока тело не сдвинется с места и не начнет скользить. Сила трения, действующая между твердыми телами, находящимися в состоянии покоя, называется **силой трения покоя**, $\vec{F}_{тр.п}$ она становится максимальной в момент начала скольжения. Таким образом:

Сила трения покоя $\boldsymbol{F_{тр.п}}$ **всегда равна по модулю и направлена противоположно силе, приложенной к телу параллельно плоскости соприкосновения с другим телом, и может принимать значения до максимального** $\boldsymbol{F_{тр.п}^{max}}$**.**

Опыты показали, что если сила тяжести тела, а значит, и сила реакции опоры увеличивается в 2,3... раза, то и сила, необходимая для начала скольжения, то есть $\vec{F}_{тр.п}^{max}$ также возрастает в 2,3... раза (*рис. 2.27, б*). Отсюда следует, что:

Максимальное значение силы трения покоя пропорционально силе нормальной реакции опоры $\boldsymbol{N}$:

$$\boldsymbol{F_{тр.п}^{max} = \mu_п N,} \tag{2.31}$$

где $\mu_п$ – коэффициент пропорциональности, называемый **коэффициентом трения покоя**, зависящий от природы тел и качества шлифовки поверхностей соприкосновения.

Если величина силы тяги $\vec{F}$ превышает значение максимальной силы трения покоя $\vec{F}_{тр.п}^{max}$, то тело начинает скользить с некоторым ускорением. Сила трения, которая действует при этом, называется **силой трения скольжения** $\vec{F}_{тр.с}$. Она лежит в плоскости скольжения и направлена противоположно вектору скорости движения тела относительно соприкасающегося с ним тела. Для измерения модуля силы трения скольжения необходимо обеспечить равномерное движение тел. В этом случае равнодействующая сил в плоскости скольжения, равна нулю и сила трения скольжения равна

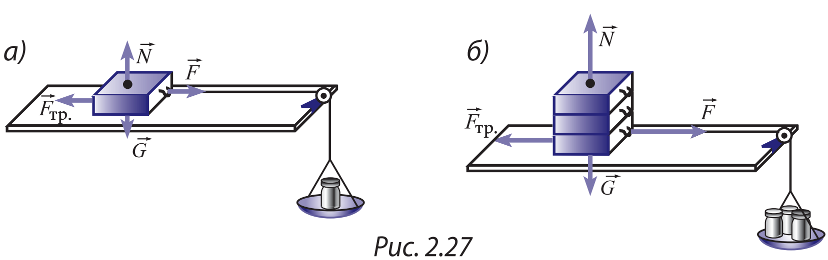


Рис. 2.27

по модулю силе тяги. Величина силы трения скольжения всегда меньше максимальной силы трения покоя, однако это отличие невелико и считают, что $\vec{F}_{тр.п} \approx \vec{F}_{тр.с}^{max}$. Так же, как в случае силы трения покоя, убеждаемся на опыте, что сила трения скольжения пропорциональна силе нормальной реакции поверхности соприкосновения:

$$F_{тр.с} = \mu_c N, \tag{2.32}$$

где μ_c – коэффициент трения скольжения. Его численное значение немного меньше, чем у коэффициента трения покоя, однако обычно считают $\mu_п \approx \mu_c = \mu$.

Экспериментально установлено, что коэффициент трения не зависит от площади соприкасающихся поверхностей. Если положим три тела в форме параллелепипеда одно на другое (*рис. 2.27, б*) или на разные грани, то поверхность опоры каждый раз будет другой, однако коэффициент трения остается одним и тем же.

Из (2.31) и (2.32) следует $\mu = \vec{F}_{тр.п}^{max}/N = \vec{F}_{тр.п}/N$, где коэффициент трения является величиной безразмерной. Опытным путем определено, что в большинстве случаев он имеет значения, меньшие единицы. Коэффициент трения характеризует не только тело, на которое действует сила трения, но сразу оба тела, находящиеся в контакте.

Коэффициент трения **зависит от материалов, из которых сделаны тела и от состояния обработки соприкасающихся поверхностей.**

Численное значение коэффициента трения определяется экспериментально с учетом внешних факторов, влияющих на трение. Например, коэффициент трения между двумя стальными поверхностями равен 0,2, а между сталью и льдом – 0,02. Однако, если между соприкасающимися стальными поверхностями ввести смазку, то коэффициент трения существенно уменьшится и станет приблизительно равным коэффициенту трения между сталью и льдом.

Для определения коэффициента трения, являющегося характеристикой различных материалов, в лабораторных условиях используется специальный прибор – трибометр. Он состоит из доски, снабженной на конце легким блоком, трением в котором можно пренебречь. Положение доски может быть как горизонтальным, так и под углом к горизонту, что позволяет изучать трение на наклонной плоскости. Прибор снабжен несколькими телами в форме параллелепипеда, к боковым граням которых могут прикрепляться пластины из различных материалов (*рис. 2.28*). Параллелепипед с фиксированными на нем пластинами из исследуемого материала помещается на горизонтально расположенную доску трибометра и посредством нити, переброшенной через блок, соединяется с чашкой. На чашку постепенно добавляют гири, пока не начнется скольжение. Величина силы тяжести, при которой происходит равномерное скольжение параллелепипеда, равна силе трения скольжения.

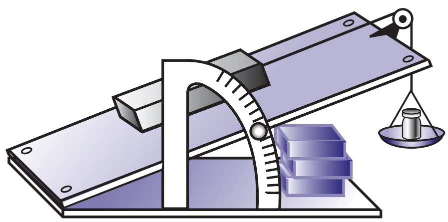


Рис. 2.28

Результаты экспериментов, описанных выше, могут быть обобщены в виде следующих трех основных законов трения, установленных французскими физиками Г. Амонтоном (1663–1705) и Ш. Кулоном (1736–1806).

Сила трения пропорциональна силе нормальной реакции поверхности соприкосновения:

$$F_{тр.} = \mu N. \qquad (2.33)$$

Для каждой пары тел величина силы трения не зависит от площади поверхности их соприкосновения, а только от природы тел и состояния обработки их соприкасающихся поверхностей.

Сила трения всегда ориентирована в сторону, противоположную направлению движения, и лежит в плоскости скольжения тел относительно друг друга.

Эти законы называются **законами Амонтона–Кулона**.

Если тело скользит без ускорения по наклонной плоскости, то коэффициент трения выражается через угол наклона плоскости, который в данном случае называется **углом трения**. В самом деле, при равномерном скольжении тела, согласно основному закону динамики, имеем:

$$\vec{F}_{тр.} + \vec{N} + \vec{G} = 0.$$

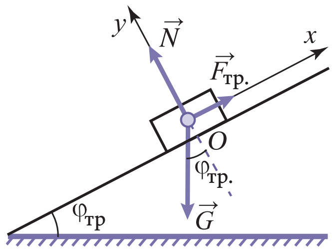


Рис. 2.29

Переходя к проекциям на оси координат Ox и Oy (*рис. 2.29*), из этого выражения получим соотношения:

$$F_{тр.} - G\sin\varphi_{тр.} = 0,$$

$$N - G\cos\varphi_{тр.} = 0,$$

при подстановке которых в (2.33) получается равенство:

$$\mu = \operatorname{tg}\varphi_{тр.}. \qquad (2.34)$$

Если угол наклонной плоскости φ больше угла трения, то $\mu = \operatorname{tg}\varphi_{тр.}$ и тело скользит с ускорением, а при $\varphi < \varphi_{тр.}$ находится в состоянии покоя и $F_{тр.} < F_{тр.п}^{max}$.


а) б)

Рис. 2.30

Наряду с силой трения скольжения в случае тел цилиндрической и сферической формы проявляется сила трения качения. Как показывает опыт, она в сотни раз меньше силы трения скольжения. Поэтому для нормальной работы различных механизмов, в которых трение скольжения приводит к износу, нагреванию и даже плавлению некоторых движущихся деталей, его заменяют трением качения. Это можно осуществить с помощью шариковых и роликовых подшипников, конструкция которых показана на *рисунке 2.30*. Если при этом еще использовать смазку, то трение становится очень малым.

Несмотря на то, что сила трения тормозит движение, во многих случаях она является движущей силой. Именно благодаря силе трения ездят автомобили и люди ходят по Земле. Между колесами автомобиля и Землей (*рис. 2.31, а*) действуют силы трения покоя: $\vec{F}_{тр.1}$ со стороны Земли на колеса, посредством которых автомобилю сообщается ускорение, и $\vec{F}_{тр.2}$ со стороны колес на Землю. Так как ее масса значительно больше массы автомобиля, то ускорение, сообщаемое Земле, практически равно нулю. Если, однако, человек идет по поверхности цилиндра, который может вращаться вокруг своей оси (*рис. 2.31, б*), то сила трения покоя $\vec{F}_{тр.2}$, действующая на цилиндр, приведет его во вращательное движение.

При движении твердых тел соприкосновение может происходить не только с другими твердыми телами, но и с жидкостями или газами, например, движение подводной лодки в воде, самолета в воздухе и т.д. В этих случаях возникает сила, подобная силе трения скольжения, называемая **силой сопротивления**. Она также лежит в плоскости соприкосновения и ориентирована в направлении, противоположном относительной скорости $\upsilon_{отн.}$ (скорости тела относительно жидкости или газа). Ее величина зависит от модуля этой скорости. Для малых относительных скоростей сила сопротивления пропорциональна величине скорости:

$$F_{сопр.} = \alpha \upsilon_{отн.}, \qquad (2.35, а)$$

а для больших – квадрату этой величины:

$$F_{сопр.} = \beta \upsilon^2_{отн.}, \qquad (2.35, б)$$

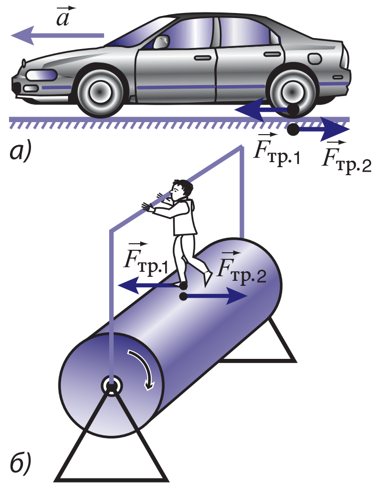


Рис. 2.31

где α и β – коэффициенты пропорциональности, характеризующие сопротивление жидкости или газа.

Сила сопротивления зависит также от формы, размеров тел и качества обработки поверхности. Например, тела на *рисунке 2.32* имеют одну и ту же площадь поперечного сечения, однако сила сопротивления у каждого разная. Геометрическая форма тел, для которой сила сопротивления минимальна, называется **обтекаемой формой**. Она особенно важна при конструировании различных летательных аппаратов, автомобилей и других транспортных машин, которые преодолевают сопротивление жидкостей или газов.

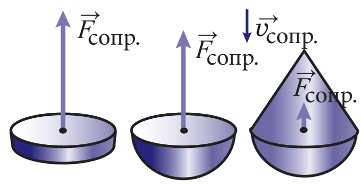


Рис. 2.32

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Автомобиль движется по горизонтальной дороге со скоростью 60 км/ч. Заметив препятствие, водитель резко тормозит. Определите, через какое время автомобиль остановится и чему равен тормозной путь (расстояние, пройденное до остановки), если коэффициент трения скольжения колес об асфальт равен $\mu = 0{,}75$.

РЕШЕНИЕ

Дано:	СИ:
$\upsilon = 60$ км/ч	16,67 м/с
$\mu = 0{,}75$	
t – ? s_x – ?	с; м

Рассмотрим движение автомобиля вдоль оси Ox системы координат, связанной с дорогой. Поскольку конечная скорость автомобиля равна нулю, из формулы, определяющей ускорение $a_x = \dfrac{\upsilon_x - \upsilon_{0x}}{t}$ получим время торможения $t = -\dfrac{\upsilon_{0x}}{a_x}$. Индекс x у всех величин этой задачи показывает, что соответствующая величина является проекцией на направление движения, совпадающее с осью Ox. Ускорение a_x при равнозамедленном движении автомобиля определяется из основного закона динамики: $a_x = -F_{тр.}/m$. Используя (2.33) и закон действия и противодействия, согласно которому $N = mg$, получим $a_x = -\dfrac{\mu m g}{m} = -\mu g$. Таким образом,

$t = \dfrac{\upsilon_{0x}}{\mu g}$, $t \approx 2{,}3$ с. Для определения тормозного пути используем формулу Галилея (1.27): $s_x = \dfrac{\upsilon_x^2 - \upsilon_{0x}^2}{2a_x}$, где $\upsilon_x = 0$ и $a_x = -\mu g$. В результате $s_x = \dfrac{\upsilon_{0x}^2}{2\mu g}$, $s_x \approx 19$ м.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Что представляет собой сила трения? Как возникает сила трения и какова ее природа?
2. Что представляет собой сила трения покоя? Чему равно ее максимальное значение?
3. Чем отличаются силы трения скольжения и покоя?
4. Что представляет собой трибометр?
5. Сформулируйте законы Амонтона–Кулона для трения.
6. Что называется углом трения?
7. Как отличаются величины сил трения скольжения и качения?
8. Приведите примеры случаев, в которых сила трения полезна и в которых вредна.
9. Что такое сила сопротивления жидкостей или газов? От каких факторов она зависит?
10. Мотоциклист, двигаясь со скоростью 12 м/с, заметил препятствие на расстоянии примерно 15 м и резко затормозил. Сумеет ли он остановиться до препятствия? Коэффициент трения скольжения $\mu = 0{,}7$.
11. Тело равномерно скользит по поверхности наклонной плоскости высотой 3 м и основанием 5 м. Определите коэффициент трения скольжения тела о наклонную плоскость.
12. Тело скользит по горизонтальной поверхности, покрытой льдом, и, пройдя 25 м, останавливается. Определите начальную скорость тела, если коэффициент трения скольжения его о лед равен $\mu = 0{,}05$.
13. Тело массой 5 кг равномерно скользит по горизонтальной поверхности под действием горизонтальной силы, приложенной посредством пружины. Определите удлинение пружины, если коэффициент трения $\mu = 0{,}2$, а жесткость пружины равна $k = 500$ Н/м.
14. С наклонной плоскости высотой 3 м и основанием 4 м соскальзывает тело с ускорением 2 м/с^2. Определите коэффициент трения скольжения тела о наклонную плоскость.

2.7° ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕСКОЛЬКИХ СИЛ

В предыдущих темах изучалось движение тел, когда на них действует одна из сил: тяжести, упругости или трения. В действительности тела подвержены одновременному воздействию нескольких типов сил. Более того, существуют ситуации, когда движение определяется взаимодействиями между телами рассматриваемой системы. В подобных случаях характер и причины движения тел становятся более сложными, а определение физических величин, которые его описывают, требует более глубокого знания проявлений этих сил.

Проанализируем методы решения ряда задач с применением законов динамики, одновременно указав некоторые общие рекомендации, касающиеся алгоритма решения.

I. *Два тела массой m_1 и m_2 соответственно, связанные идеальной нитью, лежат на горизонтальной поверхности. На тело массой m_1 действует горизонтальная сила $\vec{F}_1$, а на тело массой m_2 – сила $\vec{F}_2$, направленная под углом α к горизон-*

ту. Определите ускорение системы и силу натяжения нити, если коэффициент трения скольжения обоих тел равен μ, а их движение происходит в сторону действия силы $\vec{F}_1$.

Решение. Вначале поясним понятие идеальной нити, часто используемое в случае системы тел, связанных между собой. Идеальной считается невесомая, нерастяжимая и легко сгибаемая нить. В этом приближении решение задачи существенно упрощается, так как тела на концах такой нити имеют одинаковые по модулю скорости и ускорения, а силы натяжения нитей постоянны по всей длине.

1. После анализа конкретной ситуации, в которой происходит движение в рассматриваемой задаче, строят схематическую диаграмму, на которой изображают тела, участвующие в движении.

Схематическая диаграмма, на которой представлены два тела массой m_1 и m_2 соответственно, имеет вид, показанный на *рисунке 2.33*.

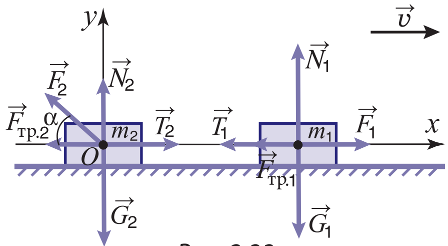


Рис. 2.33

2. Указывают на диаграмме все силы, действующие на тела системы.

На тела действуют силы: $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, известные из условия задачи; тяжести $\vec{G}_1$ и $\vec{G}_2$, направленные вертикально вниз; нормальной реакции $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$, направленные перпендикулярно поверхности соприкосновения; трения $\vec{F}_{тр.1}$ и $\vec{F}_{тр.2}$, ориентированные против движения и натяжения нити $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$. Все эти силы представлены на диаграмме (*рис. 2. 33*).

3. Записывают основной закон динамики в векторной форме для конкретной ситуации:

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n . \qquad (2.36, a)$$

Если в задаче исследуется система тел, то уравнение (2.36, *a*) записывается для каждого тела.

После применения уравнения (2.36, *a*) для тел массой m_1 и m_2 соответственно имеем:

$$\begin{cases} m_1\vec{a} = \vec{G}_1 + \vec{N}_1 + \vec{T}_1 + \vec{F}_{тр.1} + \vec{F}_1, \\ m_2\vec{a} = \vec{G}_2 + \vec{N}_2 + \vec{T}_2 + \vec{F}_{тр.2} + \vec{F}_2. \end{cases} \qquad (2.36, б)$$

4. Выбирают систему координат и определяют углы, образованные силами и ускорениями системы с осями координат.

Выбор подходящей системы координат во многих случаях очень важен для выполнения вычислений. Обычно ее выбирают так, чтобы одна из осей совпадала по направлению с ускорением, а другая была перпендикулярна ему. На *рисунке 2.33* показана система координат, связанная с центром тела массой m_2.

5. Переходят от векторных уравнений к скалярным для проекций на оси координат, а полученную систему уравнений решают относительно искомых неизвестных.

$$\begin{cases} m\,a_x = F_{x1} + F_{x2} + \ldots + F_{xn}, \\ m\,a_y = F_{y1} + F_{y2} + \ldots + F_{yn}, \\ m\,a_z = F_{z1} + F_{z2} + \ldots + F_{zn}. \end{cases} \qquad (2.37,\ a)$$

В проекциях на оси выбранной системы координат уравнения (2.36, *а*) принимают вид:

$$\begin{cases} m_1 a = F_1 - T_1 - F_{\text{тр.}1}, \\ 0 = N_1 - G_1, \\ m_2 a = T_2 - F_2 \cos\alpha - F_{\text{тр.}2}, \\ 0 = N_2 + F_2 \sin\alpha - G_2. \end{cases} \qquad (2.37,\ б)$$

Из второго и четвертого уравнений системы уравнений (2.37, *б*) определяют силы нормальной реакции N_1 и N_2:

$$N_1 = G_1 = m_1 g,$$

$$N_2 = G_2 - F_2 \sin\alpha = m_2 g - F_2 \sin\alpha.$$

Приняв во внимание, что $F_{\text{тр. }1} = \mu N_1$; $F_{\text{тр. }2} = \mu N_2$ и $T_1 = T_2 = T$, записываем систему уравнений (2.37, *б*) в виде:

$$\begin{cases} m_1 a = F_1 - T - \mu m_1 g, \\ m_2 a = T - F_2 \cos\alpha - \mu(m_2 g - F_2 \sin\alpha), \end{cases}$$

откуда легко определяем искомые величины:

$$a = \frac{F_1 - F_2\cos\alpha - \mu(m_1 g + m_2 g - F_2 \sin\alpha)}{m_1 + m_2},$$

$$T = F_1 - \mu m_1 g - m_1 a.$$

II. *Тело массой m_1 движется по наклонной плоскости с углом наклона α под действием другого тела массой $m_2 > m_1$, связанного с первым при помощи идеальной нити, которая перекинута через блок, на вершине плоскости. Коэффициент трения скольжения тела о наклонную плоскость равен μ. Определите ускорение системы и силу натяжения нити. Трением в блоке и его массой пренебрегаем.*

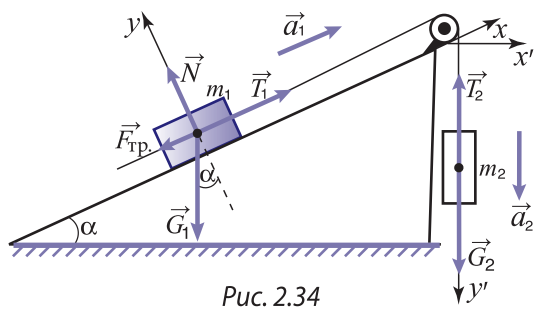


Рис. 2.34

Решение. Схематическая диаграмма конкретной ситуации данной задачи представлена на *рисунке 2.34*, где указаны также и силы, действующие на тела.

Используя уравнение (2.36, *а*) для тел массой m_1 и m_2, получаем:

$$\begin{cases} m_1 \vec{a}_1 = \vec{T}_1 + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр.}} + \vec{G}_1, \\ m_2 \vec{a}_2 = \vec{T}_2 + \vec{G}_2. \end{cases} \qquad (2.36,\ в)$$

В данной задаче удобнее для каждого тела выбрать систему координат так, чтобы одна из осей совпадала по направлению с его ускорением (*рис. 2.34*). В подобных случаях говорят, что проекция делается на направление движения. После разложения векторов на выбранные оси координат и с учетом того, что $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$ и $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = a$, система (2.36, *в*) принимает вид:

$$\begin{cases} m_1 a = T - G_1 \sin\alpha - \mu N, \\ m_2 a = G_2 - T, \\ 0 = N - G_1 \cos\alpha . \end{cases} \qquad (2.37,\ в)$$

Поскольку $G = mg$, то из третьего уравнения системы (2.37, *в*) получаем $N = m_1 g \cos\alpha$ и после сложения первых двух уравнений легко определить ускорение системы тел:

$$a = g\frac{m_2 - m_1(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{m_1 + m_2}.$$

Из этого выражения видно, что движение тел в данной задаче будет наблюдаться при соблюдении условия:

$$m_2 \geq m_1(\sin\alpha + \mu\cos\alpha).$$

Если подставить полученное значение α во второе уравнение системы (2.37, *в*), то получим выражение для силы натяжения нити:

$$T = \frac{m_1 m_2 g(1 + \sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{m_1 + m_2}.$$

III. *Определите ускорения тел массой m_1 и m_2 ($m_2 > m_1$) соответственно и силу натяжения нити в системе блоков, показанной на рисунке 2.35. Нить считаем идеальной, трением в блоках и их массами пренебрегаем.*

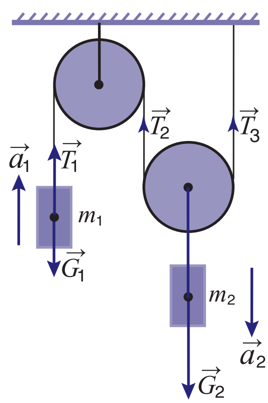


Рис. 2.35

Решение. На *рисунке 2.35* показаны действующие в исследуемой системе силы: тяжести $\vec{G}_1 = m_1\vec{g}$, $\vec{G}_2 = m_2\vec{g}$ и натяжения нитей $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ и $\vec{T}_3$, равные по модулю. Уравнения (2.36, *а*) для тел массой m_1 и m_2 соответственно имеют вид:

$$\begin{cases} m_1\vec{a}_1 = \vec{G}_1 + \vec{T}_1, \\ m_2\vec{a}_2 = \vec{G}_2 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3. \end{cases} \qquad (2.36,\ г)$$

В данном случае силы и ускорения направлены по вертикали, поэтому удобно векторы из уравнения (2.36, *г*) спроектировать на направление движения, при этом получим:

$$\begin{cases} m_1 a_1 = T - G_1, \\ m_2 a_2 = G_2 - 2T. \end{cases} \qquad (2.37,\ г)$$

Так как тело массой m_1 за один и тот же промежуток времени проходит вдвое больший путь, чем тело массой m_2, ясно, что $a_1 = 2a_2$, и из (2.37, *г*) после простых преобразований получаем:

$$a_2 = \frac{m_2 - 2m_1}{4m_1 + m_2}g; \quad a_1 = 2a_2; \quad T = \frac{3m_1 m_2 g}{4m_1 + m_2}.$$

IV. *Автомобиль массой m движется равномерно со скоростью v по мосту а) вогнутому, б) выпуклому, радиус кривизны которого R (рис. 2.36). С какой силой давит автомобиль на середину моста?*

Решение. На автомобиль действуют силы: тяжести $\vec{G}$, нормальной реакции моста $\vec{N}$, тяги $\vec{F}_т$ (сила трения, действующая на колеса со стороны моста) и сопротивления со стороны окружающей среды $\vec{F}_{сопр.}$, под действием которых автомобиль движется с постоянной скоростью v.

Уравнение (2.36, *а*) в обоих случаях имеет вид:

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_{сопр.} + \vec{F}_т. \qquad (2.36, д)$$

По траектории радиуса R автомобиль движется с центростремительным ускорением $a = v^2/R$, всегда направленным к центру кривизны (*рис. 2.36*). Если для обоих случаев выбрать общую систему отсчета, то для вогнутого моста уравнение (2.36, *д*) в проекциях на оси координат запишется:

$$\begin{cases} ma = N - G, \\ 0 = F_{сопр.} - F_т. \end{cases} \qquad (2.37, д)$$

Поскольку $G = mg$, то из (2. 37, *д*) для силы давления на вогнутый мост, равной по модулю нормальной реакции моста, получим $N = m\left(g + \frac{v^2}{R}\right)$.

Как видно из *рисунка 2.36*, единственное отличие этих двух случаев состоит в противоположном направлении центростремительного ускорения. Поэтому силу давления на выпуклый мост можно получить из выражения для вогнутого, заменив знак „+" перед значением центростремительного ускорения v^2/R на „–". Таким образом, $N = m\left(g - \frac{v^2}{R}\right)$.

Из последней формулы видно, что при скорости $v = \sqrt{gR}$ сила давления на мост равна нулю и автомобиль находится в состоянии невесомости.

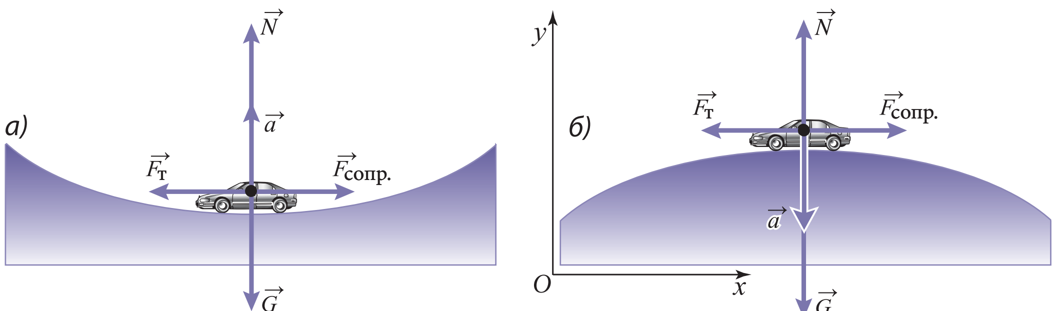


Рис. 2.36

ЗАДАЧИ

1. Два тела массой $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 3$ кг, связанные идеальной нитью, лежат на гладком столе. На них действуют силы $F_1 = 7$ Н и $F_2 = 10$ Н, направленные вдоль нити, но в противоположные стороны. Пренебрегая трением, определите ускорение тел.

2. Тело массой $m = 60$ кг движется вверх по наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 30^\circ$. Коэффициент трения равен $\mu = 0{,}05$. Определите ускорение тела, если на него в направлении движения действует сила $F = 600$ Н, параллельная основанию наклонной плоскости.

3. Два тела массой $m_1 = 3$ кг и $m_2 = 2$ кг связаны идеальной нитью, перекинутой через невесомый блок, закрепленный у вершины призмы, грани которой образуют две наклонные плоскости. Определите ускорение тел, если углы у основания призмы равны $\alpha_1 = 60^\circ$ и $\alpha_2 = 30^\circ$ соответственно, а коэффициент трения скольжения равен $\mu = 0{,}2$.

4. Через блок перекинута идеальная нить, к концам которой привязаны два тела массой $m_1 = 4$ кг и $m_2 = 4{,}1$ кг. Чему равно натяжение нити и на сколько переместятся тела друг относительно друга за 3 с, если первоначально они покоились? Трением в блоке и его массой пренебрегаем.

5. Тело массой $m = 0{,}2$ кг, привязанное к концу идеальной нити длиной $l = 40$ см, вращается в вертикальной плоскости со скоростью $v = 2{,}5$ м/с. Определите силу натяжения нити в верхней и нижней точках траектории тела.

2.8° ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ГАЛИЛЕЯ

Проблема относительности механического движения тел была затронута в рамках кинематики (п. 1.6). Установлено, что механическое движение относительно: траектории тел зависят от выбранной системы отсчета и в различных системах могут иметь различные формы; скорости тел также зависят от системы отсчета, относительно которой рассматривается движение, и они удовлетворяют закон сложения скоростей (1.16).

Здесь проблема относительности движения будет исследована с точки зрения динамики, будут установлены условия, при которых формулировка основного закона динамики остается одной и той же в различных системах отсчета.

Рассмотрим **инерциальную систему отсчета** S, составной частью которой является система координат $Oxyz$, и систему отсчета S' с системой координат $O'x'y'z'$. Относительно системы S' допустим следующее: система S' движется относительно системы S с постоянной скоростью $\vec{u}$, параллельной оси Ox, и в начальный момент времени $t_0 = t_0' = 0$, одинаковый для обеих систем, соответствующие оси совпадают ($O'x'$ с Ox, $O'y'$ с Oy и $O'z'$ с Oz). При этом движении ось $O'x'$ скользит вдоль оси Ox, ось $O'y'$ остается параллельной Oy, а $O'z'$ параллельной Oz (*рис. 2.37*). **Движение системы координат $O'x'y'z'$ является поступательным движением.**

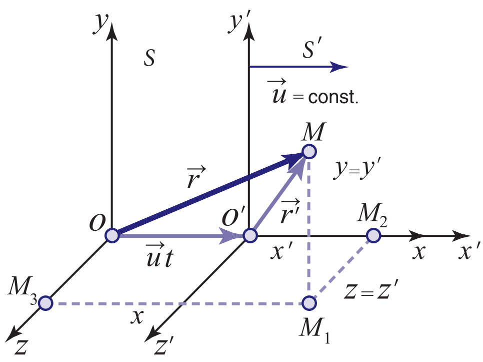


Рис. 2.37

Проанализируем движение материальной точки M относительно этих двух систем отсчета и установим связь между соответствующими характеристиками ее движения. Положение материальной точки относительно системы S определяется координатами x, y, z, а относительно системы S' – координатами x', y', z'. Положения материальной точки в системах S и S' могут быть определены и при помощи радиусов-векторов $\vec{r}$ и $\vec{r}'$ (*рис. 2.37*).

Время и пространство абсолютны: промежуток времени между двумя событиями одинаков в обеих системах отсчета; расстояние между двумя точками одинаково в обеих системах.

Начало отсчета времени в системах S и S' было взято одним и тем же: $t_0 = t_0' = 0$. Промежутки времени равны: $\Delta t = t - t_0 = t$ и $\Delta t' = t' - t_0' = t'$. Из равенства промежутков $\Delta t = \Delta t'$ следует равенство моментов времени: $t = t'$.

Начало координат O' движется прямолинейно равномерно со скоростью $\vec{u}$, то есть вектор перемещения $\overrightarrow{OO'} = \vec{u}t$ и пройденный путь $\left|\overrightarrow{OO'}\right| = ut$. Из *рисунка 2.37* видно, что:

$$x = OM_2 = OO' + O'M_2 = ut + x',\ y = M_1M = y' \text{ и } z = M_1M_2 = z'.$$

Таким образом, получены следующие соотношения, связывающие координаты и время в двух выбранных системах отсчета:

$$\begin{cases} x = x' + ut, \\ y = y', \\ z = z', \\ t = t'. \end{cases} \tag{2.38}$$

Формулы (2.38) называются **преобразованиями Галилея**. Они позволяют установить движение материальной точки в системе S, если известно ее движение в системе S', и наоборот.

Преобразования Галилея могут быть записаны в более компактной форме, если перейти к радиус-векторам:

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}' + \vec{u}t, \\ t = t'. \end{cases} \tag{2.39}$$

Соотношения (2.39) имеют более общий характер, чем (2.38), и справедливы для произвольной ориентации постоянной скорости $\vec{u}$, в то время как формулы (2.38) относятся только к частному случаю скорости $\vec{u}$, параллельной оси Ox.

Установим связь между скоростью $\vec{\upsilon} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ точки M относительно системы S и скоростью $\vec{\upsilon}' = \dfrac{\Delta\vec{r}'}{\Delta t'} = \dfrac{\Delta\vec{r}'}{\Delta t}$ относительно системы S'. При записи последнего выражения принято во внимание равенство промежутков времени $\Delta t = \Delta t'$. Перемещения точки M за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ в системах S и S' равны: $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ и $\Delta\vec{r}' = \vec{r}_2{}' - \vec{r}_1{}'$. Согласно (2.39) имеем:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (\vec{r}_2{}' + \vec{u}t_2) - (\vec{r}_1{}' + \vec{u}t_1) = \vec{r}_2{}' - \vec{r}_1{}' + \vec{u}(t_2 - t_1)$$

или

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}' + \vec{u}\Delta t. \tag{2.40}$$

Это соотношение показывает, **что перемещения материальной точки относительно систем отсчета *S* и *S'* различны.**

Разделив (2.40) на промежуток времени Δt, получим связь между скоростями:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}' + \vec{u}. \tag{2.41}$$

Мы вновь получили **классический закон сложения скоростей** (1.16).

Делаем вывод: **координаты, радиус-векторы, перемещения и скорости материальной точки в двух системах отсчета S и S' различны, то есть они – величины относительные.** Определим скорость $\vec{v}_{AB}$ материальной точки A относительно точки B из равенства $\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$. В самом деле, из этого выражения следует $\vec{v}_A = \vec{v}_{AB} + \vec{v}_B$, то есть скорость $\vec{v}_A$ точки A относительно какой-либо системы отсчета равна ее скорости $\vec{v}_{AB}$ относительно точки B (относительной скорости) плюс скорость точки B относительно той же системы отсчета (см. п. 1.6).

$$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B = (\vec{v}\,'_A + \vec{u}) - (\vec{v}\,'_B + \vec{u}) = \vec{v}\,'_A - \vec{v}\,'_B.$$

Здесь $\vec{v}\,'_A - \vec{v}\,'_B = \vec{v}\,'_{AB}$ – относительная скорость в системе S'. Следовательно:

$$\vec{v}_{AB} = \vec{v}\,'_{AB}. \qquad (2.42)$$

Относительная скорость одинакова в обеих системах отсчета S и S'.

Установим связь между ускорениями материальной точки $\vec{a} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ и $\vec{a}\,' = \dfrac{\Delta\vec{v}\,'}{\Delta t}$ относительно системы S и S' соответственно. Исходя из формулы (2.41), определим связь между приращениями скоростей:

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = (\vec{v}\,'_2 + \vec{u}) - (\vec{v}\,'_1 + \vec{u}) = \vec{v}\,'_2 - \vec{v}\,'_1 = \Delta\vec{v}\,'.$$

Разделив полученное выражение на промежуток времени Δt, получим связь между ускорениями:

$$\vec{a} = \vec{a}\,'. \qquad (2.43)$$

Ускорения материальной точки относительно систем отсчета S и S' одинаковы.

Мы считали систему отсчета S инерциальной. Относительно нее свободное тело движется прямолинейно и равномерно либо покоится. Его ускорение $\vec{a} = 0$. Из (2.43) следует, что $\vec{a}\,' = 0$, а значит, свободное тело движется прямолинейно равномерно или покоится и относительно системы S'. Таким образом, в S' выполняется закон инерции, то есть система S' является инерциальной системой отсчета.

Любая система отсчета, движущаяся поступательно с постоянной скоростью относительно инерциальной системы отсчета, также является инерциальной системой отсчета.

Постоянная скорость $\vec{u}$ может принимать любые значения и иметь любое направление. Следовательно, существует бесконечное множество инерциальных систем отсчета.

Если система S' движется ускоренно относительно инерциальной системы отсчета, то она является неинерциальной системой отсчета($\vec{a} \neq \vec{a}\,'$).

Рассмотрим теперь, как формулируется основной закон динамики в различных инерциальных системах отсчета, и ответим на вопрос: изменяется ли формулировка (вид) этого закона при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой?

Допустим, что инерциальная система отсчета S связана с Землей. В ней математическое выражение основного закона известно:

$$m\vec{a} = \vec{F}. \qquad (2.44)$$

Получим соответствующее выражение в системе S'.

Связь между ускорениями выражена формулой (2.43).

Выше было отмечено, что масса тела – величина постоянная и не зависит от скорости, если она много меньше скорости света в вакууме. В ньютоновской механике имеются в виду именно такие скорости. Следовательно, масса тела в S и S' одинакова:

$$m = m'. \qquad (2.45)$$

Силы в природе могут зависеть от следующих величин: от расстояния между взаимодействующими телами (например, сила всемирного тяготения), от относительной скорости тел (например, сила трения, сила сопротивления окружающей среды, в которой движется тело), от времени (например, сила, действующая между двумя наэлектризованными телами, заряды которых изменяются со временем). Замечаем, что величины, от которых зависят силы, не изменяются при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, в данном случае от системы S к системе S'. Это позволяет нам считать, что и силы не изменяются при таком переходе, то есть:

$$\vec{F} = \vec{F}'. \qquad (2.46)$$

Подставив (2.45), (2.43) и (2.46) в выражение (2.44), получим:

$$m'\vec{a}' = \vec{F}'. \qquad (2.47)$$

Законы классической (ньютоновской) механики сохраняют свой вид при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

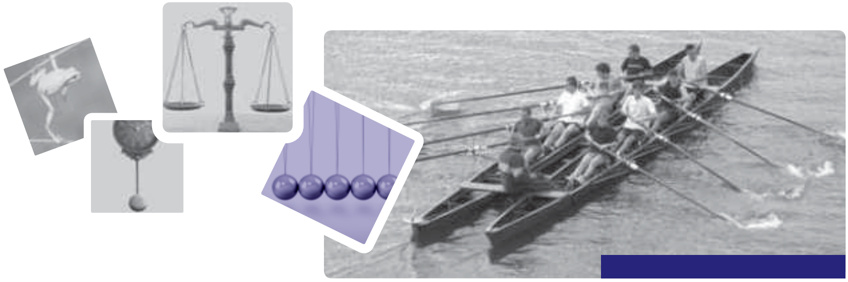
Это утверждение называется **принципом относительности Галилея**.

В соответствии с этим принципом **все инерциальные системы отсчета в механике равноправны.**

Проиллюстрируем этот вывод примером. Допустим, вы находитесь в какой-то закрытой камере, которая может двигаться прямолинейно равномерно относительно Земли. Выполняя механические опыты внутри камеры (она является инерциальной системой отсчета), вы не сможете установить, движется она или нет и чему равна ее скорость. Именно такая интерпретация принципа относительности была дана Галилеем.

ВОПРОСЫ

1. Какими являются перемещения, скорости и ускорения материальной точки относительно двух инерциальных систем отсчета?
2. Тело, находящееся в состоянии покоя относительно одной инерциальной системы отсчета, движется прямолинейно равноускоренно относительно другой. Является ли вторая система отсчета инерциальной? Аргументируйте ответ.
3. Ускорение материальной точки одинаково относительно двух различных систем отсчета. Можно ли утверждать, что эти системы инерциальны? Обоснуйте ответ.
4. Две системы отсчета S' и S'' перемещаются с постоянными, но разными скоростями относительно инерциальной системы отсчета S. Отличается ли вид законов динамики в системах S' и S''?



Глава III

ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИКИ

3.1 РАВНОВЕСИЕ ПРИ ПОСТУПАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Как уже известно из кинематики, при поступательном движении абсолютно твердого тела воображаемая прямая, проходящая через его две произвольные точки, остается параллельной самой себе. Из этого определения поступательного движения и из того факта, что расстояние между точками твердого тела не изменяется во время движения, вытекает, что все его точки совершают равные перемещения за рассматриваемый промежуток времени. Следовательно, в любой момент точки твердого тела имеют одинаковые скорости, а значит, и ускорения. Это позволяет использовать модель материальной точки для твердого тела, движущегося поступательно, даже если его размерами нельзя пренебречь.

Из сказанного следует, что для твердого тела, движущегося поступательно, применимы те же условия равновесия, что и для материальной точки. Согласно закону инерции материальная точка покоится или движется прямолинейно равномерно, если на нее не действует сила или равнодействующая всех приложенных сил равна нулю.

Таким образом**, условием равновесия материальной точки или твердого тела при поступательном движении является:**

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = 0, \tag{3.1}$$

где $\vec{R}$ – результирующая сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots \vec{F}_n$ действующих на материальную точку или твердое тело.

Рассмотрим конкретный пример: равновесие маленького шарика, заряженного положительным электрическим зарядом q_0 (*рис. 3.1, а*). На него действуют сила тяжести $\vec{G}$ и электрические силы отталкивания $\vec{F}_{э1}$ и $\vec{F}_{э2}$ со стороны двух таких же шариков с одинаковым по величине и по знаку зарядом. В данном случае условие равновесия имеет вид:

$$\vec{G} + \vec{F}_{э1} + \vec{F}_{э2} = 0.$$

Чтобы сложить векторы сил, сначала построим вектор $\vec{G}$, затем $\vec{F}_{э1}$ – совместив его начало с концом вектора $\vec{G}$, и далее вектор $\vec{F}_{э2}$ с началом в конце вектора $\vec{F}_{э1}$. Получается замкнутый многоугольник – в нашем случае треугольник (*рис. 3.1, б*). Аналогичным будет результат и при сложении векторов в любой другой последовательности (*рис. 3.1, в*). Это графическое построение и получение замкнутой ломаной линии соответствует выражению (3.1).

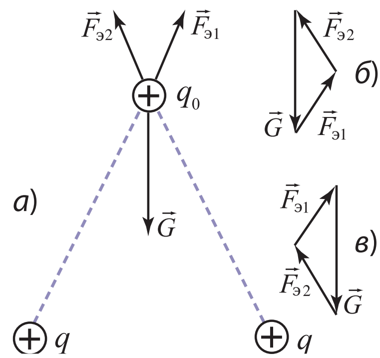


Рис. 3.1

В большинстве случаев тело в состоянии равновесия находится в контакте с другими телами – нитями, стержнями, телами с плоской, цилиндрической или другой формы поверхностями. Эти тела ограничивают движение рассматриваемого тела и называются **телами связи** или просто **связями**.

