МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РЕСПУБЛИКИ МОЛДОВА

Ион АКИРИ
Николае ПРОДАН
Валентин ГАРИТ
Думитру ТАРАГАН
Петру ЕФРОС
Анатол ТОПАЛЭ
Василе НЯГУ
Василе ЧОБАНУ

МАТЕМАТИКА

2-е издание, переработанное и дополненное

УЧЕБНИК

XI

класс

EDITURA PRUT

Manualul a fost aprobat prin ordinul Ministrului Educației al Republicii Moldova
nr. 267 din 11 aprilie 2014.
Lucrarea este elaborată conform curriculumului disciplinar şi finanţată din Fondul Special pentru Manuale.

Şcoala/Liceul ....
Manualul nr. ....

Anul de folosire	Numele şi prenumele elevului	Anul şcolar	Aspectul manualului	
			la primire	la returnare
1				
2				
3				
4				
5				

• Dirigintele clasei va controla dacă numele elevului este scris corect.
• Elevii nu vor face nici un fel de însemnări în manual.
• Aspectul manualului (la primire şi la returnare) se va aprecia: *nou*, *bun*, *satisfăcător*, *nesatisfăcător*.

Autori: *Ion Achiri*, doctor, conferenţiar universitar, IŞE (Capitolul 4)
Vasile Ciobanu, doctor, conferenţiar universitar, USM (Capitolul 1)
Petru Efros, doctor, conferenţiar universitar, USM (Capitolele 8–10)
Valentin Garit, doctor, conferenţiar universitar, USM (Capitolele 8–10)
Vasile Neagu, doctor habilitat, profesor universitar, USM (Capitolele 3, 5)
Nicolae Prodan, doctor, conferenţiar universitar, USM (Capitolele 6, 7)
Dumitru Taragan, doctor, conferenţiar universitar, USM (Capitolul 2)
Anatol Topală, doctor, conferenţiar universitar, USM (Capitolele 6, 7)

Comisia de evaluare: *Dorin Afanas*, doctor, conferenţiar universitar, UST
Andrei Corlat, doctor, conferenţiar universitar, AŞM
Aliona Pogreban, profesoară, grad didactic superior,
Liceul Teoretic „Gaudeamus”, Chişinău

Traducere din limba română: *Ion Achiri*, *Petru Efros*, *Antonina Erhan*, *Valentin Garit*, *Nicolae Prodan*
Redactor: *Tatiana Rusu*
Corector: *Lidia Paşa*
Copertă: *Sergiu Stanciu*
Paginare computerizată: *Valentina Stratu*

Editura *Prut Internațional*, str. Alba Iulia nr. 23, bl. 1 A, Chişinău, MD 2051
Tel.: 75 18 74; tel./fax: 74 93 18; e-mail: editura@prut.ro; www.edituraprut.md

Imprimat la F.E.-P. *Tipografia Centrală*. Comanda nr. 3536

CZU 51(075.3)
M 34

ISBN 978-9975-54-152-7

Предисловие

Данный учебник составлен в соответствии с действующим куррикулумом для лицеев, основанным на формировании компетенций.

Учебник структурирован по модулям. В начале каждого модуля приводятся образовательные цели, которые могут быть достигнуты в процессе изучения модуля. Задания, обозначенные *, рекомендованы только для реального профиля. Согласно куррикулуму для лицеев, учебник содержит разделы по математическому анализу, комплексным числам, высшей алгебре и геометрии.

На этом этапе изучения математики ученики знакомятся с ранее неизвестными им понятиями. Поэтому необходимо обращать внимание как на теоретический материал (определения, теоремы, свойства и т. д.) учебника, так и на приведенные примеры, задания с решением. Только в таком случае можно реализовать принципы конструктивности и формативности, положенные в основу изложения материала данного учебника.