Связи действуют на рассматриваемое тело с некоторыми силами, которые называются **силами реакции** или **силами связи**. Эти силы зависят от остальных сил, действующих на данное тело.

Проанализируем пример: маленький шарик, заряженный положительным электрическим зарядом, подвешен на тонкой шелковой нити (*рис. 3.2*). Для случая, представленного на *рисунке 3.2, а*, из условия равновесия $\vec{T}_a + \vec{G} = 0$ или $\vec{T}_a = -\vec{G}$ получаем значение натяжения нити $|\vec{T}_a| = |\vec{G}|$.

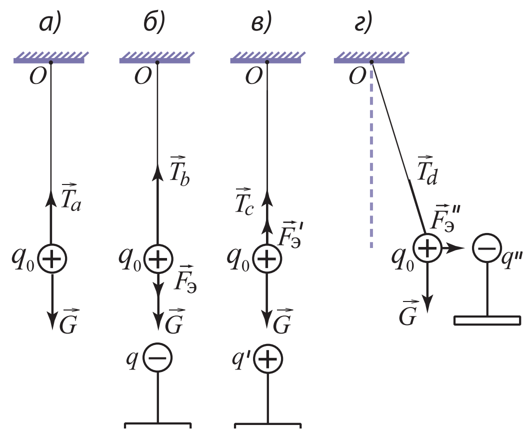


Рис. 3.2

Допустим, что под висящим шариком находится другой, заряженный отрицательно, как на *рисунке 3.2, б* или положительно (*рис. 3.2, в*). Приняв во внимание знаки зарядов, изобразим электрические силы $\vec{F}_э$ и $F_э{}'$, действующие на подвешенные шарики (*рис. 3.2, б* и *в*). Действуя, как в предыдущем случае, получим значения натяжений нити $T_b = G + F_э$ и $T_c = G - F_э{}'$. Таким образом, направление силы реакции – натяжения нити – в этих трех случаях остается вертикальным, но имеет разные значения. Натяжение нити может иметь и другое направление, отличное от вертикального (*рис. 3.2, г*).

Условие равновесия материальной точки при наличии связей остается тем же (3.1), но содержит все силы, действующие на данную точку, включая реакции связей. В большинстве задач на равновесие материальной точки (твердого тела в поступательном движении) как раз и требуется определить эти реакции.

В ряде случаев направления сил реакции известны, они зависят от тела, которое осуществляет связь, и направление реакции совпадает с тем направлением, в котором движение материальной точки ограничено данной связью. Так, нить препятствует удалению шарика от точки подвеса *O* (*рис. 3.2*), ее реакция – натяжение нити – направлена вдоль нити к точке подвеса. В случае, когда связи осуществляются стержнями, шарнирно закрепленными с обоих концов, их реакции направлены вдоль стержней. Но их ориентация зависит от состояния деформации стержня (*рис. 3.3, а*): сжатия (стержень *BC*) или растяжения (стержень *AB*). И наконец, если связь осуществляется через тело, имеющее плоскую поверхность (*в точке A рис. 3.3, б*) или рассматриваемое тело имеет плоскую поверхность, соприкасающуюся с телом связи (*точка B рис. 3.3, б*), то сила реакции перпендикулярна плоской поверхности.

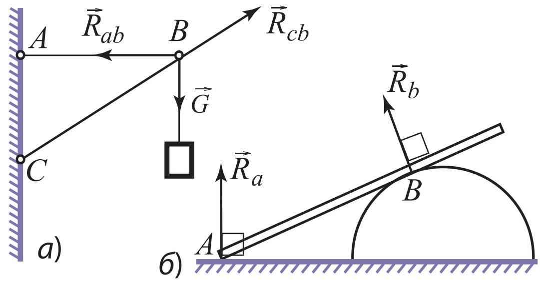


Рис. 3.3

Определение реакций связей или неизвестных сил, действующих на твердое тело, находящееся в равновесии, может быть осуществлено двумя методами: графическим и аналитическим. Графический метод состоит в построении многоугольника сил в выбранном масштабе и определении из него неизвестных величин.

Гораздо чаще используется аналитический метод. В этом методе выбирают наиболее подходящую систему координат (как можно большее число сил должно быть ориентировано вдоль ее осей), затем переходят от векторного уравнения (3.1) к скалярным уравнениям для проекций сил:

$$\begin{aligned} F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx} = 0, \\ F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny} = 0, \\ F_{1z} + F_{2z} + \ldots + F_{nz} = 0. \end{aligned} \qquad (3.2)$$

Эти три скалярных условия равновесия (3.2) эквивалентны векторному условию (3.1).

Для простоты, в случае системы сил, действующих в плоскости, выбирают ось (обычно *Oz*), перпендикулярную этой плоскости таким образом, что в третьем уравнении (3.2) все слагаемые равны нулю. Система (3.2) сводится к системе двух уравнений.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Уличный фонарь массой 12 кг подвешен при помощи горизонтального стержня AB, шарнирно закрепленного на конце *A*, и троса *BC*, который образует со стержнем угол $\alpha = 30^{\circ}$ (*рис. 3.4*). Определите силу, растягивающую трос, и силу, сжимающую стержень.

РЕШЕНИЕ

Дано:
$m = 12$ кг
$\alpha = 30^{\circ}$

T – ? R_{AB} – ?

На *рис. 3.5* представлены силы, приложенные в точке *B*: сила тяжести фонаря $\vec{G} = m\vec{g}$, натяжение троса $\vec{T}$ и реакция стержня $\vec{R}_{AB}$. Точка подвеса *B* покоится, тогда согласно условию равновесия для поступательного движения (3.1) сумма сил, действующих на нее, равна нулю: $\vec{T} + \vec{R}_{AB} + \vec{G} = 0$.

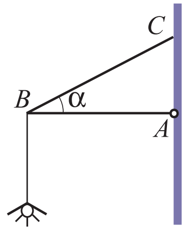


Рис. 3.4

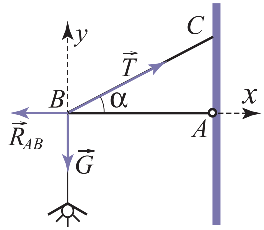


Рис. 3.5

Выбираем оси координат, как показано на *рисунке 3.5*, и переходим от векторного уравнения к уравнениям для проекций сил на эти оси:

на ось Bx $\quad T\cos\alpha - R_{AB} = 0,$

на ось By $\quad T\sin\alpha - G = 0.$

Из этих двух уравнений, являющихся условиями равновесия, находим: $T = \dfrac{G}{\sin\alpha} = \dfrac{mg}{\sin\alpha}$; $T = 240$ Н и $R_{AB} = T\cos\alpha$; $R_{AB} = 208$ Н. В соответствии с третьим законом Ньютона деформирующие силы равны по модулю силам реакции связей. Следовательно, сила растяжения троса равна его натяжению $T = 240$ Н, а сила сжатия стержня – его реакции $R_{AB} = 208$ Н.

2. Аэростат, сила тяжести которого $G = 2\,500$ Н, удерживается у земли с помощью троса (*рис. 3.6*), в ветреную погоду образующего с поверхностью Земли угол $\alpha = 60^\circ$. Определите архимедову силу, действующую на аэростат, и горизонтальную силу, с которой ветер действует на него, если натяжение троса $T = 3\,000$ Н.

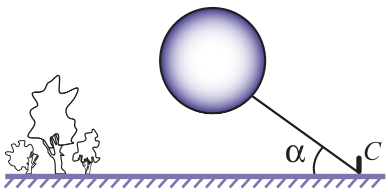


Рис. 3.6

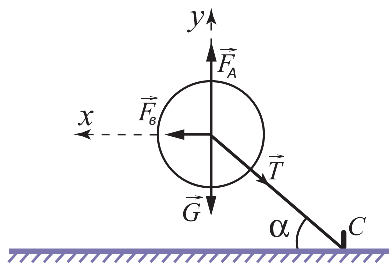


Рис. 3.7

РЕШЕНИЕ

Дано:
$G = 2\,500$ Н
$\alpha = 60^\circ$
$T = 3\,000$ Н

F_A – ? $F_в$ – ?

На аэростат действуют следующие силы (*рис. 3.7*): сила тяжести $\vec{G}$, архимедова сила $\vec{F}_A$, направленная вертикально вверх, натяжение троса $\vec{T}$ и сила ветра. Условие равновесия этой системы сил имеет вид:

$$\vec{G} + \vec{F}_A + \vec{T} + \vec{F}_в = 0.$$

В проекциях на оси координат, выбранных, как показано на рисунке, получаем два скалярных уравнения:

на ось Ox $\quad -T\cos\alpha + F_в = 0,$

на ось Oy $\quad -G + F_A - T\sin\alpha = 0.$

Определяем неизвестные силы: $F_в = T\cos\alpha$ и $F_A = G + T\sin\alpha$. Численные значения равны $F_в = 2\,595$ N и $F_A = 4\,000$ N.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Как вы понимаете утверждение, что тело находится в равновесии при поступательном движении?
2. Тело находится в динамическом равновесии при поступательном движении относительно некоторой системы отсчета. Как нужно выбрать другую систему отсчета, чтобы тело относительно нее находилось в статическом равновесии?
3. Каким является условие равновесия твердого тела при поступательном движении?
4. Что такое тела связи?
5. Как ориентирована реакция шарнирно закрепленного стержня? От чего зависит ее направление?
6. Груз массой $m = 60$ кг подвешен к тросу, натяжение разрыва которого $T_p = 1176$ Н. К концу троса, на котором подвешен груз, приложена горизонтальная сила $\vec{F}$

(*рис. 3.8*). Определите минимальный угол α, который может образовать трос с горизонталью, и значение силы $\vec{F}$, соответствующее этому углу.

7. Уличный фонарь, освещающий проезжую часть дороги, подвешен к середине троса длиной l = 30 м. Точка подвеса фонаря расположена на h = 1,2 м ниже точек прикрепления троса к опорным столбам. Определите натяжение троса, если масса фонаря m = 16 кг.

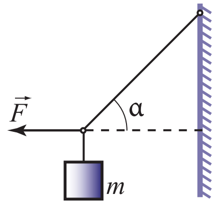


Рис. 3.8

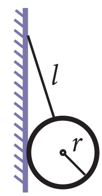


Рис. 3.9

8. Сфера массой m = 2,4 кг и радиусом r = 6 см подвешена на нити длиной l = 24 см, другой конец которой закреплен в некоторой точке гладкой вертикальной стены (*рис. 3.9*). Чему равны натяжение нити подвеса и сила, с которой сфера давит на стену?

3.2° МОМЕНТ СИЛЫ. РАВНОВЕСИЕ ПРИ ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Проведем следующий опыт. Возьмем две доски, у которых на одном из концов укреплены блоки (подобные тем, что используют для изучения трения). Расположим их рядом так, чтобы блоки находились на противоположных концах. На доски положим деревянный брусок, в который вбиты два гвоздя так, чтобы нити, привязанные к гвоздям и перекинутые через блоки, были параллельны (*рис. 3.10*). Одной рукой придерживаем брусок, а к свободным концам нитей, перекинутых через блоки, подвешиваем тела одинаковой массы. Таким образом, на брусок действуют две силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, имеющие одинаковые модули, параллельные линии действия и направленные в противоположные стороны (*рис. 3.11, а*). Такая система сил называется **парой сил**. Расстояние между линиями действия сил, составляющих пару, называется **плечом пары**. Согласно определению пары сил $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$, результирующая сил пары равна нулю.

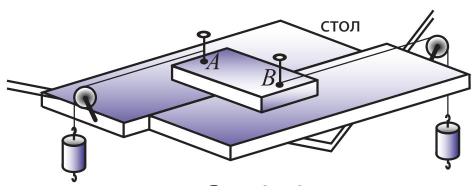


Рис. 3.10

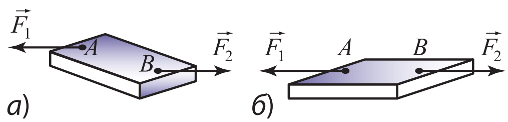


Рис. 3.11

Освобождаем брусок, но он не остается в покое, а вращается до тех пор, пока не займет положение, при котором силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ имеют общую линию действия (*рис. 3.11, б*).

Этот опыт показывает следующее: условие равновесия (3.1) (условие равенства нулю результирующей силы) является недостаточным, чтобы тело покоилось, так как не исключает вращательного движения. Чтобы установить условие равновесия для вращательного движения, проведем опыт, используя диск с иглами и осью вращения. Закрепим на дис-

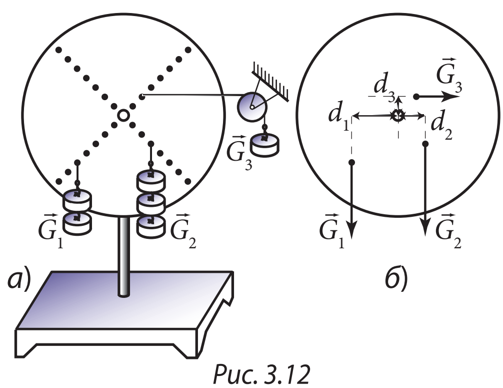


Рис. 3.12

ке лист бумаги и добьемся равновесия относительно вращательного движения подобно тому, как показано на *рисунке 3.12, а*. Отметим карандашом на бумаге направления нитей, к которым подвешены тела. Снимем бумагу с диска и проведем линии действия сил (продолжим направление нитей). Измерим расстояния d_1, d_2, d_3 от оси вращения до этих линий. Сила G_1 поворачивала бы диск против часовой стрелки, а силы G_2 и G_3 – по часовой стрелке. Вычислим значения G_1d_1 и $G_2d_2 + G_3d_3$. Видим, что они удовлетворяют условию

$$G_1d_1 = G_2d_2 + G_3d_3. \tag{3.3}$$

Величина *d*, равная расстоянию от оси вращения до линии действия силы, называется *плечом силы* относительно этой оси.

Введем величину, которая называется **моментом силы относительно оси вращения:**

$$M = \pm F \cdot d. \tag{3.4}$$

Она численно равна произведению силы на ее плечо и условно берется со знаком ”+”, если сила вращает тело против часовой стрелки, и со знаком ”–”, если вращает по часовой стрелке.

В опыте, представленном на *рисунке 3.12*, моменты сил тяжести равны: $M_1 = G_1d_1$, $M_2 = -\,G_2d_2$ и $M_3 = -\,G_3d_3$ а условие (3.3) запишется следующим образом:

$$M_1 + M_2 + M_3 = 0. \tag{3.5}$$

В общем случае условие равновесия при вращательном движении твердого тела записывается так:

$$M_1 + M_2 + \ldots + M_n = 0. \tag{3.6}$$

Твердое тело находится в равновесии при вращательном движении, если алгебраическая сумма моментов всех сил относительно оси вращения равна нулю.

Итак, твердое тело находится в равновесии относительно инерциальной системы отсчета только при выполнении обоих условий равновесия – при поступательном движении (3.1) и вращательном движении (3.6):

$$\begin{gathered}\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = 0,\\ M_1 + M_2 + \ldots + M_n = 0.\end{gathered} \tag{3.7}$$

Отметим, что для системы сил, лежащих в одной плоскости, выбор оси вращения, перпендикулярной этой плоскости, может быть произвольным, если результирующая этих сил равна нулю. Поэтому ось вращения, относительно которой вычисляется сумма моментов сил, выбирается так, чтобы моменты как можно большего числа сил были равны нулю.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Однородный стержень массой $m = 24$ кг и длиной $l = 2$ м опирается одним концом на гладкий пол, а другим – на ребро *C*, расположенное на высоте $h = 1{,}5$ м от пола. Стержень образует угол $\alpha = 60^\circ$ с полом и удерживается горизонтальным тросом *AD*, натянутым вблизи от пола, параллельно ему (*рис. 3.13*). Определите натяжение троса, реакцию пола и реакцию ребра *C*.

РЕШЕНИЕ

Дано:
$m = 24$ кг
$l = 2$ м
$h = 1{,}5$ м
$\alpha = 60^\circ$

T – ? N – ? R – ?

На стержень действует сила тяжести $m\vec{g}$, нормальная реакция пола $\vec{N}$, реакция ребра $\vec{R}$, перпендикулярная стержню, и натяжение троса $\vec{T}$ (*рис. 3.14*). Условие равновесия при поступательном движении: $m\vec{g} + \vec{N} + \vec{R} + \vec{T} = 0$. Взяв проекции на оси координат, указанные на *рисунке 3.14*, получим:

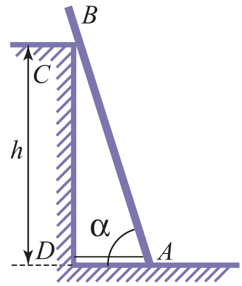


Рис. 3.13

на ось Dx $\qquad R\sin\alpha - T = 0;$ (1)

на ось Dy $\qquad -mg + N + R\cos\alpha = 0.$ (2)

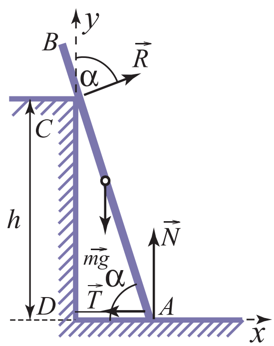


Рис. 3.14

К этим двум уравнениям с тремя неизвестными (N, R и T) добавим третье, выражающее условие равновесия при вращательном движении. Приравняем к нулю сумму моментов сил относительно оси, проходящей через A перпендикулярно плоскости рисунка. Моменты реакций $\vec{N}$ и $\vec{T}$ относительно этой оси равны нулю. Получаем уравнение, содержащее одну неизвестную величину:

$$mg \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos\alpha - R \cdot AC = 0. \qquad (3)$$

Расстояние $AC = \dfrac{h}{\sin\alpha}$, так что уравнение (3) принимает вид:

$$mg\frac{l}{2}\cos\alpha - R\frac{h}{\sin\alpha} = 0.$$

Отсюда выражаем реакцию ребра C:

$$R = \frac{mgl\sin\alpha\cos\alpha}{2h}; \quad R = 69{,}2\ N.$$

Затем из уравнения (1) находим натяжение троса $T = R\sin\alpha$; $T = 59{,}9$ Н. Наконец находим реакцию пола из уравнения (2): $N = mg - R\cos\alpha$; $N = 205{,}4$ Н.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Что называется плечом силы?
2. Как определяется момент силы?
3. Запишите условие равновесия твердого тела, имеющего неподвижную ось вращения.
4. Как изменится условие равновесия при вращательном движении, если принять другое соглашение относительно знаков моментов сил: те, которые вращали бы тело по часовой стрелке, считать положительными, а те, которые вращали бы против часовой стрелки – отрицательными?
5. Что называется парой сил?
6. Силы, составляющие пару сил, имеют модули, равные *F*, а расстояние между линиями их действия равно *d*. Вычислите момент пары как сумму моментов сил, ее составляющих, относительно оси, перпендикулярной плоскости пары. Зависит ли момент пары от положения этой оси?
7. К концам однородного стержня массой $m = 2$ кг и длиной $l = 1{,}2$ м подвешены два тела массой $m_1 = 4$ кг и $m_2 = 6$ кг. На каком расстоянии от конца, к которому подвешено тело m_1, должна находиться точка опоры, чтобы стержень был в равновесии?

8. Рабочий держит за один конец доску массой $m = 30$ кг таким образом, что она образует с горизонтом угол $\alpha = 30^o$. Чему равно значение силы, приложенной перпендикулярно доске со стороны рабочего? Чему бы равнялась сила, если бы она была вертикальной?

9. Лестница длиной $l = 4$ м и массой $m = 18$ кг приставлена к гладкой вертикальной стене и образует с ней угол $\alpha = 30^o$. До какой максимальной высоты сможет подняться по лестнице человек, прежде чем она начнет скользить, если коэффициент трения между лестницей и полом $\mu = 0,3$, а масса человека в $n = 4$ раза больше массы лестницы? С какой силой будет действовать лестница на стену тогда, когда человек будет находиться на этой высоте?

10. Однородный стержень согнут под прямым углом (таким образом, что длина одной части равна 1/3 длины стержня) и повешен на гвоздь. Какой угол образует короткая часть стержня с горизонталью?

3.3° ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК. ЦЕНТР МАСС

a. Центр тяжести. Центр масс

Рассмотрим твердое тело, размеры которого много меньше радиуса Земли. Мысленно разобьем его на большое число n маленьких объемов V_i с равными массами m_i. На них действуют силы тяжести $\vec{G}_i = m_i\vec{g}$. Так как размеры тела малы, то эти силы параллельны.

Равнодействующая параллельных сил $\vec{G} = \vec{G}_1 + \vec{G}_2 + ... + \vec{G}_n$ представляет собой силу тяжести тела, а точка ее приложения называется *центром тяжести тела*.

Знание положения центра тяжести чрезвычайно важно в технике, так как оно определяет устойчивость зданий, башен, станков, плотин, морских судов, автомобилей и т.д.

Определим положение центра тяжести системы, состоящей из двух однородных шаров, соединенных тонким стержнем. Для простоты допустим, что масса стержня много меньше масс шаров m_1 и m_2, а их радиус намного меньше длины стержня. В таком случае массой стержня можно пренебречь, а шары принять за материальные точки.

Будем считать, что стержень имеет одну точку опоры C, взятую таким образом, чтобы стержень находился в равновесии в горизонтальном положении (*рис. 3.15*). Обозначим реакцию опоры через $\vec{F}$. Уравнениями, выражающими условия равновесия рассматриваемой механической системы, являются:

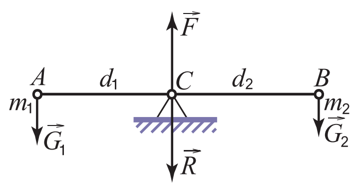


Рис. 3.15

$$\vec{G}_1 + \vec{G}_2 + \vec{F} = 0, \tag{3.8}$$

$$G_1d_1 - G_2d_2 = 0. \tag{3.9}$$

Реакция $\vec{F}$ – это сила, с которой опора действует на стержень. В соответствии с третьим законом Ньютона стержень давит на опору с силой $\vec{R} = -\vec{F}$. Принимая во внимание уравнение (3.8), получим:

$$\vec{R} = \vec{G}_1 + \vec{G}_2. \tag{3.10}$$

Значит, равнодействующая сил тяжести $\vec{G}_1$ и $\vec{G}_2$ приложена в точке, относительно которой сумма моментов этих сил равна нулю. Таким образом, результирующая сил тяжести шаров приложена в точке, определяемой условием равновесия (3.9).

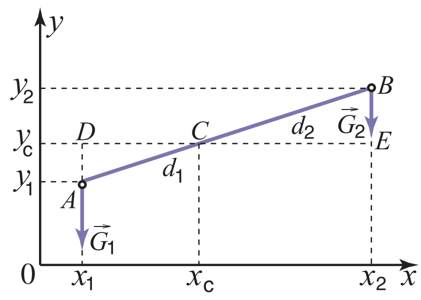


Рис. 3.16

Выведем формулу, позволяющую вычислять координаты центра тяжести двух материальных точек (шаров), если известны их координаты. Представим рассматриваемую систему на *рисунке 3.16* и введем соответствующие обозначения. Из условия (3.9) выразим отношение модулей сил тяжести:

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{d_2}{d_1}. \qquad (3.11)$$

Прямоугольные треугольники *CDA* и *CEB* подобны. Напишем отношение соответствующих сторон:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{CE}{CD} = \frac{BE}{AD}. \qquad (3.12)$$

Из *рисунка 3.16* видно, что: $BC = d_2$, $AC = d_1$, $CE = x_2 - x_c$, $DC = x_c - x_1$, $BE = y_2 - y_c$ и $AD = y_c - y_1$. Отношения (3.12) принимают вид:

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{x_2 - x_c}{x_c - x_1} = \frac{y_2 - y_c}{y_c - y_1}.$$

Принимая во внимание (3.11), можем записать:

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{x_2 - x_c}{x_c - x_1} \text{ и } \frac{G_1}{G_2} = \frac{y_2 - y_c}{y_c - y_1}.$$

Отсюда получаем выражения для координат центра тяжести системы двух шаров (материальных точек):

$$x_c = \frac{G_1 x_1 + G_2 x_2}{G_1 + G_2}; \quad y_c = \frac{G_1 y_1 + G_2 y_2}{G_1 + G_2}. \qquad (3.13)$$

Отметим, что эти формулы сохраняют свой вид и в случае системы большего числа материальных точек:

$$x_c = \frac{G_1 x_1 + G_2 x_2 + \ldots + G_n x_n}{G_1 + G_2 + \ldots + G_n}; \quad y_c = \frac{G_1 y_1 + G_2 y_2 + \ldots + G_n x_n}{G_1 + G_2 + \ldots + G_n}. \qquad (3.14)$$

Подобная формула может быть написана и для координаты z_c, если материальные точки не лежат в одной плоскости.

Подставив $G_1 = m_1 g$ и $G_2 = m_2 g$ в формулы (3.13) и сократив g, получим

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}; \quad y_c = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}. \qquad (3.15)$$

Очевидно, эти же формулы получатся и для общего случая, когда на материальные точки действуют параллельные силы, пропорциональные массам: $\vec{F}_1 = m_1\vec{k}$, $\vec{F}_2 = m_2\vec{k}$. Следовательно, формулы (3.15) являются более общими, чем формулы (3.13).

Точка C, координаты которой определяются формулами (3.15), называется *центром масс* системы материальных точек.

Это определение остается пригодным и в случае, когда на материальные точки не действуют параллельные силы тяжести, например в состоянии невесомости.

б. Определение положения центра тяжести

Проще всего определяется положение центра тяжести однородных тел, обладающих элементами симметрии. Например, кольцо, плоская пластина постоянной толщины в форме параллелограмма, сфера, цилиндр, прямая призма имеют центр симметрии, с которым совпадает центр тяжести этих тел. Отметим, что центр тяжести может быть точкой, не принадлежащей телу, как у кольца. Усеченный конус (*рис. 3.17, а*) имеет ось симметрии OO' – его центр тяжести лежит на этой оси. Молоток (*рис. 3.17, б*) имеет две плоскости симметрии – P и P'. Его центр тяжести находится на этих плоскостях симметрии, то есть на линии их пересечения.

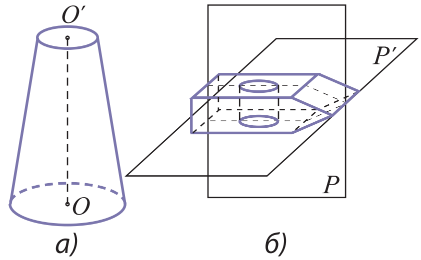


Рис. 3.17

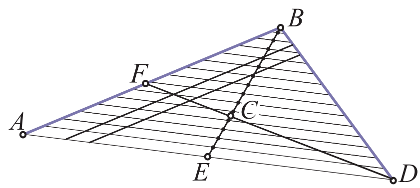


Рис. 3.18

Относительно просто найти положение центра тяжести однородной плоской треугольной пластины постоянной толщины. Мысленно разделим треугольник на узкие полоски, параллельные одной из его сторон, например AD (*рис. 3.18*). Центр тяжести каждой из полосок лежит на ее середине, то есть центры тяжести всех полосок лежат на медиане BE, значит, на ней находится и центр тяжести треугольника. Если треугольник мысленно разбить на полоски, параллельные стороне AB, то мы придем к выводу, что центр тяжести лежит на медиане DF.

Таким образом, приходим к заключению, что центр тяжести C треугольной пластины постоянной толщины лежит на пересечении медиан. Известно, что эта точка делит медиану в определенном отношении: $EC : CB = FC : CD = 1 : 2$.

Зачастую тело сложной геометрической формы (*рис. 3.19*) может быть разбито на тела более простой формы с известными положениями центров тяжести. Сначала определим положения центров тяжести этих тел C_1 и C_2. Считая, что силы тяжести $\vec{G}_1$ и $\vec{G}_2$ приложены в этих точках, определим положение центра тяжести всего тела с помощью формул (3.13).

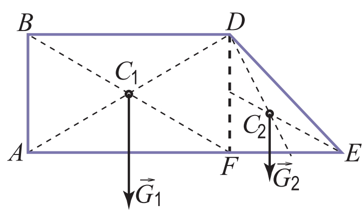


Рис. 3.19

Положение центра тяжести неоднородной плоской фигуры неправильной формы проще всего определить экспериментально. Подвесим тело такой формы к нити в точке A. В состоянии равновесия сила тяжести, приложенная в центре тяжести, уравновешивается натяжением нити. Следовательно, эти две силы имеют общую линию действия. Центр тяжести находится на направлении нити подвеса. Проведем на теле соответствующее направление

AA' (*рис. 3.20, а*). Опыт повторим, подвешивая тело в другой его точке – B (*рис. 3.20, б*), и проведем на теле направление нити BB'. Центр тяжести лежит на обоих направлениях (AA' и BB'), то есть находится в точке их пересечения C.

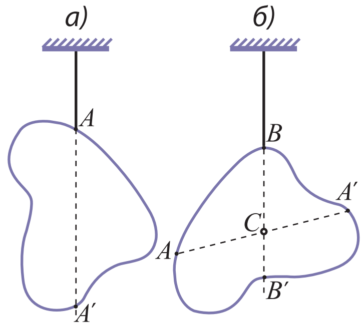


Рис. 3.20

Очевидно, тело, закрепленное в центре тяжести, находится в равновесии при любом его положении, если на него действуют только силы тяжести.

Знание положения центра тяжести важно для анализа устойчивости тел. Рассмотрим тело, имеющее поверхность опоры, например цилиндр. Из *рисунка 3.21* видно, что в случае *а)* тело находится в равновесии (сила тяжести уравновешена реакцией опоры), а в случае *в)* оно опрокидывается. В случае *б)* тело находится на пределе равновесия, то есть в состоянии неустойчивого равновесия.

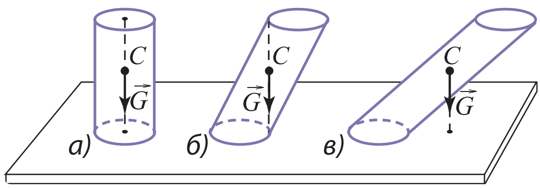


Рис. 3.21

Таким образом, **тело, имеющее поверхность опоры, находится в устойчивом равновесии, если вертикаль, опущенная из центра тяжести, проходит через эту поверхность.**

Устойчивость равновесия тела с несколькими возможными поверхностями опоры зависит от того, какая из них служит опорой. Из *рисунка 3.22* видно, что при отклонении тела на один и тот же угол, оно после освобождения в случае *а)* возвращается в начальное положение, а в случае *б)* – опрокидывается. Равновесие тем более устойчиво, чем ниже положение центра тяжести тела. Позднее мы придем к этому же выводу из других соображений.

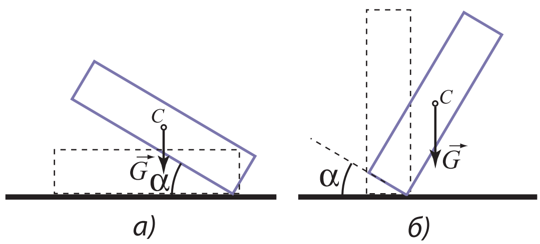


Рис. 3.22

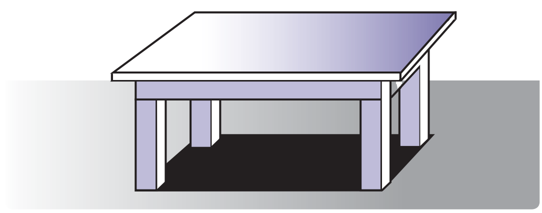


Рис. 3.23

Если тело имеет несколько областей контакта с опорой, на которой находится, то роль поверхности опоры играет **поверхность внутри контура**, полученная при соединении наиболее удаленных точек контакта с опорой. На *рисунке 3.23* такая поверхность опоры стола окрашена в черный цвет.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Два однородных шара с радиусами r и $2r$ из одного и того же материала скреплены в точке их касания. Определите положение центра тяжести системы шаров относительно точки их касания.

РЕШЕНИЕ

Дано:
$R_1 = r$
$R_2 = 2r$
$\rho_1 = \rho_2 = \rho$

x_c – ?

На *рисунке 3.24* представлена рассматриваемая механическая система. Центр тяжести системы C находится на оси Ox, проходящей через линию центров C_1 и C_2 и являющейся осью симметрии.

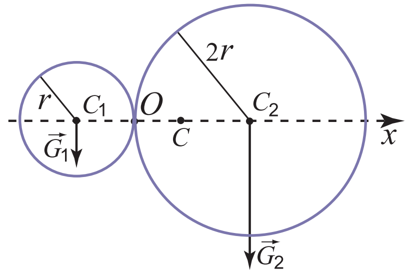


Рис. 3.24

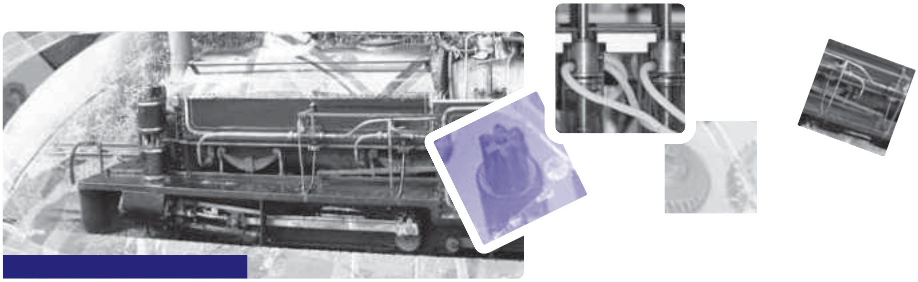
Массы шаров равны $m_1 = \dfrac{4}{3}\pi r^3\rho$ и $m_2 = \dfrac{4}{3}\pi(2r)^3\rho$, где ρ – плотность вещества, из которого сделаны шары.

Координаты центров тяжести шаров равны $x_1 = -r$ и $x_2 = +2r$.

Используем формулу (3.13) для координаты центра тяжести: $x_c = \dfrac{G_1x_1 + G_2x_2}{G_1 + G_2}$. Поставив соответствующие величины, получим $x_c = 5r/3$.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Что такое центр тяжести тела?
2. Какое понятие является более общим: центр тяжести или центр масс? Аргументируйте ответ.
3. Когда тело, имеющее поверхность опоры, находится в равновесии?
4. От однородного цилиндра длиной $L = 2$ м был отрезан конец длиной $l = 0{,}4$ м. На сколько и в каком направлении переместится центр тяжести цилиндра?
5. Два однородных шара радиусами $r = 10$ см, один алюминиевый и второй медный, скреплены в точке их касания. Определите положение центра тяжести системы шаров относительно точки их касания. Плотность алюминия $\rho_1 = 2{,}70 \cdot 10^3$ кг/м^3, а меди $\rho_2 = 8{,}96 \cdot 10^3$ кг/м^3.
6. Тело, изображенное на *рисунке 3.19*, вырезано из листа жести. Определите координаты его центра масс, если известны размеры: $AB = 12$ см, $BD = 20$ см, $AE = 35$ см.
7. Однородный стержень согнут посредине под прямым углом и за один конец подвешен на нити. Какой угол образует верхняя часть стержня с горизонтальным направлением?



Глава IV

МЕХАНИЧЕСКИЙ ИМПУЛЬС. РАБОТА И МЕХАНИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ

4.1 ИМПУЛЬС МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ ИСПУЛЬСА И ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Рассмотрим тело, которое можно считать материальной точкой. Обозначим его массу через m, а равнодействующую всех сил, действующих на него, – через $\vec{F}$. Согласно основному закону динамики запишем:

$$m\vec{a} = \vec{F}, \tag{4.1}$$

где ускорение, сообщенное равнодействующей $\vec{F}$, равно $\vec{a} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$. Промежуток времени Δt считается достаточно малым, таким, что на его протяжении сила $\vec{F}$ остается практически неизменной. Если же сила $\vec{F}$ постоянна, то промежуток Δt может быть любым.

Изменение скорости равно $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$, следовательно, ускорение $\vec{a} = \dfrac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t}$. Подставив это выражение в (4.1), получим:

$$\frac{m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1}{\Delta t} = \vec{F}. \tag{4.2}$$

Введем новую физическую величину, обозначив ее $\vec{p}$:

$$\vec{p} = m\vec{v}. \tag{4.3}$$

Величина $\vec{p}$ называется **механическим импульсом** или просто **импульсом тела** (материальной точки). Ее называют также **количеством движения.**

Импульс материальной точки равен произведению массы точки на ее скорость.

Единицей импульса в СИ является $[p] = [m] \cdot [v] =$ кг · м/с.

Из определения (4.3) видно, что импульс тела является векторной физической величиной, имеющей такое же направление, что и скорость. Поскольку скорость – величина относительная, то импульс также является относительной величиной, зависящей от инерциальной системы отсчета, относительно которой описывается движение.

Подставим $\vec{p}_1 = m\vec{v}_1$ и $\vec{p}_2 = m\vec{v}_2$ – импульсы тела в моменты вермени t_1 и t_2, то есть в начале и конце промежутка времени Δt – в формулу (4.2):

$$\frac{\vec{p}_2 - \vec{p}_1}{\Delta t} = \vec{F}.$$

Но $\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta\vec{p}$ – это изменение импульса. Таким образом, получаем:

$$\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \vec{F}. \tag{4.4}$$

Отношение изменения импульса материальной точки к соответствующему промежутку времени равно равнодействующей приложенных к точке сил.

Выражение (4.4) может быть записано:

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}\cdot\Delta t. \tag{4.5}$$

Обозначим через $\vec{H}$ физическую величину, равную произведению силы на длительность ее действия:

$$\vec{H} = \vec{F}\cdot\Delta t. \tag{4.6}$$

Эта величина называется **импульсом силы.**

Единица импульса силы такая же, как и импульса тела. (Н · с = кг · м/с)

Согласно формуле (4.5) **изменение импульса материальной точки равно импульсу результирующей силы, действующей на нее в течение соответствующего промежутка времени.** Соотношения (4.4) и (4.5) являются двумя математическими выражениями **теоремы об изменении импульса материальной точки.** Эти две формулировки были получены из основного закона динамики (4.1). Однако они имеют более общий характер и применимы и в случае тела с переменной массой. Соотношение (4.1) применимо только для тел с постоянной массой. Отметим, что формулировка, данная Ньютоном в „Математических началах натуральной философии", соответствует выражению (4.5).

Из формулы (4.5) видно, что изменение импульса тела определяется не только значением приложенной силы, но и длительностью ее действия. Так, меньшая сила, действуя более продолжительное время, может произвести такое же изменение импульса, что и бóльшая сила при меньшей длительности действия.

Импульс силы может быть вычислен графическим методом. Допустим, что сила постоянна. Построим график силы для промежутка времени $\Delta t = t_2 - t_1$, в течение которого она действует (*рис. 4.1, а*). Заметим, что импульс силы $F\Delta t = F(t_2 - t_1)$ численно равен площади прямоугольника под графиком силы.

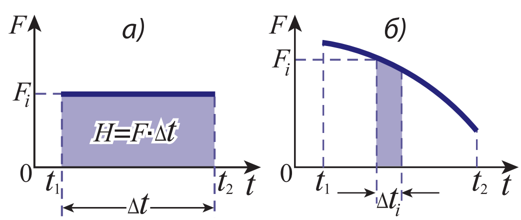


Рис. 4.1

Импульс силы, изменяющейся по модулю, но постоянной по направлению, вычисляется как сумма импульсов этой силы за большое число малых промежутков Δt_i, на которые разделен интервал $(t_2 - t_1)$. На протяжении малого промежутка Δt_i изменение силы достаточно мало, так что значение F_i можно считать постоянным. Импульс силы за этот интервал $F_i \Delta t_i$ численно равен площади узкой полоски (*рис. 4.1, б*). Сложению импульсов силы $F_i \Delta t_i$ соответствует сложение площадей всех полосок под графиком. Отсюда следует, что **импульс силы численно равен площади фигуры, ограниченной графиком силы, осью времени и отрезками, проходящими через крайние точки графика силы параллельно ординате** (*рис. 4.1*).

Допустим, что равнодействующая $\vec{F}$ сил, приложенных к телу, равна нулю. Эта ситуация наблюдается и в частном случае изолированного тела, то есть **тела, которое не взаимодействует с другими телами.** Подставив $\vec{F} = 0$ в выражение (4.4) или (4.5), получим $\Delta\vec{p} = 0$. Изменение какой-либо величины равно нулю, если сама величина является постоянной, в данном случае $\vec{p} = \text{const}$. Итак:

$$\vec{p} = \text{const}, \text{ если } \vec{F} = 0. \tag{4.7}$$

Импульс материальной точки сохраняется, если равнодействующая всех приложенных к ней сил равна нулю.

Это **закон сохранения импульса для материальной точки.**

Из закона сохранения импульса (4.7) и его определения (4.3) следует, что $\vec{v} = \text{const}$, то есть материальная точка движется прямолинейно равномерно, если равнодействующая всех приложенных к ней сил равна нулю. Этот вывод показывает, что закон сохранения (4.7) находится в согласии с законом инерции.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Автомобиль массой $m = 1\ 500$ кг движется по дороге со скоростью $v_1 = 9$ м/с. На перекрестке автомобиль сворачивает на дорогу, перпендикулярную первой и увеличивает свою скорость до $v_2 = 12$ м/с. Определите изменение импульса автомобиля. Каким было бы изменение импульса, если автомобиль, увеличив скорость, не изменил бы ее направления?

РЕШЕНИЕ

Дано:
$m = 1\,500$ кг
$v_1 = 9$ м/с
$v_2 = 12$ м/с

Δp – ? $\Delta p'$ – ?

Импульс автомобиля до перекрестка был $\vec{p} = m\vec{v}_1$, а за перекрестком стал $\vec{p}_2 = m\vec{v}_2$, при этом вектор $\vec{p}_2$ перпендикулярен $\vec{p}_1$. Изменение импульса автомобиля $\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ или $\vec{p}_2 = \vec{p}_1 + \Delta\vec{p}$. Строим соответствующие векторы (*рис. 4.2*). Из рисунка видно, что $\Delta p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$, то есть $\Delta p = m\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$. Выполнив расчеты, получим для изменения импульса значение $\Delta p = 22\ 500$ кг·м/с. Если автомобиль не изменяет направления движения, то векторы $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ коллинеарны и изменение импульса $\Delta p' = p_2 - p_1 = m(v_2 - v_1)$; $\Delta p' = 4\,500$ кг·м/с.

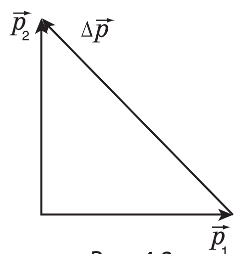


Рис. 4.2

2. Тележка массой $m = 27$ кг движется прямолинейно со скоростью $v_1 = 2$ м/с. В какой-то момент на нее начинает действовать сила (в направлении движения тележки), зависящая от времени согласно графику на *рисунке 4.3*. Какую скорость приобретет тележка в результате действия этой силы? Трением пренебрегаем.

РЕШЕНИЕ

Дано:
$m = 27$ кг
$\upsilon_1 = 2$ м/с

υ_2 – ?

Приравняем изменение импульса тележки импульсу силы, действующей на нее: $m(\upsilon_2 - \upsilon_1) = H$. Отсюда выражаем искомую скорость $\upsilon_2 = \upsilon_1 + H/m$.

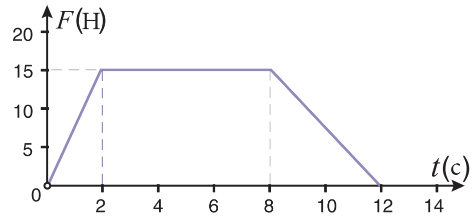


Рис. 4.3

Значение импульса силы определяется из *рисунка 4.3* как площадь фигуры под графиком: $H = \dfrac{6+12}{2} \cdot 15 = = 135$ (Н·с). Получаем $\upsilon_2 = 7$ м/с.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Что такое импульс тела? Как он направлен?
2. Зависит ли импульс от выбора системы отсчета? Поясните примерами.
3. Что называется импульсом силы? Как он направлен?
4. Как формулируется теорема об изменении импульса материальной точки?
5. Одна тележка массой $m_1 = 18$ кг движется со скоростью $\upsilon_1 = 6$ м/с, а другая тележка массой $m_2 = 40$ кг – со скоростью $\upsilon_2 = 1{,}8$ м/с. Импульс какой тележки больше и во сколько раз?
6. Известно, что два тела массой $m_1 = 18$ кг и $m_2 = 3{,}2$ кг имеют одинаковые импульсы. Чему равна скорость второго тела υ_2, если скорость первого равна $\upsilon_1 = 4{,}8$ м/с?
7. Тело массой $m = 0{,}4$ кг движется по окружности с постоянной по модулю скоростью $\upsilon = 1{,}5$ м/с. Чему равно численное значение импульса? Чему равно изменение импульса этого тела: *а)* за период обращения?; *б)* за половину периода?; *в)* за четверть периода?; *г)* за одну шестую часть периода?
8. Автомобиль массой $m = 1200$ кг движется по прямолинейному участку дороги со скоростью $\upsilon = 15$ м/с. В какой-то момент он начинает тормозить с ускорением, модуль которого равен $a = 2{,}5$ м/с^2. Чему равен импульс автомобиля через $t = 3$ с после начала торможения?
9. Импульс тележки равен $p = 120$ кг · м/с. За какое время тележка остановится при действии на нее силы трения $F_{тр.} = 48$ Н?

4.2 ИМПУЛЬС СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ ИМПУЛЬСА И ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Пусть имеется система материальных точек. Обозначим их массы через $m_1, m_2, \ldots$, а скорости через $\vec{\upsilon}_1, \vec{\upsilon}_2, \ldots$, соответственно. Импульсы этих материальных точек равны $\vec{p}_1 = m_1\vec{\upsilon}_1$, $\vec{p}_2 = m_2\vec{\upsilon}_2 \ldots$.

***Импульсом системы материальных точек* называется сумма импульсов всех точек из ее состава:**

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots = m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 + \ldots . \tag{4.8}$$

Импульсы $\vec{p}_1, \vec{p}_2, ...$ являются векторными величинами, значит, сумма в формуле (4.8) – векторная сумма.

а. Внутренние и внешние силы. Свойство внутренних сил

Материальные точки, составляющие систему, взаимодействуют как между собой, так и с телами, не входящими в ее состав. Силы, действующие на материальные точки системы, подразделяются на **внутренние** и **внешние силы.**

Внутренние силы – это силы взаимодействия между материальными точками, составляющими систему. Эти силы отмечаются нижними индексами, состоящими из двух чисел: первое число указывает материальную точку, на которую оказывается действие, а второе – точку, производящую это действие. Например, $\vec{F}_{32}$ – это сила, действующая на материальную точку 3 со стороны точки 2.

Силы взаимодействия материальных точек системы с телами, не принадлежащими ей, называются **внешними.** Обозначим через $\vec{F}_1$ равнодействующую внешних сил, приложенных к материальной точке 1, $\vec{F}_2$ – результирующую внешних сил, действующих на точку 2, и т.д.

Рассмотрим систему из трех материальных точек – трех заряженных частиц, и проанализируем внутренние силы (*рис. 4.4*). Допустим, что частицы 1 и 3 заряжены положительным зарядом, а частица 2 – отрицательным. Изобразим силы взаимодействия с учетом того, что одноименные заряды отталкиваются, а разноименные притягиваются (*рис. 4.4*). Обозначим силы на рисунке в соответствии с договоренностью, принятой выше для внутренних сил.

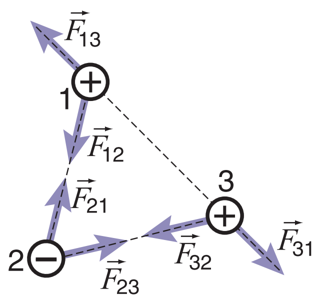


Рис. 4.4

Согласно третьему закону Ньютона силы взаимодействия между каждой парой частиц равны по модулю и направлены вдоль общей линии действия, но в противоположные стороны:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21},\ \vec{F}_{13} = -\vec{F}_{31} \text{ и } \vec{F}_{23} = -\vec{F}_{32},$$

следовательно,

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0,\ \vec{F}_{13} + \vec{F}_{31} = 0 \text{ и } \vec{F}_{23} + \vec{F}_{32} = 0.$$

Таким образом, мы можем утверждать, что **равнодействующая внутренних сил системы материальных точек равна нулю**. Это является свойством, характеризующим внутренние силы независимо от их природы.

б. Теорема об изменении импульса системы материальных точек

Рассмотрим для простоты систему из двух материальных точек. Обозначим их импульсы через $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$, а силы – согласно принятой договоренности *(рис. 4.5)*. На каждую точку системы действует одна внутренняя и несколько внешних сил, равнодействующая которых показана на рисунке. Исходя из этого, запишем теорему об изменении импульса (4.5) для каждой материальной точки в отдельности:

$$\begin{aligned} \Delta\vec{p}_1 &= (\vec{F}_1 + \vec{F}_{12})\Delta t, \\ \Delta\vec{p}_2 &= (\vec{F}_2 + \vec{F}_{21})\Delta t. \end{aligned} \qquad (4.9)$$

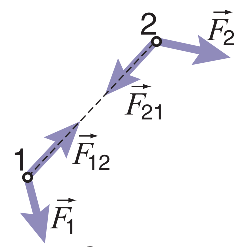


Рис. 4.5

Сложим эти равенства почленно и примем во внимание, что равнодействующая внутренних сил равна нулю. Получаем:

$$\Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)\Delta t. \tag{4.10}$$

С учетом того факта, что сумма изменений импульсов равна изменению их суммы $\Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = \Delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \Delta\vec{P}$, где $\vec{P}$ – это импульс системы, а $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}$ является равнодействующей внешних сил, приложенных к этим двум точкам, перепишем выражение (4.10) в следующем виде:

$$\Delta\vec{P} = \vec{F}\Delta t. \tag{4.11}$$

Это отношение выражает теорему об изменении механического импульса системы материальных точек:

Изменение импульса системы материальных точек равно импульсу равнодействующей всех внешних сил, которые действуют на точки системы.

Теорема была установлена для системы из двух материальных точек. С учетом свойства внутренних сил, отмеченного выше, можем сделать вывод, что сформулированная теорема применима к любой системе материальных точек.

Из выражений (4.9) следует, что внутренние силы могут изменять импульс каждой материальной точки в отдельности, но из (4.11) видно, что они не могут изменить импульс системы. Другими словами, внутренние силы изменяют импульсы точек, составляющих систему, таким образом, что сумма этих изменений равна нулю и не вызывает изменения импульса системы.

в. Закон сохранения импульса системы материальных точек. Приложения

Рассмотрим случай, когда равнодействующая внешних сил, приложенных к точкам системы, равна нулю $(\vec{F} = 0)$. Тогда из (4.11) следует, что изменение механического импульса системы также равно нулю $(\Delta\vec{P} = 0)$, а это означает, что импульс $\vec{P} = \text{const}$.

Мы получили **закон сохранения импульса для системы материальных точек:**

Импульс системы материальных точек сохраняется с течением времени, если равнодействующая внешних сил, приложенных ко всем точкам системы, равна нулю:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots = \text{const, если } \vec{F} = 0. \tag{4.12}$$

Закон сохранения импульса является фундаментальным законом природы. Мы его получили из законов ньютоновской механики. Однако он выполняется и для физических систем, к которым не могут быть применены эти законы, например, атомных ядер, взаимодействующих с различными частицами, электронов, взаимодействующих с электромагнитными волнами, элементарных частиц и т.д.

Закон сохранения механического импульса применим и в случае, когда равнодействующая внешних сил отлична от нуля, однако в системе в течение очень короткого промежутка времени Δt действуют внутренние силы, значительно бо́льшие, чем внешние. За такой промежуток времени внешние силы не успевают значительно изменить импульс системы материальных точек в целом, но внутренние силы существенно изменяют импульсы точек системы. Другими словами, в течение короткого промежутка времени происходят значительные изменения импульсов частиц, но сумма этих изменений приблизительно равна нулю. Примером подобной ситуации являются **соударения тел.** При соударении тела приходят в контакт и за время очень непродолжительного взаимодействия, за которое силы упругости становятся достаточно большими, импульсы тел изменяются, а сумма этих изменений равна нулю. Значит, сумма импульсов тел до соударения равна сумме их импульсов после удара. Обозначим массы тел через m_1 и m_2, их скорости до соударения через $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, после соударения – $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ (*рис. 4.6*). Закон сохранения импульса для этого соударения запишется в виде:

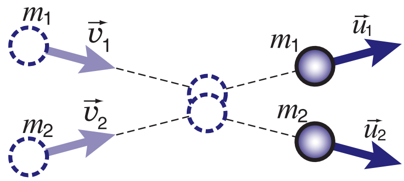


Рис. 4.6

$$\boldsymbol{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2}. \qquad (4.13)$$

Частным случаем соударения является **неупругий удар.** Так называется взаимодействие, в результате которого пришедшие в контакт тела образуют одно целое. Например, мальчик, который бежит, а затем вскакивает на покоющуюся или движущуюся тележку; два соединяющихся вместе вагона поезда; два пластилиновых шарика, после соударения образующие одно тело, и т.д. Масса образовавшегося после удара тела m равна сумме масс тел до соударения: $m = m_1 + m_2$, а его скорость равна $\vec{u}$.

Итак, для неупругого удара выражение (4.13) принимает вид:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u},$$

откуда

$$\boldsymbol{\vec{u} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}}. \qquad (4.14)$$

Ситуацией, „обратной во времени” неупругому удару, является взрыв: тело под действием внутренних сил делится на несколько осколков, например, взрыв гранаты или снаряда (*рис. 4.7*). Проанализируем несколько частных случаев применения закона сохранения импульса.

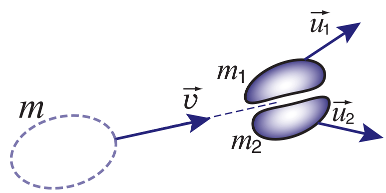


Рис. 4.7

1. Допустим, что в результате взрыва образовалось только два осколка. Обозначим массу тела до взрыва через m и его скорость через $\vec{v}$, массы получившихся осколков – m_1 и m_2, причем $m_1 + m_2 = m$; скорости осколков – $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$.

Закон сохранения механического импульса в данном случае выражается равенством

$$\boldsymbol{m\vec{v} = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2}. \qquad (4.15)$$

2. Рассмотрим ружье, которое в момент выстрела покоится ($v = 0$). Обозначим через m_1 и m_2 массу пули и ружья соответственно, через $\vec{u}_1$ – скорость пули и через $\vec{u}_2$ – скорость ружья (скорость отдачи). Соотношение (4.15) принимает вид

$$m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = 0,$$

откуда определяем скорость отдачи ружья:

$$\boldsymbol{\vec{u}_2 = -\frac{m_1\vec{u}_1}{m_2}}. \qquad (4.16)$$

Скорость отдачи направлена в сторону, противоположную скорости, полученной пулей, и во столько раз меньше ее, во сколько раз масса ружья больше массы пули.

Отметим, что в ряде случаев сохраняются только проекции механического импульса на некоторые направления, не сохраняясь для других направлений. Рассмотрим, например, систему материальных точек в какой-то небольшой области вблизи Земли так, чтобы ускорение свободного падения можно было считать постоянным ($\vec{g}$ = const). Внешними являются только силы тяжести. Их равнодействующая направлена вертикально вниз, ее проекции на любое горизонтальное направление равны нулю. Тогда, как это следует из (4.11), сохраняется только проекция механического импульса системы на любое горизонтальное направление, а на любые другие направления не сохраняется. Подобной будет ситуация и в том случае, когда стреляют из орудия, ствол которого образует с горизонтом угол α, и когда в направлении вертикали возникают значительные силы реакции.

г°. Реактивное движение

Реактивное движение тела является одним из приложений закона сохранения импульса. Оно обусловлено внутренними силами, которые способны отделять некоторые части от тела и сообщать им определенную скорость. Внутренние силы не изменяют импульса системы, следовательно, изменение импульса оставшейся части тела и изменение импульса отделившихся частей равны по модулю и направлены противоположно. В результате оставшаяся часть тела движется в направлении, противоположном скорости отделившихся частей. Простой пример реактивного движения мы наблюдаем, когда надуваем воздушный шарик и отпускаем его, не закрыв отверстия: воздух выходит из шарика, при этом сам шарик движется в противоположную сторону.

Некоторые живые существа перемещаются, „применяя" этот закон. Например, кальмар и каракатица, периодически выбрасывая воду, развивают скорость до 60–70 км/ч. Изобразим схематически ракету (*рис. 4.8*) и проанализируем ее реактивное движение. В передней части 1 находится полезный груз – научная аппаратура, космонавты и все необходимое для обеспечения их жизнедеятельности. Центральная часть 2 содержит топливо и запасы окислителя для поддержания горения. В задней части ракеты находится камера сгорания 3, где сжигается топливо, и образовавшиеся газы, имеющие высокие температуру и давление, выбрасываются с большой скоростью.

Для простоты допустим, что все газы, получившиеся при сгорании топлива, выбрасываются из ракеты сразу, а не вытекают постепенно, как происходит в действительности. Обозначим через $m_р$ полезную массу ракеты (после выбрасывания газов), через $m_г$ – массу вылетевших из ракеты газов, через $\vec{v}_р$ – скорость, полученную ракетой, и через $\vec{v}_г$ – скорость выброшенных газов, обе скорости взяты относительно системы отсчета, связанной с Землей. Вначале ракета находится на Земле в состоянии покоя, ее импульс равен нулю. Считая, что продолжительность выброса газа достаточно мала, можем пренебречь импульсом силы тяжести по сравнению с импульсом внутренних сил. В таком случае механический импульс сохраняется, то есть импульс системы, образованной телом ракеты и выброшенными газами, остается равным нулю:

Рис. 4.8

$$m_р\vec{v}_р + m_г\vec{v}_г = 0.$$

Отсюда выражаем скорость ракеты:

$$\vec{v}_р = -\frac{m_г}{m_р} \cdot \vec{v}_г. \quad (4.17)$$

Знак „минус” показывает, что скорость ракеты $\vec{v}_р$ направлена в сторону, противоположную скорости вылета газов $\vec{v}_г$. Из формулы (4.17) видно, что возможны два пути увеличения скорости ракеты: увеличивая отношение массы выброшенных газов к полезной массе ракеты и увеличивая скорость выброса газов. В результате сгорания топлива, используемого в настоящее время, скорость вылетевших газов может достичь значений порядка 4 000 м/с. Для увеличения отношения массы газов к полезной массе ракеты ее делают многоступенчатой: по мере сгорания топлива, ступени, которые содержали его, отделяются от ракеты, таким образом масса ракеты уменьшается, что ведет к более быстрому возрастанию ее скорости.

Вторая половина XX века отмечена выдающимися успехами в конструировании ракет, запуске космических кораблей и космических станций. 4 октября 1957 г. в Советском Союзе был произведен запуск первого искусственного спутника Земли, а 12 апреля 1961 г. Юрий Гагарин на борту космического корабля „Восток” впервые обогнул Землю. В июле 1969 г. американские астронавты Нейл Армстронг и Эдвин Олдрин сделали первые шаги по Луне. Они пробыли на ней 21 час 36 минут, в то время как их коллега Майкл Коллинз огибал Луну на борту корабля „Аполло XI”. Были запущены космические корабли не только вокруг Земли и к ее естественному спутнику Луне, но и к планетам Солнечной системы: ближайшим – Венере и Марсу и наиболее удаленным – Урану и Нептуну.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Две вагонетки массами $m_1 = 1\,200$ кг и $m_2 = 1\,600$ кг движутся навстречу друг другу со скоростями $v_1 = 0{,}4$ м/с и $v_2 = 0{,}5$ м/с соответственно. Определите скорости вагонеток после их сцепления.

РЕШЕНИЕ

Дано:
$m_1 = 1\,200$ кг
$v_1 = 0{,}4$ м/с
$m_2 = 1\,600$ кг
$v_2 = 0{,}5$ м/с

u – ?

После сцепления система, образованная двумя вагонетками, имеет массу $(m_1 + m_2)$ и скорость $\vec{u}$. Допустим, что направление скорости $\vec{u}$ совпадает с направлением оси Ox (*рис. 4.9*). Запишем закон сохранения импульса:

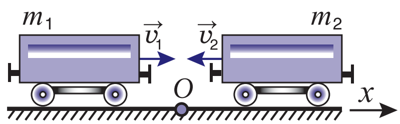


Рис. 4.9

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\,\vec{u}$$

или для проекций на ось Ox: $m_1v_1 - m_2v_2 = (m_1 + m_2)\,u$. Отсюда выражаем искомую скорость $u = \dfrac{m_1v_1 - m_2v_2}{m_1 + m_2}$; $u = -\,0{,}11$ м/с.

Знак „–” показывает, что общая скорость $\vec{u}$ (после сцепления вагонеток) направлена противоположно выбранной оси Ox, то есть так же, как скорость $\vec{v}_2$.

2. Снаряд массой m в верхней точке траектории, имея скорость $v = 600$ м/с, разрывается на два осколка массами $m_1 = 0{,}4\,m$ и $m_2 = 0{,}6\,m$. Определите скорости осколков сразу после взрыва, зная, что в этот момент скорость меньшего осколка образует с горизонтом угол $\alpha = 30°$, а большего – направлена вертикально вниз.

РЕШЕНИЕ

Дано:
$\upsilon = 600$ м/с
$m_1 = 0{,}4m$
$m_2 = 0{,}6m$
$\alpha = 30^{\circ}$

u_1 – ? u_2 – ?

Обозначим импульс снаряда перед взрывом через $\vec{p}$, а импульсы осколков – через $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$. Применим закон сохранения импульса: $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}$. Представим эту векторную сумму на *рисунке 4.10*, учтя при этом направления векторов $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$.

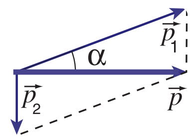


Рис. 4.10

Как видно из рисунка, импульс $p_1 = \dfrac{p}{\cos\alpha}$ и $p_2 = p_1 \sin\alpha = p\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Но $p = m\upsilon$, $p_1 = m_1u_1 = 0{,}4\,mu_1$ и $p_2 = m_2u_2 = 0{,}6\,mu_2$.

Подставим эти значения импульсов в записанные выше отношения: $0{,}4\,mu_1 = \dfrac{m\upsilon}{\cos\alpha}$ и $0{,}6\,mu_2 = m\upsilon\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Выразим искомые скорости $u_1 = \dfrac{\upsilon}{0{,}4\cos\alpha}$ и $u_2 = \dfrac{\upsilon\,\mathrm{tg}\,\alpha}{0{,}6}$. Получаем: $u_1 = 1\ 734$ м/с и $u_2 = 578$ м/с.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Могут ли внутренние силы изменить импульс системы материальных точек? Аргументируйте ответ.
2. В каких условиях сохраняется импульс системы материальных точек?
3°. Может ли реактивный двигатель ускорить ракету вне атмосферы Земли?
4. Ученик решил усовершенствовать свою парусную лодку. Он установил на ней вентилятор и аккумулятор для приведения его в действие. Как должен быть направлен поток воздуха от вентилятора, чтобы увеличить скорость лодки?
5. Тележка массой $m_1 = 20$ кг движется прямолинейно по горизонтальному пути со скоростью $\upsilon_1 = 2{,}8$ м/с. В какой-то момент на нее вертикально падает мешок массой $m_2 = 50$ кг. Чему равна скорость дальнейшего движения тележки с мешком на ней?
6. Ученик массой $m_1 = 50$ кг бежит со скоростью $\upsilon_1 = 6$ м/с и, догнав тележку массой $m_2 = 30$ кг, движущуюся со скоростью $\upsilon_2 = 2$ м/с, вскакивает на нее. Определите скорость тележки с учеником.
7. Масса лодки с охотником в ней равна $M = 180$ кг. Из покоящейся лодки охотник делает выстрел в горизонтальном направлении, вдоль лодки. Чему равна скорость отдачи лодки с охотником в ней, если масса пули $m = 0{,}01$ кг, а скорость равна $\upsilon = 900$ м/с?
8. По гладкому горизонтальному столу во взаимно перпендикулярных направлениях движутся два пластилиновых шара. Их массы равны $m_1 = 0{,}3$ кг и $m_2 = 0{,}2$ кг, а скорости – $\upsilon_1 = 8$ м/с и $\upsilon_2 = 16$ м/с. Чему равна скорость образовавшегося в результате удара тела и какой угол β она составляет со скоростью υ_1?
9°. Масса ракеты вместе с топливом равна $m = 4 \cdot 10^5$ кг. Определите общую массу топлива и окислителя, которую нужно израсходовать, чтобы сообщить ракете первую космическую скорость $\upsilon = 7{,}9 \cdot 10^3$ м/с, если известно, что продукты сгорания выбрасываются из ракеты со скоростью $u = 3{,}5 \cdot 10^3$ м/с. Считать, что сгорание топлива происходит мгновенно.

4.3° МОМЕНТ ИМПУЛЬСА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

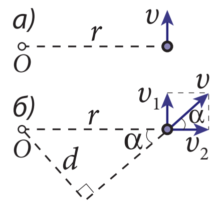


Рис. 4.11

Проанализируем движение материальной точки массой m относительно оси вращения, проходящей через точку O на расстоянии r от нее (*рис. 4.11*). Рассмотрим простой частный случай, когда скорость материальной точки υ перпендикулярна расстоянию r (*рис. 4.11, а*). Из п. 3.2 мы знаем, что вращательное действие силы характеризуется моментом силы M. Если сила F направлена так же, как скорость υ в рассматриваемом случае, то плечо силы $d = r$ и $M = rF$. Но вращательное движение материальной точки можно охарактеризовать и с помощью ее импульса $p = m\upsilon$. Для этого, по аналогии с моментом силы, вводится новая физическая величина, называемая **моментом импульса**, который обозначают буквой L и который определяет вращательное действие этого импульса:

$$L = r \cdot p = r \cdot m\upsilon.$$

Если скорость материальной точки направлена под углом α к линии, соединяющей центр вращения и материальную точку (*рис. 4.11, б*), то

$$L = d \cdot p = r \cdot p \sin \alpha = r \cdot m\upsilon \sin \alpha,$$

где $d = r \sin \alpha$ – это плечо импульса, обозначающее то же самое, что и плечо силы – расстояние от центра вращения до линии, вдоль которой направлена скорость. Из *рисунка 4.11, б* видно, что вращение материальной точки происходит под действием только составляющей скорости $\upsilon_\perp$. Так как $\upsilon_\perp = \upsilon \sin \alpha$, то из предыдущего выражения получаем

$$\boldsymbol{L = r \cdot p_\perp = r \cdot m\upsilon_\perp.} \qquad (4.18)$$

Момент импульса материальной точки L равен произведению расстояния r от центра вращения до материальной точки на перпендикулярную составляющую ее импульса.

Единица момента импульса в СИ

$$[L] = [m] \cdot [\upsilon] \cdot [r] = \text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}.$$

Используя связь между линейной и угловой скоростями (1.45), момент импульса можно представить в виде

$$\boldsymbol{L = mr^2\omega.} \qquad (4.19)$$

Необходимо отметить, что момент импульса имеет смысл не только в случае вращательного движения. Например, при прямолинейном движении материальной точки массой m со скоростью υ расстояние r от прямой, вдоль которой она движется, до некоторой точки отсчета остается неизменным. Следовательно, если момент внешних сил равен нулю, то момент импульса материальной точки $L = m\upsilon r$ будет постоянным.

В п. 4.1 была сформулирована теорема об изменении импульса материальной точки (4.5), из которой был получен важный физический закон – закон сохранения импульса. Подобная теорема применима и для изменения момента импульса. В самом деле, для частного случая, рассмотренного выше, когда скорость (импульс) материальной точки направлена перпендикулярно расстоянию r, после умножения выражения (4.5) на r, получаем

$$r \cdot \Delta p = rF\Delta t,$$

или, приняв во внимание определения момента импульса и момента силы, после деления на Δt имеем

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = M. \qquad (4.20)$$

Отношение изменения момента импульса материальной точки к соответствующему промежутку времени равно моменту силы, действующей на нее.

Допустим, что момент равнодействующей сил, приложенных к материальной точке, равен нулю или материальная точка изолирована (не взаимодействует с другими точками). В таком случае из (4.20) следует, что $\Delta L = 0$, то есть $L = \text{const}$. Таким образом, выполняется закон сохранения момента импульса материальной точки:

$$L = \text{const, если } M = 0. \qquad (4.21)$$

Момент импульса материальной точки сохраняется, если момент равнодействующей приложенных к точке сил равен нулю.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Шар массой 5 кг, привязанный к концу нерастяжимой нити, движется по окружности радиусом 2 м со скоростью 4 м/с (*рис. 4.12*). Чему равен момент импульса шара? Как изменятся линейная и угловая скорости шара, если в процессе движения длина нити уменьшилась в 2 раза?

РЕШЕНИЕ

Дано:
$m = 5$ кг
$r_1 = 2$ м
$v_1 = 4$ м/с
$r_2 = r_1 /2$

L_1–? v_2 – ? ω_2 – ?

По определению момент импульса $L_1 = mv_1r_1 = 5 \cdot 4 \cdot 2 = 40$ кг·м²/с. Используя выражение для момента импульса через угловую скорость (4.19), получим ее значение для первоначальной длины нити $\omega_1 = L_1 / (mr_1^2) = 40/(5 \cdot 4) = 2$ рад/с.

При уменьшении длины нити вдоль нее действует определенная сила, момент которой равен нулю (плечо силы равно нулю). Следовательно, выполняется закон сохранения момента импульса $mv_1r_1 = mv_2r_2$, откуда получаем $v_2 = (r_1/r_2)\, v_1 = 2\, v_1 = 8$ м/с.

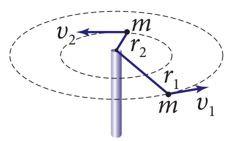


Рис. 4.12

При использовании (4.19) закон сохранения момента импульса принимает вид $mr_1^2\omega_1 = mr_2^2\omega_2$, откуда $\omega_2 = (r_1/r_2)^2\omega_1 = 4\omega_1 = 8$ рад/с.

Таким образом, при уменьшении длины нити в 2 раза линейная скорость увеличивается в 2 раза, а угловая – в 4 раза.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Что представляет собой момент импульса материальной точки? Чему он равен?
2. Как формулируется теорема об изменении момента импульса?
3. Сформулируйте закон сохранения момента импульса материальной точки.

4. Момент импульса относительно некоторой точки тела массой 10 кг, движущегося прямолинейно со скоростью 5 м/с, равен 200 кг·м^2/с. Чему равно расстояние от этой точки до прямой, вдоль которой движется тело?
5. Вычислите момент импульса Луны при ее движении вокруг Земли, если известны: масса Луны – $7{,}3 \cdot 10^{22}$ кг, скорость ее движения по орбите – 1 км/с и расстояние от Луны до Земли – $3{,}84 \cdot 10^6$ км.
6. При движении тела по круговой траектории ее радиус увеличивается в 3 раза. Как и во сколько раз изменился период вращения тела?

4.4 МЕХАНИЧЕСКАЯ РАБОТА. МОЩНОСТЬ

a. Механическая работа постоянной силы

Рассмотрим тело в форме параллелепипеда, находящееся на горизонтальной доске. Допустим, что сила $\vec{F}$, приводящая его в движение, направлена горизонтально и постоянна по величине; тело движется прямолинейно и в направлении силы (*рис. 4.13*). Если пройденный путь (модуль вектора перемещения) равен s, то в процессе движения тела сила $\vec{F}$ совершает механическую работу, равную

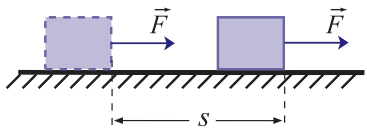


Рис. 4.13

$$A = F \cdot s. \qquad (4.22)$$

Эта формула определяет механическую работу в частном случае действия постоянной силы и известна еще из курса физики VII класса, так же, как и единица механической работы:

$$[A] = [F] \cdot [s] = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}.$$

Согласно определению, *один джоуль* (1 Дж) – *это механическая работа, совершаемая постоянной силой, равной* 1 Н, *при перемещении точки ее приложения на* 1 м *в направлении действия силы*.

На практике чаще всего сила образует некоторый угол с направлением перемещения тела (*рис. 4.14*). Допустим, что сила $\vec{F}$ постоянна, движение тела прямолинейно, а значит, и угол α – величина постоянная. В этом случае механическая работа на пути s определяется выражением

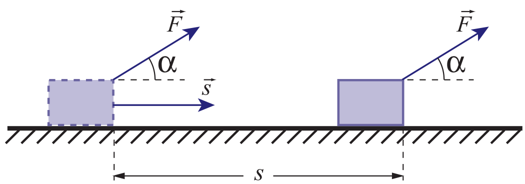


Рис. 4.14

$$A = Fs \cos \alpha. \qquad (4.23)$$

***Механическая работа*, совершаемая постоянной силой при прямолинейном движении тела, – это скалярная величина, равная произведению модулей силы и перемещения точки ее приложения на косинус угла между векторами силы и перемещения.**

Проанализируем формулу (4.23). Если угол $0 \le \alpha < \frac{\pi}{2}$ (*рис. 4.15, а*) то $\cos\alpha > 0$, следовательно, механическая работа положительна. Силы, совершающие положительную работу, называются также **движущими силами**. Если угол $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (*рис. 4.15, б*), то $\cos\alpha = 0$, механическая работа силы равна нулю. Если же угол $\frac{\pi}{2} < \alpha \le$ $\le \pi$ (*рис. 4.15, в*), то $\cos\alpha < 0$ и механическая работа отрицательна. Силы, работа которых отрицательна, называются **силами сопротивления.**

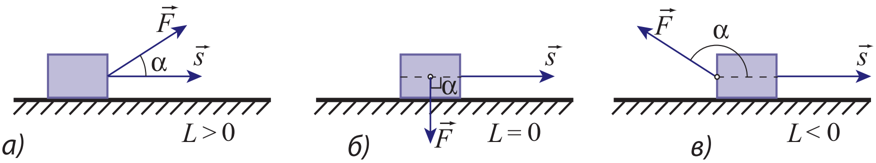


Рис. 4.15

Рассмотрим пример: движение санок по горизонтальной дороге (*рис. 4.16*). На них действуют силы: тяги $\vec{F}_т$, тяжести $\vec{G}$, нормальной реакции опоры $\vec{N}$ и трения $\vec{F}_{тр.}$. Работа силы тяги положительна (угол α_1 острый), работа силы трения отрицательна (угол $\alpha_4 = \pi$), а работа силы тяжести так же, как и работа силы реакции опоры, равна нулю (углы $\alpha_2 =$ $= \alpha_3 = \frac{\pi}{2}$). Выражение (4.23) для механической работы может быть записано в другой форме. Величина $F \cdot \cos\alpha$ – это проекция силы $\vec{F}$ на направление перемещения $\vec{s}$, то есть $F \cdot \cos\alpha = F_s$. Формула (4.23) принимает вид:

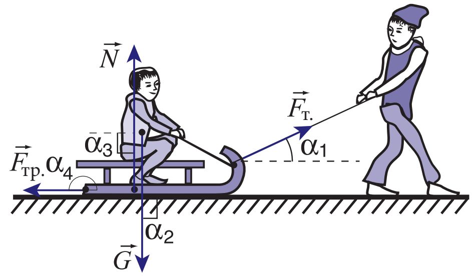


Рис. 4.16

$$\boldsymbol{A = F_s \cdot s}. \qquad (4.24)$$

В векторной алгебре скалярное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется как скалярная величина c, равная произведению модулей этих векторов на косинус угла α между ними:

$$\boldsymbol{c = \vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos\alpha}. \qquad (4.25)$$

Джеймс Прескотт Джоуль (1818–1889), английский физик.

Изучал тепловое действие электрического тока (1841), независимо от Ленца установил закон, определяющий количество тепла, выделяющееся в проводниках при прохождении по ним электрического тока (закон Джоуля–Ленца). Внес вклад в обоснование закона сохранения и превращения энергии, исследовал превращение механической работы в теплоту, экспериментально определил механический эквивалент теплоты (1843). Установил, что внутренняя энергия газов, находящихся при постоянной температуре и не очень больших давлениях, не зависит от объема (закон Джоуля). Совместно с В. Томсоном (лордом Кельвином) исследовал изменение температуры газа при прохождении через пористую перегородку (эффект Джоуля–Томсона), эффекта, который используется для получения низких температур.

Используя определение скалярного произведения, выражение (4.23) можно написать в виде:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s}. \tag{4.26}$$

Механическая работа может быть найдена и графическим методом. Построим график зависимости проекции F_s от координаты точки ее приложения x, направив ось Ox вдоль вектора перемещения $\vec{s}$. Допустим, что проекция F_s постоянна и положительна. Соответствующий график представлен на *рисунке 4.17, а*. Модуль перемещения точки приложения силы равен $s = x_2 - x_1$. Из рисунка видно, что механическая работа постоянной силы $\vec{F}$ на прямолинейном перемещении $\vec{s}$ численно равна площади прямоугольника, ограниченного графиком проекции F_s, осью абсцисс и отрезками, проходящими через точки x_1 и x_2 параллельно ординате. Графический метод может быть применен и для вычисления работы силы, зависящей от координаты точки своего приложения (*рис. 4.17, б*). Делим перемещение $s = x_2 - x_1$ на достаточно малые участки Δx_i так, чтобы на них силы изменялись столь незначительно, что их можно было бы считать постоянными на каждом участке, но при этом неодинаковыми на разных участках. Тогда работа на каждом малом участке Δx_i вычисляется по формуле (4.24) и численно равна площади узкой полоски (*рис. 4.17, б*). Механическая работа силы на всем перемещении $\vec{s}$ равна сумме работ на всех малых участках. Сложив площади всех узких полосок, получим площадь фигуры под графиком. Таким образом, графическая интерпретация механической работы постоянной силы остается пригодной и для переменных сил.

На *рисунке 4.17* представлены случаи, когда проекция силы на направление перемещения положительна. Однако если проекция отрицательна, то график находится под осью абсцисс, а механическая работа численно равна соответствующей площади, взятой со знаком минус.

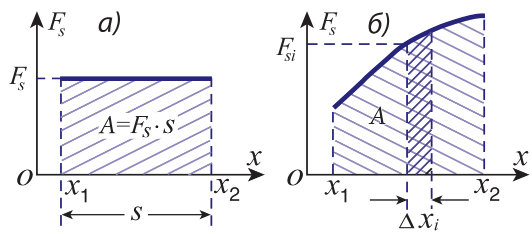


Рис. 4.17

Из изложенного выше следует, что механическая работа данной силы зависит как от начального и конечного положения движущегося тела, так и от формы пути, пройденного им между этими положениями. Физические величины, обладающие таким свойством, называются **функциями процесса**. Таким образом, **механическая работа является функцией процесса.**

б. Мощность

При анализе понятия механической работы не учитывался промежуток времени, за который она производилась. Однако одна и та же механическая работа может быть совершена за разные промежутки времени. Например, на стройке необходимо поднять кирпичи на определенную высоту. Эта работа может быть выполнена двумя рабочими, которые кладут часть кирпичей на носилки и поднимают их по лестнице. Чтобы перенести все кирпичи, они совершают эту операцию несколько раз. Кран на подъем кирпичей затратит намного меньше времени, чем рабочие. В данной ситуации использование подъемного крана продуктивнее и эффективнее.

Для характеристики производительности механизмов используется понятие **механической мощности** или просто **мощности**. Пусть A – это работа, произведенная за промежуток времени Δt.

Средней мощностью **называется физическая величина, равная отношению механической работы к промежутку времени, за который она была совершена.**

$$\boldsymbol{P_{\text{ср.}} = \frac{A}{\Delta t}}. \qquad (4.27)$$

Из определения (4.27) устанавливается единица мощности $[P] = \frac{[A]}{\Delta t} = \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \text{Вт}$.

1 ватт (Вт) – это мощность физической системы, которая совершает работу, равную 1 Дж, за 1 секунду.

Мощность двигателей внутреннего сгорания обычно выражается в устаревшей, не входящей в СИ, но допустимой единицей, которая называется лошадиной силой: 1 л.с. ≈ 736 Вт. Обычные автомобили имеют мощность от 40 до 200 л.с., а гоночные – до 1 000 л.с.

В энергетике используется допустимая единица механической работы, выражаемая через единицу мощности: киловатт-час (кВт·ч):

$$1 \text{ кВт} \cdot \text{ч} = 10^3 \text{ Вт} \cdot 3600 \text{ с} = 3{,}6 \cdot 10^6 \text{ Вт} \cdot \text{с} = 3{,}6 \cdot 10^6 \text{ Дж}.$$

Подставив выражение для механической работы (4.26) в формулу для средней мощности, получим $P_{\text{ср.}} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{s}}{\Delta t}$. Но отношение перемещения к промежутку времени – это средняя скорость: $\vec{v}_{\text{ср.}} = \frac{\vec{s}}{\Delta t}$. Поэтому средняя мощность может быть записана в виде:

$$\boldsymbol{P_{\text{ср.}} = \vec{F} \cdot \vec{v}_{\text{ср.}}}. \qquad (4.28)$$

Если считать, что промежуток времени Δt очень мал, то от средних значений можно перейти к мгновенным:

$$\boldsymbol{P = \vec{F} \cdot \vec{v}}. \qquad (4.29)$$

Мгновенная мощность равна скалярному произведению силы $\vec{F}$ и скорости $\vec{v}$ в соответствующий момент времени.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Тело массой $m = 5$ кг перемещается прямолинейно по гладкой горизонтальной поверхности таким образом, что его координата изменяется согласно уравнению $x = 4 + 3t + 0{,}4\,t^2$, где время t выражено в с, а координата – в м. Найдите работу, совершенную силой, действующей на тело, за первые 2 с его движения.

РЕШЕНИЕ

Дано:
$m = 5$ кг
$x = 4 + 3t + 0{,}4t^2$
$t_1 = 2$ с
A – ?

Сравним уравнение движения рассматриваемого тела с уравнением прямолинейного равноускоренного движения $x = x_0 + v_{0x}t + a_x t^2/2$ и приравняем коэффициенты при t^2. Таким образом, определим ускорение тела $a_x = 0{,}8$ м/с^2. Тогда проекция силы, сообщающей телу это ускорение на ось, равна $F_x = ma_x$; $F_x = 4$ Н. Пройденный телом путь равен изменению его координаты $s = x(2) - x(0) = 7{,}6$ м. Совершенная работа $A = F_x s$; $A = 30{,}4$ Дж.

2. Автомобиль массой $m = 4\,500$ кг движется по горизонтальному участку пути со скоростью $\upsilon = 72$ км/ч. Чему равна мощность, развиваемая двигателем автомобиля, если известно, что сила сопротивления движению автомобиля составляет $k = 5\%$ от его силы тяжести?

РЕШЕНИЕ

Дано:	СИ:
$m = 4\,500$ кг	
$\upsilon = 72$ км/ч	20 м/с
$k = \frac{F_{сопр.}}{G} \cdot 100\% = 5\%$	0,05
P – ?	Вт

Движение является равномерным, значит, равнодействующая сил, действующих на автомобиль, равна нулю. Следовательно, сила тяги $F_т$ равна по модулю силе сопротивления $F_{сопр.} = kG = kmg$. Получаем $F_т = kmg$. Мощность, развиваемая двигателем $P = F_т\upsilon = kmg\upsilon$; $P = 45$ кВт.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. В каком случае механическая работа выражается формулой $A = F \cdot s$?
2. Каким является выражение для механической работы, совершаемой постоянной силой, которая образует некоторый угол с направлением прямолинейного перемещения точки ее приложения? При каких значениях этого угла работа отрицательна?
3. Как определяется средняя мощность?
4. Как выражается мгновенная мощность?
5. Какова единица мощности в СИ? Как она выражается через основные единицы?
6. Найти значение горизонтальной силы, приложенной со стороны ученика к ящику, если известно, что при перемещении последнего на расстояние $s = 15$ м была совершена механическая работа $A = 420$ Дж.
7. Ребенок тащит санки по прямолинейному горизонтальному пути с помощью веревки, образующей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом. Натяжение веревки $T = 28$ Н, скорость санок $\upsilon = 1{,}5$ м/с. Чему равна механическая работа, совершенная мальчиком за время $t = 20$ с?
8. Рыбак идет по берегу реки вверх по течению и тянет лодку с помощью веревки. Какой угол образует веревка с направлением перемещения лодки, если известно, что сила натяжения веревки $T = 200$ Н и работа, совершенная рыбаком при перемещении лодки на $s = 8$ м, равна $A = 1\,384$ Дж?
9. При движении тела массой $m = 3$ кг по гладкой горизонтальной поверхности на расстояние $s = 4{,}8$ м была совершена работа $A = 36$ Дж. Определите ускорение, с которым двигалось тело.
10. Тело массой $m = 4$ кг движется прямолинейно равномерно под действием постоянной силы F, составляющей угол $\alpha = 45°$ с горизонтом. Определите коэффициент трения между телом и горизонтальной поверхностью, по которой оно движется, если механическая работа, совершенная силой F на пути $s = 5{,}2$ м, равна 48 Дж.
11. Определите мощность двигателя, который за $t = 30$ мин совершает механическую работу $A = 270$ кДж.
12. Мощность двигателя мотоцикла $P = 10{,}8$ кВт. С какой скоростью будет двигаться мотоцикл, когда двигатель разовьет силу тяги $F_т = 270$ Н?