Необходимо заметить, что в учебник включены некоторые понятия, методы и приемы, не предусмотренные куррикулумом, которые, однако, эффективнее способствуют достижению поставленных целей. Среди указанных: ступенчатая матрица, нахождение определителя, основанное на его разложении по строке или столбцу. В некоторых случаях посредством учебника авторы в некоторой степени конкретизируют и модернизируют куррикулум, исходя из требований перспективы преподавания–учения–оценивания математики в лицее.

Учебник составлен таким образом, что им можно пользоваться при преподавании математики как для реального профиля, так и для гуманитарного профиля, профиля искусства и спорта. Заметим, что **материал, обозначенный вертикальной чертой слева, предусмотрен только для реального профиля. Для гуманитарного профиля этот материал предлагается как дополнительный.** Кроме того, в соответствии с предусмотренными целями, упражнения и задачи, приведенные в конце каждого параграфа, а также в конце каждой главы, классифицированы по профилям. Буквой **А** обозначены предложенные упражнения и задачи для обоих профилей; буквой **Б** – только для реального профиля; для гуманитарного профиля эти задания могут быть дополнительными. Задания повышенной сложности обозначены звездочкой (*) и поэтому необязательны.

Проверочные работы предлагаются для двух профилей: **А** – гуманитарный профиль, искусство и спорт; **Б** – реальный профиль.

Некоторые указания призваны упростить организацию индивидуальной работы учеников. Кроме мотивационных упражнений, упражнений для закрепления и применения понятий, в учебнике приведены образцы решения типовых упражнений.

В данном учебнике использованы символы и обозначения, обычно встречающиеся в литературе и рекомендованные куррикулумом по математике для гимназии. Также использованы буквы греческого алфавита, который приведен ниже.

Учебник дает возможность ученикам с математическими способностями углубить свои знания, усваивая дополнительные теоретические понятия и выполняя задания повышенной сложности.

Уважаемые учителя! Дорогие учащиеся! Надеемся, что данный учебник станет полезным дидактическим инструментом в изучении математики. Также будем благодарны за Ваши отзывы, пожелания и предложения по совершенствованию учебника.

Авторы

Греческий алфавит

Буквы	Названия	Буквы	Названия
Α α	альфа	Ν ν	ню
Β β	бета	Ξ ξ	кси
Γ γ	гамма	Ο o	омикрон
Δ δ	дельта	Π π	пи
Ε ε	эпсилон	Ρ ρ	ро
Ζ ζ	дзета	Σ σ	сигма
Η η	эта	Τ τ	тау
Θ θ	тета	Υ υ	ипсилон
Ι ι	йота	Φ φ	фи
Κ κ	капа	Χ χ	хи
Λ λ	лямбда	Ψ ψ	пси
Μ μ	мю	Ω ω	омега

Модуль 1

Последовательности действительных чисел

Цели

- обозначение с помощью символов последовательностей, *подпоследовательностей действительных чисел;
- классификация последовательностей действительных чисел по разным критериям;
- применение арифметических и геометрических прогрессий в различных контекстах;
- *использование в различных контекстах понятия окрестности точки на множестве $\mathbb{R}$;
- *использование в различных контекстах понятия предела последовательности, применение соответствующих символов и терминологии;
- *применение свойств сходящихся последовательностей в различных контекстах.

Модули 1–5 учебника посвящены изучению начал математического анализа (или просто анализа) – одного из фундаментальных разделов математики. Анализ находит применение в физике, технике, геометрии, экономике и других областях. В основе математического анализа лежат понятия действительного числа и предела. Предмет исследования математического анализа – это функциональные зависимости, производные, интегралы, которые по существу являются соответствующими пределами. Прежде чем приступить к изучению предела функции, рассмотрим предел числовой последовательности.

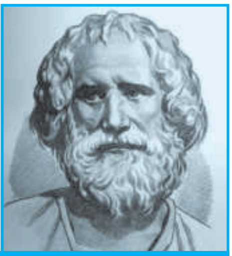
§1 Последовательности действительных чисел. Повторение и дополнения

1.1. Точные верхние и нижние грани множеств действительных чисел

Рассмотрим некоторые свойства множеств действительных чисел, необходимые для знакомства с начальными понятиями и методами математического анализа.