4.5 КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Рассмотрим материальную точку массой m, на которую действуют несколько постоянных сил. Обозначим равнодействующую этих сил через $\vec{F}$, а ускорение, сообщенное ею, – через $\vec{a}$. В соответствии с основным законом динамики (2.6) пишем $\vec{F} = m\vec{a}$. Допустим, что материальная точка движется прямолинейно в направлении своего ускорения. Тогда работа силы $\vec{F}$ при ее перемещении $\vec{s}$ из начального положения 1 в конечное 2 равна:

$$A_{12} = F\,s = ma \cdot s. \tag{4.30}$$

Сила $\vec{F}$ постоянна, то есть ускорение $\vec{a}$ также постоянно, следовательно, тело движется равноускоренно. Согласно формуле Галилея (1.27):

$$as = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2}, \tag{4.31}$$

где v_1 и v_2 – скорости тела в начале и конце перемещения $\vec{s}$.

Подставив (4.31) в (4.30), получим:

$$A_{12} = m \cdot \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \tag{4.32}$$

Введем новую физическую величину, называемую **кинетической энергией:**

$$E_k = \frac{mv^2}{2}. \tag{4.33}$$

Выражение (4.32) можно написать в виде:

$$A_{12} = E_{k2} - E_{k1} \tag{4.34}$$

или:

$$A_{12} = \Delta E_k, \tag{4.35}$$

где изменение кинетической энергии:

$$\Delta E_k = E_{k2} - E_{k1}. \tag{4.36}$$

Кинетическая энергия **– это скалярная физическая величина, равная полупроизведению массы тела и квадрата его скорости** (4.33).

Это выражение для кинетической энергии (под названием „живой силы") было введено в 1829 г. французским физиком и инженером Г. Кориолисом (1792–1843).

Из формулы (4.33) следует, что кинетическая энергия материальной точки определяется ее скоростью в данный момент и не зависит от значений скорости в предыдущие моменты времени. **Величины, значения которых зависят от механического состояния материальной точки (ее положения и скорости), называются функциями состояния.** Таким образом, **кинетическая энергия является функцией состояния.**

Заметим, что **кинетическая энергия не может принимать отрицательные значения** ($E_k \geq 0$). У неподвижной материальной точки она равна нулю ($v = 0$).

Кинетическая энергия выражается через скорость, а она, как известно, – величина относительная. Следовательно, **кинетическая энергия является относитель-**

ной величиной. Например, кинетическая энергия пассажира, сидящего на скамье в каком-либо виде транспорта, равна нулю относительно него, но отлична от нуля относительно Земли, если транспортное средство движется. Из формулы (4.34) видим, что единица кинетической энергии та же, что и у работы, то есть $[E_k]$ = Дж.

Связь между механической работой и кинетической энергией (4.34) известна как **теорема об изменении кинетической энергии материальной точки:**

> ***Изменение кинетической энергии* материальной точки равно совершенной в соответствующем движении механической работе равнодействующей сил.**

Если механическая работа A_{12} положительна, то кинетическая энергия материальной точки увеличивается, если же работа отрицательна, то кинетическая энергия уменьшается и становится равной нулю, когда материальная точка останавливается.

Выражение (4.34) выведено для частного случая, когда под действием постоянной силы материальная точка движется прямолинейно равноускоренно вдоль линии действия силы. Можно показать, что соотношение (4.34) имеет общий характер и справедливо и тогда, когда на материальную точку действуют переменные силы, а ее траектория криволинейна.

Кинетическая энергия находящейся в покое материальной точки (тела) $E_{k1} = 0$. Из (4.34) следует, что $E_{k2} = A_{12}$, то есть кинетическая энергия тела равна работе, совершенной внешними силами для увеличения его скорости от нуля до значения v_2.

В свою очередь, тело, обладающее кинетической энергией, может совершить работу, максимальное значение которой равно его кинетической энергии.

Совершение механической работы движущимися телами хорошо известно из повседневной жизни. Например, массы движущегося воздуха (ветер) приводят в действие ветряные мельницы, ветровые электрические станции, парусные суда. Ураганы, в которых скорости ветра, а значит, и кинетические энергии огромны, производят существенные разрушения, повреждают или даже разрушают различные постройки, вырывают деревья, повреждают линии электропередач и т.д.

Приведенные выше примеры могут быть обобщены для системы материальных точек. Кинетическая энергия системы определяется как сумма кинетических энергий всех точек, ее составляющих:

$$E_k = E_{k1} + E_{k2} + \ldots = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \ldots, \qquad (4.37)$$

где m_1, m_2, … – массы материальных точек, а v_1, v_2… – их скорости.

Теорема об изменении кинетической энергии, выраженная формулой (4.34), верна и для системы материальных точек. Это может быть показано, действуя так же, как при получении закона об изменении механического импульса системы материальных точек (4.11). А именно: записываем выражение (4.34) для каждой точки системы, затем складываем почленно эти выражения. Получаем, что изменение кинетической энергии системы материальных точек равно сумме механических работ, совершаемых внешними и внутренними силами, действующими на точки системы при соответствующих перемещениях.

При исследовании закона изменения импульса для системы материальных точек нами установлено, что внутренние силы не могут его изменить. Какова же ситуация в случае кинетической энергии системы? Могут ли внутренние силы изменить ее?

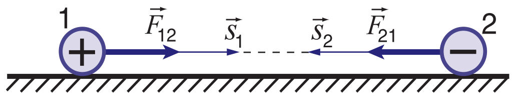


Рис. 4.18

Для ответа рассмотрим систему, состоящую из двух маленьких шариков, заряженных электрическими зарядами противоположного знака и помещенных на горизонтальную изолирующую поверхность. Допустим, что сначала шарики удерживают в состоянии покоя, а затем освобождают. Под действием внутренних сил электрического притяжения $\vec{F}_{12}$ и $\vec{F}_{21}$ шарики перемещаются навстречу друг другу вдоль прямой, на которой они расположены (*рис. 4.18*). Направления движения шариков и сил, действующих на них, совпадают. Следовательно, работа каждой из сил положительна, а это означает, что сумма работ внутренних сил в общем случае отлична от нуля.

Итак, теорема об изменении кинетической энергии системы материальных точек формулируется следующим образом:

***Изменение кинетической энергии* системы материальных точек равно сумме механических работ всех сил, внешних и внутренних, действующих в системе при соответствующих перемещениях точек системы.**

Анализируя этот пример, можно предположить, что работа внутренних сил равна нулю только тогда, когда расстояния между материальными точками не изменяются, то есть они жестко связаны между собой. Докажите это, рассмотрев систему из двух материальных точек, расстояние между которыми остается постоянным, и вычислив сумму работ внутренних сил в случае поступательного и вращательного движений этой системы.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Тело массой $m = 0{,}16$ кг движется по гладкой горизонтальной поверхности со скоростью $v_0 = 5$ м/с. Чему равна кинетическая энергия тела при перемещении его на $s = 0{,}5$ м под действием силы $F = 6$ Н, направленной так же, как скорость v_0?

РЕШЕНИЕ

Дано:
$m = 0{,}16$ кг
$v_0 = 5$ м/с
$F = 6$ Н
$s = 0{,}5$ м

E_{k2} – ?

Из теоремы об изменении кинетической энергии материальной точки $A_{12} = E_{k2} - E_{k1}$ выражаем искомую величину: $E_{k2} = E_{k1} + A_{12}$. Здесь начальная кинетическая энергия равна $E_{k1} = \dfrac{mv_0^2}{2}$ и работа постоянной силы на прямолинейном перемещении, направленном так же, как сила, равна $A_{12} = F \cdot s$.

Получаем $E_{k2} = \dfrac{mv_0^2}{2} + F \cdot s$; $E_{k2} = 5$ Дж.

2. Пуля массой $m = 10$ г перед попаданием в доску имеет скорость $v_1 = 600$ м/с, а после выхода из нее –$v_2 = 400$ м/с. Найдите работу силы сопротивления, действующей на пулю со стороны доски. Чему равна эта сила, если толщина доски $s = 2$ см.

РЕШЕНИЕ

Дано:	СИ:
$m = 10$ г	0,01 кг
$\upsilon_1 = 600$ м/с	
$\upsilon_2 = 400$ м/с	
$s = 2$ см	0,02 м
A – ? $F_{\text{сопр.}}$ – ?	Дж; Н

Работа силы сопротивления: $A_{12} = E_{k2} - E_{k1} = \dfrac{m(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2)}{2}$;

$A_{12} = -1\,000$ Дж. Знак минус указывает на тот факт, что это работа по преодолению сопротивления и она обусловливает уменьшение кинетической энергии пули.

Обозначим силу сопротивления через $F_{\text{сопр}}$. Ее работа на перемещении s равна $A_{12} = -F_{\text{сопр.}} \cdot s$, откуда получаем:

$$F_{\text{сопр.}} = \frac{A_{12}}{s} = 50 \text{ Дж.}$$

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Как определяется кинетическая энергия материальной точки? Системы материальных точек?
2. Какие физические величины называются функциями состояния? Является ли кинетическая энергия функцией состояния?
3. Зависит ли кинетическая энергия от выбора системы отсчета? Приведите примеры, отличные от приведенных в тексте.
4. Как формулируется теорема об изменении кинетической энергии?
5. Каков физический смысл кинетической энергии?
6. Могут ли внутренние силы изменить кинетическую энергию системы материальных точек? Продемонстрируйте на примере.
7. Кинетическая энергия тела равна $E_k = 9$ Дж, а скорость $\upsilon = 15$ м/с. Определите массу тела.
8. Во сколько раз кинетическая энергия автомобиля массой $m_1 = 1\,500$ кг, движущегося со скоростью $\upsilon_1 = 120$ км/ч, больше кинетической энергии грузовика массой $m_2 = 4800$ кг, который движется со скоростью $\upsilon_2 = 54$ км/ч?
9. Кинетическая энергия тела $E_{k1} = 14{,}4$ Дж, когда оно движется со скоростью $\upsilon_1 = 6$ м/с. Чему равна кинетическая энергия тела, если оно будет двигаться со скоростью $\upsilon_2 = 10$ м/с?
10. Тело массой $m_1 = 0{,}10$ кг имеет при скорости $\upsilon_1 = 8$ м/с такую же кинетическую энергию, что и другое тело, движущееся со скоростью $\upsilon_2 = 5$ м/с. Чему равна масса второго тела?
11. На тело, находящееся в состоянии покоя, начинает действовать постоянная сила. Чему равно значение этой силы, если после прохождения пути $s = 3$ м кинетическая энергия тела стала равной $E_k = 42$ Дж?
12. Найдите механическую работу, необходимую для увеличения скорости автомобиля массой $m = 1600$ кг на $\Delta\upsilon = 18$ км/ч: а) от 18 до 36 км/ч; б) от 36 до 54 км/ч. Проанализируйте полученные результаты.
13. Несколько одинаковых досок расположены параллельно друг другу на малом расстоянии одна от другой. Перпендикулярно доскам производят выстрел из ружья. Скорость пули при выходе из первой доски равна $\upsilon_1 = 0{,}8\,\upsilon_0$, где υ_0 – начальная скорость пули. Определите, в какой из досок застрянет пуля.

4.6 РАБОТА СИЛЫ ТЯЖЕСТИ. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ В ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ

а. Сила тяжести – сила консервативная

Рассмотрим материальную точку массой m, которая движется в ограниченной области вблизи поверхности Земли. Так как размеры этой области намного меньше радиуса Земли, то в ее пределах ускорение свободного падения $\vec{g}$ так же, как и сила тяжести $\vec{G} = m\vec{g}$, остаются постоянными. **Силовое поле, в котором на материальную точку действует постоянная сила, называется *однородным полем*.**

Допустим, что материальная точка (точечное тело) массой m перемещается в однородном поле силы тяжести из положения 1 в положение 2 (*рис. 4.19*). Обозначим через h_1 и h_2 высоты этих положений относительно некоторого горизонтального уровня (нулевого), выбранного произвольно.

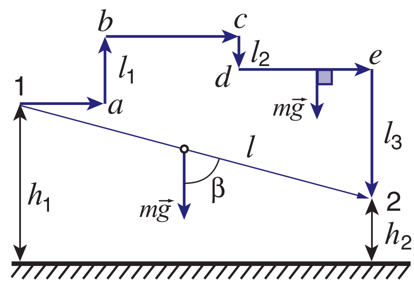


Рис. 4.19

Вычислим механическую работу, совершаемую силой тяжести тела при этом перемещении, считая, что его движение происходит вдоль отрезка прямой, соединяющей положения 1 и 2. Обозначим длину этого отрезка через l. Сила тяжести образует с направлением перемещения угол β (*рис. 4.19*), поэтому ее работа A_{12} равна $A_{12} = mg \cdot l \cos\beta$. Как видно из рисунка, $l \cdot \cos\beta = h_1 - h_2$. Для работы получаем:

$$\boldsymbol{A_{12} = mg\,(h_1 - h_2).} \tag{4.38}$$

Найдем работу силы тяжести при перемещении рассматриваемого точечного тела между теми же положениями, но по другой траектории. Пусть эта траектория 1*abcde*2 (*рис. 4.19*) состоит из горизонтальных и вертикальных участков. Работа силы тяжести A'_{12} на ней равна сумме работ на участках, из которых эта траектория состоит, то есть:

$$A'_{12} = A_{1a} + A_{ab} + A_{bc} + A_{cd} + A_{de} + A_{e2}.$$

Горизонтальные участки составляют с силой тяжести прямой угол, поэтому работа этой силы равна нулю: $A_{1a} = A_{bc} = A_{de} = 0$. Следовательно,

$$A'_{12} = A_{ab} + A_{cd} + A_{e2}.$$

Обозначим длины вертикальных участков через l_1, l_2 и l_3, как это видно из *рисунка 4.19*. На участке *ab* тело перемещается в направлении, противоположном силе тяжести (работа отрицательна), а на участках *cd* и *e*2 – в направлении силы тяжести (работа положительна). Таким образом, для работы A'_{12} получаем:

$$A'_{12} = -\,mg \cdot l_1 + mg \cdot l_2 + mg \cdot l_3 = mg\,(l_2 + l_3 - l_1).$$

Из *рисунка 4.19* видно, что $l_2 + l_3 - l_1 = h_1 - h_2$, следовательно,

$$\boldsymbol{A'_{12} = mg\,(h_1 - h_2).} \tag{4.39}$$

Результат (4.39) останется верным для любой траектории, образованной из горизонтальных и вертикальных участков пути. Он будет также верным для произвольной криволинейной траектории, поскольку она может быть заменена большим числом достаточно малых горизонтальных и вертикальных участков (*рис. 4.20*).

Сравнивая формулы (4.38) и (4.39), приходим к заключению, что механическая работа, совершаемая силой тяжести, которая действует на материальную точку при ее перемещении из одного положения в другое, зависит только от этих положений и не зависит от формы траектории.

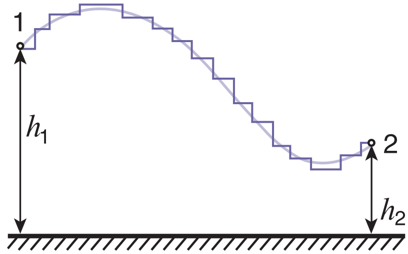


Рис. 4.20

***Силы*, механическая работа которых не зависит от формы траектории, а только от начального и конечного положения тела, называются *консервативными*. *Поле* таких сил называется *потенциальным*.**

Из формулы (4.39) видно, что работа силы тяжести на замкнутом пути, когда $h_2 =$ $= h_1$, равна нулю.

Силы, механическая работа которых на любом замкнутом пути равна нулю, являются консервативными.
Сила тяжести является консервативной, а ее однородное поле – потенциальным.

б. Потенциальная энергия в поле тяготения

Перепишем выражение (4.38) для механической работы силы тяжести в виде:

$$A_{12} = mgh_1 - mgh_2. \tag{4.40}$$

Здесь h_1 и h_2 – высоты начального и конечного положений материальной точки над нулевым уровнем, который выбран произвольно, из соображений удобства.

Соотношение (4.40) показывает, что механическая работа силы тяжести представляет собой разность значений некоторой физической величины, из которых одно значение соответствует начальному состоянию, а другое – конечному. Эта величина обозначается E_p и называется **потенциальной энергией тела в поле силы тяжести** или **потенциальной энергией в поле тяготения**. Выражение (4.40) принимает вид:

$$A_{12} = E_{p1} - E_{p2} \tag{4.41}$$

или

$$A_{12} = -\Delta E_p, \tag{4.42}$$

где введено изменение потенциальной энергии

$$\Delta E_p = E_{p2} - E_{p1}. \tag{4.43}$$

Из (4.41) следует, что потенциальная энергия выражается в джоулях (Дж), так же, как механическая работа и кинетическая энергия.

Согласно (4.42) механическая работа силы тяжести равна изменению потенциальной энергии тела, взятому с обратным знаком.

Итак, механическая работа определяет изменение потенциальной энергии, а не ее значение. Но изменение некоторой величины, как разность двух ее значений, не изменится, если к каждому из значений добавим одну и ту же произвольную постоянную. Поэтому, сравнив (4.41) и (4.40), можем написать $E_p = mgh + \text{const}$. Тогда механическая работа, совершаемая силой тяжести:

$$A_{12} = E_{p1} - E_{p2} = (mgh_1 + \text{const.}) - (mgh_2 + \text{const.}) = mgh_1 - mgh_2,$$

действительно не зависит от значения произвольной постоянной. Она определяется дополнительным условием, взятым из соображений удобства. Обычно принимают, что на нулевом уровне высот ($h = 0$) потенциальная энергия равна нулю ($E_p= 0$). Это является, таким образом, и нулевым уровнем потенциальной энергии. Тогда const = 0. Следовательно, потенциальная энергия в поле тяготения равна:

$$\boldsymbol{E_p = mgh}. \tag{4.44}$$

Из определения потенциальной энергии в поле тяготения (4.44) видно, что ее значение зависит от положения тела в данный момент относительно выбранного нулевого уровня: чем выше находится тело над этим уровнем, тем больше его потенциальная энергия, если же тело находится ниже этого уровня, то его потенциальная энергия отрицательна. Очевидно, **потенциальная энергия является функцией состояния.**

Значение потенциальной энергии тела, находящегося в данном положении, зависит от выбора нулевого уровня, оно будет разным для различных нулевых уровней. Однако механическая работа, совершаемая силой тяжести при переходе тела из одного положения в другое, не зависит от выбора нулевого уровня.

Для выяснения физического смысла потенциальной энергии рассмотрим тело, которое переходит из некоторого положения 1 в положение 2, находящееся на нулевом уровне, где $E_{p0} = 0$. Тогда из (4.41) следует:

$$\boldsymbol{A_{10} = E_{p1}}, \tag{4.45}$$

то есть **потенциальная энергия тела, находящегося в поле тяготения в некотором положении, равна механической работе, которую совершает сила тяжести тела при переходе его из этого положения на нулевой уровень.**

Потенциальная энергия тела, поднятого над Землей как источник механической работы, используется в технике. Например, потенциальная энергия воды, находящейся на более высоком уровне, используется на гидростанциях для приведения в действие турбин, а поднятого тела – для трамбовки грунта при подготовке к закладке фундамента зданий и т.д.

Итак, потенциальная энергия, как и кинетическая, характеризует механическую работу, которая может быть совершена соответствующим телом.

в. Равновесие в поле сил тяготения

Предположим, что потенциальная энергия тела в поле тяготения в начальном состоянии E_{p1} больше, чем в конечном $E_{p2} < E_{p1}$. Тогда из выражения (4.41) следует, что работа силы тяжести положительна $A_{12} > 0$, а значит угол между силой и перемещением, острый. Следовательно, сила тяжести имеет компоненту в направлении перемещения, то есть в направлении убывания потенциальной энергии.

Связь между силой и потенциальной энергией в поле тяготения позволяет сделать некоторые выводы, касающиеся **устойчивости состояния механического равновесия**.

Рассмотрим три различных случая равновесия шара (*рис. 4.21*). Во всех случаях в положении равновесия 1 сила тяжести $m\vec{g}$ уравновешена нормальной реакцией $\vec{N}$ поверхности, на которой он находится. Чтобы исследовать устойчивость состояний равновесия, представим себе, что шар слегка выведен из положение равновесия (состояние 2) и проследим за его дальнейшим поведением.

Потенциальная энергия шара в положении равновесия 1 на *рисунке 4.21*, *а* максимальна. Пусть слегка смещенный шар находится в положении 2. Потенциальная энергия шара уменьшается и результирующая сила $\vec{R}$, действующая на шар, удаляет его от положения равновесия. Такое равновесие – состояние 1 (*рис. 4.21, а*) – называется **неустойчивым равновесием**. Шар, слегка выведенный из этого состояния, все дальше удаляется от него.

При отклонении шара из своего положения равновесия 1 на горизонтальной поверхности (*рис. 4.21, б*) потенциальная энергия остается постоянной ($\Delta E_p = 0$), следовательно, в горизонтальном направлении на шар не действует отличная от нуля равнодействующая сила. Этот же результат получится при сложении сил, действующих на шар в положении 2. Шар продолжает оставаться в равновесии, называемом **безразличным равновесием**.

И, наконец, в состоянии равновесия 1, представленном на *рисунке 4.21*, *в*, потенциальная энергия шара минимальна. При небольшом смещении его из этого положения потенциальная энергия увеличивается (в положении 2), то есть на шар действует сила, направленная противоположно смещению, к положению равновесия. Тот же результат получится и при сложении сил, действующих на шар в положении 2 (*рис. 4.21, в*). Состояние равновесия 1 этого рисунка называется **состоянием устойчивого равновесия**.

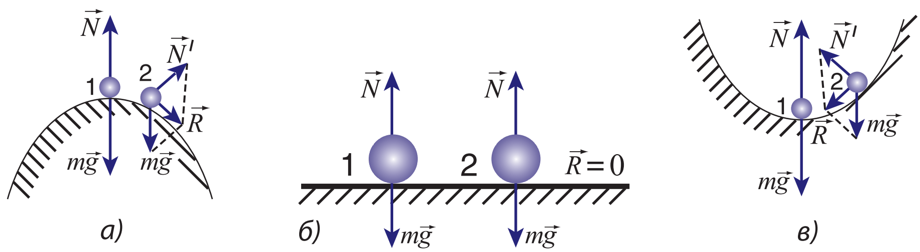


Рис. 4.21

Суммируя изложенное выше, приходим к выводу, что состояние неустойчивого равновесия – это состояние, в котором потенциальная энергия тела в поле тяготения максимальна, в состоянии устойчивого равновесия потенциальная энергия минимальна, а состоянию безразличного равновесия соответствует постоянное значение этой энергии в соседних с телом областях.

Эти выводы относительно усточивости состояния механического равновсия остаются верными для любого поля консервативных сил.Можем утверждать, что **состояние устойчивого равновесия системы тел, находящихся в поле консервативных сил, – это состояние с минимально возможной потенциальной энергией**.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Из шахты глубиной $l = 200$ м поднят груз массой $m = 500$ кг с помощью троса, линейная плотность (масса единицы длины) которого $\rho_l = 1{,}5$ кг/м. Какая работа совершена при подъеме груза?

РЕШЕНИЕ

Дано:
$l = 200$ м
$m = 500$ кг
$\rho_l = 1{,}5$ кг/м

A'_{12} – ?

Механическая работа, совершаемая при подъеме груза $A'_{12} = -A_{12} = \Delta E_p$. Изменение потенциальной энергии груза $\Delta E_{p1} = mgl$. При подъеме груза на высоту l, центр тяжести троса поднимается на $\frac{l}{2}$. Масса троса $m_т = \rho_l \cdot l$, то есть его потенциальная энергия увеличивается на $\Delta E_{p2} = m_т g\frac{l}{2} = \rho_l g\frac{l^2}{2}$. Совершенная работа $A'_{12} = \Delta E_{p1} + \Delta E_{p2} = (m + \rho_l \frac{l}{2})\, g \cdot l$; $A'_{12} = 1{,}3 \cdot 10^6$ Дж.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Какие силы называются консервативными?
2. Чему равна механическая работа, совершаемая консервативной силой на замкнутом пути?
3. Какие физические величины называются функциями состояния? Является ли потенциальная энергия в поле тяготения функцией состояния? Аргументируйте ответ.
4. Может ли потенциальная энергия в поле тяготения иметь отрицательные значения? Приведите примеры.
5. Какова связь между механической работой силы тяжести и изменением потенциальной энергии данного тела?
6. Два тела одинакового объема – одно из алюминия, другое из стали – находятся на одинаковой высоте. Потенциальная энергия какого из тел больше? Во сколько раз? Плотность алюминия $\rho_1 = 2{,}7 \cdot 10^3$ кг/м^3, стали $\rho_2 = 7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3.
7. На какой высоте над поверхностью Земли тело имеет такую же потенциальную энергию, что и на высоте $h_1 = 490$ м над поверхностью Луны? Ускорение свободного падения на Луне равно $g_1 = 1{,}6$ м/с^2, а на Земле – $g_2 = 9{,}8$ м/с^2.
8. Тело массой $m = 2$ кг находится на поверхности Земли. В какой-то момент на него начинает действовать вертикально вверх сила $F = 28$ Н. Чему равна потенциальная энергия тела через $t = 5$ с после начала действия силы? Принять $g = 10$ м/с^2.
9. Определите минимальную механическую работу, которую нужно совершить, чтобы поднять в вертикальное положение горизонтальную балку массой $m = 150$ кг и длиной $l = 6$ м.

4.7 РАБОТА СИЛЫ УПРУГОСТИ. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ УПРУГОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Рассмотрим недеформированную пружину жесткостью k, один конец которой закреплен. Пусть ось координат Ox направлена вдоль пружины, а ее начало совпадает со свободным концом пружины (*рис. 4.22, а*). Приложим к ее свободному концу вдоль оси Ox силу $\vec{F}$. Под ее действием пружина растянется и возникнет сила упругости $\vec{F}_{упр.\,x}$ (*рис. 4.22, б*). Проекция этой силы на ось Ox согласно закону Гука равна:

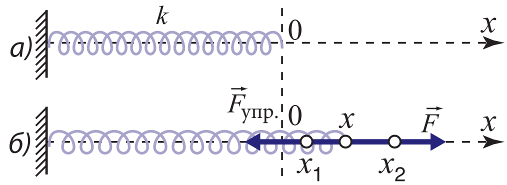


Рис. 4.22

$$F_{упр.x} = -kx, \qquad (4.46)$$

где k – жесткость пружины, а координата свободного конца равна ее абсолютной деформации: $x = \Delta l$.

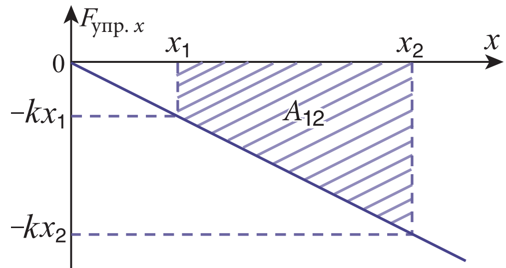


Рис. 4.23

Найдем механическую работу, производимую силой упругости. Эта сила переменная и для нахождения ее работы удобно использовать графический метод. Соотношение (4.46) показывает, что зависимость проекции силы упругости от деформации x линейна, с отрицательным коэффициентом пропорциональности. Соответствующий график представлен на *рисунке 4.23*.

Работа силы упругости при увеличении деформации пружины от x_1 до x_2 численно равна площади фигуры, ограниченной графиком силы, осью Ox и отрезками ординат, соответствующих координатам x_1 и x_2. Эта фигура является трапецией (*рис. 4.23*) с высотой $(x_2 - x_1)$ и основаниями длиной kx_1 и kx_2. Трапеция расположена под осью абсцисс, то есть работа силы отрицательна для $x_2 > x_1$. Этот факт следует и из *рисунка 4.22, б*, на котором видно, что сила упругости направлена противоположно перемещению свободного конца пружины.

Для механической работы силы упругости получаем:

$$A_{12} = -\frac{kx_1 + kx_2}{2}(x_2 - x_1) = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}. \qquad (4.47)$$

Из этого выражения следует, что работа силы упругости данной пружины зависит только от ее начальной и конечной деформации и не зависит от способа перехода от одной деформации к другой. Следовательно, сила упругости является **консервативной силой.**

Сравнив соотношения (4.47) и (4.41), для **потенциальной энергии деформированной пружины** получим $E_p = \frac{kx^2}{2} + \text{const}$. Она называется **потенциальной энергией упругой деформации**. Постоянная определяется из условия, что потенциальная энергия равна нулю ($E_p = 0$), когда пружина не деформирована ($x = 0$), то есть за нулевой уровень принимается потенциальная энергия недеформированной пружины.

Получаем const = 0, следовательно:

$$E_p = \frac{kx^2}{2}. \qquad (4.48)$$

При таком выборе произвольной постоянной потенциальная энергия деформированной пружины ($x \neq 0$) всегда положительна, значения ее зависят не от того, растянута пружина или сжата, а только от модуля деформации.

Точка приложения деформирующей силы совпадает с точкой приложения силы упругости, эти силы равны по модулю, но направлены противоположно. Следовательно, работы деформирующей силы A'_{12} и силы упругости A_{12} удовлетворяют соотношение:

$$A'_{12} = -A_{12}, \tag{4.49}$$

то есть:

$$A'_{12} = \frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}. \tag{4.50}$$

Из формул (4.47) и (4.50) видно, что при увеличении деформации пружины ($|x_2| > |x_1|$) работа деформирующей силы положительна ($A'_{12} > 0$), за ее счет увеличивается потенциальная энергия упругой деформации пружины. При уменьшении деформации пружины ($|x_2| < |x_1|$) работа силы упругости положительна ($A_{12} > 0$), то есть пружина совершает механическую работу за счет своей потенциальной энергии.

Поскольку сила является характеристикой взаимодействия тел, то потенциальную энергию часто называют **потенциальной энергией взаимодействия.** В самом деле, потенциальная энергия в поле тяготения характеризует взаимодействие между данным телом и Землей или другим телом, а потенциальная энергия упругой деформации характеризует взаимодействие между частями упругодеформированного тела. Оба вида потенциальной энергии отличает тот факт, что ее значения определяются взаимным расположением тел или составных частей одного и того же тела.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Две пружины с жесткостями k_1 и k_2 соединены последовательно. Чему равна потенциальная энергия этой упругой деформации комбинированной пружины, если общее удлинение ее равно Δl?

РЕШЕНИЕ

Обозначим через Δl_1 и Δl_2 удлинения каждой пружины в отдельности. Тогда потенциальная энергия системы двух пружин $E_p = \dfrac{k_1(\Delta l_1)^2}{2} + \dfrac{k_2(\Delta l_2)^2}{2}$.

Чтобы найти удлинения Δl_1 и Δl_2, используем два условия:

1 – сумма удлинений $\Delta l_1 + \Delta l_2 = \Delta l$;

2 – силы упругости, с которыми одна пружина действует на другую, равны по модулю (как действие и противодействие), то есть $k_1 \Delta l_1 = k_2 \Delta l_2$.

Выразим $\Delta l_2 = \dfrac{k_1}{k_2}\Delta l_1$, следовательно $\Delta l_1 + \dfrac{k_1}{k_2}\Delta l_1 = \Delta l$, откуда следует $\Delta l_1 = \dfrac{k_2}{k_1 + k_2}\Delta l$ и $\Delta l_2 = \dfrac{k_1}{k_1 + k_2}\Delta l$. Для потенциальной энергии комбинированной пружины получаем $E_p = \dfrac{k_1 k_2 (\Delta l)^2}{2(k_1 + k_2)}$. Из этого выражения видно, что комбинированная пружина (при последовательном соединении) ведет себя как пружина с эквивалентной жесткостью $k_{экв.} = \dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Какие силы называются консервативными? Является ли сила упругости консервативной? Аргументируйте ответ.
2. Напишите выражение для потенциальной энергии упругой деформации тела. Как выбирается ее нулевой уровень?
3. Может ли быть отрицательной потенциальная энергия упругой деформации тела? Аргументируйте ответ.
4. В каком из случаев пружина совершает положительную работу: при увеличении ее деформации или уменьшении?
5. Для удлинения первоначально недеформированной пружины на Δl была произведена механическая работа $A' = 1{,}25$ Дж. Какую дополнительную механическую работу нужно совершить, чтобы увеличить удлинение пружины от Δl до $3\Delta l$?
6. Найдите потенциальную энергию пружины, сжатой на $|\Delta l| = 0{,}05$ м, если известно, что сила, уравновешивающая в данный момент силу упругости, равна $F = 60$ Н.
7. Чтобы сжать пружину на $|\Delta l_1| = 0{,}02$ м, необходима сила $F_1 = 8$ Н. Чему равна потенциальная энергия пружины, когда ее удлинение равно $\Delta l_2 = 0{,}04$ м?
8. Длина пружины, к которой подвешено тело массой $m_1 = 4$ кг, равна $l_1 = 0{,}30$ м. Если к ней подвесить еще одно тело массой $m_2 = 3$ кг, то длина пружины станет равной $l_2 =$ $= 0{,}36$ м. На сколько увеличилась потенциальная энергия пружины после подвешивания второго груза?

4.8 РАБОТА СИЛЫ ТРЕНИЯ

Для анализа работы сил трения, действующих между твердыми телами, рассмотрим твердое тело, которое скользит по поверхности другого твердого тела. На первое из них действует сила трения скольжения, равная по величине $F_{тр.} = \mu N$, где N – модуль силы нормального давления первого тела на второе, а μ – коэффициент трения между телами. Эта сила всегда направлена противоположно скорости v первого тела относительно второго. Введя единичный вектор скорости $\frac{\vec{v}}{v}$, для силы трения скольжения можем записать:

$$\vec{F}_{тр.} = -\mu N \frac{\vec{v}}{v}. \qquad (4.51)$$

Чтобы вычислить работу этой силы, рассмотрим конкретный пример. На полу комнаты со сторонами l_1 и l_2, в углу 1 находится ящик, который нужно переместить в угол 3 (*рис. 4.24*). Допустим, что ящик можно протащить по полу двумя путями: вдоль диагонали 1-3 или вдоль сторон 1–2 и 2–3. Обозначим работу силы трения скольжения на этих путях через A_{13} и A_{123}. Предположим, что сила тяги $\vec{F}$ и угол α, образуемый ею с полом, остаются постоянными. Следовательно, остаются постоянными и нормальная реакция $\vec{N}$ пола и значение силы трения скольжения $F_{тр.}$. А поскольку эта сила составляет с направлением перемещения угол 180°, то для ее работы на двух путях, упомянутых выше, получим:

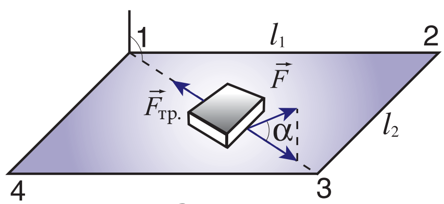


Рис. 4.24

$$A_{13} = -F_{тр.} \cdot \sqrt{l_1^2 + l_2^2} = -\mu N \sqrt{l_1^2 + l_2^2},$$
$$A_{123} = -F_{тр.}\ (l_1 + l_2) = -\mu N\,(l_1 + l_2). \qquad (4.52)$$

Замечаем, что $A_{13} \neq A_{123}$, то есть работа силы трения скольжения тела из одного положения в другое зависит не только от этих положений, но и от формы траектории, по которой движется тело между ними. Следовательно, **сила трения скольжения не является консервативной силой.**

Как известно, работа консервативной силы на замкнутом пути равна нулю. В случае силы трения скольжения, работа которой на любом участке пути отрицательна, на замкнутом пути она также отрицательна, то есть отлична от нуля. В случае, когда твердое тело не скользит по поверхности второго, между ними могут действовать силы трения покоя, уравновешивающие систему сил, действующих на каждое тело в отдельности.

Рассмотрим тело, на ленточном конвейере (*рис. 4.25*), движущееся с постоянной скоростью. Тело покоится относительно ленты, сумма сил, которые на него действуют, равна нулю: $m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр.} = 0$. Отсюда для силы трения покоя, действующей на тело, получаем $F_{тр.} = mg \sin \alpha$. Эта сила совпадает по направлению со скоростью, то есть ее работа положительна. На пути, равном l, работа равна $A = F_{тр.} \cdot l = mg \cdot l \sin \alpha = mgh$, где h – высота, на которую было поднято тело. Таким образом, потенциальная энергия тела в поле силы тяжести увеличилась благодаря положительной работе, совершенной силой трения покоя.

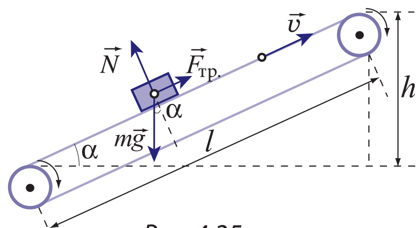


Рис. 4.25

На твердое тело, движущееся в жидкости или газе, со стороны среды действует **сила сопротивления.** Как и сила трения скольжения, она направлена в сторону, противоположную относительной скорости тела, которая равна:

$$\vec{v}_{отн.} = \vec{v}_{т} - \vec{v}_{ср.}, \qquad (4.53)$$

где $\vec{v}_{т}$ и $\vec{v}_{ср.}$ – скорости тела и среды относительно одной и той же системы отсчета, например, связанной с Землей. Величина силы сопротивления зависит от значения относительной скорости. В случае малых скоростей эта зависимость линейна, так что можем написать (2.35, *а*):

$$\vec{F}_{сопр.} = -\alpha\vec{v}_{отн.}. \qquad (4.54)$$

Коэффициент пропорциональности α называется **коэффициентом сопротивления.** Величина его зависит от размеров и формы тела, от природы среды, в которой оно движется. Очевидно, работа силы сопротивления (4.54) может быть как отрицательной, так и положительной в зависимости от того, как направлены относительная скорость $\vec{v}_{отн.}$ и скорость тела $\vec{v}_{т}$. В случае автомобиля, который перемещается со скоростью $\vec{v}_{т}$, большей, чем скорость воздуха (среды) $\vec{v}_{ср.}$, работа силы сопротивления отрицательна. Другой пример. Скорость парусного судна меньше скорости попутного ветра. Тогда относительная скорость судна $\vec{v}_{отн.}$ направлена противоположно скорости судна $\vec{v}_{т}$ относительно берега, а работа силы сопротивления положительна.

Суммируя изложенное выше, приходим к заключению, что работа сил трения и сопротивления может быть как положительной, так и отрицательной в зависимости от конкретной ситуации, в которой действуют эти силы.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Какие силы являются консервативными? Является ли сила трения скольжения консервативной? Почему?
2. Зависит ли работа силы трения скольжения от формы траектории тела между начальным и конечным его положениями? Проиллюстрируйте ответ.
3. Может ли быть положительной работа силы сопротивления, действующей на тело со стороны среды, в которой оно движется? Отрицательной? Приведите примеры.
4. Вычислите работу силы трения скольжения на замкнутых путях 1-2-3-1 и 1-2-3-4-1 *рисунка 4.24*. Сравните полученные результаты и объясните их.
5. В безветренный день автомобиль прошел одну и ту же трассу дважды: один раз с меньшей и второй раз с бóльшей скоростью. Сравните работу силы сопротивления со стороны воздуха в этих двух случаях.

4.9 ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ И ПРЕВРАЩЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

a. Закон сохранения и превращения энергии в изолированных механических системах, в которых действуют консервативные силы

Рассмотрим изолированную систему тел, то есть систему, тела которой взаимодействуют между собой и не взаимодействуют с телами, не принадлежащими системе. Допустим, что силы взаимодействия между телами являются консервативными.

Из теоремы об изменении кинетической энергии (4.34) имеем:

$$E_{k2} - E_{k1} = A_{12}. \tag{4.55}$$

Напомним, что E_{k1} – это кинетическая энергия системы тел в их начальных положениях, E_{k2} – в конечных положениях, а A_{12} – это механическая работа, произведенная силами взаимодействия при переходе тел из начальных положений в конечные. Эти силы консервативны, значит, работа, совершенная ими, равна изменению потенциальной энергии системы тел, взятому со знаком минус (4.41):

$$A_{12} = -(E_{p2} - E_{p1}). \tag{4.56}$$

Подставив (4.56) в (4.55), получим:

$$E_{k2} - E_{k1} = -(E_{p2} - E_{p1})$$

или:

$$E_{k2} + E_{p2} = E_{k1} + E_{p1}. \tag{4.57}$$

Физическая величина E, равная сумме кинетической и потенциальной энергий системы в данный момент, называется механической энергией этой системы.

$$E = E_k + E_p. \tag{4.58}$$

Таким образом, соотношение (4.57) принимает вид:

$$E_2 = E_1. \tag{4.59}$$

Формула (4.57) – это математическое выражение закона сохранения и превращения механической энергии:

Механическая энергия изолированной системы тел, в которой действуют только консервативные силы, не изменяется с течением времени.

Из закона следует, что сохраняется сумма двух видов механической энергии и изменение одного из них вызывает соответствующее изменение другого вида энергии. Например, увеличение кинетической энергии сопровождается уменьшением потенциальной энергии на ту же величину. Проиллюстрируем этот закон. Рассмотрим тело массой m, находящееся на высоте H над поверхностью Земли. Замкнутая система состоит из этого тела и Земли. Механическая энергия этой системы складывается из кинетических энергий тела и Земли и потенциальной энергии их взаимодействия. Сила всемирного тяготения между телом и Землей сообщает им ускорения, обратно пропорциональные массам. Масса Земли несравнимо больше массы тела, поэтому ускорение Земли равно нулю. Следовательно, перемещение Земли, как и работа силы всемирного тяготения, действующей на нее, равны нулю, а значит, кинетическая энергия Земли остается постоянной. Поэтому при записи закона сохранения механической энергии для систем тел, включающих и Землю, не фигурирует кинетическая энергия Земли, а только потенциальная энергия взаимодействия с ней.

В начальном положении, на высоте H, скорость и кинетическая энергия тела равны нулю. Его механическая энергия сводится к потенциальной: $E_1 = E_{p1} = mgH$. Тело, предоставленное самому себе, свободно падает. При этом движении оно обладает и кинетической и потенциальной энергией, так что его механическая энергия на высоте h равна $E = E_k + E_p = \frac{mv^2}{2} + mgh$. Согласно закону сохранения энергии запишем:

$$\frac{mv^2}{2} + mgh = mgH \ . \qquad (4.60)$$

Чем ближе тело к Земле (чем меньше высота h), тем меньше потенциальная энергия и тем больше – кинетическая. На поверхности Земли ($h = 0$) потенциальная энергия равна нулю, вся механическая энергия превращается в кинетическую:

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgH \ , \qquad (4.61)$$

где v_0 – скорость тела на поверхности Земли. Выражение (4.61) получено с помощью закона сохранения и превращения механической энергии. Оно может быть получено и другим путем, рассматривая свободное падение как равноускоренное движение с нулевой начальной скоростью и ускорением, равным ускорению свободного падения g. Если обозначить время падения через t, то $v_0 = gt$, $H = \frac{gt^2}{2}$. Из этих двух формул после исключения времени t получаем соотношение (4.61). Закон сохранения и превращения энергии был сформирован в 1847 г. Г. Гельмгольцем.

б°. Соударения тел

Применим изученный закон сохранения механического импульса системы материальных точек (п. 4.2, *в*) к соударению тел. Используем те же обозначения: m_1 и m_2 – массы тел, $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ – скорости тел до удара и $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ – после удара. Ранее закон сохранения импульса был записан в виде (4.13):

$$\boldsymbol{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2}. \tag{4.62}$$

Для неупругого удара, после которого соударяющиеся тела образуют одно общее тело массой, равной сумме масс, то есть (m_1+m_2), была получена скорость $\vec{u}$ (4.14) этого тела после удара:

$$\boldsymbol{\vec{u} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}}. \tag{4.63}$$

Исследуем, что происходит с кинетической энергией тел в такого рода соударениях. С этой целью найдем ее изменение:

$$\Delta E_k = \frac{(m_1 + m_2)\, u^2}{2} - \left(\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}\right).$$

Подставив сюда выражение (4.63) для скорости $\vec{u}$, после очевидных преобразований получим:

$$\boldsymbol{\Delta E_k = -\frac{m_1 m_2 (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2}{2(m_1 + m_2)}}. \tag{4.64}$$

Замечаем, что **в результате неупругого удара тел кинетическая энергия уменьшается, превращаясь частично в теплоту.**

Проанализируем соударение тел другого рода – **абсолютно упругий удар** или просто **упругий удар**. Это такой удар, после которого тела сохраняют первоначальную форму, их кинетическая энергия сохраняется. Это идеальная модель, поскольку в действительности тела после удара остаются частично деформированными. Однако если деформации достаточно малы и ими можно пренебречь, как при соударении бильярдных шаров из слоновой кости или из стали, модель абсолютно упругого удара может быть применена. Рассмотрим центральный упругий удар двух шаров. При центральном ударе скорости шаров до и после удара направлены вдоль прямой, соединяющей их центры (*рис. 4.26*).

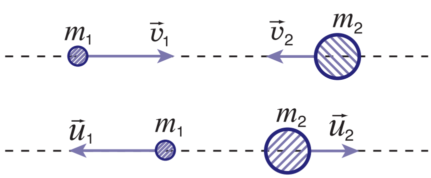


Рис. 4.26

При упругом ударе выполняются законы сохранения импульса (4.62) и кинетической энергии, последний можно записать следующим образом:

$$\boldsymbol{\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}}. \tag{4.65}$$

Герман фон ГЕЛЬМГОЛЬЦ (1821–1894), немецкий физик и физиолог.

Проводил исследования в различных областях физики: электромагнетизме, оптике, акустике, механике жидкостей, физике тепловых явлений. Сформулировал (1847) закон сохранения энергии, показав его всеобщий характер, выполнение его в механических явлениях, тепловых, электромагнитных, физиологических и т.д. Изготовил первый колебательный контур, состоящий из катушки индуктивности и конденсатора, высказал идею атомарной структуры электричества и т.д. В области физической акустики развил теорию слуха, сконструировал модель уха, а в области физиологии зрения предложил теорию аккомодации глаза, теорию цветного зрения.

Запишем законы сохранения (4.62) и (4.65) в виде:

$$\begin{cases} m_1(\vec{v}_1 - \vec{u}_1) = m_2(\vec{u}_2 - \vec{v}_2), \\ m_1(v_1^2 - u_1^2) = m_2(u_2^2 - v_2^2) \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} m_1(\vec{v}_1 - \vec{u}_1) = m_2(\vec{u}_2 - \vec{v}_2), \\ m_1(\vec{v}_1 - \vec{u}_1)(\vec{v}_1 + \vec{u}_1) = m_2(\vec{u}_2 - \vec{v}_2)(\vec{u}_2 + \vec{v}_2). \end{cases}$$

Сравнивая эти уравнения, можем написать эквивалентную систему уравнений:

$$\begin{cases} m_1(\vec{v}_1 - \vec{u}_1) = m_2(\vec{u}_2 - \vec{v}_2), \\ \vec{v}_1 + \vec{u}_1 = \vec{u}_2 + \vec{v}_2. \end{cases} \qquad (4.66)$$

Для нахождения неизвестной скорости $\vec{u}_1$, умножим второе уравнение на $(-m_2)$ и сложим результат с первым уравнением (4.66). Таким путем для скорости $\vec{u}_1$ получаем выражение:

$$\vec{u}_1 = \frac{(m_1 - m_2)\vec{v}_1 + 2m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}. \qquad (4.67)$$

Формулу для скорости $\vec{u}_2$ можно получить, используя одну особенность первоначальных систем уравнений (4.62) и (4.65).

Замечаем, что эти системы симметричны относительно индексов 1 и 2, то есть при одновременной замене индекса 1 на индекс 2 и индекса 2 на индекс 1 система уравнений не изменяется. Очевидно, этой же особенностью должны обладать и их решения. Следовательно, выражение для скорости $\vec{u}_2$ получится из формулы (4.67) при одновременной замене индекса 1 на 2 и наоборот.

Итак,

$$\vec{u}_2 = \frac{(m_2 - m_1)\vec{v}_2 + 2m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2}. \qquad (4.68)$$

Выделим несколько частных случаев.

1. Массы шаров одинаковы, $m_1 = m_2$. Для скоростей шаров после удара получаем $\vec{u}_1 = \vec{v}_2$ и $\vec{u}_2 = \vec{v}_1$, то есть в результате упругого удара шары обмениваются скоростями.

2. Шар массой m_2 первоначально покоится. Скорости шаров после удара в этом случае:

$$\vec{u}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_1; \quad \vec{u}_2 = \frac{2m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2}. \qquad (4.69)$$

3. Массы шаров равны и $\vec{v}_1 = 0$, тогда $\vec{u}_1 = 0$ и $\vec{u}_2 = \vec{v}_1$. Следовательно, первый шар после удара останавливается, а второй движется с такой же скоростью, с какой первоначально двигался первый шар.

4. Шар массой m_1 соударяется с покоящимся телом массой $m_2 >> m_1$, например, шар упруго соударяется с неподвижной стеной, при этом скорость шара $\vec{v}_1$ перпендикулярна ей. В этом случае из выражений (4.69) получаем $\vec{u}_1 = -\vec{v}_1$ и $\vec{u}_2 = 0$, то есть после упругого удара шар движется с такой же, как до удара, скоростью по величине, но направленной в противоположную сторону.

в°. Изменение механической энергии системы при наличии неконсервативных и внешних сил

Рассмотрим систему тел, которые взаимодействуют не только между собой, но и с телами вне системы. Допустим, что некоторые из сил неконсервативны.

Из теоремы об изменении кинетической энергии (4.34) имеем:

$$E_{k2} - E_{k1} = A_{12}.$$

Полная работа сил равна сумме работ внутренних $A_{12}^{\text{внутр.}}$ и внешних $A_{12}^{\text{внеш.}}$ сил , то есть $A_{12} = A_{12}^{\text{внутр.}} + A_{12}^{\text{внеш.}}$. Работа внутренних сил, в свою очередь, равна сумме работы внутренних консервативных сил $A_{12}^{\text{внутр. к.}}$ и внутренних неконсервативных сил $A_{12}^{\text{внутр. нк.}}$, итак, $A_{12}^{\text{внутр.}} = A_{12}^{\text{внутр. к.}} + A_{12}^{\text{внутр. нк.}}$. Следовательно, общая работа $A_{12} = A_{12}^{\text{внутр. к.}} + A_{12}^{\text{внутр. нк.}} + A_{12}^{\text{внеш.}}$. Но работа консервативных сил выражается через потенциальную энергию взаимодействия (4.41): $A_{12}^{\text{внутр. к.}} = E_{p1} - E_{p2}$. Таким образом, полная работа запишется в виде:

$$\boldsymbol{A_{12} = E_{p1} - E_{p2} + A_{12}^{\text{внутр. нк.}} + A_{12}^{\text{внеш.}}}. \tag{4.70}$$

Подставив это соотношение в формулу, выражающую теорему об изменении кинетической энергии, получим:

$$(E_{k2} - E_{k1}) = E_{p1} - E_{p2} + A_{12}^{\text{внеш.}} + A_{12}^{\text{внутр.нк.}}$$

или

$$(E_{k2} + E_{p2}) - (E_{k1} + E_{p1}) = A_{12}^{\text{внеш.}} + A_{12}^{\text{внутр. нк.}}.$$

Введем механическую энергию $E = E_k + E_p$. Ее изменение равно:

$$\boldsymbol{E_2 - E_1 = A_{12}^{\text{внеш.}} + A_{12}^{\text{внутр.нк.}}}. \tag{4.71}$$

Изменение механической энергии системы тел равно суммарной работе внутренних неконсервативных и внешних сил.

Работа неконсервативных сил – силы трения скольжения, силы сопротивления, действующей на тело со стороны среды, в которой оно движется, – отрицательна. В результате действие этих сил приводит к уменьшению механической энергии системы тел. Они нагреваются, их внутренняя энергия возрастает на соответствующую величину.

Работа внешних сил может быть как положительной, так и отрицательной в зависимости от того, как эти силы направлены относительно скоростей тел, на которые они действуют. Следовательно, под действием внешних сил механическая энергия системы увеличивается тогда, когда их работа положительна, и уменьшается, если она отрицательна.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Санки массой $m = 10$ кг из состояния покоя соскальзывают со снежного склона высотой $h = 5$м затем продолжают движение по горизонтальному участку пути и останавливаются после прохождения по нему расстояния $l = 25$ м. Пренебрегая трением санок о склон, определите: *а)* скорость санок у подножия склона; *б)* коэффициент трения между санками и горизонтальным участком пути; *в)* минимальную механическую энергию, необходимую для возвращения санок в начальное положение на склоне.

РЕШЕНИЕ

Дано:
$m = 10$ кг
$h = 5$ м
$l = 25$ м

а) v_B – ? *б)* μ – ?
в) A' – ?

Представим схематически ситуацию, описанную в задаче (*рис. 4.27*).

а) Согласно закону сохранения механической энергии для движения по склону, где не действуют неконсервативные силы, имеем: $E_B = E_A$. В начальном положении A санки обладают потенциальной энергией, так что $E_A = E_{pA} = mgh$, а в положении B – кинетической энергией, то есть $E_B = E_{kB} = \frac{mv_B^2}{2}$. Приравняем эти два выражения:
$\frac{mv_B^2}{2} = mgh$, откуда следует $v_B = \sqrt{2gh}$; $v_B = 10$ м/с.

б) При движении по горизонтальному участку на санки действует сила трения

$$F_{тр.} = \mu N = \mu mg.$$

Изменение кинетической энергии санок равно работе этой силы:

$E_{kC} - E_{kB} = -F_{тр.} \cdot l$ или $0 - \frac{mv_B^2}{2} = -\mu mgl.$

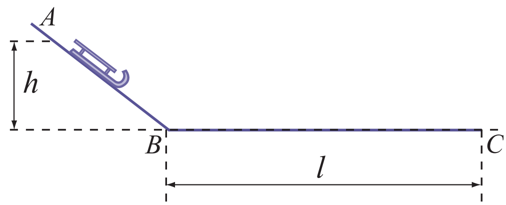


Рис. 4.27

Выразим коэффициент трения

$\mu = \frac{v_B^2}{2gl} = \frac{h}{l}$, $\mu = 0{,}2.$

в) Для перемещения санок по пути CB необходимо воздействовать на них горизонтальной силой тяги, равной по модулю силе трения. Таким образом, $A'_{CB} = F_{тр.} \cdot l = \mu mgl$. Для перемещения санок по склону BA необходимо совершить работу, равную изменению их потенциальной энергии: $A'_{BA} = E_{pA} - E_{pB} = mgh$. Тогда полная произведенная работа равна:

$$A' = A'_{CB} + A'_{BA} = \mu\, mgl + mgh = \frac{h}{l}\, mgl + mgh = 2\, mgh.$$

Здесь учтена величина коэффициента трения, полученная в п. *б*). Выполняя вычисления, получаем $A' = 1\,000$ Дж $= 1$ кДж.

2. Для определения скорости пули используется установка, представленная на *рисунке 4.28*. Деревянный брусок массой M привязан к концу недеформированной пружины, жесткость которой k. Пуля массой m, выпущенная из ружья, попадает в брусок и застревает в нем. Зная максимальное сжатие пружины Δl_{max}, определите скорость пули. Трением бруска о горизонтальную поверхность, на которой он находится, пренебречь.

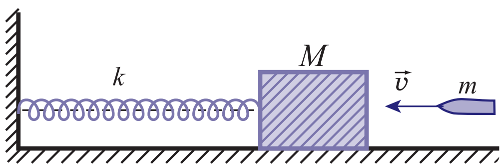


Рис. 4.28

РЕШЕНИЕ

Взаимодействие пули с бруском представляет собой неупругий удар. Если обозначить скорость пули через v, а скорость бруска с пулей в нем через u, то в соответствии с законом сохранения импульса можно записать $mv = (M + m)\,u$. При последующем движении бруска с пулей пружина сжимается, потенциальная энергия ее упругой деформации увеличивается за счет уменьшающейся кинетической энергии системы брусок–пуля.

При достижении максимального сжатия Δl_{max} кинетическая энергия становится равной нулю, полностью переходя в потенциальную энергию сжатой пружины. Согласно закону сохранения и превращения механической энергии записываем:

$$\frac{(M+m)u^2}{2} = \frac{k(\Delta l_{max})^2}{2}.$$

Из этих двух законов сохранения определяем скорость пули:

$$v = \frac{\Delta l_{max}}{m} \cdot \sqrt{k(M+m)}.$$

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Дайте определение механической энергии системы тел.
2. При каких условиях механическая энергия системы тел остается неизменной с течением времени?
3. Какие соударения тел называются упругими (абсолютно упругими)?
4. Какой из законов сохранения выполняется как при упругих, так и при неупругих соударениях тел?

5°. Как изменяется кинетическая энергия тел в результате неупругого соударения между ними?

6°. Тело свободно падает с высоты $H = 60$ м. Определите высоту, на которой его кинетическая энергия вдвое больше потенциальной.

7. Тело брошено под углом к горизонту со скоростью $v_0 = 25$ м/с. Чему равна скорость тела в момент, когда оно находится на высоте $h = 20$ м?

8. Определите скорость шарика массой $m = 0{,}02$ кг, выпущенного из игрушечного пружинного пистолета, закрепленного горизонтально. Жесткость пружины $k = 242$ Н/м, а сжатие $\Delta l = 0{,}01$ м.

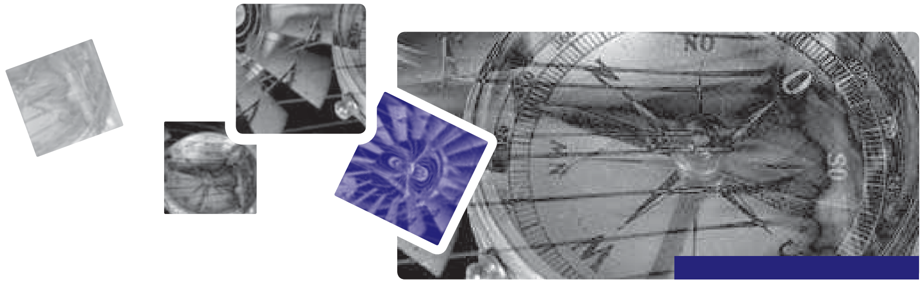
9. Вагон массой $m = 30$ т движется со скоростью $v = 2$ м/с по запасному пути железной дороги к упору в его конце. Упор снабжен двумя одинаковыми пружинами с жесткостью $k = 2{,}4 \cdot 10^5$ Н/м каждая. Определите максимальное сжатие пружин, когда они останавливают вагон.

10°. Свинцовый шар массой $m_1 = 0{,}5$ кг, движущийся со скоростью $v_1 = 4$ м/с, сталкивается с пластилиновым шаром массой $m_2 = 0{,}3$ кг, который движется ему навстречу со скоростью $v_2 = 2$ м/с. Вычислите кинетическую энергию общего тела, образованного в результате неупругого соударения шаров.

11°. Ребенок массой m_1 стоит на коньках на льду возле санок массой m_2. Ребенок толкает санки, сообщая им скорость v_2, при этом сам движется в противоположном направлении. Какую механическую работу совершил ребенок?

12°. Камень массой $m = 0{,}5$ кг брошен с высоты $h = 30$ м с начальной скоростью $v_1 = 25$ м/с. Вычислите работу сил сопротивления, действующих на камень, если его скорость в момент падения на Землю равна $v_2 = 30$ м/с.

13°. Тело массой $m = 0{,}8$ кг, брошенное вертикально вверх со скоростью $v_0 = 12$ м/с, достигает максимальной высоты $H = 6$ м. Чему равно среднее значение силы сопротивления, действующей на тело со стороны воздуха? С какой скоростью возвратится тело на место броска, если допустить, что средняя сила сопротивления в обоих случаях одинакова?



Глава V

МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

5.1 КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

В природе часто встречаются движения, повторяющиеся через определенные промежутки времени, т.е. периодические. Например, любое равномерное вращательное движение тела является **периодическим**: каждая точка тела проходит через положения, занимаемые ею в предыдущих оборотах, имея при этом ту же скорость и прежнее направление движения. Периодические движения совершают: тело, подвешенное на нити, или пружинный маятник часов, лодка на морских волнах, паутина паука, когда в нее попадает жертва и т.д. Однако не любое периодическое движение является колебательным. Равномерное вращательное движение существенно отличается от перечисленных примеров. При более детальном анализе замечаем, что движение может происходить либо около фиксированного положения, совпадающего с положением устойчивого равновесия, называемого **центром колебания**, либо такого положения не существует (в случае вращательного движения). На *рисунке 5.1* показаны примеры колебательного движения, где через OO' обозначено положение устойчивого равновесия.

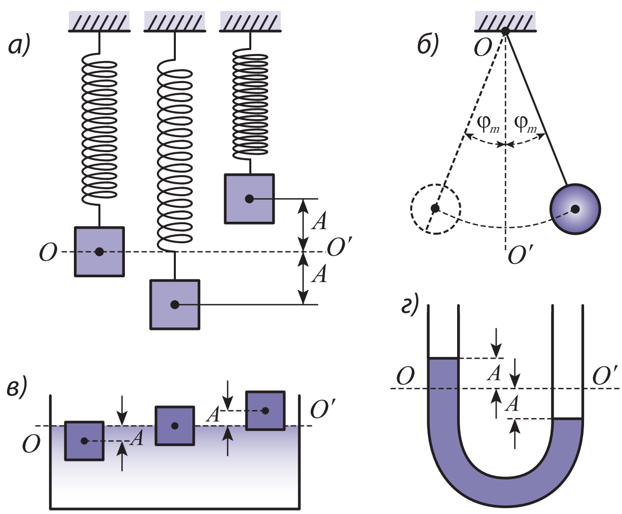


Рис. 5.1

Механическим колебанием называется движение, которое периодически повторяется вдоль некоторой траектории, проходимой последовательно в противоположных направлениях. Система, совершающая такое движение, называется _осциллятором_.

Любое колебание характеризуется определенными параметрами, которые при заданных условиях остаются неизменными и отличают его от других колебаний. Этими параметрами являются **амплитуда**, **период** и **частота**.

Амплитудой называется величина максимального отклонения колеблющегося тела от положения устойчивого равновесия.

Она определяется начальными условиями, то есть воздействием, приводящим осциллятор в движение. Амплитуда может быть и линейной и угловой величиной. В зависимости от этого ее единицей в СИ является **метр** (м) или **радиан** (рад). На *рисунке 5.1* амплитуда обозначена буквой A (*рис. 5.1, а, в, г*) и, соответственно, φ_m (угловая амплитуда) (*рис. 5.1, б*).

Полным колебанием называется движение осциллятора между двумя последовательными прохождениями через одну и ту же точку траектории с теми же скоростью и ускорением. Время (T), необходимое для этого, называется _периодом_. Его единицей в СИ является секунда, $[T] = 1$ с.

Если известен период колебаний T, то число полных колебаний N, совершаемых за промежуток времени t, определяется из выражения:

$$N = \frac{t}{T}. \quad (5.1)$$

Другим параметром, описывающим колебания, является **частота**. Она обозначается греческой буквой ν (ню) и характеризует быстроту повторения колебательного движения.

Частотой колебаний называется величина ν, численно равная полному числу колебаний, совершаемых за единицу времени:

$$\nu = \frac{N}{t} = \frac{1}{T}. \quad (5.2)$$

Единицей частоты в СИ является один **герц** (Гц):

$$[\nu] = 1\text{с}^{-1} = 1\text{Гц}.$$

Чтобы выяснить, при каких условиях возникают и происходят колебательные движения, проанализируем движение тела, прикрепленного к концу пружины. Допустим, что ситуация является идеальной, то есть отсутствуют силы трения и сопротивления (*рис. 5.2*). Колебательное движение, как и любое другое, происходит только в результате взаимодействия с другими телами. Таким образом, данное тело вместе с телами, с кото-

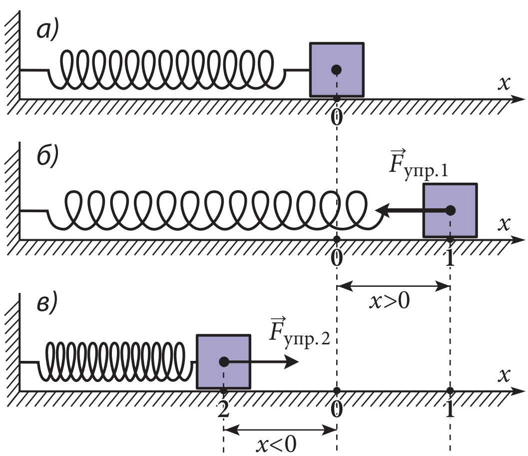


Рис. 5.2

рыми оно взаимодействует, образуют **колебательную систему**; у нее есть положение устойчивого равновесия и могут совершаться колебания. В рассматриваемом примере колебательная система состоит из тела, движение которого изучается, и пружины.

Первоначально тело находится в положении устойчивого равновесия 0 (*рис. 5.2, а*), при котором сила упругости равна нулю. Чтобы вывести его из этого состояния, нужно приложить внешнюю силу. Если ее величина не превышает предела упругости, то в растянутой пружине возникнет сила упругости $F_{упр.x} = -kx$, под действием которой тело со все возрастающей скоростью будет двигаться из положения 1 к положению равновесия 0 (*рис. 5.2, б*). Согласно основному уравнению динамики:

$$-kx = ma_x. \tag{5.3}$$

В положении 1 сила упругости, а значит, и ускорение тела максимальны. При его приближении к положению равновесия (координата x уменьшается) сила упругости $\vec{F}_{упр.1}$ и ускорение стремятся к нулю, а скорость увеличивается и в положении равновесия достигает максимального значения. Пройдя через него, тело движется далее по инерции, смещаясь влево и сжимая пружину. Поскольку при сжатии пружины возникает сила упругости $\vec{F}_{упр.2}$, направленная противоположно скорости, то его движение становится замедленным. Ускорение увеличивается по модулю, а скорость уменьшается. В положении 2 (*рис. 5.2, в*) скорость равна нулю, а значения силы $\vec{F}_{упр.2}$ и ускорения максимальны. Кроме того, мы рассматриваем идеальную ситуацию $|\vec{F}_{упр.2}| = |\vec{F}_{упр.1}|$, поэтому смещения тела влево и вправо от положения равновесия одинаковы. Под действием силы $\vec{F}_{упр.2}$ тело начинает ускоренно двигаться вправо, увеличивая свою скорость. В положении равновесия $|\vec{F}_{упр.2}| = 0$ и согласно уравнению (5.3) ускорение тела также равно нулю, а скорость максимальна. По инерции тело продолжает двигаться вправо, скорость его уменьшается и в положении 1 (*рис. 5.2, б*) становится равной нулю, а сила $\vec{F}_{упр.1}$ и ускорение – максимальны. Далее движение тела повторяется в таком же порядке. Таким образом, тело совершает периодическое движение, называемое **колебанием**, проходя последовательно через положения 1 – 0 – 2 – 0 – 1. Сила, под действием которой происходит колебательное движение, всегда направлена к положению устойчивого равновесия, она называется **возвращающей силой**.

Колебания, совершаемые телом только под действием возвращающей силы, называются **собственными колебаниями**. Однако, в действительности, на любое тело действуют также и силы сопротивления среды. Поэтому собственные колебания – это идеальный случай, который никогда не осуществляется на практике. Колебания тела, происходящие под действием возвращающей силы и сил сопротивления среды, называются **свободными колебаниями**. Они отличаются от собственных тем меньше, чем меньше силы сопротивления.

Исходя из вышеизложенного, можно сформулировать условия, необходимые для возникновения и поддержания колебания тела:

- **тело должно обладать дополнительной энергией, превышающей его энергию в состоянии устойчивого равновесия;**
- **на тело, выведенное из положения равновесия, должна действовать возвращающая сила;**
- **если на тело действуют и силы сопротивления, то дополнительная энергия не должна полностью расходоваться на их преодоление.**

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Что называется механическим колебанием? Приведите примеры.
2. Чем отличается колебательное движение от вращательного? Что называется центром колебания?
3. Дайте определение амплитуды, периода и частоты колебательного движения. Каковы их единицы в СИ?
4. Какие колебания называются свободными? Чем они отличаются от собственных?
5. Сформулируйте условия, необходимые для возникновения и поддержания колебаний.
6. Шарик *B* может находиться в положениях равновесия 1 и 2 (*рис. 5.3*). Из какого из этих положений возможно колебательное движение? Аргументируйте ответ.
7. Тело совершает колебания с амплитудой $A = 2$ см. Какой путь пройдет тело за один период?
8. За 1 мин качели совершают 20 полных колебаний. Чему равен период колебания качелей?

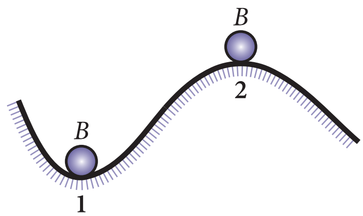


Рис. 5.3

9. Тележка, прикрепленная к концу пружины, совершает полное колебание за 0,5 с. Определите частоту колебаний.

5.2 ЛИНЕЙНЫЙ ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР

В зависимости от условий, в которых находится осциллятор, его движения разнообразны, в большинстве случаев имеют сложный характер и их количественное описание весьма затруднительно. Поэтому мы рассмотрим идеализированную систему, с помощью которой изучим самое простое колебательное движение. Осциллятором будем считать материальную точку массой m, на которую действует только возвращающая сила, являющаяся линейной функцией отклонения от положения устойчивого равновесия (например, сила упругости). Такие силы называются **квазиупругими**. В такой системе, как мы увидим далее, колебательное движение происходит по гармоническому закону, поэтому она называется **линейным гармоническим осциллятором**. В действительности такие осцилляторы не существуют, однако, в лабораторных условиях можно изготовить колебательную систему со свойствами, близкими к идеальным. Например, тело малых размеров и большой массы, подвешенное к абсолютно упругой пружине пренебрежимо малой массы, называется **пружинным маятником**, а то же тело, подвешенное на длинной невесомой и нерастяжимой нити, – **математическим маятником**.

a. Пружинный маятник

Рассмотрим пружинный маятник массой m и жесткостью k. В первоначальном состоянии под действием силы тяжести $\vec{G}$ пружина удлиняется на величину x_0, а сила упругости поддерживает систему в положении устойчивого равновесия (*рис. 5.4*). Если начало оси координат Ox, вдоль которой будет происходить колебательное движение, совместить с этим положением, то условие устойчивого равновесия запишется в виде:

$$G = -kx_0. \qquad (5.4)$$

При смещении тела из положения равновесия на величину x в положительном направлении оси координат со стороны пружины начинает действовать сила упругости, равная $-k(x - x_0)$, и второй закон Ньютона, описывающий это движение, запишется следующим образом:

$$ma_x = -k(x - x_0) + G_x, \tag{5.5}$$

где a_x – это проекция вектора ускорения на эту ось. Приняв во внимание (5.4), из (5.5) получим $ma_x = -kx$. Разделив это уравнение на m находим:

$$a_x + \omega^2 x = 0, \tag{5.6}$$

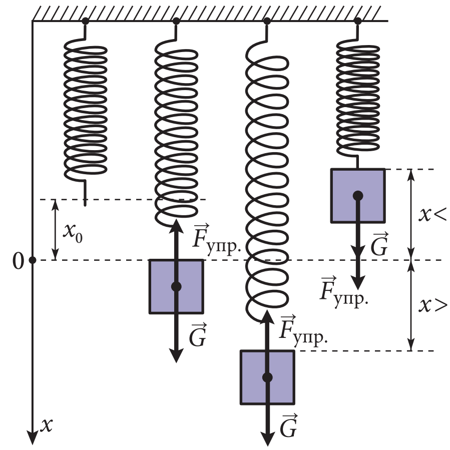


Рис. 5.4

где

$$\omega^2 = k/m \tag{5.7}$$

является константой, зависящей от параметров пружинного маятника.

Выражение (5.6) полностью описывает колебательное движение пружинного маятника и называется **уравнением линейного гармонического осциллятора**.

б. Математический маятник

Проанализируем особенности колебательного движения **математического маятника** (*рис. 5.5*). Колебательная система состоит из нити длиной l, точечного тела массой m и Земли, со стороны которой действует сила тяжести. Маятник выводится из положения устойчивого равновесия. В этом состоянии на тело действует сила тяжести $\vec{G} = m\vec{g}$, направленная вертикально вниз, и сила натяжения нити $\vec{T}$, направленная вдоль нее. Из *рисунка 5.5* видно, что сила тяжести состоит из двух составляющих: нормальной $\vec{G}_n$ и касательной (тангенциальной) $\vec{G}_\tau$ к траектории движения, направленных вдоль нити и перпендикулярно ей, соответственно.

Составляющая $\vec{G}_\tau$ силы тяжести изменяет величину скорости тела и сообщает ему ускорение $\vec{a}_\tau$, называемое **тангенциальным**. Под действием $\vec{G}_\tau$ маятник начинает смещаться к положению устойчивого равновесия, двигаясь со все возрастающей скоростью вдоль дуги окружности с радиусом, равным длине маятника. Одновременно величина этой составляющей $\vec{G}_\tau$ уменьшается и при прохождении через положение равновесия становится равной нулю (*см. рис. 5.5*), при этом скорость максимальна. По инерции тело проходит через положение

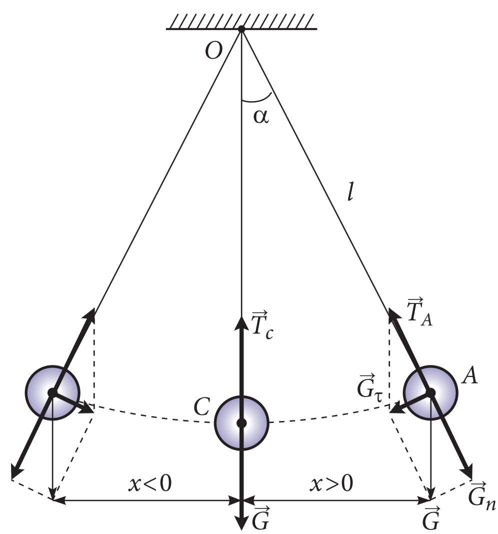


Рис. 5.5

равновесия и продолжает двигаться со все убывающей скоростью, так как появляется составляющая $\vec{G}_\tau$ силы тяжести, направленная к положению равновесия, то есть противоположно вектору скорости. Когда скорость тела равна нулю, тангенциальная составляющая силы тяжести $\vec{G}_\tau$ максимальна, тело движется к положению равновесия. Таким образом, $\vec{G}_\tau$ является возвращающей силой, то есть в исследуемой системе выполняются условия, необходимые для совершения колебательного движения.

Чтобы получить уравнение этой колебательной системы, обратим внимание на то, что в любой момент времени положение тела определяется углом α отклонения нити от вертикали или длиной дуги *CA* (*см. рис. 5.5*), вдоль которой происходит движение. Угол α и длину дуги *CA* будем считать положительными, если маятник отклоняется вправо от положения равновесия, и отрицательными при отклонении влево. Из *рисунка 5.5* видно, что если нить маятника образует угол α с вертикалью, то проекция силы тяжести на направление касательной к траектории движения тела равна:

$$G_\tau = -G \sin \alpha = -mg \sin \alpha, \tag{5.8}$$

где знак „–” указывает на то, что G_τ и α имеют противоположные знаки. Если угол α мал, то длина дуги $\overset{\frown}{CA}$ примерно равна длине хорды *CA*, которая в данном случае представляет собой отклонение от положения равновесия *x*. В этом приближении сектор круга *OCA*, описываемый нитью маятника длиной *l*, можно считать прямоугольным треугольником (*см. рис. 5.5*), из которого получаем $\sin \alpha = CA/l = x/l$ и выражение (5.8) принимает вид:

$$G_\tau \approx -\frac{mg}{l}\,x. \tag{5.9}$$

Для малых значений угла α **возвращающая сила** G_τ является квазиупругой и система совершает гармонические колебания. Согласно второму закону Ньютона, в проекции на рассматриваемое направление $G_\tau = ma_\tau$, после подстановки формулы (5.9) и сокращения на *m*, получается уравнение:

$$a_\tau + \omega^2 x = 0, \tag{5.10}$$

где

$$\omega^2 = g/l. \tag{5.11}$$

Отметим, что уравнение (5.10) справедливо только для малых углов (α ≤ 15°), когда значение функции «*синус*» примерно равно величине угла, выраженного в радианах. В самом деле, если α ≤ 15°, то отличие между величинами α и sin α менее 1%. Очевидно, для больших углов колебания рассматриваемого маятника не будут гармоническими, поскольку возвращающаяся сила уже не является квазиупругой.

Мы получили очень важный результат: **уравнения движения пружинного и математического маятников одинаковы. Отлична только постоянная ω, которая зависит от параметров изучаемой колебательной системы**. Это означает, что в обоих случаях отклонение от положения равновесия изменяется со временем по одному и тому же закону, несмотря на то, что силы, определяющие характер этих движений, различны: для пружинного маятника – это результирующая сил упругости и тяжести, а для математического – результирующая сил тяжести и натяжения нити.

Уравнение вида (5.6) или (5.10), несмотря на кажущуюся простоту, имеет достаточно сложное решение и не входит в лицейскую программу. Вместе с тем, именно его решение является законом колебательного движения и позволяет детально его изучать.

в. Закон гармонического колебательного движения

Зависимость смещения осциллятора из положения равновесия от времени (**закон колебательного движения**) достаточно просто может быть изучена с помощью **осциллограмм**, полученных экспериментально. **Осциллограмма** (от лат. *oscilum* – «колебание» и гр. *gramma* – «запись») является графическим представлением закона колебательного движения. Самую простую осциллограмму можно получить, прикрепив к осциллятору карандаш или ручку, которые запишут его движение на равномерно перемещающемся листе бумаги (*рис. 5.6*). Видно, что как в случае пружинного маятника (*рис. 5.6, а*), так и математического (*рис. 5.6, б*), осциллограмма имеет одинаковый вид, который позволяет предположить, что колебательное движение происходит по закону *синуса* или *косинуса*. Это предположение подтверждается с помощью следующего опыта, демонстрирующего также связь между равномерным движением по окружности и колебательным движением.

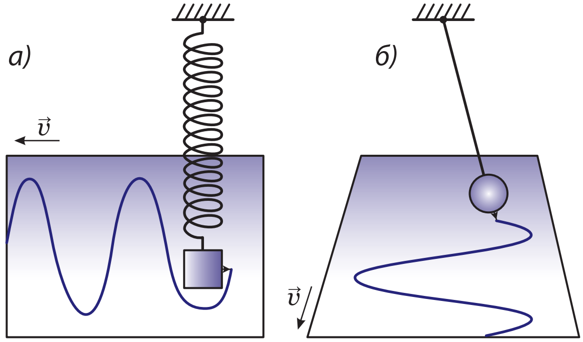


Рис. 5.6

Рассмотрим диск радиуса A, на ободе которого закреплен стержень с насаженным на него шариком b (*рис. 5.7*). С помощью моторчика M диск с шариком b приводят в равномерное вращательное движение. Если установку осветить слева пучком света, параллельным плоскости диска, то на экране E можно наблюдать колебательное движение проекции (тени) p шарика. Между диском и экраном в плоскости, параллельной экрану, поместим математический маятник, совершающий колебания с амплитудой, равной радиусу диска, так, что оба шарика проектируются на экран. Можно подобрать такую скорость вращения диска, чтобы проекции шариков накладывались, совершая на экране одинаковое движение. Следовательно, особенности колебательного движения можно изучать с помощью движения проекции какой-либо точки окружности, лежащей на одном из ее диаметров.

Допустим, что материальная точка M равномерно движется по окружности радиуса A и совершает один оборот за время $t = T$. На *рисунке 5.8* через $M_1, M_2, ..., M_7$ обозначены промежуточные положения материальной точки M при ее движении по окружности, а через $M'_1, M'_2, ..., M'_7$ – промежуточные положения координаты ее проекции на вертикальный диаметр в различные моменты времени. За начало отсчета времени принимаем момент, когда материальная точка M находится на горизонтальном диаметре. В произвольный момент времени

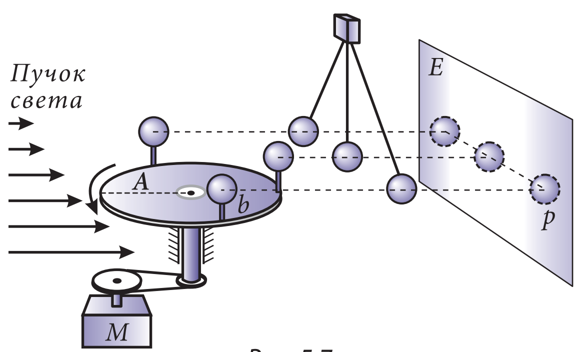


Рис. 5.7

радиус окружности OM_1 образует с горизонтальным диаметром угол φ и из прямоугольного треугольника OP_1M_1 (*рис. 5.8*) можно определить координату проекции точки M_1 на вертикальный диаметр (на экран E):

$$y = A \sin \varphi.$$

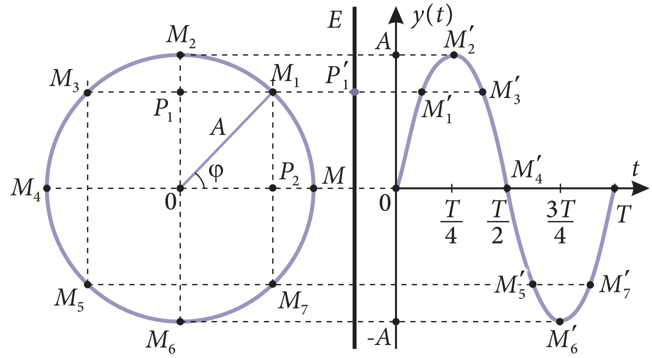


Рис. 5.8

Угол φ тем больше, чем больше промежуток времени от начала движения и скорость вращения. **Угловой скоростью** равномерного движения по окружности называется физическая величина, характеризующая быстроту изменения угла φ и равная:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \qquad (5.12)$$

Если материальная точка M делает один полный оборот, то $\Delta\varphi = 2\pi$, $\Delta t = T$ – период обращения и из (5.12) получаем связь между угловой скоростью и периодом обращения или частотой:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu. \qquad (5.13)$$

Физическая величина ω имеет совсем иной смысл для колебательного движения, которое совершает проекция материальной точки M или любого другого тела. На самом деле, в процессе колебательного движения тела перемещаются около некоторого фиксированного положения устойчивого равновесия, а не совершают вращательное движение. Как видно из (5.13), единица ω в СИ равна c^{-1}, то есть имеет смысл частоты. Поэтому в теории колебаний ω называется **круговой** или **циклической частотой**. Если частота ν показывает, сколько колебаний совершает тело за одну секунду, то циклическая частота – это число колебаний за (2π) с.

Поскольку в рассмотренном примере (*см. рис. 5.8*) начальные величины угла и момента времени равны нулю, то из (5.12) следует $\varphi = \omega t$, и для координаты проекции точки M_1 получаем:

$$y = A \sin \omega t. \qquad (5.14)$$

Выражение (5.14) характеризует движение проекции материальной точки M на экране E и является законом ее колебательного движения, графически представленном на *рисунке 5.8* зависимостью $y(t)$. Так как шарик математического маятника и проекция шарика, закрепленного на диске (*см. рис. 5.7*), совершают одинаковое движение, то указанное выражение, как закон колебательного движения, является решением уравнения линейного гармонического осциллятора (5.6). Функции «*синус*» и «*косинус*» называются гармоническими, то есть закон колебательного движения является гармоническим законом.