Аксиома непрерывности множества действительных чисел

Пусть A и B – два таких непустых подмножества $\mathbb{R}$, что для любого $a \in A$ и любого $b \in B$ верно соотношение $a \le b$. Тогда существует хотя бы один элемент $c \in \mathbb{R}$ такой, что $a \le c \le b$.



Архимед из Сиракуз

Принцип Архимеда[1]

Для любого $x \in \mathbb{R}$ существует единственное целое число m такое, что $m \le x < m+1$.

Число m называется ***целой частью*** числа x и обозначается $[x]$.

[1] Архимед из Сиракуз (287–212 до Р. Х.) – древне-греческий ученый.

Определения. • Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется **ограниченным сверху (снизу)**, если существует такое число $c \in \mathbb{R}$, что $x \le c$ $(x \ge c)$ для любого $x \in X$.
Число c называется **верхней (нижней) гранью** множества X.

• Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется **ограниченным**, если оно ограничено сверху и снизу, то есть, существуют действительные числа m, M такие, что $m \le x \le M$ для любого $x \in X$.

Для каждого из этих определений можно сформулировать логическое отрицание. Например, отрицание первого определения: множество $X \subset \mathbb{R}$ не ограничено сверху (снизу), если для любого $m \in \mathbb{R}$ найдется $x' \in X$ такой, что $x' > m$ $(x' < m)$. (Используя кванторы $\forall, \exists$, условие „для любого [для всех, для каждого] $m \in \mathbb{R}$ существует [найдется] $x' \in X$" можно записать так: $\forall m \in \mathbb{R}$, $\exists x' \in X$.)

Замечание. Любое множество $X \subset \mathbb{R}$, ограниченное сверху (снизу), имеет бесконечное число верхних (нижних) граней. Если число c – верхняя (нижняя) грань множества X, то любое другое число c_1, большее (меньшее), чем c, также является верхней (нижней) гранью множества X. Действительно, для любого $x \in X$, при котором $x \le c$ и $c < c_1$, следует, что $x \le c_1$, значит, c_1 также является верхней гранью.

Определение. Элемент $a \in X$ (если он существует), $X \subset \mathbb{R}$, называется **наибольшим** (соответственно **наименьшим**) элементом множества X, если $x \le a$ (соответственно $x \ge a$) для любого $x \in X$. Обозначают: $a = \max X$ $(a = \min X)$.

Пример

Для множества $A = \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ очевидно, что $\max A = 1$, а $\min A$ не существует.

Определения. • Наименьшая верхняя грань (если она существует) множества $X \subset \mathbb{R}$, ограниченного сверху, называется **точной верхней гранью**, или **супремумом** множества X, и обозначается $\sup X$.

• Наибольшая нижняя грань (если она существует) множества $X \subset \mathbb{R}$, ограниченного снизу, называется **точной нижней гранью**, или **инфинимумом** множества X, и обозначается $\inf X$.

Замечание. Если $\alpha = \inf X$ и $\beta = \sup X$, а $Y = \{-x \mid x \in X\}$, то $\inf Y = -\beta$ и $\sup Y = -\alpha$.

Примеры

1. Множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ не ограничено сверху, но ограничено снизу. Следовательно, множество $\mathbb{N}$ не ограничено. Множества $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ не ограничены ни сверху, ни снизу.

2. Множество $X = \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ ограничено, так как $\forall n \ge 1$ имеем $0 < \frac{1}{n} \le 1$.

3. Множество $A = \{\sin x \mid x \in \mathbb{R}\}$ ограничено, так как $-1 \le \sin x \le 1$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

Замечание. В примере **2**, $\inf X = 0 \notin X$, $\sup X = 1 \in X$, а в примере **3**, $\inf A = -1 \in A$, $\sup A = 1 \in A$. Таким образом, точная верхняя (нижняя) грань некоторого множества $X \subset \mathbb{R}$ может принадлежать или не принадлежать этому множеству.