Если маятник, первоначально находившийся в положении равновесия ($x = 0$), приведен в движение коротким ударом, при котором ему сообщается начальная скорость в положительном направлении, то его движение будет происходить по закону $x = A \sin \omega t$, а если тот же маятник первоначально освобождается из положения максимального отклонения ($x = A$), тогда законом движения будет $x = A \cos \omega t = A \sin (\omega t + \pi/2)$.

Однако осциллятор может начать движение и из произвольного положения, находящегося между положением равновесия и максимального отклонения. В таких случаях в момент $t = 0$ аргумент функции «*синус*» или «*косинус*» отличен от нуля или $\pi/2$ и принимает произвольные значения. Таким образом, в зависимости от начальных условий закон движения линейного гармонического осциллятора имеет вид:

$$\boldsymbol{x = A \sin (\omega t + \varphi_0)} \tag{5.15, a}$$

или

$$\boldsymbol{x = A \cos (\omega t + \varphi_0)}, \tag{5.15, б}$$

где φ_0 измеряется в *радианах* и может принимать как положительные, так и отрицательные значения, а также равные нулю. Очевидно, что эти два выражения для закона движения эквивалентны и могут быть использованы в равной мере.

г. Мгновенные характеристики гармонических колебаний

Амплитуда A, период T и частота ν, введенные для описания колебательного движения, не позволяют определять, в каком состоянии находится осциллятор в данный момент времени и в каком направлении движется. Поэтому введем новые величины, характеризующие мгновенное состояние колебательной системы, используя с этой целью закон движения (5.15), полученный выше.

Величина *x*, характеризующая положение осциллятора в данный момент времени относительно положения равновесия, называется *смещением*.

Из (5.15) видно, что амплитуда A численно равна максимальному значению смещения, то есть:

$$A = |x_{max}|.$$

Другой важной характеристикой колебательной системы является **фаза** колебаний.

Аргумент функции, описывающей колебание, который определяет как положение, так и направление движения осциллятора в данный момент времени, называется *фазой*.

$$\varphi = \omega t + \varphi_0,$$

где φ_0 – **начальная фаза** колебаний, она определяет смещение осциллятора в момент времени $t = 0$.

Поскольку колебательное движение является периодическим, то есть $x(t + T) = x(t)$, то очевидно, $A \sin [\omega(t + T) + \varphi_0] = A \sin (\omega t + \varphi_0)$. Период функций «*синус*» и «*косинус*» равен 2π и за промежуток времени от t до $t + T$ (T – период) фаза колебаний изменяется на 2π, то есть $\omega(t + T) + \varphi_0 = \omega t + \varphi_0 + 2\pi$, или $\omega T = 2\pi$, откуда получаем выражение для периода T:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Таким образом, фаза колебаний равна:

$$\boldsymbol{\varphi = 2\pi \frac{t}{T} + \varphi_0}. \tag{5.16}$$

Из этого выражения видно, что фаза колебаний зависит от времени, но не зависит от выбора системы единиц измерения, так как определяется относительным временем t/T. Другими словами, для каждой колебательной системы существует собственный «эталон времени», равный периоду колебаний. Каждому промежутку времени, выраженному в долях периода, соответствует значение фазы, выраженной в радианах, то есть **фаза является угловым эквивалентом времени**.

Фаза позволяет различать два колебания, имеющие одинаковые период и амплитуду. Если мы для обоих колебаний выберем одинаковую начальную фазу, то отличие между ними можно будет выразить **разностью фаз** $\Delta\varphi$.

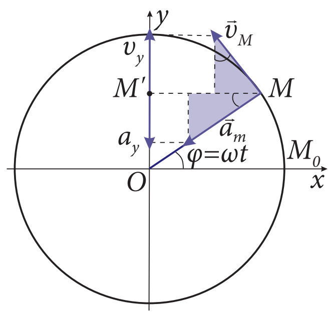


Рис. 5.9

Из (5.16) следует также, что два колебания с одинаковым периодом (частотой) имеют постоянную разность фаз. Два колебания **согласованы по фазе** или **синхронны**, если $\Delta\varphi = 0$ и находятся в **противофазе** или **асинхронны**, если $\Delta\varphi = \pi$.

Мгновенное состояние осциллятора характеризуется также **скоростью** и **ускорением колебания**. Для получения зависимости скорости и ускорения от времени воспользуемся схематическим представлением (*рис. 5.9*) опыта, показанного на *рисунке 5.7*.

Движение материальной точки M по окружности характеризуется векторами скорости $\vec{v}_M$ и центростремительного ускорения $\vec{a}_M$ (*рис. 5.9*), модули которых выражаются согласно соотношению (1.45) через циклическую частоту ω (напомним, что радиус окружности был обозначен A). Видно, что проекции векторов $\vec{v}_M$ и $\vec{a}_M$ на ось ординат Oy (*рис. 5.9*) определяют, соответственно, скорость и ускорение колебания проекции M' материальной точки M и, одновременно, линейного гармонического осциллятора (в нашем опыте – математического маятника).

Из прямоугольных треугольников, выделенных на *рисунке 5.9*, для проекций векторов $\vec{v}_M$ и $\vec{a}_M$ получаем

$$v_y = v_M \cos \omega t = A\omega \cos \omega t,$$

$$a_y = -a_M \sin \omega t = -A\omega^2 \sin \omega t.$$

Эти выражения представляют собой законы скорости и ускорения колебания линейного гармонического осциллятора в частном случае, когда начальная фаза равна нулю (в момент времени $t = 0$ материальная точка находится в положении M_0). В общем случае, когда начальная фаза отлична от нуля (материальная точка M_0 находится в произвольном положении на окружности), соответствующие законы принимают вид:

$$\boldsymbol{v_y = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0)}, \tag{5.17}$$

$$\boldsymbol{a_y = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0)}. \tag{5.18}$$

Видно, что и скорость и ускорение колебания изменяются со временем так же, как и смещение (5.15, *а*), – по гармоническому закону. Как и смещение, они характеризуются максимальными, или амплитудными, значениями. Из (5.17) и (5.18) следует, что они могут быть получены, соответственно, если $\cos(\omega t + \varphi_0) = 1$ и $\sin(\omega t + \varphi_0) = -1$, то есть

$$v_{y,\max} = A\omega, \text{ а } a_{y,\max} = A\omega^2.$$

д°. Представление колебательных движений с помощью векторных диаграмм

Наиболее часто встречается и используется **графическое изображение** любого движения, в том числе и колебательного. Задаются значения аргумента функции, являющейся законом движения, и вычисляются ее значения. Для большей наглядности полученные результаты отмечают на графике, выбрав нужную шкалу.

Более необычным, но в определенных случаях гораздо более эффективным является представление колебаний в виде векторов на плоскости – **векторных диаграмм**. Колебание, описываемое уравнением (5.15), задается с помощью вектора , вращающегося в плоскости xOy, длина которого равна амплитуде колебаний, а направление образует с осью Ox угол, в начальный момент времени равный начальной фазе φ_0 (*рис. 5.10*). Вектор $\vec{A}$ вращается в тригонометрическом направлении с угловой скоростью, равной циклической частоте ω представляемого колебания.

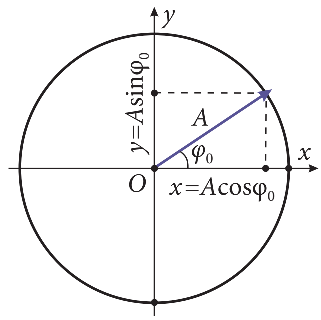


Рис. 5.10

Отметим, что при этом выражение для проекции вектора $\vec{A}$ на ось Ox или Oy совпадает с уравнением для закона движения, записанного через функции „*косинус*" или „*синус*".

е. Зависимость циклической частоты и периода свободных гармонических колебаний от свойств системы

В п. 5, *а, б* было установлено, что уравнение линейного гармонического осциллятора содержит константу, зависящую от параметров изучаемой колебательной системы. Из анализа размерности этой постоянной следует, что она равна квадрату циклической частоты колебаний. В самом деле, и для пружинного маятника

$$[\omega^2] = \frac{[k]}{[m]} = \frac{\text{Н}}{\text{м}\cdot\text{кг}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2\cdot\text{м}\cdot\text{кг}} = \frac{1}{\text{с}^2}$$

и для математического

$$[\omega^2] = \frac{[g]}{[m]} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2\cdot\text{м}} = \frac{1}{\text{с}^2}$$

получаем ту же размерность: с^{-2}.

Величина ω называется **собственной частотой** осциллятора. Таким образом, собственная частота пружинного маятника определяется по формуле:

$$\boldsymbol{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}, \tag{5.19}$$

которая получается из (5.7), а если ввести (5.19) в (5.13), то для периода пружинного маятника получим:

$$\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}. \tag{5.20}$$

Период колебаний тем меньше, чем больше коэффициент упругости (жесткость) пружины, и тем больше, чем больше масса подвешенного тела. Пружина с большей жесткостью сообщает телу большее ускорение, его скорость изменяется быстрее; чем больше масса тела, тем медленнее изменяется скорость.

Собственная частота математического маятника определяется из выражения (5.11):

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \tag{5.21}$$

а период колебаний равен:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{5.22}$$

Период колебаний пружинного и математического маятников не зависит от амплитуды. Для математического маятника этот факт впервые был обнаружен в 1583 году Галилео Галилеем на основе наблюдений за движением канделябра кафедрального собора в Пизе. Опираясь на это открытие, Галилей предложил использовать осцилляторы для измерения промежутков времени и высказал идею конструкции первых часов, которые позднее были изготовлены его учеником, Винченцо Вивиани (1622–1703). Однако современная конструкция часов с маятником была осуществлена Кристианом Гюйгенсом в 1673 году, когда он впервые получил формулу для периода колебаний математического маятника (5.22) и проверил ее экспериментально.

ж. Энергия линейного гармонического осциллятора

Проанализируем колебательное движение с энергетической точки зрения. Осциллятор, выведенный из положения равновесия, обладает потенциальной энергией:

$$E_p = \frac{kx^2}{2}, \tag{5.23}$$

где x – это смещение (началом отсчета которого является положение равновесия), а k – жесткость пружины для пружинного маятника или коэффициент пропорциональности в выражении для квазиупругой возвращающей силы для других гармонических осцилляторов. Например, для математического маятника длиной l, отклонившегося на высоту h относительно положения равновесия, потенциальная энергия, равная $E_p = mgh$, при малых колебаниях (угол отклонения φ мал) принимает вид (5.23), где $k = mg/l$ (это следует из (5.9)).

В первоначальном состоянии, когда $x = A$, колебательная система обладает только потенциальной энергией:

$$E = E_{p,\,\max} = \frac{kA^2}{2}. \tag{5.24}$$

Следовательно, **полная энергия пропорциональна квадрату амплитуды колебаний**.

При движении осциллятора к положению равновесия смещение уменьшается, а скорость возрастает. Это означает, что потенциальная энергия осциллятора уменьшается, но одновременно он обладает кинетической энергией

$$E_k = \frac{mv_x^2}{2}, \tag{5.25}$$

которая увеличивается благодаря возрастанию скорости. Когда осциллятор достигает положения равновесия, где $x = 0$, а скорость максимальна, его потенциальная энергия становится равной нулю и кинетическая энергия совпадает с полной энергией

$$E_{k,\,\max} = \frac{mv_{x,\,\max}^2}{2} = \frac{kA^2}{2} = E.$$

Из этого выражения следует, что максимальная скорость осциллятора зависит от его амплитуды и имеет значение

$$\upsilon_{x,\max} = \sqrt{\frac{k}{m}}A = \omega A. \tag{5.26}$$

Таким образом, за четверть периода происходит полное превращение потенциальной энергии в кинетическую. Очевидно, что благодаря периодичности колебательного движения, за один период потенциальная энергия превратится в кинетическую и обратно четыре раза.

В промежуточном состоянии, между положением равновесия и максимальным отклонением от него, осциллятор обладает как потенциальной энергией, так и кинетической. Полная механическая энергия в этом состоянии определяется формулой:

$$E = \frac{kA^2}{2} = \frac{m\upsilon_{x,\max}^2}{2} = \frac{kx^2}{2} + \frac{m\upsilon_x^2}{2}, \tag{5.27}$$

которая выражает закон сохранения механической энергии изучаемого осциллятора.

На *рисунке 5.11* представлена зависимость потенциальной энергии (5.23) от смещения от положения равновесия. Горизонтальная линия соответствует значению полной энергии осциллятора, а расстояние от нее до кривой потенциальной энергии равно кинетической энергии, которая становится равной нулю в экстремальных точках $x = \pm A$. Видно, что в положении равновесия ($x = 0$) потенциальная энергия минимальна. Поскольку форма этой зависимости похожа на яму, то говорят что осциллятор в состоянии равновесия находится на дне **потенциальной ямы**. Если вывести осциллятор из этого состояния и освободить, то он стремится возвращаться к положению равновесия и начинает колебательное движение.

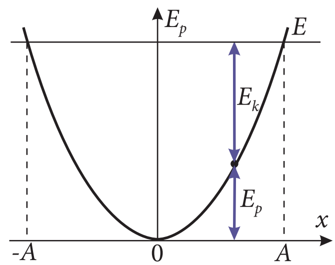


Рис. 5.11

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Линейный гармонический осциллятор совершает колебания согласно закону:

$$x = 0{,}02 \sin\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) \text{(м)}.$$

Определите амплитуду, период и начальную фазу колебаний. Чему равно начальное смещение осциллятора?

РЕШЕНИЕ

Дано:

$x = 0{,}02 \sin\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right)$ (м)

A – ? T – ? φ_0 – ? x_0 – ?

Из сравнения заданного закона движения со стандартной формой его записи (5.15, *а*) следует:

$$A = 0{,}02 \text{ м}; \ \varphi_0 = (\pi/6) \text{ рад} = 30^\circ; \ \omega = (\pi/3) \text{ с}^{-1}.$$

Период колебаний равен $T = 2\pi/\omega = 6$ с. Начальное смещение осциллятора определяется из закона движения для момента $t = 0$. Получаем $x_0 = 0{,}02 \sin(\pi/6) = 0{,}01$ м.

2. Небольшое тело массой 0,5 кг подвешено к пружине, удлинение которой в состоянии равновесия равно 0,025 м. Тело выведено из этого состояния в вертикальном направлении так, что пружина удлинилась еще на 0,01 м, и предоставлено самому себе. Считая ускорение свободного падения равным 10 м/с^2 и пренебрегая силами сопротивления, определите:

а) период, частоту и циклическую частоту колебаний;

б) максимальные значения скорости и силы, действующей на тело;

в) закон колебательного движения;

г) время, за которое тело пройдет расстояние от $A/2$ до $\sqrt{3}A/2$, где A – амплитуда колебаний;

д) кинетическую, потенциальную и полную энергии тела в момент его смещения из положения равновесия, равного $x = \pm A/2$.

РЕШЕНИЕ

Дано:
$m = 0{,}5$ кг
$x_0 = 0{,}025$ м
$A = 0{,}01$ м
$g = 10$ м/с^2

а) T – ? ν – ? ω – ?;
б) v_m – ? F_m – ?;
в) $x(t)$; *г)* Δt – ?;
д) $E_к$ – ? E_p – ? E – ?

а) Для определения периода пружинного маятника используем формулу (5.20). Коэффициент упругости (жесткость) найдем из условия, что удлинение пружины в положении равновесия равно x_0, то есть $G = kx_0$. Следовательно, $k = G/x_0 = mg/x_0$, а период равен:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{x_0}{g}} = 0{,}314 \text{ с}.$$

Используя выражения (5.2) и (5.13) для частоты и циклической частоты, получим соответственно.

$$\nu \approx 3{,}85 \text{ Гц} \quad \text{и} \quad \omega = 20 \text{ с}^{-1}.$$

б) Максимальное значение скорости вычислим по формуле (5.26), в которой ω – это собственная частота (циклическая частота), вычисленная ранее. Сила, действующая на тело, максимальна при максимальном отклонении, равном амплитуде. Таким образом:

$$F_m = kA = mgA/x_0.$$

Подставив численные значения, получим:

$$v_m = \omega A = 0{,}2 \text{ м/с}; \; F_m = 2 \text{ Н}.$$

в) Из условий задачи видно, что колебательное движение начинается из положения максимального отклонения вниз, поэтому начальная фаза φ_0 равна нулю. Если ось $0x$ направлена, как показано на *рисунке 5.12*, то в момент $t = 0$ смещение $x = A$. Следовательно, из двух форм закона движения (5.15) нужно выбрать (5.15, *б*), которое удовлетворяет начальным условиям. При постановке числовых данных получаем:

$$x(t) = 0{,}01\cos 20t \text{ (м)} .$$

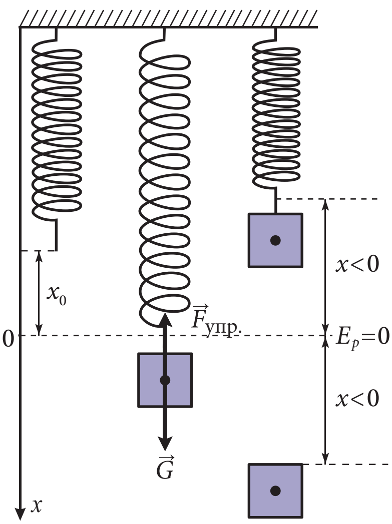


Рис. 5.12

г) В момент времени t_1 смещение равно $x = A/2$ и из (5.15, *б*) получаем $\cos\omega t_1 = 1/2$, откуда

$$\omega t_1 = \pm \arccos(1/2) + 2n\pi = \pm\pi/3 + 2n\pi.$$

Аналогично для момента времени t_2: $\omega t_2 = \pm\pi/6 + 2n\pi$, $n \in Z$, следовательно $\omega\Delta t = \pm\pi/6$. Из двух решений физический смысл имеет только положительное. Таким образом, $\Delta t = \pi/(6\omega) \approx 0{,}026$ с.

д) Полная энергия осциллятора пропорциональна квадрату амплитуды и не зависит от его положения. Таким образом, $E = kA^2/2 = mgA^2/(2x_0) = 10$ мДж. В положении, соответствующем смещению $x = \pm A/2$, потенциальная энергия $E_p = kx^2/2 = kA^2/8 = E/4 = 2{,}5$ мДж, а кинетическая: $E_k = E - E_p = 3E/4 = 7{,}5$ мДж.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Опишите модель линейного гармонического осциллятора. Каковы его особенности? Приведите примеры.
2. Что называется пружинным маятником? Математическим?
3. Что является возвращающей силой в случае математического маятника?
4. Что такое осциллограмма? Опишите способ получения самой простой осциллограммы.
5. Как связаны равномерное вращательное движение тела по окружности и колебательное движение?
6. Что называется циклической частотой и как она выражается через период и частоту?
7. Какие величины являются мгновенными характеристиками гармонических колебаний?
8. По какому закону происходит гармоническое колебание? Объясните смысл величин, входящих в это уравнение.
9. Что называется разностью фаз? Когда два колебания происходят в одинаковой фазе, в противофазе? Приведите примеры.
10. Что представляют собой законы скорости и ускорения колебания линейного гармонического осциллятора?
11°. Каким образом можно представить колебание в виде вектора на векторной диаграмме?
12. Как зависят циклическая частота и период гармонических колебаний от параметров колебательной системы?
13. Чему равна полная энергия линейного гармонического осциллятора? В каких положениях кинетическая энергия и потенциальная равны полной энергии?
14. Тело массой 1 кг прикреплено к концу пружины жесткостью 10 Н/м. В момент $t = 0$ тело находится на расстоянии 20 см от положения равновесия. Определите амплитуду, период и начальную фазу совершаемых колебаний. Запишите закон колебательного движения $x(t)$ и представьте его графически.
15. Тело массой m, подвешенное к концу пружины, колеблется с частотой $\nu = 0{,}6$ Гц. Определите массу этого тела, если известно, что после подвешивания еще одного тела массой $m_1 = 500$ г полученная система колеблется с периодом $T_1 = 2{,}5$ с.
16. Чему равна длина математического маятника, совершающего колебания с периодом $T = 1$ с?
17. Расстояние между крайними положениями колебательного движения математического маятника равно 8 см. Определите период колебаний маятника, если его скорость в момент прохождения через положение равновесия равна 16 см/с.
18. Оса массой 0,6 г попала в сеть паука. Определите коэффициент упругости паутины, если она колеблется с частотой $\sqrt{10}$ Гц . Чему будет равна частота колебаний паутины, если в нее попадет муха массой 0,15 г?

5.3° СЛОЖЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ ОДНОГО НАПРАВЛЕНИЯ

В практике часто встречаются случаи, когда тело подвержено действию нескольких сил одновременно, которые действуя по отдельности, возбуждали бы колебательное движение. В подобных ситуациях результирующее колебательное движение тела будет гораздо более сложным и, как правило, негармоническим. Ниже мы проанализируем более простую ситуацию, когда справедлив **принцип суперпозиции (наложения) малых колебаний**, являющийся следствием принципа суперпозиции сил (см. п. 2.2, *е*).

Смещение колебания тела, участвующего одновременно в нескольких колебательных движениях, равно алгебраической сумме смещений складываемых колебаний.

Рассмотрим частный случай, когда колебательные движения происходят в одном направлении, то есть параллельны, а циклические частоты равны. Пусть два колебания задаются уравнениями:

$$\begin{gathered} x_1 = A_1 \cos (\omega t + \varphi_{01}), \\ x_2 = A_2 \cos (\omega t + \varphi_{02}), \end{gathered} \tag{5.28}$$

где x_1, x_2, A_1, A_2 и φ_{01}, φ_{02} – это, соответственно, смещения, амплитуды и начальные фазы колебаний. Если тело одновременно участвует в этих двух колебательных движениях (5.28), то согласно принципу суперпозиции малых колебаний, результирующее смещение равно:

$$x = x_1 + x_2 = A\cos (\omega t + \varphi), \tag{5.29}$$

где A и φ – это амплитуда и начальная фаза результирующего колебания, которые нужно определить. Для этого используем представление колебаний с помощью векторных диаграмм. В плоскости xOy из общего начала O строим векторы $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$, модули которых равны A_1 и A_2, а направления составляют с осью Ox углы φ_{01} и φ_{02} (*рис. 5.13*). Тогда сложение этих двух колебаний сводится к сложению векторов $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$, которое осуществляется по правилу параллелограмма (см. п. 1.4, *а*). Диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ – это вектор суммы $\vec{A}$, который описывает результирующее колебание, а угол φ между вектором $\vec{A}$ и осью Ox – его начальная фаза (*рис. 5.13*). Очевидно, угол между векторами $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ не изменяется с течением времени, поскольку их угловые скорости одинаковы.

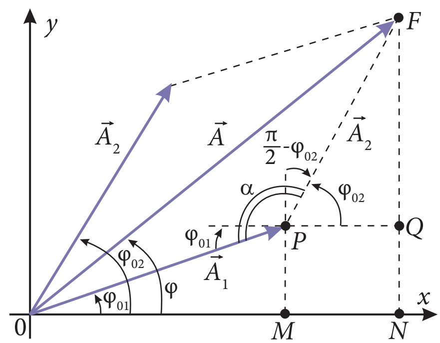


Рис. 5.13

Амплитуду результирующего колебания находим по теореме косинусов из треугольника OFP. Согласно этой теореме, $A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos \alpha$. Из *рисунка 5.13* видно, что $\alpha = \pi - (\varphi_{02} - \varphi_{01})$, а используя формулы приведения, получим $\cos[\pi - (\varphi_{02} - \varphi_{01})] = -\cos(\varphi_{02} - \varphi_{01})$. Таким образом,

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos (\varphi_{02} - \varphi_{01}). \tag{5.30}$$

Начальную фазу результирующего колебания находим из прямоугольного треугольника ONF: $\operatorname{tg} \varphi = NF/ON = (NQ + QF)/(OM + MN)$. Из ΔOMP и ΔPQF имеем $OM = A_1 \cos \varphi_{01}$, $NQ \equiv MP = A_1 \sin \varphi_{01}$, $MN \equiv PQ = A_2 \cos \varphi_{02}$, $QF = A_2 \sin \varphi_{02}$.

Таким образом

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_{01} + A_2 \sin \varphi_{02}}{A_1 \cos \varphi_{01} + A_2 \cos \varphi_{02}}. \tag{5.31}$$

Отметим, что вектор $\vec{A}$, представляющий результирующее колебание, вращается с той же угловой скоростью ω, что и векторы $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ складываемых колебаний. Амплитуда результирующего колебания в любой момент времени зависит от угла между векторами $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$, который равен разности $\Delta\varphi$ между ними:

$$\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_{02}) - (\omega t + \varphi_{01}) = \varphi_{02} - \varphi_{01}.$$

Если складываемые колебания согласованы по фазе (синфазны), то $\Delta\varphi = 2k\pi$, где $k \in N$ и $\cos(\pm 2k\pi) = \cos(2k\pi) = 1$, и из (5.30) следует, что амплитуда результирующего колебания $A = A_1 + A_2$ максимальна. Если же колебания происходят в противофазе ($\Delta\varphi = \pm(2k+1)\pi$, $\cos[\pm(2k+1)\pi] = -1$), амплитуда $A = |A_1 - A_2|$ минимальна.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. В чем состоит принцип суперпозиции малых колебаний?
2. Как строится векторная диаграмма?
3. Как зависит амплитуда результирующего колебания от разности фаз складываемых колебаний?
4. Материальная точка совершает гармоническое колебание в результате сложения двух колебаний одинакового направления, описываемых уравнениями: $x_1 = 5\sin(2\pi t + \pi/3)$ (см) и $x_2 = 3\sin(2\pi t + 2\pi/3)$ (см). Напишите уравнение результирующего колебания.
5. Материальная точка участвует в колебательном движении, получившемся при наложении двух колебаний одинакового направления: $x_1 = \sin 2t$ (см) и $x_2 = 2\cos 2t$ (см). Найдите амплитуду и начальную фазу результирующего колебания.

5.4° ЗАТУХАЮЩИЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ. РЕЗОНАНС

Собственные колебания, изучаемые ранее без учета сил сопротивления, представляют собой идеализацию свободных колебаний. В реальных системах движение всегда происходит в среде, оказывающей определенное сопротивление, и для его преодоления расходуется часть энергии колебательной системы. Поскольку энергия осциллятора прямо пропорциональна квадрату амплитуды колебаний, то вслед за ее убылью уменьшается и амплитуда. Чем больше силы сопротивления, тем больше энергии расходуется на их преодоление, тем быстрее уменьшается амплитуда колебаний до полного их исчезновения. На *рисунке 5.14* представлены две осциллограммы реального осциллятора, например, пружинного маятника, совершающего колебания в воздухе (*а*) и в жидкости (*б*). Видно, что в воздухе, где силы сопротивления малы, существует определенный промежуток времени, в течение которого колебания можно считать приблизительно гармоническими. Однако в ряде случаев в различных колебательных системах силы сопротивления существенны, а устранить их, хотя бы частично, невозможно. В таких ситуациях (*рис. 5.14, б*) амплитуда колебаний уменьшается быстро, то есть энергия осциллятора рассеивается наружу и колебания „гаснут”.

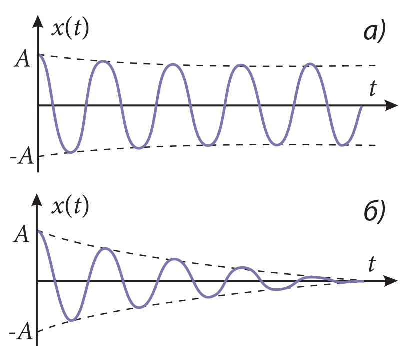


Fig. 5.14

Колебания, амплитуда которых уменьшается со временем, называются *затухающими колебаниями*.

Колебательные системы, изучаемые до сих пор, подвергались действию внешней силы только для выведения их из положения устойчивого равновесия, после чего ее действие прекращалось. В таких случаях амплитуда колебаний непрерывно уменьшается до их затухания, то есть до полного рассеяния сообщенной первоначально энергии. Однако на практике зачастую внешняя сила действует периодически, постоянно питая колебательную систему энергией для поддержания неизменных значений амплитуды колебаний.

Колебания, происходящие в системе благодаря действию внешней периодической силы, называются *вынужденными колебаниями*.

Экспериментально установлено, что амплитуда вынужденных колебаний тем больше, чем ближе частота внешней силы к собственной частоте системы.

Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты внешней силы, действующей на колебательную систему, к ее собственной частоте, *называется резонансом*.

Это явление проще объяснить, анализируя передачу энергии извне колебательной системе.

Очевидно, резонанс будет наблюдаться, если существуют благоприятные условия передачи этой энергии, то есть в том случае, когда внешняя периодическая сила совершает положительную работу на протяжении всего периода движения. Однако это возможно только, если внешняя сила действует синфазно с собственными колебаниями системы, что происходит, когда частота Ω внешней силы равна собственной частоте ω осциллятора. Проекция силы сопротивления и скорость осциллятора всегда имеют противоположный знак. Поэтому при резонансе колебания силы сопротивления находятся в противофазе с колебаниями внешней силы, следовательно, механическая работа, совершаемая каждой из них, взаимно компенсируется. В результате, колебания ускоряются только за счет квазиупругой силы системы и происходят с собственной частотой, совпадающей с частотой внешней силы. Если $\Omega \neq \omega$, то на некоторых участках движения внешняя сила будет совершать отрицательную работу, поэтому амплитуда вынужденных колебаний уменьшается.

На *рисунке 5.15* представлена зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты внешней силы для разных значений некоторого коэффициента β, называемого коэффициентом затухания, характеризующего силы сопротивления колебательной системы. Поскольку возрастание сил сопротивления ведет к увеличению механической работы внешней силы, необходимой для их преодоления, резонансная амплитуда уменьшается.

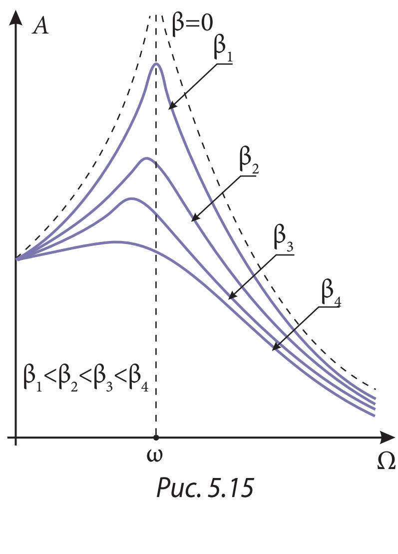


Рис. 5.15

Одновременно и резонансная частота становится немного меньше собственной частоты колебательной системы.

Так как любое твердое тело обладает упругими свойствами, то есть представляет собой колебательную систему с определенной собственной частотой, то резонанс может проявляться в самых необычных ситуациях. Часто из-за резонанса могут разваливаться различные конструкции, разрушаться механизмы или их составные части. С целью устранения негативных эффектов, связанных с резонансом, предпринимаются специальные меры для предотвращения или уменьшения влияния резонанса. Для этого, во избежание совпадения с частотой внешней силы, варьируется собственная частота системы или увеличиваются силы трения в системе, что уменьшает резонансную амплитуду.

Резонанс широко применяется в разных областях науки и техники, особенно электромагнитных колебаний, которые будут изучаться в XII классе. Это явление лежит в основе принципа действия различных электронных и радиотехнических приборов и устройств.

ВОПРОСЫ

1. Какие колебания называются затухающими?
2. Как объясняется уменьшение амплитуды колебаний с энергетической точки зрения?
3. Какие колебания называются вынужденными?
4. Что называется резонансом?
5. Как объясняется резонанс, исходя из передачи энергии колебательной системе извне?
6. Как сказывается увеличение сил сопротивления на явлении резонанса?
7. Что следует предпринять, чтобы избежать резонанса, когда он наносит ущерб?

5.5 РАСПРОСТРАНЕНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ. ПОПЕРЕЧНЫЕ И ПРОДОЛЬНЫЕ ВОЛНЫ

В любой твердой, жидкой или газообразной среде в состоянии равновесия атомы и молекулы вещества расположены определенным образом в зависимости от взаимодействия между ними. Действие извне на одну из точек этой среды передается от одной молекулы к другой посредством межмолекулярных сил, вызывая определенную деформацию этой среды. Если внешняя сила мала, то деформация будет упругой, то есть молекулы будут возвращаться в состояние равновесия под действием сил упругости. В этом случае атомы и молекулы можно считать линейными гармоническими осцилляторами, связанными упругими силами. Эта модель вещества называется **упругой средой**, а внешнее действие на нее, при котором один из осцилляторов выводится из положения равновесия – **возмущением**. На *рис. 5.16* представлена модель одномерной упругой твердой среды, в которой шариками изображены молекулы среды, а силы упругости пружинок заменяют межмолекулярные силы, действующие между ними.

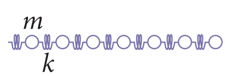


Рис. 5.16

Распространение возмущений в упругой среде называется *упругой* или *механической волной*.

Далее мы проанализируем действие гармонических возмущений (синусоидальных колебаний) на упругие среды, распространение которых представляет собой волны, тоже гармонические. В зависимости от направления, в котором происходит возмущение относительно направления его распространения, различают **поперечные** и **продольные волны**.

Волна, в которой возмущение среды происходит перпендикулярно направлению ее распространения, называется *поперечной волной.*

Рассмотрим натянутую струну, на одном конце которой создано возмущение, перпендикулярно ее длине. Если возмущение является колебательным движением конца струны с периодом T, то вдоль нее наблюдается перемещение первоначального колебания таким образом, что каждая часть струны совершает одно и то же колебательное движение с запозданием относительно предыдущей части. Процесс распространения поперечных волн легко объясняется с помощью модели на *рисунке 5.16*. В самом деле, если первый шар смещен перпендикулярно вверх на какое-то расстояние от положения равновесия, то он посредством упругих сил вовлечет соседний шар в такое же движение, но на меньшее расстояние, поскольку удерживается следующим. Второй шар, в свою очередь, вовлекает третий в поперечное движение на еще меньшее расстояние от положения равновесия, процесс продолжается до тех пор, пока упругая сила уже не будет в состоянии сместить следующий шар. Через четверть периода первый шар начнет движение к положению равновесия, а второй по инерции продолжит движение от него, пока не достигнет максимального смещения, после чего начнет движение в противоположном направлении. Очевидно, так же ведут себя и другие шары.

Если первоначальное возмущение поддерживается, то есть первый шар совершает колебательное движение с периодом T, то процесс вовлечения в движение следующих шаров продолжится, как показано на *рисунке 5.17*.

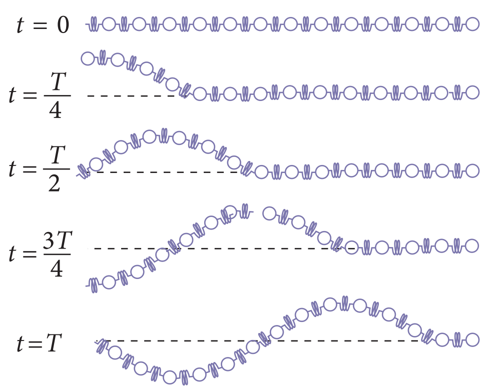


Рис. 5.17

Поперечные упругие волны распространяются только в твердых средах. Это обусловлено фиксированным положением частиц в кристаллической решетке и наличием упругих сил между ее слоями. В жидкостях и газах из-за их структуры не могут появиться силы, которые восстанавливали бы поперечное смещение частиц. Поэтому в жидких и газообразных средах распространяется другой вид волн – продольные упругие волны.

Волна, в которой возмущение среды происходит параллельно направлению ее распространения, называется *продольной волной.*

Продольная волна распространяется и в твердых средах. Это хорошо видно на длинной пружине с эквидистантными витками, в которой ударом создано возмущение вдоль нее. В результате сжатия образуется сгущение витков, которое распространяется вдоль пружины. Процесс распространения продольной волны объясняется с помощью той же модели на *рисунке 5.16*. Если продольное возмущение первого шара является гармоническим колебанием с периодом T, то на протяжении четверти периода первый шар максимально смещается вправо, вовлекая в движение в том же направлении другие шары, образуя таким образом их сгущение. Чем больше возмущение, тем больше шаров будет вовлечено в движение одновременно. В следующую четверть периода, когда первый шар начнет движение влево, следующий по инерции продолжает движение вправо, пока не отклонится максимально, после чего и он изменит направление движения. Из-за этого запаздывания изменения направления движения образуется разрежение шаров, но одновременно сгущение, образованное в первую четверть периода, передается следующим шарам. Таким образом, распространение продольной волны представляет собой „перемещение" сгущения, а за ним разрежения частиц через твердую среду, как изображено на *рисунке 5.18*.

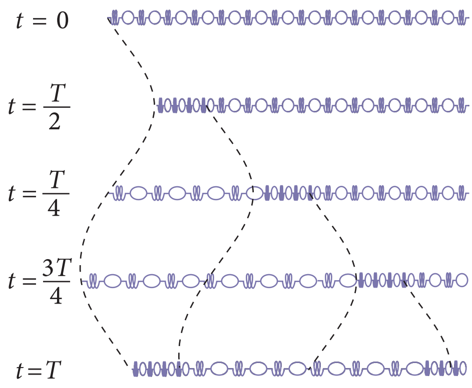


Рис. 5.18


Рис. 5.19

Процесс распространения упругой продольной волны в газе показан на *рисунке 5.19*. При резком движении поршня в цилиндре изменяется составляющая скорости молекул газа, направленная вдоль цилиндра. Считаем массы молекул примерно одинаковыми, а соударения – центральными и абсолютно упругими (модель идеального газа). В результате взаимодействий молекулы с большими относительными скоростями резко тормозятся из-за передачи своего импульса молекулам, с которыми соударяются, последние при этом увеличивают свою относительную скорость. Таким образом, появляется область сжатого газа, а за ним разреженного, которые перемещаются вдоль цилиндра.

Из проведенного выше анализа механизма распространения упругих волн следует, что они представляют собой передачу колебательного движения от одних частиц рассматриваемой среды другим. Поскольку колебательное движение характеризуется энергией, пропорциональной квадрату амплитуды колебаний, то одновременно с передачей колебательного движения передается и эта энергия. Таким образом, волна является носителем энергии, но следует особо подчеркнуть, что она переносится из одной области среды в другую без переноса вещества. Это очень важное свойство волн независимо от их природы.

Волны можно классифицировать также по числу пространственных координат, относительно которых они распространяются. Волны, распространяющиеся вдоль струн и пружин, являются **одномерными** или **линейными** волнами, те, которые распространяются по поверхности раздела двух сред – **двумерными** или **поверхностными**. Звуковые волны или световые, которые распространяются радиально от точечного источника, – это **трехмерные** или **пространственные** волны. Необходимо отметить, что процесс распространения поверхностных и пространственных волн гораздо более сложен, чем рассмотренный выше.

Анализ процесса распространения упругих волн позволяет сформулировать следующие важные выводы:

для возбуждения и поддержания упругой волны необходимо наличие источника колебаний и упругой среды;

для распространения возмущения от источника до какой-либо точки среды необходим определенный промежуток времени, то есть волна распространяется с конечной скоростью;

при распространении какой-либо волны энергия, полученная при возбуждении возмущения, передается от одной точки к другой без переноса вещества.

ВОПРОСЫ

1. Что представляет собой модель, называемая упругой средой?
2. Что называется упругой волной? Как классифицируются волны в зависимости от направления колебаний относительно направления их распространения?
3. Какие волны называются поперечными? Приведите примеры.
4. Объясните процесс распространения поперечных волн.
5. Что называется продольной волной? Приведите примеры.
6. Объясните процесс распространения продольных волн.
7. В какой среде могут распространяться поперечные волны? Продольные?
8. Как классифицируются волны по числу измерений, по которым они распространяются?
9. Почему в процессе распространения волн передача энергии происходит без переноса вещества?

5.6 ХАРАКТЕРИСТИКИ ВОЛНОВЫХ ДВИЖЕНИЙ. СКОРОСТЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН

Рассмотрим источник колебаний, от которого берет начало и распространяется волна.

Как известно, колебания характеризуются определенной фазой, зависящей от времени, которая передается посредством волны другим точкам пространства. Следовательно, в разные промежутки времени точки пространства, вовлеченные в колебательное движение, имеют разные фазы. Однако все точки, до которых распространилась волна к данному моменту времени, имеют одинаковую фазу.

Геометрическое место точек, до которых доходит волна в данный момент времени, называется *волновым фронтом*.

Линия, перпендикулярная волновому фронту, называется *лучом*, он совпадает с направлением распространения волны.

Все точки, расположенные на волновом фронте, начинают колебаться одновременно. Фронт волны делит пространство на две зоны: зону, уже вовлеченную в колебательное движение, и ту, в которой колебательный процесс еще не происходит.

Анализ процесса распространения волн приводит к выводу, что помимо точек на волновом фронте есть еще и другие, колеблющиеся в одинаковой фазе.

Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется *волновой поверхностью*.

Из изложенного выше следует, что волновой фронт также является волновой поверхностью, однако, самой удаленной от источника колебаний. Волновых поверхностей **существует бесконечное множество, но только один волновой фронт в каждый момент времени**.

Форма волновой поверхности зависит от формы источника колебаний и свойств среды, в которой распространяются волны. В частном случае однородного и изотропного пространства волновые поверхности, а значит, и волновой фронт, имеют сферическую форму, если источник колебаний точечный или сферический, и форму плоскости, если источник колебаний является плоской поверхностью (*рис. 5.20, а*). В таких случаях говорят, что распространяется **сферическая** и, соответственно, **плоская волна**. Если рассматривается волновой фронт на расстоянии, достаточно большом от источника, то независимо от формы источника, в изотропной среде его форма будет приблизительно плоской. Как видно из *рисунка 5.20, б*, на больших расстояниях от источника колебаний, в ограниченной области пространства сферическую волну можно считать плоской.

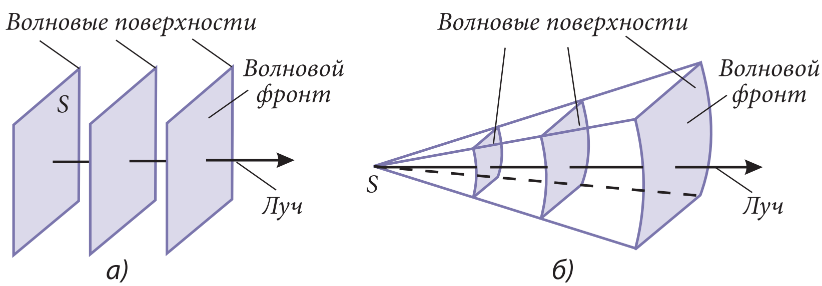


Рис. 5.20

Так как волновое движение порождается колебательным, то очевидно, что для количественного описания волны пригодны все физические величины, использованные при изучении колебаний: амплитуда, частота, циклическая частота, период, фаза, начальная фаза. Если источник колебаний имеет постоянную с течением времени частоту, то независимо от свойств упругой среды, все точки волновых поверхностей будут иметь ту же частоту, а значит, ту же циклическую частоту и период. Поэтому могут быть использованы понятия частоты, циклической частоты и периода волны. По иному ведет себя амплитуда колебаний. Для сферической волны она уменьшается по мере удаления от источника колебаний. Чем больше расстояние, пройденное волновым фронтом, тем меньше энергия приходящаяся на одну частицу упругой среды, так как энергия источника распределяется между бóльшим числом частиц среды, охваченных колебательным процессом. Энергия источника уменьшается также из-за сил сопротивления, неизбежных в реальной среде. Имея в виду, что энергия осциллятора пропорциональна квадрату амплитуды, становится ясной причина уменьшения амплитуды.

Кроме отмеченных физических величин, волна характеризуется также величинами, связанными с ее распространением. Таким являются **скорость распространения** и **длина волны**.

Скорость перемещения волнового фронта называется *скоростью распространения волны*. Поскольку фаза всех точек волнового фронта одинакова, то эту скорость *называют фазовой*.

Скорость распространения волны зависит от типа и свойств упругой среды. Можно показать теоретически и проверить экспериментально следующие выражения для скорости распространения одномерных поперечных $\upsilon_{\perp}$ и продольных $\upsilon_{\parallel}$ волн в твердых средах (струнах, стержнях и т.д.):

$$\upsilon_{\perp} = \sqrt{\frac{F_{\text{н}}}{\mu}} \text{ и } \upsilon_{\parallel} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \tag{5.32}$$

где $F_{\text{н}}$ – сила натяжения струны; μ – масса единицы ее длины (линейная плотность); E – модуль упругости (модуль Юнга), а ρ – объемная плотность упругой среды.

Из анализа процесса распространения волн следует, что первоначальное возмущение в форме колебания с периодом T перемещается в упругой среде с определенной пространственной периодичностью. Через каждый промежуток времени, равный периоду, точки среды, расположенные на двух последовательных волновых поверхностях колеблются синфазно, то есть с разностью фаз 2π рад. Если скорость распространения волны постоянна, через каждый промежуток времени T волновой фронт проходит одно и то же расстояние:

$$\lambda = \upsilon T. \tag{5.33, а}$$

Минимальное расстояние λ между двумя волновыми поверхностями, точки которых колеблются в одинаковой фазе (синфазно), называется *длиной волны*.

Если выразить период через частоту, то для длины волны получим:

$$\lambda = \frac{\upsilon}{\nu}. \tag{5.33, б}$$

Таким образом, длина волны зависит от источника колебаний через период или частоту и от среды, в которой распространяется, через скорость.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Что называется волновым фронтом и что он разграничивает в пространстве?
2. Что называется волновой поверхностью и чем она отличается от волнового фронта?
3. Как можно установить, какая волна (плоская или сферическая) распространяется, если известны форма источника колебаний и свойства среды? Когда сферическая волна может считаться приблизительно плоской?
4. Какие физические величины используются для количественного описания волн?
5. Что называется фазовой скоростью и что она собой представляет?
6. От каких параметров зависит скорость распространения волн?
7. Что называется длиной волны и как она связана со скоростью распространения и периодом или частотой колебаний источника?

8. Вычислите скорость распространения продольных волн в меди. Модуль упругости и плотность меди равны, соответственно, 120 ГПа и 8 900 кг/м^3.

9. Чему должна быть равна сила натяжения латунной струны диаметром 2 мм, чтобы поперечная волна распространялась вдоль нее со скоростью 100 м/с? Плотность латуни равна 8 500 кг/м^3.

10. Расстояние между двумя соседними гребнями волн на озере равно 70 см. С какой скоростью распространяется волна по поверхности воды, если период колебаний поплавка на этой поверхности равен 1 с?

5.7° УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ

Установим зависимость смещения y частиц однородной среды, не поглощающей энергию и участвующей в волновом процессе, от расстояния x до источника колебаний в любой момент времени t. Для этого рассмотрим источник гармонических колебаний, находящийся в точке O, от которого в направлении Ox распространяется плоская вона. В начальный момент времени точка с координатой $x = 0$ колеблется по закону (5.15, *а*), в котором для простоты начальная фаза $\varphi_0 = 0$ [отметим, что в отличие от (5.15, *а*), здесь смещение обозначено буквой y]:

$$y_0 = A\sin \omega t. \quad (5.34)$$

Все частицы среды также будут вовлечены в гармоническое (синусоидальное) колебательное движение с той же циклической частотой и амплитудой A, но с разными фазами. Таким образом, в данном случае плоская волна имеет вид синусоидальной функции, представленной на *рисунке 5.21*.

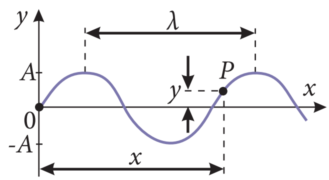


Рис. 5.21

Рассмотрим колебание частицы P, находящейся на расстоянии x от источника O. Если частица, расположенная в O (источник колебаний), колеблется время t секунд, то частица P находится в этом состоянии $(t - \Delta t)$ секунд, где Δt – это время, через которое частица P вовлекается в колебательное движение, то есть время, за которое волна проходит расстояние x (*рис. 5.21*). Смещение точки P задается уравнением (5.34), но с другой фазой:

$$y_p = A\sin \omega(t - \Delta t).$$

Так как среда, в которой распространяется волна, однородна и не поглощает энергию, то скорость ее остается постоянной и $\Delta t = x/v$.

Таким образом, получаем

$$y = A\sin \omega\left(t - \frac{x}{v}\right). \quad (5.35,\ а)$$

Принимая во внимание, что $\omega = 2\pi/T$ и $\lambda = vT$ уравнение (5.35, *а*) может быть записано в виде

$$y = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right). \quad (5.35,\ б)$$

Уравнения (5.35, *а*) и (5.35, *б*) описывают процесс распространения плоской волны и называются **уравнением плоской волны** или **уравнением бегущей волны**.

Часто это уравнение записывается в более простой форме:

ГЛАВА V

$$y = A\sin(\omega t - kx), \qquad (5.35, в)$$

где

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad (5.36)$$

называется **волновым числом**; оно показывает, сколько раз длина волны λ укладывается на расстоянии (2π) метров.

Выражение

$$\varphi = \omega t - kx \qquad (5.37)$$

или соответствующие ему из (5.35, *а*) и (5.35, *б*) представляют собой фазу плоской волны. Она описывает состояние колебаний любой частицы среды в любой момент времени.

Из уравнения плоской волны видно, что волновое движение периодично как во времени, так и в пространстве. В самом деле, для данной точки среды (x фиксировано) через время $\Delta t = mT$ (m – целое число) аргумент функции (5.35, *б*) изменяется на $2\pi m$: $2\pi\left(\frac{t+mT}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + 2\pi m$, однако функция остается той же. Значит, через **промежутки времени, равные целому числу периодов, некоторая точка среды будет колебаться синфазно с источником**. В заданный момент времени функция (5.35, *б*) одинакова для всех точек, расположенных на расстоянии $\Delta x = m\lambda$, так как и в этом случае аргумент изменяется на $2\pi m$:

$$2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x+m\lambda}{\lambda}\right) = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + 2\pi m.$$

Следовательно, **в произвольный момент времени точки среды, расположенные на расстояниях, кратных длине волны λ, колеблются в одинаковой фазе.**

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Колебания с периодом $T = 1$ с распространяются вдоль прямой со скоростью 40 м/с. На расстоянии 25 м от исходной точки, где на 5 с ранее началось колебательное движение, смещение колебаний равно 2 см. Чему равны смещение и фаза колебаний в тот же момент времени в точке, расположенной на расстоянии 30 м от исходной?

РЕШЕНИЕ

Дано:
$T = 1$ с
$v = 40$ м/с
$t = 5$ с
$x_1 = 25$ м
$x_2 = 30$ м
$y_1 = 0{,}02$ м

y_2 – ? φ_2 – ?

Запишем уравнение плоской волны (5.35, *а*) для двух расстояний:

$$y_1 = A\sin\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x_1}{v}\right) \text{ и } y_2 = A\sin\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x_2}{v}\right).$$

Для определения смещения колебаний в точке, расположенной на расстоянии x_2, необходимо знать амплитуду и фазу волны в этой точке.

$$A = y_1/\sin[(2\pi/T)(t - x_1/v)] = 0{,}02/\sin(35\pi/4) = 0{,}02\sqrt{2} \approx 0{,}03 \text{ м}.$$

Фаза волны на расстоянии x_2 от источника колебаний в момент времени t – это аргумент функции «синус» из уравнения для y_2, то есть

$$\varphi_2 = \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x_2}{v}\right) = \frac{17\pi}{2} \text{ рад}$$

и искомое смещение равно $y_2 = A\sin\varphi_2 = 0{,}03\sin\frac{17\pi}{2} = 0{,}03$ м.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Какой вид имеет уравнение плоской волны и связь каких параметров оно устанавливает?
2. Что называется волновым числом и что оно показывает?
3. Как проявляется временная и пространственная периодичность волнового движения?
4. Две точки, расположенные в направлении распространения плоской волны, находятся на расстояниях 5 м и 10 м от источника колебаний. Чему равна разность фаз колебаний в этих точках, если период колебаний равен 0,05 с, а скорость их распространения 200 м/с?
5. Материальная точка совершает гармонические колебания по закону $y_0 = \sin 40\pi t$ (см). Запишите уравнение плоской волны, распространяющейся от источника колебаний со скоростью 240 м/с. Определите фазу и смещение колебаний в точке, находящейся на расстоянии $x_1 = 5$ м от источника колебаний, в момент времени $t = 0{,}2$ с.
6. От источника колебаний с амплитудой 4 см и циклической частотой $(0{,}5\pi)$ $с^{-1}$ распространяется волна, которая в момент времени $t = 1$ с вовлекает в колебательное движение точку, находящуюся на расстоянии $x = 10$ м от него. Определите волновое число, если смещение этой точки равно 2 см.

5.8 ПРИНЦИП ГЮЙГЕНСА

Форма волнового фронта в любой момент времени совпадает с формой источника колебаний только в однородных средах. Однако зачастую необходимо строить волновой фронт в неоднородных средах (экраны, отверстия, поверхность раздела двух однородных сред и т.д.), в которых происходят качественно новые явления.

Общий метод построения волнового фронта в произвольный момент времени на основе известного в исходный момент был предложен голландским физиком Кристианом Гюйгенсом. Анализируя процесс распространения волн, он пришел к выводу, что каждая точка среды, охваченная колебательным движением, является для соседних точек новым источником колебаний, называемым **источником вторичных волн**. Таким образом, Гюйгенс сформулировал следующий принцип:

Любая точка среды, которой достигла волна в данный момент времени, становится источником вторичных сферических волн, а их огибающая дает положение волнового фронта в какой-либо следующий момент.

Применение этого принципа для построения волнового фронта показано на *рисунке 5.22*. F_0 – волновой фронт в момент времени t_0. Для построения вторичных сферических волн вокруг каждой точки на F_0 проводится сфера радиуса $\Delta r = \upsilon\Delta t$, где υ – скорость распространения волны, а $\Delta t = t - t_0$ представляет собой промежуток времени, за который волновой фронт достигает нового положения.

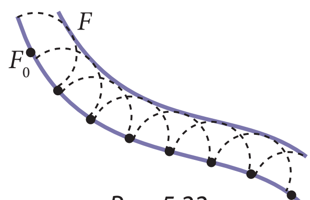


Рис. 5.22

Построив огибающую вторичных волн (общая касательная всех сфер радиуса Δr), получим волновой фронт F (*рис. 5.22*).

ВОПРОСЫ

1. Что представляет собой источник вторичных волн?
2. Сформулируйте принцип Гюйгенса. В чем смысл этого принципа?

3. Объясните, как используется принцип Гюйгенса для построения фронта произвольной волны.

5.9 ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ВОЛН

a. Законы отражения и преломления

Изменение направления распространения волн при падении на поверхность раздела двух сред с различными упругими свойствами составляет суть явлений **отражения** и **преломления.**

Рассмотрим волну, которая распространяется к поверхности раздела двух сред *S*, луч (направление распространения) которой образует угол *i* с нормалью к поверхности *S* (*рис. 5.23*). Эта волна называется **падающей волной** (изображается **падающим лучом**), а угол *i* – **углом падения**.

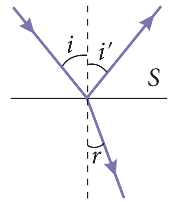


Рис. 5.23

Явление возвращения волн, падающих на поверхность раздела двух сред, в первую среду называется *отражением*.

Волна, образованная при отражении, называется **отраженной волной** (изображается **отраженным лучом**), а угол *i′* между отраженным лучом и нормалью к поверхности *S* – **углом отражения** (*рис. 5.23*).

Явление изменения направления распространения волны при пересечении поверхности раздела двух сред называется *преломлением*.

Волна, проникающая во вторую среду, называется **преломленной волной** (изображается **преломленным лучом**), а угол *r* между этим лучом и нормалью к поверхности ***S*** – **углом преломления** (*рис. 5.23*).

На поверхности раздела двух сред с различными свойствами эти явления происходят одновременно, однако, существуют ситуации, когда одно из них становится преобладающим.

В результате экспериментальных исследований и теоретического изучения отражения и преломления были установлены следующие законы:

Законы отражения

Падающий луч, отраженный луч и перпендикуляр к поверхности в точке падения лежат в одной плоскости.

Угол отражения равен углу падения:

$$\sphericalangle i = \sphericalangle i'. \qquad (5.38)$$

Законы отражения

Падающий луч, преломленный луч и перпендикуляр к поверхности в точке падения лежат в одной плоскости.

Отношение синусов углов падения и преломления постоянно для двух данных упругих сред и равно отношению соответствующих скоростей волн в этих средах:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2}. \qquad (5.39)$$

б°. Изучение отражения и преломления с помощью принципа Гюйгенса

Рассмотрим поверхность S раздела двух различных однородных и изотропных сред 1 и 2, в которых плоская волна распространяется со скоростями v_1 и, соответственно, v_2 (*рис. 5.24*). В определенный момент времени t_1 фронт падающей волны AB достигает положения A_1B', когда его первая точка A_1 находится на поверхности раздела S. С этого момента, за промежуток времени от t_1 до t_2 все точки волнового фронта по очереди достигают поверхности раздела между точками A_1 и B_1.

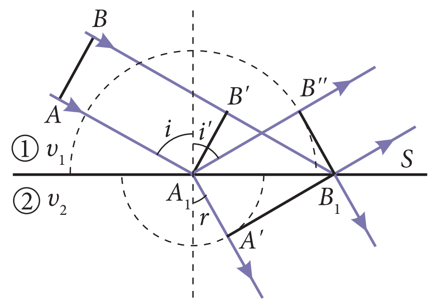


Рис. 5.24

Чтобы прояснить, как влияет эта поверхность раздела на распространение падающей волны, используем принцип Гюйгенса. Итак, точки участка $[A_1B_1]$ являются источниками вторичных сферических волн, которые распространяются в обеих средах, но с разными скоростями. В момент времени t_2, когда последняя точка фронта падающей волны достигает поверхности раздела S, вторичная сферическая волна с центром в точке A_1 представляет собой полусферу радиуса $A_1B'' = v_1\Delta t = B'B_1$ в среде 1 и полусферу радиуса

$$\boldsymbol{A_1A' = v_2\Delta t = B'B_1 \cdot \frac{v_2}{v_1}} \tag{5.40}$$

в среде 2 (*рис. 5.24*). Если из точки B_1 провести касательные к этим полусферам, то B_1B'' – это фронт отраженной волны, а B_1A' – преломленной.

Рассмотрение падающих и отраженных лучей позволяет продемонстрировать законы отражения, а падающих и преломленных – законов преломления. В самом деле, прямоугольные треугольники $A_1B'B_1$ и $A_1B''B_1$ равны, имеют общую гипотенузу A_1B_1 и катеты $A_1B'' = B'B_1 = v_1\Delta t$, следовательно, $\sphericalangle B'A_1B_1 = \sphericalangle B''B_1A_1$. Но $\sphericalangle B'A_1B_1 = \sphericalangle i$, а $\sphericalangle B''B_1A_1 = \sphericalangle i'$ как углы со взаимно перпендикулярными сторонами; таким образом, показана справедливость закона отражения (5.38).

Замечаем, что в $\Delta A_1B'B_1$ и $\Delta A_1A'B_1$, $\sphericalangle B'A_1B_1 = \sphericalangle i$ и $\sphericalangle A_1B_1A' = \sphericalangle r$, как углы со взаимно перпендикулярными сторонами, а $A_1A' = A_1B_1 \sin r$ и $B'B_1 = A_1B_1 \sin i$ (*рис. 5.24*). Введя эти выражения в (5.40), получим закон преломления (5.39).

в°. Поведение фазы отраженных волн

Если скорость распространения волн в одной среде меньше, чем в другой, то говорят, что первая среда **более плотная**, а вторая (в которой скорость распространения больше) – **менее плотная**. Проанализируем поведение отраженной волны в этих двух случаях.

Рассмотрим волну, которая распространяется вдоль натянутой струны, один конец которой прикреплен неподвижно к абсолютно твердой опоре, таким образом, создается ситуация отражения от более плотной среды. В момент, когда возмущение волны («горб» волны вверху) достигает закрепленного конца (*рис. 5.25, а*), струна начинает действовать на опору силой $\vec{F}_c$, направленной вверх, пытаясь поднять ее. Согласно третьему закону Ньютона, опора, в свою очередь, действует на струну силой

$\vec{F}_{оп.}$, равной по модулю $\vec{F}_c$, но направленной вниз. Эта сила генерирует отраженную волну, возмущение которой распространяется обратно вдоль струны, имея противоположное направление («горб» волны внизу). Другими словами, фаза отраженного возмущения изменяется на 180° (π радиан). Следовательно,

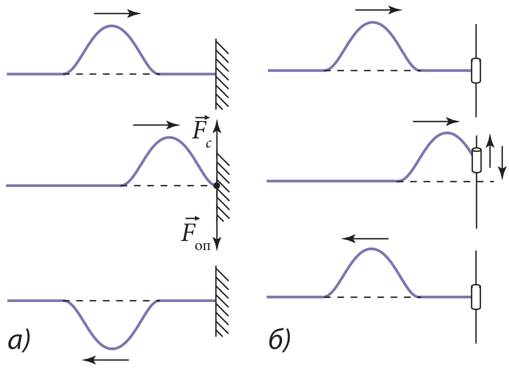


Рис. 5.25

при отражении от более плотной среды отраженная волна сдвинута по фазе на π радиан относительно падающей волны.

Для моделирования менее плотной среды конец струны прикрепляется к ползунку, который может скользить без трения вдоль стержня (*рис. 5.25, б*). В этом случае такое же возмущение («горб» волны вверху), достигнув ползунка, действует на него силой $\vec{F}_c$ и поднимает его без ограничений, сообщая ему колебательное движение. Ползунок, в свою очередь, генерирует отраженную волну, которая начинается с возмущения, имеющего такое же направление («горб» волны вверху), что и падающее. Таким образом,

при отражении от менее плотной среды отраженная волна согласована по фазе с падающей.

ВОПРОСЫ

1. В чем суть явлений отражения и преломления волн?
2. Что называется отражением? Объясните, что называется углами падения и отражения.
3. Что называется преломлением? Что представляет собой угол преломления?
4. Сформулируйте законы отражения. Проиллюстрируйте их, показав ход падающего и отраженного лучей.
5. Каковы законы преломления? Проиллюстрируйте их, показав ход падающего и преломленного лучей.

6°. Получите законы отражения и преломления с помощью принципа Гюйгенса.

7°. Чему равен сдвиг фаз между отраженной и падающей волнами при отражении от более плотной среды? Как появляется этот сдвиг?

8°. Почему при отражении от менее плотной среды падающая и отраженная волны согласованы по фазе?

5.10 ДИФРАКЦИЯ ВОЛН

Явление отражения, изученное в предыдущем параграфе, происходит, если на пути распространения волн существуют препятствия очень больших размеров. Однако часто волны встречают на своем пути препятствия меньших размеров (соизмеримых с длиной волны). Было установлено, что от соотношения между длиной волны и размером встречаемого препятствия в большой степени зависит, каким образом распространяются волны. Например, волны на поверхности озера в тихий день окружают сваю и поплавок удочки рыбака, как будто их и нет, а в то же время лодка оставляет область тени, в которой волны не распространяются. Очевидно, диаметр сваи примерно равен длине волны (расстоянию между двумя гребнями волн), поплавка – много меньше, а размеры лодки много больше длины волны. Таким образом, если размеры препятствия меньше или соизмеримы с длиной волны, то происходит отклонение направления распространения волн от прямолинейного.

Дифракцией **называется явление отклонения от прямолинейности распространения волн при встрече с препятствиями (размеров, соизмеримых с длиной волны) и попадания в область их геометрической тени.**

Дифракцию волн на поверхности воды легко наблюдать с помощью следующего опыта. В ванну с водой помещается перегородка со щелью. Если в левой части возбудить плоскую волну, то в правой части, в зависимости от ширины щели, наблюдаются две картины, схематически показанные на *рисунке 5.26*. Если ширина щели d меньше или порядка длины волны λ, то видно проникновение волн в область геометрической тени (*рис. 5.26, а*), а если $d >> \lambda$, то профиль волны практически не изменяется, искажаясь слегка в области тени (*рис. 5.26, б*).

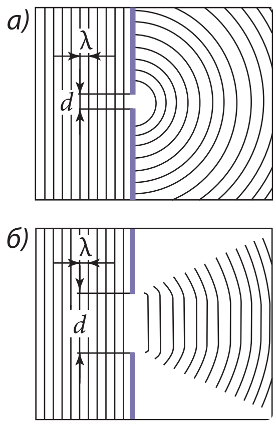


Рис. 5.26

Принцип Гюйгенса позволяет качественно объяснить проникновение волн в область геометрической тени. Согласно этому принципу все точки фронта волны, достигшей плоскости щели, становятся источниками вторичных сферических волн, которые распространяются в области за препятствием (щелью). Из *рисунка 5.26* видно, что волновой фронт проникает в область тени тем больше, чем размеры щели меньше длины волны.

ВОПРОСЫ

1. Что называется дифракцией волн?
2. При каких условиях наблюдается дифракция?
3. Как объясняется дифракция с помощью принципа Гюйгенса?

5.11 ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ВОЛН

а. Качественное изучение интерференции волн

Проанализируем теперь особенности одновременного распространения нескольких волн в одной и той же среде. При этом, очевидно, существуют области среды, в которых волны накладываются. Поскольку волна представляет собой распространение механических колебаний, то в отмеченных областях каждая точка среды вовлекается в это движение возмущениями всех достигших ее волн. Из этого следует, что амплитуда **смещения какой-либо точки среды в данный момент времени равна векторной сумме амплитуд смещений, вызываемых каждой из волн в отдельности.** Более того, опыт показывает, что для не слишком больших смещений, то есть **в случае гармонических волн, они распространяются независимо друг от друга.** Эти утверждения представляют собой **принцип суперпозиции волн**, который, по сути, является следствием **принципа независимости действия сил**, изучаемого в механике (см. п. 2.2, *г*).

Если в упругой среде распространяются волны различной частоты, то колебания точек в области их наложения не будут гармоническими. В каждой точке среды разность фаз колебаний соседних точек различна в разные моменты времени и поэтому амплитуда результирующих колебаний не будет постоянной. Результат наложения волн зависит от соотношения их фаз, частот и амплитуд. Особый практический интерес представляет случай наложения волн одинаковой частоты и постоянной во времени разности фаз.

Источники волн, колебания которых происходят с одинаковой частотой и разностью фаз, постоянной в течение всего колебательного процесса, называются когерентными источниками, а волны, возбуждаемые этими источниками – ***когерентными волнами.***

При наложении когерентных волн получается устойчивая конфигурация точек среды, одни из них колеблются с большими амплитудами, а другие – с малыми.

Явление увеличения или уменьшения амплитуды результирующих колебаний в разных точках среды при наложении когерентных волн называется интерференцией. Область среды, где происходит интерференция, называется полем интерференции, а его вид – ***интерференционной картиной.***

Рассмотрим процесс образования интерференционной картины волн на поверхности воды. Для этого закрепим две иглы на стержне на определенном расстоянии друг от друга. Если мы заставим стержень колебаться с некоторой частотой, то эти иглы, действуя на поверхность воды в ванне, создадут две когерентные волны. На *рисунке 5.27* схематически представлены волновые поверхности через промежутки времени, равные половине периода, и полученная интерференционная картина. Точки S_1 и S_2 соответствуют местам на поверхности воды, где на нее действуют иглы.

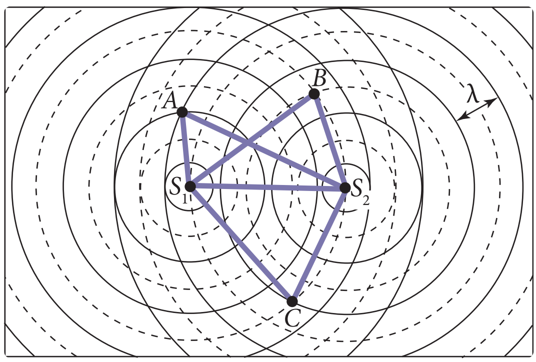


Рис. 5.27

Волновые поверхности, показанные сплошными линиями (окружностями), соответствуют гребням волн, штриховыми – впадинам. Таким образом, в точках *A* и *B*, где встречаются два гребня или, соответственно, две впадины, происходит увеличение амплитуды колебаний, получается более высокий гребень или более глубокая впадина (**максимум интерференции**), а в точке ***C***, где встречаются гребень и впадина, происходит уменьшение амплитуды колебаний (**минимум интерференции**).

Энергия волн пропорциональна квадрату их амплитуды, следовательно, **при интерференции происходит ее перераспределение в пространстве**. Из рисунка видно также, что все точки, в которых встречаются гребни (впадины), колеблются синфазно, а разность пути, пройденного волнами от источников S_1 и S_2 до данной точки, равна целому числу длин волн λ (четному числу полудлин волн). Точки, в которых встречаются гребень со впадиной, колеблются в противофазе, а разность пройденного пути содержит нечетное число полудлин волн. Следовательно,

амплитуда колебаний точек поля интерференции, для которых разность пути равна четному числу полудлин волн, максимальна, а точек, для которых разность пути равна нечетному числу полудлин волн, – минимальна.

Таким образом, условием образования максимума является

$$\Delta x = \pm\, 2m \cdot \frac{\lambda}{2}, \tag{5.41}$$

а минимума –

$$\Delta x = \pm\, (2m + 1) \cdot \frac{\lambda}{2}, \tag{5.42}$$

где m – это целое число, показывающее порядок максимума или минимума. Например, $m = 0$ на интерференционной картине определяет центральный максимум или минимумы 1-го порядка, расположенные симметрично по обе стороны от центрального максимума на расстояниях λ/2 и –λ/2.

б°. Количественное изучение интерференции волн

Рассмотрим когерентные источники S_1 и S_2, от которых распространяются две плоские волы, описываемые уравнениями вида (5.35, *в*)

$$y_1 = A_1 \sin(\omega t - kx_1)$$

и

$$y_2 = A_2 \sin(\omega t - kx_2),$$

где x_1 и x_2 – расстояния от какой-либо точки P поля интерференции до соответствующих источников (*рис. 5.28*), а k – волновое число (5.36).

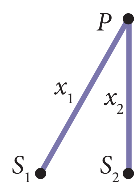


Рис. 5.28

Точка P вовлекается в колебательное движение каждой волной в отдельности и поскольку колебания, достигающие ее, коллинеарны, то движение точки P является результатом сложения этих колебаний. Амплитуда результирующего колебания находится по формуле (5.30):

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\Delta\varphi}, \tag{5.43}$$

где $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \omega t - kx_2 - \omega t + kx_1 = k(x_1 - x_2) = k\Delta x$ – это разность фаз волн, а разность пути Δx называется **разностью хода**. Приняв во внимание (5.36), получаем выражение, связывающее разность фаз и разность хода когерентных волн:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x. \tag{5.44}$$

Как известно, при сложении колебаний амплитуда результирующего колебания максимальна, когда разность фаз равна четному числу π радиан, то есть

$$\Delta\varphi_{max} = \pm 2m \cdot \pi. \qquad (5.45,\ a)$$

и минимальна, когда разность фаз равна нечетному числу π радиан:

$$\Delta\varphi_{min} = \pm(2m + 1) \cdot \pi. \qquad (5.46, a)$$

Очевидно, выражения (5.45, *а*) и (5.46, *а*) являются условиями образования максимума и, соответственно, минимума интерференции, выраженными через разность фаз. Однако, если использовать формулу (5.44), то получим те же условия, но выраженные через разность хода

$$\Delta x_{max} = \pm 2m \cdot \frac{\lambda}{2} \qquad (5.45, б)$$

и, соответственно,

$$\Delta x_{min} = \pm\,(2m + 1) \cdot \frac{\lambda}{2}. \qquad (5.46, б)$$

Замечаем, что эти условия совпадают с результатами (5.41) и (5.42), полученными при качественном анализе изучаемого явления.

В соотношениях (5.45)–(5.46) $m \in N$– это одновременно порядок максимума или минимума интерференции.

Зоны, во всех точках которых результат интерференции одинаков (максимум или минимум), называются **интерференционными полосами**. Таким образом, интерференционная картина представляет собой последовательность **полос максимальной амплитуды** и **полос минимальной амплитуды**.

Итак, условия образования максимумов и минимумов интерференции могут быть сформулированы следующим образом:

> ***Максимумы интерференции* наблюдаются в тех точках поля интерференции, для которых разность хода (разность фаз) равна четному числу полудлин волн (π радиан), а *минимумы интерференции* – в тех, для которых она равна нечетному числу полудлин волн (π радиан).**

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. В чем суть принципа суперпозиции волн?
2. Какие источники колебаний называются когерентными? Какие волны являются когерентными?
3. Что называется интерференцией? Объясните, как получается интерференционная картина.
4. Что такое разность хода?
5. При каких условиях колебания в какой-либо точке поля интерференции происходят с максимальной амплитудой? Минимальной?
6. Каковы условия максимумов и минимумов, выраженные через: *а)* разность хода; *б)* разность фазы?
7. Два когерентных источника колеблются с частотой $\nu = 1$ Гц, а волны, возбуждаемые ими, распространяются по поверхности воды со скоростью 1,5 м/с. Определите, для какого минимального значения разности хода на поверхности воды будет наблюдаться: *а)* увеличение амплитуды волн; *б)* уменьшение амплитуды.
8. От двух когерентных источников, колеблющихся с периодом $T = 0{,}5$ с, в некоторой среде со скоростью 1 км/с распространяются волны. Определите, при каких значениях разности хода в области наложения волн будет наблюдаться максимум и минимум интерференции второго порядка.

9. От двух когерентных источников, находящихся на расстоянии $d = 2$ м друг от друга, в упругой среде распространяются две волны со скоростью 340 м/с. На расстоянии $L = 4$ м от центра отрезка, соединяющего источники, зарегистрирован максимум интерференции, а следующий – на расстоянии $\Delta l = 1,5$ м от предыдущего. Чему равна частота колебаний источников?

5.12° ЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ

а. Классификация звуковых волн

Продольные механические волны, которые распространяются в упругих средах и, достигнув человеческого уха, вызывают слуховые ощущения, называются *звуковыми волнами* или *звуками*; источниками таких волн являются *звуковые вибрации*.

Обычно, звуковые волны достигают нашего уха, распространяясь в воздухе, но они могут распространяться и в жидких, и в твердых телах. Опыты и теоретические исследования показывают, что скорость распространения звуковых волн в этих средах гораздо больше, чем в газах. Например, в воздухе при нормальных условиях она равна 340 м/с, в воде – 1 500 м/с, а в стали – 5 500 м/с. Однако не любая вибрация вызывает ощущение звука. Было установлено, что человеческое ухо чувствительно к механическим волнам, частота которых лежит в диапазоне 16–20 000 Гц. Этот диапазон достаточно условен. Он не зависит от свойств звуковых волн, а только от особенностей человеческого уха, и может изменяться для разных людей, а также с возрастом. Уже в среднем возрасте человек не может воспринимать звуки с частотой, большей 12–14 кГц. Однако существуют животные, которые могут воспринимать вибрации с частотой, как меньшей 16 Гц, так и большей 20 кГц. Например, медузы могут воспринимать звуки с частотой, меньшей 16 Гц, собаки – до 40 кГц, а летучие мыши и дельфины – выше 100 кГц. В зависимости от частоты упругие вибрации классифицируют следующим образом:

– вибрации с частотой $\nu < 16$ Гц называются **инфразвуками**;
– с частотой 16 Гц $\leq \nu \leq 20$ кГц – **звуками**;
– с частотой $\nu > 20$ кГц называются **ультразвуками**.

б. Качества звука

Звуки отличаются друг от друга рядом особенностей, называемых **качествами звука**. К ним относятся **интенсивность, высота** и **тембр** звука.

Интенсивность звука измеряется энергией, переносимой звуковой волной за единицу времени через единицу поверхности, расположенную перпендикулярно направлению распространения . Её единица в СИ – Вт/м².

Частота и интенсивность – независимые характеристики звуковых волн. Иными словами, при одной и той же частоте существуют **слабые звуки** и **сильные звуки** и, наоборот, звуки могут быть высокой и низкой частоты, но иметь одинаковую интенсивность. Человеческое ухо чувствительно к интенсивностям, лежащим в очень широком диапазоне. Самый сильный звук, который может воспринимать наше ухо, имеет интенсивность, примерно в 10^{12} раз бóльшую, чем минимальный уровень восприятия. Минимальная интенсивность звука, воспринимаемая человеческим ухом, называется **порогом слышимости**, а наибольшая, превышение которой вызывает болезненные ощущения, – **порогом болевого ощущения.**

На практике звук принято характеризовать отношением его интенсивности I к нулевой интенсивности I_0, которая принимается равной порогу слышимости: $I_0 = 10^{-12}$ Вт/м^2. Поскольку диапазон слышимости очень широк, то для сравнения звуков удобнее использовать логарифмическую шкалу. Таким образом, вводится физическая величина β, называемая **уровнем громкости** и определяемая выражением:

$$\beta = \lg \frac{I}{I_0}. \qquad (5.47)$$

Единица уровня громкости называется **белом** (Б) в честь изобретателя телефона Александра Грахама Белла (1847–1922). Из (5.47) видно, что интенсивность звука, уровень громкости которого равен 1 Б (один бел), в 10 раз больше порога слышимости. Бел – достаточно большая единица, поэтому обычно применяют в 10 раз меньшую единицу – децибел (дБ).

Высота звука **– субъективное качество, определяемое человеком на слух как низкий или высокий звук.**

В зависимости от частоты звук тем выше (тоньше), чем больше его частота. При вибрации какого-либо тела всегда распространяются сложные звуки, состоящие из звуков многих частот. Звук наименьшей частоты $\nu_{осн.}$, который издает тело, называется **основным звуком** (тоном), а звуки с частотами $\nu = m \cdot \nu_{осн.}$ ($m = 2, 3 \ldots$) называются **гармониками** (обертонами).

Качество, которым отличаются два звука одинаковой интенсивности и основной частоты, но возбуждаемые разными источниками, называется *тембром звука.*

Тембр звука зависит от интенсивности, высоты и числа гармоник, сопровождающих основной звук. Следовательно, звуки различаются по тембру благодаря своему сложному составу. Чем больше гармоник составляет звук, тем он приятнее, мелодичнее для слуха.

С точки зрения качественных характеристик и слуховых ощущений звуки можно классифицировать следующим образом:

– кратковременные звуки большой интенсивности, называемые **детонациями**. Они очень неприятны для слуха, зачастую вызывают болевые ощущения;

– звуки, получаемые в результате колебаний с изменяющейся во времени амплитудой, без какой-либо периодичности, называются **шумами**;

– периодические звуки, независимо от степени их сложности, называются **музыкальными звуками**. Они вызывают приятные слуховые ощущения, конечно, если их интенсивность ниже порога болевых ощущений.

ВОПРОСЫ

1. Какие волны называются звуковыми?
2. Каков диапазон звуковых волн?

3. Как классифицируются звуковые волны в зависимости от частоты упругих вибраций?
4. Что называется интенсивностью звука и каковы ее единицы в СИ?
5. Что называется порогом слышимости и порогом болевых ощущений?
6. Как определяется физическая величина, называемая уровнем громкости и что является ее единицей в СИ?
7. Что называется высотой звука? Что такое основной звук и гармоники (обертоны)?
8. Что называется тембром звука?
9. Как классифицируются звуки с точки зрения их качественных характеристик и слуховых ощущений?

5.13° СЕЙСМИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

Одним из самых разрушительных и страшных природных явлений является землетрясение. Землетрясение представляет собой кратковременные, относительно локализованные резкие движения, которые вызывают толчки и колебания земной коры, распространяющиеся посредством волн.

Упругие волны, которые распространяются внутри Земли и по ее поверхности, называются *сейсмическими волнами*.

В большинстве случаев землетрясения длятся несколько секунд, однако, были зарегистрированы землетрясения длительностью примерно минуту и даже больше. Например, землетрясение на Аляске (24 января 1964 г.) длилось более 7 минут. Упругая энергия, освобождаемая при катастрофическом землетрясении, огромна. По примерным расчетам она достигает 10^{18} Дж (для сравнения – солнечная энергия, поглощаемая Землей за год, приблизительно равна 10^{24} Дж). Очевидно, и ущерб, наносимый таким землетрясением, огромен, так как к тому, что наносится непосредственно, добавляются разрушения, обусловленные вторичными эффектами: пожарами, взрывами, оползнями и многими другими. Самые разрушительные землетрясения, зарегистрированные в XX веке и отмеченные самым большим числом жертв, произошли в Китае в 1920 (180 тыс.), 1927 (200 тыс.), 1976 (255 тыс.) и в Японии в 1923 году (143 тыс.).

Непосредственной причиной землетрясений является деформация земной коры (расширение, сжатие, сдвиг и т.д.), которая создает колоссальные механические напряжения в горных породах Земли. Когда они «преодолевают» сопротивление разрыва пород, внезапно выделяется аккумулированная энергия и происходит землетрясение.

Область, в которой освобождается энергия, называется **очагом** или **гипоцентром**, в большинстве случаев он находится на глубине от 1 до 700 км. Место на поверхности Земли над очагом называется **эпицентром**.

Было установлено, что разрушения наиболее велики в зоне эпицентра, когда очаг находится на небольшой глубине. Если очаг находится на большой глубине, то землетрясение будет разрушительным не только в районе эпицентра, но и на больших расстояниях от него.

Какова природа сил, создающих такие деформации? Существует несколько гипотез относительно их природы, однако, большинство исследователей придерживается гипотезы о **движении тектонических плит**.

Вообще, землетрясения могут происходить в любой области земной коры, но чаще всего вблизи краев тектонических плит, которые называются **линиями разлома**.

Энергия, освобождаемая в очаге землетрясения, распространяется во всех направлениях посредством сейсмических волн. Существует два основных типа сейсмических волн: **объемные волны**, которые распространяются внутри Земли, и **поверхностные волны**, распространяющиеся по поверхности земной коры.

Объемные волны, в свою очередь, делятся на **первичные** (*P*) и **вторичные** (*S*) **волны**. Перемещение *P*-волн происходит путем последовательного сжатия и расширения среды в направлении их распространения, то есть они являются продольными волнами и распространяются как в твердых средах (литосфере), так и в жидкостях (мантии и ядре). Было установлено, что *P*-волны всегда достигают поверхности быстрее (их скорость больше), чем *S*-волны, однако, последние переносят больше энергии и, значит, имеют бо́льшую разрушительную силу. Таким образом, регистрация *P*-волн могла бы служить предупреждением угрозы разрушений, но интервал времени до прихода *S*-волн слишком мал (порядка секунд, максимум десятков секунд) для своевременного предупреждения населения. В *S*-волнах колебания частиц среды происходят перпендикулярно направлению их распространения, то есть *S*-волны поперечны и перемещаются только в твердых средах (литосфере).

Поверхностные волны, образующиеся при многократном отражении и наложении *P*- и *S*-волн в литосфере, бывают 4-х типов. Три из них являются поперечными и называются **волнами Рэлея**, четвертый тип – это продольные волны, называемые **Лав-волнами**.

Скорость сейсмических волн зависит от плотности пород, в которых они распространяются. Скорость *P*-волн около 7 км/с, примерно в 1,7 раз больше скорости *S*-волн. Скорость поверхностных волн меньше скорости объемных и равна примерно 3 км/с.

Для регистрации сейсмических волн во время землетрясения используются очень чувствительные приборы, называемые **сейсмографами**.

Для описания разрушительного действия и сравнения землетрясений в настоящее время используются две шкалы: **шкала интенсивности** и **шкала магнитуд**. По первой шкале каждое землетрясение оценивается числом, характеризующим его последствия в определенном месте, в зависимости от расстояния до очага и особенностей почвы; оно называется **макросейсмической интенсивностью** (*I*). Поскольку для одного и того же землетрясения в разных населенных пунктах макросейсмическая интенсивность различна, то его энергетическая характеристика определяется самой большой зарегистрированной интенсивностью. В настоящее время в большинстве стран используется международная 12-ти балльная шкала интенсивностей, называемая **шкалой сейсмической интенсивности Меркалли**. Каждый балл этой шкалы подробно определяет последствия землетрясения, наблюдаемые на поверхности Земли.

Другая шкала, предложенная К. Рихтером и часто используемая для определения силы землетрясений, базируется только на данных регистрирующих приборов. Магнитуда M какого-либо землетрясения равна десятичному логарифму максимальной амплитуды сейсмической волны, зарегистрированной стандартным сейсмографом, находящимся на расстоянии 100 км от его эпицентра. Это означает, что увеличение магнитуды на единицу соответствует возрастанию максимальной амплитуды сейсмической волны в 10 раз.

Между шкалами Меркалли и Рихтера нет точной корреляции. Их можно сравнивать только для конкретной местности. В нижеследующей таблице представлена шкала сейсмической интенсивности Меркалли в сокращенном виде.