Непустое множество, ограниченное сверху, имеет бесконечное число верхних граней, а его точной верхней гранью является наименьшая верхняя грань. Так как бесконечное множество чисел может не иметь наименьшего элемента (см. пример 2), возникает вопрос: есть ли точная верхняя (нижняя) грань у числового множества, ограниченного сверху (снизу).

Теорема 1. У любого непустого числового множества, ограниченного сверху (снизу), есть, и причем единственная, точная верхняя (нижняя) грань.

Доказательство

Пусть $X \subset \mathbb{R}$ – непустое множество, ограниченное сверху, а Y – множество всех верхних граней множества X, то есть, $Y = \{y \in \mathbb{R} \mid \forall x \in X,\ x \le y\}$.

По условию $X \ne \varnothing$, $Y \ne \varnothing$ и $x \le y$, $\forall x \in X$, $\forall y \in Y$. На основании аксиомы непрерывности множества действительных чисел, существует число c такое, что $\forall x \in X$ и $\forall y \in Y$

$$x \le c \le y \Leftrightarrow \begin{cases} x \le c, \\ c \le y. \end{cases} \tag{1}$$

Из первого неравенства системы (1) следует, что число c является верхней гранью множества X, а из второго неравенства следует, что число c является наименьшей верхней гранью множества X, значит, c – точная верхняя грань множества X. Таким образом, $c = \sup X$.

Докажем, что эта грань – единственная. Предположим противное. Пусть у множества X две различные точные верхние грани – c и c'. Например, $c' < c$. Так как $c = \sup X$ и $c' < c$, то по определению существует такой элемент $x_{c'} \in X$, что $x_{c'} > c'$. Это противоречит предположению, что $c' = \sup X$. Следовательно, $c = c'$.

Существование и единственность точной нижней грани множества, ограниченного снизу, доказывается аналогично. ►

Теорема 2 (характеристическое свойство точной верхней грани множества) Пусть $X \subset \mathbb{R}$ – непустое множество, ограниченное сверху. Число M^* является точной верхней гранью множества X тогда и только тогда, когда:
1) любой элемент $x \in X$ удовлетворяет неравенству $x \le M^*$;
2) для любого $\varepsilon > 0$ существует элемент $x_\varepsilon \in X$ такой, что $x_\varepsilon > M^* - \varepsilon$.

Теорема 3 (характеристическое свойство точной нижней грани множества) Пусть $X \subset \mathbb{R}$ – непустое множество, ограниченное снизу. Число m^* является точной нижней гранью множества X тогда и только тогда, когда:
1) любой элемент $x \in X$ удовлетворяет неравенству $x \ge m^*$;
2) для любого $\varepsilon > 0$ существует элемент $x_\varepsilon \in X$ такой, что $x_\varepsilon < m^* + \varepsilon$.

Доказательство этих теорем следует из определения точной верхней (нижней) грани множества.

Если множество X не ограничено сверху (снизу), то будем записывать $\sup X = +\infty$ $(\inf X = -\infty)$. Для $X = \mathbb{R}$ имеем $\inf \mathbb{R} = -\infty$ и $\sup \mathbb{R} = +\infty$. Для любых $x \in \mathbb{R}$ полагаем, что $-\infty < x < +\infty$.

Задания с решением

1. Определим точную верхнюю и точную нижнюю грани множества $A=\left\{1-\frac{1}{n}\;\middle|\; n\in\mathbb{N}^*\right\}$.

Решение:

Очевидно, что $0\le 1-\frac{1}{n}<1$ для любого $n\in\mathbb{N}^*$. Значит, множество A ограничено.

Докажем, что $\sup A=1$. Применим теорему о характеристическом свойстве точной верхней грани множества. Так как $1-\frac{1}{n}<1,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$, то первое условие теоремы 2 выполняется.