Интенсивность (I)	**Последствия землетрясения по шкале Меркалли**
1	Сейсмические волны регистрируются только приборами.
2	Ощущаются только немногими людьми, находящимися в состоянии покоя, особенно на верхних этажах зданий.
3	Вибрации, ощущаемые в помещениях, особенно на верхних этажах, но большинство людей не связывают их с землетрясениями.
4	Днем ощущается большинством людей, находящихся в зданиях. Ночью некоторые просыпаются. Слегка звенит посуда.
5	Ощущается почти всем населением. Опрокидываются небольшие предметы, неустойчивая мебель. Колеблются люстры.
6	Ощущается всем населением, некоторые в страхе бегут из домов. Движется мебель, местами осыпается штукатурка.
7	Все испуганы, покидают помещения. Падают различные предметы, появляются мелкие или глубокие трещины в стенах, в зависимости от их прочности.
8	Всеобщий страх и паника. Проваливаются крыши зданий, трещат стены. Менее прочные строения получают повреждения. Перемещается тяжелая мебель. Изменяется уровень воды в колодцах.
9	Всеобщая паника. Непрочные здания разрушаются, а прочные серьезно повреждаются. Появляются трещины на поверхности земли. Рвутся подземные трубопроводы.
10	Большинство зданий разрушено до основания или серьезно повреждено. Многочисленные трещины в земной коре. Вода рек и озер выплескивается на берега.
11	Катастрофа. Разрушаются все здания, плотины, пути сообщения, происходят оползни, смещаются русла некоторых рек.
12	Изменяется рельеф. На поверхности Земли образуются волны. Практически, не сохраняется ни одно строение. Изменяются русла рек, появляются новые озера.

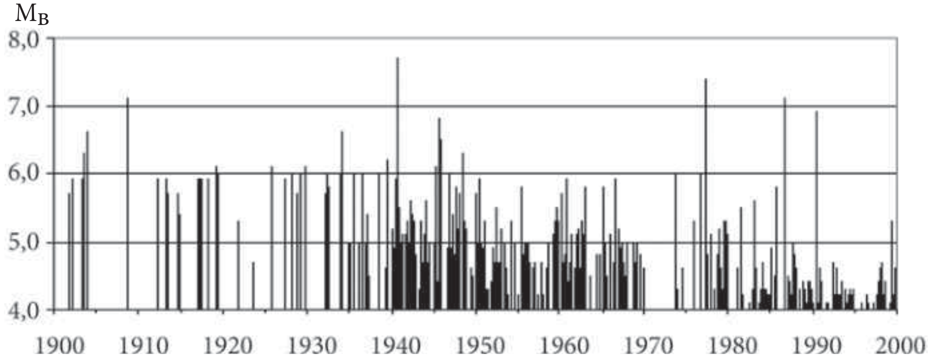


Рис. 5.29

Эпицентр землетрясений, которые ощущаются на территории Республики Молдова, находится в районе Вранча в Румынии. Эти землетрясения обусловлены столкновением литосферной Евразийской плиты с Межальпийской и Мизийской субплитами, а точнее субдукцией Евразийской плиты (субдукция – поддвиг одной плиты под другую).

Как видно из диаграммы, представленной на *рисунке 5.29*, где отмечены только землетрясения с магнитудой $M > 4$, произошедшие в течение прошлого века, регион Вранча имеет довольно большую сейсмическую активность. Отметим, что в этот период землетрясения с магнитудой $M > 7$ повторялись примерно через 35 лет.

Самой важной задачей сейсмологов является, безусловно, исследование возможности предсказания землетрясений. Но в настоящее время таких возможностей пока не существует. Никто точно не может назвать день, год и место, где произойдет землетрясение с тяжелыми последствиями для людей.

ВОПРОСЫ

1. Что называется сейсмическими волнами?
2. Что такое очаг землетрясения? Эпицентр?
3. Каковы механизмы зарождения землетрясений?
4. Что такое линия разлома?
5. Назовите и охарактеризуйте основные типы сейсмических волн.
6. Какие шкалы описания и сравнения землетрясений используются в настоящее время? Чем они отличаются?

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПОНЯТИЯ О ВЫЧИСЛЕНИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ

a. Измерения и погрешности

Процесс измерения физической величины состоит в сравнении ее с величиной такой же природы, условно выбранной в качестве единицы измерения. Результат измерения есть численное значение измеряемой величины, которое показывает, сколько раз содержится единица измерения в соответствующей физической величине. Например, если при измерении массы тела, используя единицу измерения **килограмм**, получили $m = 2$ кг, то единица 1 кг содержится в массе этого тела 2 раза.

Измерения физических величин могут быть двух типов: **прямые** и **косвенные**. Если физическая величина непосредственно сравнивается с соответствующей единицей измерения (считывается по шкале прибора), то измерения называются прямыми. Например, расстояние измеряется метровой линейкой, время – секундомером, температура – термометром и т.д. Когда физическая величина зависит от других величин, то есть выражается через них, то она вычисляется с помощью соответствующих соотношений, в которые подставляются результаты прямых измерений. Например, для определения кинетической энергии движущегося тела сначала делаются прямые измерения массы и скорости тела (спидометром), а затем согласно отношению $E_k = mv^2/2$, вычисляется кинетическая энергия.

Численные значения, полученные при измерении физических величин, всегда сопровождаются **погрешностями**. Источники погрешностей различны. Главные из них обусловлены следующими причинами: несовершенством методов измерения; ограниченной чувствительностью измерительных приборов; влиянием окружающей среды (температурой, давлением, влажностью, электрическими и магнитными полями и т.д.); качествами и навыками экспериментатора и др. Поэтому при каждом измерении получается только приблизительное значение измеряемой физической величины, не совпадающее с истинным (точным). Отклонение результатов измерений от истинного значения величины количественно характеризуется **погрешностями измерения**.

По своему характеру погрешности измерения можно разделить на **случайные, систематические** и **промахи**.

Случайными погрешностями называются погрешности, непредсказуемо меняющиеся от одного измерения к другому. У них могут быть как положительные, так и отрицательные значения. Существование этих погрешностей определяется целой группой трудно устранимых причин. Например, повторяющееся измерение времени движения любого транспорта по выбранному участку пути подвергается действию порывов ветра, и полученные результаты немного отличаются. Из-за неполадок в электрических цепях при постоянном измерении силы тока каждый раз получаются различные величины, хотя измерительный аппарат, условия окружающей среды не менялись.

Систематические погрешности возникают из-за определенных дефектов измерительных приборов и несовершенства применяемых методов измерений. В процессе повторяющихся измерений эти ошибки остаются одними и теми же как по численному значению, так и по знаку. Например: взвешивание тела на весах с неодинаковыми плечами приводит к систематической постоянной погрешности (**инструментальная погрешность**); применение метода математического маятника для измерения ускорения свободного падения не учитывает силы трения и сопротивления воздуха и, как следствие, результат сопровождается некоторой постоянной ошибкой (**погрешностью метода**). Если в начале опыта обнаружены источники систематических погрешностей, то они могут быть устранены или заменой неисправных приборов и неверной методики измерения, или введением поправок в полученные результаты.

Промахи обычно вызваны невнимательностью экспериментатора во время считывания показаний приборов или быстрым изменением за короткое время условий проведения опыта. В большинстве случаев промахи очень сильно отличаются от всех полученных в результате измерений величин, поэтому надо еще раз повторить измерение.

После анализа трех типов погрешностей ясно, что измеренная физическая величина никогда не может быть определена точно, а только с некоторой погрешностью. Предположим, что систематические погрешности и промахи устранены. Оценим случайные погрешности, допущенные при измерении физической величины.

б. Погрешности прямых измерений

Проанализируем вначале случай прямых измерений. Так как каждое измерение сопровождается случайными погрешностями, из-за которых полученное численное значение может быть больше или меньше истинного значения физической величины X, то логично провести несколько измерений, а потом найти их среднее значение. Допустим, проведено N измерений физической величины X и получены приблизительные значения X_1, X_2,...X_N.

Величина

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots X_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$$

представляет собой среднее арифметическое отдельных измерений, оно ближе всего к истинному значению величины X.

Модуль разности между средним значением $\overline{X}$ и значением X_i называется абсолютной погрешностью отдельного измерения

$$\Delta X_i = |\overline{X} - X_i| \qquad (1)$$

и измеряется в единицах измеряемой величины.

Средняя погрешность $\Delta\overline{X}$ измерения физической величины X находится как среднее арифметическое погрешностей (1):

$$\Delta\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Delta X_i \qquad (2)$$

и называется **средней абсолютной погрешностью**. Результат измерений пишется в виде:

$$X = \overline{X} \pm \Delta\overline{X}. \qquad (3)$$

Это означает, что истинное значение физической величины X находится в интервале:

$$\overline{X} - \Delta\overline{X} \le X \le \overline{X} + \Delta\overline{X}.$$

Абсолютная погрешность еще не характеризует полностью качество измерений. В самом деле, предположим, что две различные длины измерены с одинаковой абсолютной погрешностью, например 0,01 м. Для длины в несколько метров погрешность допустима, а для длины в несколько сантиметров погрешность очень велика. Поэтому, чтобы судить о точности измерений, вводится понятие относительной погрешности:

Отношение между средней абсолютной погрешностью и средним значением физической величины называется относительной погрешностью:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\overline{X}}{\overline{X}}. \qquad (4)$$

Она показывает, какую долю от измеряемой физической величины составляет средняя абсолютная погрешность и часто ее называют **точностью**. Относительная погрешность – величина безразмерная, часто выражается в процентах.

в. Погрешности косвенных измерений

Нередко проводятся косвенные измерения физических величин. Результат измерения получается с помощью соотношения, выражающего функциональную зависимость искомых физических величин от других величин, измеряемых непосредственно. Понятно, что и погрешности этих физических величин надо вычислять с помощью той же функциональной зависимости. Рассмотрим несколько примеров расчетов погрешностей, когда две физические величины A и B получены прямыми измерениями с абсолютными средними погрешностями $\Delta\overline{A}$ и $\Delta\overline{B}$.

1. Если $X = A \pm B$, то $\overline{X} \pm \Delta\overline{X} = (\overline{A} \pm \Delta\overline{A}) \pm (\overline{B} \pm \Delta\overline{B})$ или $\overline{X} \pm \Delta\overline{X} = (\overline{A} \pm \overline{B}) \pm \Delta\overline{A} \pm \Delta\overline{B}$, где $\overline{X} = \overline{A} \pm \overline{B}$ среднее значение физической величины, измеряемой косвенно, а

$$\pm\Delta\overline{X} = \pm\Delta\overline{A} \pm \Delta\overline{B} \qquad (5)$$

представляет собой абсолютную погрешность этой величины.

Из (5) видно, что существуют четыре комбинации значений погрешностей $\Delta\overline{A}$ и $\Delta\overline{B}$: *а*) $\Delta\overline{A} + \Delta\overline{B}$; *б*) $\Delta\overline{A} - \Delta\overline{B}$; *в*) $-\Delta\overline{A} + \Delta\overline{B}$ и *г*) $-\Delta\overline{A} - \Delta\overline{B}$. Так как нет никакой гарантии, что в результате измерений получим такой результат, что погрешности взаимно компенсируются (случай *б*) и *в*)), то всегда выбирается самая неблагоприятная ситуация, и тогда погрешности складываются (случай *а*) и *г*)).

Итак, абсолютная погрешность некоторой физической величины X, равной сумме (разности) величин A и B, полученных прямым измерением, имеет вид:

$$\Delta\overline{X} = \Delta\overline{A} + \Delta\overline{B}, \tag{6}$$

а относительная погрешность

$$\varepsilon = \frac{\Delta\overline{X}}{\overline{X}} = \frac{\Delta\overline{A} + \Delta\overline{B}}{\overline{A} \pm \overline{B}}. \tag{7}$$

Абсолютная погрешность некоторой физической величины, равной сумме или разности других физических величин, полученных прямым измерением, равна сумме их абсолютных погрешностей.

2. Если $X = A \cdot B$, то: $\overline{X} \pm \Delta\overline{X} = (\overline{A} \pm \Delta\overline{A})\cdot(\overline{B} \pm \Delta\overline{B}) = \overline{A}\cdot\overline{B} \pm \overline{A}\cdot\Delta\overline{B} \pm \overline{B}\cdot\Delta\overline{A} \pm \Delta\overline{A}\cdot\Delta\overline{B}$, откуда $\overline{X} = \overline{A}\cdot\overline{B}$, $\pm\Delta\overline{X} = \pm\overline{A}\cdot\Delta\overline{B} \pm \overline{B}\cdot\Delta\overline{A} \pm \Delta\overline{A}\cdot\Delta\overline{B}$.

Выбирая самую неблагоприятную ситуацию, когда погрешности складываются и, пренебрегая произведением $\Delta\overline{A}\cdot\Delta\overline{B}$, очень малым по сравнению с остальными членами, получим:

$$\Delta\overline{X} = \overline{A}\cdot\Delta\overline{B} \pm \overline{B}\cdot\Delta\overline{A}, \tag{8}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta\overline{A}}{\overline{A}} + \frac{\Delta\overline{B}}{\overline{B}} = \varepsilon_A + \varepsilon_B. \tag{9}$$

3. Если $X = \dfrac{A}{B}$, то:

$$\overline{X} \pm \Delta\overline{X} = \frac{\overline{A} \pm \Delta\overline{A}}{\overline{B} \pm \Delta\overline{B}} = \frac{(\overline{A} \pm \Delta\overline{A})\cdot(\overline{B} \mp \Delta\overline{B})}{(\overline{B} \pm \Delta\overline{B})\cdot(\overline{B} \mp \Delta\overline{B})} = \frac{\overline{A}\cdot\overline{B} \pm \overline{B}\cdot\Delta\overline{A} \pm \overline{A}\cdot\Delta\overline{B} - \Delta\overline{A}\cdot\Delta\overline{B}}{\overline{B}^2 - (\Delta\overline{B})^2}.$$

Делаем те же приближения, что и в предыдущем случае и, принимая во внимание, что $\overline{X} = \dfrac{\overline{A}}{\overline{B}}$, получим:

$$\Delta\overline{X} = \frac{\overline{A}\cdot\Delta\overline{B} + \overline{B}\cdot\Delta\overline{A}}{\overline{B}^2}, \tag{10}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta\overline{A}}{\overline{A}} + \frac{\Delta\overline{B}}{\overline{B}} = \varepsilon_A + \varepsilon_B. \tag{11}$$

Итак,

Если измеряемая косвенно физическая величина равна произведению или частному нескольких независимых переменных, то ее относительная погрешность равна сумме относительных погрешностей независимых переменных, полученных прямым измерением.

Косвенно измеряемая физическая величина может зависеть от величин, полученных прямым измерением, и через другие более сложные математические операции. Ниже в таблице даны формулы для расчета абсолютных и относительных погрешностей при различных математических операциях.

№	Математическая операция	Погрешность	
		абсолютная	относительная
1.	$A \pm B$	$\Delta A + \Delta B$	$\dfrac{\Delta A + \Delta B}{A \pm B}$
2.	$A \cdot B$	$A\Delta B + B\Delta A$	$\dfrac{\Delta A}{A} + \dfrac{\Delta B}{B} = \varepsilon_A + \varepsilon_B$

№	Математическая операция	Погрешность	
		абсолютная	относительная
3.	$\frac{A}{B}$	$\frac{A\Delta B + B\Delta A}{B^2}$	$\frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B} = \varepsilon_A + \varepsilon_B$
4.	A^n	$nA^{n-1}\Delta A$	$n\frac{\Delta A}{A} = n\varepsilon_A$
5.	$\sqrt[n]{A}$	$\frac{1}{n}A^{\frac{1}{n}-1}\Delta A$	$\frac{1}{n}\frac{\Delta A}{A} = \frac{1}{n}\varepsilon_A$
6.	$\frac{1}{A} \pm \frac{1}{B}$	$\frac{\Delta A}{A^2} + \frac{\Delta B}{B^2}$	$\frac{B^2\Delta A + A^2\Delta B}{AB(B \pm A)} = \frac{1}{B \pm A}(B\varepsilon_A + A\varepsilon_B)$
7.	$\sin A$	$\cos A \cdot \Delta A$	$\operatorname{ctg} A \cdot \Delta A$
8.	$\cos A$	$\sin A \cdot \Delta A$	$\operatorname{tg} A \cdot \Delta A$
9.	$\operatorname{tg} A$	$\frac{\Delta A}{\cos^2 A}$	$\frac{2\Delta A}{\sin 2A}$
10.	$\operatorname{ctg} A$	$\frac{\Delta A}{\sin^2 A}$	$\frac{2\Delta A}{\sin 2A}$
11.	$\lg A$	$\ln 10 \cdot \frac{\Delta A}{A}$	$\frac{\ln 10}{\lg A} \cdot \frac{\Delta A}{A}$
12.	$\ln A$	$\frac{\Delta A}{A}$	$\frac{1}{\ln A} \cdot \frac{\Delta A}{A}$

Использовать эту таблицу можно только после приведения исследуемой зависимости к самому простому виду. Например, зависимость $X = \frac{A+B}{A}$ сначала приводим к $X = 1 + \frac{B}{A}$ и только после этого абсолютная и относительная погрешности определяются с помощью таблицы.

г. Погрешность единичного измерения

Часто необходимо выполнить только одно измерение. Тогда погрешность измерений приблизительно равна погрешности используемого для измерений прибора (записана на приборе или в его паспорте). Если же точность прибора неизвестна, его абсолютную погрешность надо оценить. Обычно она не превышает половины цены деления шкалы применяемого прибора. Например, у измерений, сделанных миллиметровой линейкой, абсолютная погрешность равна 0,5 мм. Если в расчетах используются какие-нибудь табличные данные, их абсолютная погрешность равна половине единицы последнего разряда числа. Например, если $g = 9{,}8$ м/с^2, то $\Delta g = 0{,}05$ м/с^2, а если $g = 9{,}81$ м/с^2, то $\Delta g = 0{,}005$ м/с^2.

Все цифры, кроме нулей в левой части числа, считаются значащими. Например, у чисел 0,0271 и 310 по три значащих цифры. У числа 0,02710 четыре значащих цифры.

При обработке полученных опытных данных выполняются различные расчеты.

Часто ошибочно считается, что сохранение большого числа значащих цифр повышает точность результатов измерений. Рассмотрим пример. Пусть для определения объема *V* бруска стороны *a, b* и *c* измерены линейкой с ценой деления 1 см. Получены результаты: $a = 25{,}5$ см, $b = 10$ см и $c = 1{,}5$ см. Вычислим относительную погрешность результата (точность), считая абсолютную погрешность линейки равной 0,5 см (половина цены деления). Так как объем тела $V = a \cdot b \cdot c$ выражается произведением независимых величин, то относительная погрешность

$$\varepsilon_V = \varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c}$$

и численно получим $\varepsilon_V = \frac{0{,}5}{25{,}5} + \frac{0{,}5}{10} + \frac{0{,}5}{1{,}5} \approx 0{,}02 + 0{,}05 + 0{,}33 \approx 0{,}4$; $\varepsilon_V = 40\%$.

Отметим, что из 40% точности результата 33% приходятся на самое неточное – измерение стороны *c*. Используя миллиметровую линейку, получим: $c = 1{,}3$ см. На этот раз точность результатов:

$$\varepsilon_V = \frac{0{,}5}{25{,}5} + \frac{0{,}5}{10} + \frac{0{,}05}{1{,}3} \approx 0{,}02 + 0{,}05 + 0{,}04 \approx 0{,}11; \ \varepsilon_V = 11\%.$$

Итак, точность результата возросла примерно в 4 раза и, если мы хотим получить результат еще точнее, надо миллиметровой линейкой измерить две оставшиеся стороны. Еще лучше использовать штангенциркуль (цена деления 0,1 мм). Итак,

Точность косвенных измерений можно увеличить только увеличением точности прямых измерений, сохранение же большого количества значащих цифр приводит к усложнению вычислений.

Запишем конечный результат предложенного выше примера. Ответ в виде $V = (3{,}315 \pm 0{,}4) \cdot 10^{-4}$ м^3 абсурден. В самом деле, если абсолютная погрешность содержит один знак после запятой, то последние две цифры в числе 3,315 ничего не значат. Используя правило округления, известное из курса математики, запишем правильный результат: $V = (3{,}3 \pm 0{,}4)10^{-4}$ м^3.

Конечный результат должен содержать такое же количество значащих цифр, как и абсолютная погрешность. В промежуточных расчетах сохраняется дополнительно еще одно число для выполнения округления конечного результата.

д. Графики в лабораторных работах

При обработке данных опыта часто используют графический метод. Он дает возможность наглядно представить изучаемую зависимость. Обычно для этого используют прямоугольную систему координат. По оси абсцисс откладывают величину, заданную экспериментатором (аргумент), а по оси ординат – величину, зависящую от заданной (функцию).

Выбирается определенный масштаб так, чтобы самая маленькая величина, которую можно было бы прочитать на графике, была не меньше значения абсолютной погрешности измерения, а самая большая не превышала максимальной величины, указанной на соответствующей оси графика. Начало координат не всегда должно совпадать с нулевыми значениями изучаемых величин. Его выбирают, исходя из условия наиболее полного использования всей площади, отданной под график. Деления по каждой оси надо откладывать на одинаковых расстояниях, на их концах пишут символы физических величин, единицы измерения (разрешается писать дольные и кратные единицы) (*рис. 1*).

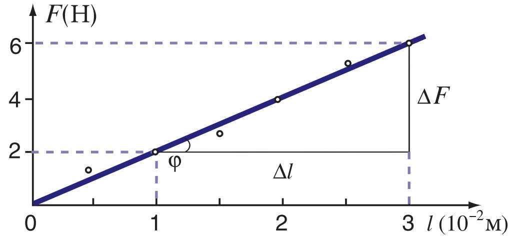


Рис. 1

Экспериментальные точки должны быть хорошо видны и различимы на графике, с этой целью используют кружочки, крестики, треугольники и т.д. Затем проводят гладкую кривую (это может быть и прямая), проходящую через наибольшее количество экспериментальных точек, оставляя по одну и другую стороны кривой как можно меньше удаленных от кривой примерно на одинаковое расстояние точек (*рис. 1*).

Важной характеристикой линейной зависимости, показанной графически, является **наклон** экспериментальной линии или угол ее наклона φ. Из *рисунка 1*, представляющего собой зависимость силы упругости пружины от ее удлинения, видно, что жесткость пружины равна отношению противолежащего катета ΔF к прилежащему катету Δl в характеристическом треугольнике:

$$k = \text{tg}\varphi = \frac{\Delta F}{\Delta l}.$$

Так вы найдете жесткость упругого тела в *лабораторной работе № 2*.

ВОПРОСЫ

1. Какие измерения называют прямыми и чем они отличаются от косвенных?
2. Каковы основные источники погрешностей? Как можно классифицировать погрешности?
3. Что называется абсолютной погрешностью и что она собой представляет?
4. Что такое относительная погрешность и каков ее смысл?
5. Чему равны абсолютная погрешность суммы (или разности) и относительная погрешность произведения (или частного) в случае косвенных измерений?
6. Как можно увеличить точность косвенных измерений?
7. Как нужно записать конечный результат измерения?
8. Как строится экспериментальная кривая в случае графического представления результатов измерений?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

ИЗУЧЕНИЕ РАВНОУСКОРЕННОГО ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА

Цель работы: Изучение равноускоренного движения и определение ускорения тела.

Приборы и материалы: секундомер (лучше электронный); измерительная лента с сантиметровыми или миллиметровыми делениями (рулетка), металлический желоб, штатив с лапкой, металлический шарик, металлический цилиндр.

Краткая теория

Равноускоренное движение тела описывается уравнением (1.25).

Установка, собранная по *рисунку 2*, позволяет измерить путь, пройденный шариком без начальной скорости, и время движения. На базе этих измерений определяется ускорение шарика с помощью отношения $a = \frac{2s}{t^2}$, которое следует из (1.25), когда $v_0 = 0$.

Рис. 2

ХОД РАБОТЫ:

1. Соберите установку, как показано на *рисунке 2*. Угол наклона желоба должен быть небольшим ($h \approx 3 \div 4$ см на 1 м длины желоба).
2. Одновременно с пуском секундомера отпустите шарик, удерживаемый в верхней части желоба. Остановите секундомер в момент удара шарика о цилиндр, положенный в желоб в его нижней части, и запишите в таблицу время движения шарика.
3. Измерьте пройденный шариком путь, запишите в таблицу.
4. Повторите 4–5 раз действия, описанные в пунктах 2, 3, для различных расстояний, не меняя наклона желоба.

№	t (с)	s (м)	a (м/с^2)	Δa (м/с^2)
1.				
2.				
⋮				
Среднее значение				

5. Вычислите значения ускорения, его абсолютные и относительные погрешности.
6. Запишите ответ в виде:

$$a = (\overline{a} \pm \Delta\overline{a})\text{м/с}^2; \quad \varepsilon = \ldots\%.$$

7. Сделайте вывод о качестве выполнения работы, точности полученных результатов

ВОПРОСЫ

1. Почему угол наклона желоба, по которому скатывается шарик, должен быть небольшим?
2. Для чего в нижней части желоба устанавливается металлический цилиндр?
3. Как меняется ускорение шарика в зависимости от времени его движения? (Наклон желоба постоянен!)
4. Каков главный источник погрешностей в этой лабораторной работе?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2°

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЖЕСТКОСТИ УПРУГОГО ТЕЛА

Цель работы: Убедиться в справедливости закона Гука и вычислить жесткость пружины.

Приборы и материалы: миллиметровая линейка, штатив с двумя лапками, пружина (или упругая нить); набор грузов.

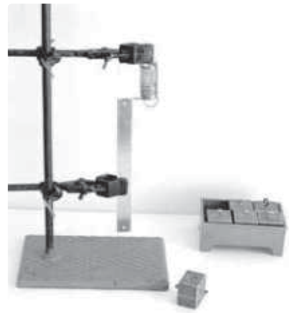


Рис. 3

Краткая теория:

В нашей работе упругим телом (*рис. 3*) будет пружина динамометра (или подобная ей). Подвешенный к пружине груз действует на нее с силой, равной весу груза: $P = mg$. Так как в состоянии равновесия сила упругости пружины будет равна по модулю весу тела и противоположна по направлению, из (2.27) получим:

$$P = F_{упр.} \text{ или } mg = k\Delta l, \text{ откуда } k = \frac{mg}{\Delta l}.$$

ХОД РАБОТЫ:

1. Соберите установку по *рисунку 3* так, чтобы положение индикатора, прикрепленного к пружине, в недеформированном состоянии совпадало с нулем на миллиметровой линейке.
2. Подвесьте к пружине один груз, измерьте вызванное им удлинение Δl и запишите данные в таблицу.
3. К первому грузу подвесьте второй, третий, четвертый, каждый раз записывая соответствующие удлинения Δl_2, Δl_3, Δl_4 в таблицу:

№	m (10^{-3}кг)	Δl (10^{-3}м)	k (Н/м)	Δk (Н/м)
1.	50			
2.	100			
⋮				
6.	300			
Среднее значение	×	×		

4. Постройте график зависимости $F_{упр.} = mg$ от удлинения Δl и определите жесткость пружины, используя графический метод из п. *д* этой главы.
5. Вычислите абсолютные и относительные погрешности измерения жесткости.
6. Запишите конечный результат в виде:

$$k = (\bar{k} \pm \Delta\bar{k})\,\frac{\text{Н}}{\text{м}};\ \ \varepsilon = \ldots\%.$$

7. Сделайте вывод относительно полученных результатов.

ВОПРОСЫ

1. Почему к свободному концу пружины школьного динамометра нельзя подвешивать грузики большой массы?
2. Какой должна быть зависимость силы упругости от удлинения пружины?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТРЕНИЯ СКОЛЬЖЕНИЯ

Цель работы: Изучение явления трения и определение коэффициента трения скольжения с помощью наклонной плоскости.

Приборы и материалы: школьный трибометр (при его отсутствии можно взять доску до 80 ÷ 100 см длины), штатив с лапкой, измерительная лента с сантиметровыми делениями (или рулетка, длинная линейка), деревянный брусок, набор грузов.

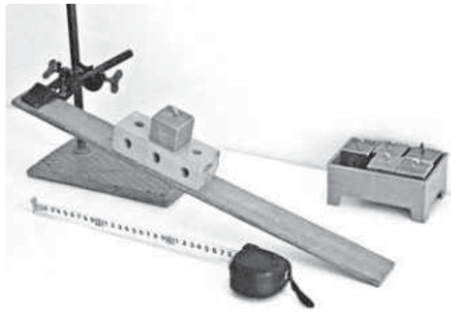


Рис. 4

Краткая теория:

Если тело равномерно скользит по наклонной плоскости, то коэффициент трения равен тангенсу угла наклона (п. 2.6): $\mu = \text{tg}\varphi_{\text{тр.}}$. Из *рисунка 4*, где показана установка для проведения работы, видно, что $\text{tg}\,\varphi_{\text{тр.}} = \frac{h}{l}$.

Если обеспечить равномерное скольжение тела, коэффициент трения скольжения легко найти, измерив длину основания l и высоту h: $\mu = \frac{h}{l}$.

ХОД РАБОТЫ:

1. Положите брусок на горизонтальную доску трибометра и, медленно поднимая ее за один из концов, найдите такое положение (угол $\varphi_{\text{тр.}}$), когда при легком постукивании пальцем по доске брусок начинает равномерно скользить вниз.
2. Закрепите доску в лапке штатива в этом положении и еще раз проверьте, скользит ли тело равномерно.
3. Измерьте высоту h, основание l получившейся наклонной плоскости и запишите данные в таблицу.

№	h (см)	l (см)	μ
1.			
2.			
⋮			
Среднее значение			

4. Повторите опыт, нагрузив поочередно брусок одним, двумя, тремя грузиками массой по 100 г, выполняя каждый раз операции 1–3, описанные выше.
5. Найдите средние значения h, l и коэффициента трения μ.
6. Вычислите абсолютную и относительную погрешности коэффициента трения скольжения, используя следующие соотношения:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\overline{\mu}}{\overline{\mu}} = \frac{\Delta\overline{h}}{\overline{h}} + \frac{\Delta\overline{l}}{\overline{l}}, \quad \Delta\overline{\mu} = \varepsilon \cdot \Delta\overline{\mu}.$$

7. Запишите конечный результат в виде: $\mu = \overline{\mu} \pm \Delta\overline{\mu}$; $\varepsilon = ...\%$.
8. Сделайте вывод относительно полученных результатов.

ВОПРОСЫ

1. В чем суть метода наклонной плоскости для определения коэффициента трения скольжения?
2. Почему необходимо постукивать по доске для определения положения, при котором брусок скользит по ней равномерно?
3. Предложите другой метод определения коэффициента трения скольжения и попробуйте его реализовать.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

ИЗУЧЕНИЕ ПРУЖИННОГО МАЯТНИКА

Цель работы: Экспериментальное определение периода собственных колебаний пружинного маятника.

Приборы и материалы: штатив с двумя лапками, пружина, набор разновесов, миллиметровая линейка, секундомер (например, в мобильном телефоне) или часы с секундной стрелкой.

Краткая теория:

Период собственных колебаний T_0 пружинного маятника определяется из соотношения (5.18). Как видно, он тем больше, чем больше масса m колебательной системы, и чем меньше коэффициент упругости (жесткость) k. Для одной и той же пружины пренебрежимо малой массы собственный период тем больше, чем больше масса подвешенного груза.

Определение периода можно осуществить двумя способами: либо по формуле (5.18), найдя вначале коэффициент упругости k, либо измерив время t, за которое происходит N полных колебаний, то есть

$$T = \frac{t}{N}. \tag{12}$$

Коэффициент упругости k определяется из условия равновесия тела массой m, подвешенного к свободному концу пружины: $mg = kx$, откуда $k = mg/x$. Подставив это выражение для k в (5.18), получим

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{x}{g}}, \tag{13}$$

где x – это удлинение пружины, когда подвешенное тело находится в равновесии.

ХОД РАБОТЫ:

1. Соберите экспериментальную установку по *рисунку 5*, следя за тем, чтобы «0» шкалы миллиметровой линейки совпадал с концом пружины в недеформированном состоянии.
2. Подвесьте к свободному концу пружины один из разновесов и после установления равновесия найдите по линейке удлинение пружины x.
3. Выведите пружинный маятник из равновесия, растянув пружину на 2–3 см. Измерьте секундомером время t, за которое совершается N гармонических колебаний, то есть примерно одинаковой амплитуды.
4. Повторите измерения из п. 2–3 еще 1–2 раза, добавляя каждый раз новые разновесы.

Рис. 5

5. Вычислите период собственных колебаний пружинного маятника по формулам (12) и (13). Внесите результаты измерений и вычислений в нижеследующую таблицу:

№	m (кг)	x (м)	T_0 (с)	ΔT_0, (с)	N	t (с)	T (с)	ΔT (с)
1.								
2.								
3.								

6. Оцените погрешности (абсолютную и относительную) определения периода собственных колебаний для обоих случаев, используя формулы:

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta T_0}{T_0} = \frac{\Delta \pi}{\pi} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta g}{g} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta x}{x}, \ \ \Delta T_0 = \varepsilon_1 \cdot T_0;$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta T}{T_0} = \frac{\Delta t}{t}, \ \ \Delta T = \varepsilon_2 \cdot T.$$

7. Запишите окончательный результат в виде:

$$T_0 = (T_0 \pm \Delta T_0) \text{ с}, \quad \varepsilon_1 = \ldots\%;$$
$$T = (T \pm \Delta T) \text{ с}, \quad \varepsilon_2 = \ldots\%.$$

8. Сравните значения периодов собственных колебаний, полученных двумя способами, и сделайте выводы относительно результатов измерений.

ВОПРОСЫ

1. Что называется гармоническими колебаниями? Каков закон колебательного движения пружинного маятника?
2. От каких параметров зависит собственная частота пружинного маятника?
3. Как объясняется факт, что собственная частота не зависит от амплитуды колебаний?

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

Глава I. Кинематика

Стр. 16 **10.** 3 м, 17 м; **11.** 2 км, 0,8 км; **12.** 1 м, 1,57 м, **13.** 118,6 м.

Стр. 20 **8.** 0; **9.** 4 единицы, 60° с осью *Ox* и 30° с осью *Oy*; **10.** $2\sqrt{5}$ единиц, 10 единиц.

Стр. 24 **6.** 12,5 м/с; **7.** 90 с; **8.** $x = 8 - 1{,}5\,t$; **9.** 4 с, 8 м и 12 м.

Стр. 27-28 **4.** 16 м/с; **5.** 5,4 м/с; **6.** 80 с; **7.** 45 с; **8.** 0,5 м/с; **9.** 3,16 м/с; 20 м, 63,2 м.

Стр. 38–39 **14.** 27 м/с; **15.** 4 м/с; **16.** 0,5 час.; **17.** –0,2 м/с^2, в направлении, противоположном скорости; **18.** 12 м/с; **19.** 5 м, 5 м, 13 м; **20.** 10 с; **21.** 45 м; **22.** 2 м/с, 8 м/с; **23.** 176,4 м, 58,8 м/с; **24.** В два раза, через 3 с (при подъеме) и через 7 с (при падении); **25.** 53,9 м, 44,1 м; **26.** 6 с, 53,9 м/с; **27.** 2,5 с.

Стр. 44 **8.** 18,84 м/с; **9.** 0,6 с; **10.** 465,2 м/с; **11.** 0,25 м; **12.** $\upsilon_{\text{сек.}}/\upsilon_{\text{мин.}} = 20$; **13.** 2,4 м/с^2; **14.** 1,6 м/с^2; **15.** 3,3 рад/с; **16.** 3 рад/с; **17.** 8 рад/с, 0,4 м.

Стр. 47 **4.** 81,63 м; **5.** 24 м/с, 2,12 с, 22,04 м, 25,44 м; **6.** 19,80 м/с; **7.** 15,04 м, 10,26 м/с; ≈ 13° под горизонталью; **8.** 35,41 м, 4,73 с, 163,85 м.

Глава II. Законы динамики. Силы в природе

Стр. 57–58 **12.** 0,6 кг; **13.** 7 кг; **14.** 1,125 кг; **15.** 4,8 м/с^2; **16.** 1,2 кг; **17.** 2 м/с^2.

Стр. 60 **3.** 25 Н; **4.** Нет, сила натяжения нити равна 10 Н.

Стр. 66 **10.** $5{,}97 \cdot 10^{24}$ кг; **11.** $2 \cdot 10^{30}$ кг; **12.** $3{,}8 \cdot 10^{8}$ м; **13.** 0,03 м/с^2; **14.** 3,6 км/с; **15.** 8.

Стр. 70–71 **6.** 7,5 см; **7.** 1 000 Н/м; **8.** *a*) 120 Н/м, *b*) 500 Н/м; **9.** 1,3 мм; **10.** 120 ГПа; **11.** 2,5 м/с^2; **12.** 1 м/с.

Стр. 76 **10.** Да; **11.** 0,6; **12.** 5 м/с; **13.** 0,02 м; **14.** 0,5.

Стр. 80–81 **1.** 0,75 м/с^2; **2.** 3,1 м/с^2; **3.** 1,9 м/с^2; **4.** 40,5 Н, 1,08 м; **5.** 1,2 Н, 5,1 Н.

Глава III. Элементы статики

Стр. 88–89 **6.** 30°, 1 018,4 Н; **7.** 980 Н; **8.** 24,0 Н, 4,8 Н.

Стр. 91–92 **7.** 0,7 м; **8.** 127,3 Н, 147 Н; **9.** 1,82 м, 264,6 Н; **10.** 14°.

Стр. 96 **4.** На 0,2 м к противоположному концу; **5.** На расстоянии 5,37 см от точки касания до центра медного шара; **6.** Выбираем ось *x* в направлении *AE* и ось *y* в направлении *AB* с началом в *A*. Координаты центра тяжести равны: $x_c = 14{,}09$ см, $y_c = 5{,}45$ см; **7.** ≈ 71°30′.

Глава IV. Механический импульс. Работа и механическая энергия

<u>Стр. 100</u> **5.** Импульс первой тележки больше в 1,5 раза; **6.** 2,7 м/с; **7.** 0,6 кг · м/с; 0; 1,2 кг · м/с; 0,85 кг · м/с; 0,6 kg · м/с; **8.** 9 000 кг · м/с; **9.** 2,5 с.

<u>Стр. 106</u> **5.** 0,8 м/с; **6.** 4,5 м/с; **7.** 0,05 м/с; **8.** 8 м/с, 53°; **9.** $2{,}77 \cdot 10^5$ кг.

<u>Стр. 108–109</u> **4.** 4 м; **5.** $2{,}8 \cdot 10^{35}$ кг · м^2/с; **6.** Увеличился в 9 раз.

<u>Стр. 113</u> **6.** 28 Н; **7.** 727 Дж; **8.** 30°; **9.** 2,5 м/с^2; **10.** 0,3; **11.** 150 Вт; **12.** 40 м/с.

<u>Стр. 117</u> **7.** 0,08 кг; **8.** Примерно в 1,5 раза; **9.** 40 Дж; **10.** 0,256 кг; **11.** 14 Н; **12.** 60 кДж, 100 кДж; **13.** В третьей доске.

<u>Стр. 122</u> **6.** Потенциальная энергия стального тела в 2,89 раза больше энергии алюминиевого; **7.** 80 м; **8.** 1 000 Дж; **9.** 4,5 кДж.

<u>Стр. 125</u> **5.** 10 Дж.; **6.** 1,5 Дж.; **7.** 0,32 Дж.; **8.** 3,3 Дж.

<u>Стр. 127</u> **4.** $A_{1231} = -F_{тр.}(l_1 + l_2 + \sqrt{l_1^2 + l_2^2}\,)$, $A_{12341} = -2F_{тр.}(l_1 + l_2)$; **5.** При большей скорости на одном и том же пути работа сил сопротивления будет по модулю больше, чем на малой скорости. Учитывая, что работа сил сопротивления в двух случаях отрицательна, то она на больших скоростях меньше, чем на малых.

<u>Стр. 133</u> **6.** 20 м; **7.** 15 м/с; **8.** 5,24 м/с, 1,92 м/с; **9.** 1,1 м/с; **10.** 0,5 м; **11.** 1,225 Дж; **12.** $(m_1 + m_2)\dfrac{m_2 \upsilon_2^2}{2m_1}$; **13.** 45 Дж, 5 Дж; **14.** –78,25 Дж; **15.** 1,76 Н, 9,42 м/с.

Глава V. Механические колебания и волны

<u>Стр. 137</u> **7.** 8 см; **8.** 3 с; **9.** 2 Гц.

<u>Стр. 148</u> **14.** 0,2 м; 0,628 с; $\pi/2$; $x(t) = 0{,}2 \sin(10t + \pi/2)$ (м); **15.** 0,4 кг; **16.** 0,25 м; **17.** 1,57 с; **18.** 0,24 Н/м; 6,4 Гц.

<u>Стр. 150</u> **4.** $x = 7 \sin(2\pi t + 1{,}43)$ (см); **5.** 2,24 см; 1,11 рад.

<u>Стр. 157–158</u> **8.** 3,67 км/с; **9.** 267 Н; **10.** 0,7 м/с.

<u>Стр. 160</u> **4.** π (рад); **5.** $y = 2 \sin(40\pi t - \dfrac{\pi}{6}x)$ (см); $\dfrac{43\pi}{6}$(рад); –1 см; **6.** $\pi/30$ (м$^{-1}$).

<u>Стр. 167–168</u> **7.** *a*) 1,5 м; *b*) 0,75 м; **8.** maxim – 1 000 м; minim – 1 250 м; **9.** 495,7 Гц.

Acest manual este proprietatea Ministerului Educației al Republicii Moldova.

Liceul ____________________

Manualul nr. ___

Anul de folosire	Numele de familie și prenumele elevului	Anul școlar	Aspectul manualului	
			la primire	la restituire
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

- Dirigintele trebuie să controleze dacă numele elevului este scris corect.
- Elevul nu trebuie să facă niciun fel de însemnări pe pagini.
- Aspectul manualului (la primire și la restituire) se va aprecia folosind termenii: *nou*, *bun*, *satisfăcător*, *nesatisfăcător*.

Imprimare la Tipografia „SEREBIA" SRL,
str. Calea Ieșilor, 10; MD-2069, Chișinău, Republica Moldova
Comanda nr. 116