Заметим, что для любого $\varepsilon>0$ неравенство $1-\frac{1}{n}>1-\varepsilon$ имеет решения на множестве $\mathbb{N}^*$. Пусть n_ε – одно из этих решений. Получим, что для каждого $\varepsilon>0$ существует такое число $1-\frac{1}{n_\varepsilon}\in A$, что $1-\frac{1}{n_\varepsilon}>1-\varepsilon$. Следовательно, второе условие теоремы 2 выполняется. Значит, $\sup A=1$.

Докажем, что $\inf A=0$. Имеем $1-\frac{1}{n}\ge 0,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. Так как 0 принадлежит множеству A (при $n=1$), то $\inf A=0$. Заметим, что $\inf A=\min A\in A$, а $\sup A\notin A$.

2. Пусть множество $A=\left\{\frac{n^2}{n^2+4}\;\middle|\; n\in\mathbb{N}\right\}$.

а) Докажем, что множество A ограничено.

б) Определим точную верхнюю и точную нижнюю грани множества A.

Решение:

а) Заметим, что $0\le\frac{n^2}{n^2+4}<1$ для любого $n\in\mathbb{N}$. Значит, множество A ограничено.

б) Докажем, что $\sup A=1$. Применим теорему 2. Первое условие теоремы выполняется. Покажем, что для любого $0<\varepsilon<1$ неравенство $\frac{n^2}{n^2+4}>1-\varepsilon$ имеет решения на множестве $\mathbb{N}$. Решив это неравенство, получим $n>2\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-1}$ и, согласно принципу Архимеда, $\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ такое, что $n_\varepsilon>2\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-1}$, а именно $n_\varepsilon=\left[2\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-1}\right]+1$. Значит, $\sup A=1$.

Так как $\frac{n^2}{n^2+4}\ge 0,\ \forall n\in\mathbb{N}$, и $0\in A$, получим, что $\inf A=0$.

Замечание. Множество всех положительных правильных дробей не имеет ни наименьшего элемента, ни наибольшего элемента. Точной верхней гранью и точной нижней гранью этого множества соответственно являются числа 0 и 1.

1.2. Понятие числовой последовательности. Конечные последовательности, бесконечные последовательности. Подпоследовательности

Определение. Пусть $E\subset\mathbb{R}$ – подмножество. **Последовательностью действительных чисел** (или **числовой последовательностью**) называется числовая функция $f\colon \mathbb{N}^*\to E$.

Такая функция ставит в соответствие каждому натуральному числу $n\in\mathbb{N}^*$ единственное действительное число $f(n)\in E$.

Если функция f задана на конечном подмножестве последовательных элементов множества $\mathbb{N}^*$, то получаем ***конечную числовую последовательность***. В противном случае последовательность называется ***бесконечной числовой последовательностью***.

Условимся, вместо числа $f(n)$ писать x_n и обозначать последовательность так: $(x_n)_{n\geq 1}$. Число x_n называется ***n-м членом последовательности***, или ***общим членом последовательности***.

Замечания. **1.** Иногда функция f задана на множестве $\mathbb{N}$, тогда последовательность начинается с нулевого члена и, условимся писать $(x_n)_{n\geq 0}$, или задана на множестве $\mathbb{N}\setminus\{0, 1, ..., k-1\}$, тогда условимся писать $(x_n)_{n\geq k}$.
2. Числовые последовательности принято обозначать и так: $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$, $(c_n)_{n\geq 1}$, $(\alpha_n)_{n\geq 1}$, $(\beta_n)_{n\geq 1}$ и т. д.

Примеры

1. $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = \dfrac{1}{n}$, – это последовательность чисел, обратных ненулевым натуральным числам.

2. $(a_n)_{n\geq 0}$, $a_n = n$, – это последовательность натуральных чисел.

3. $(b_n)_{n\geq 2}$, $b_n = \sqrt{n-2}$, – это последовательность $0, 1, \sqrt{2}, ..., \sqrt{n-2}, ...$

Последовательность считается заданной, если указан способ, позволяющий найти любой член этой последовательности.

***Последовательность может быть задана*:**

1) *аналитически*, то есть, ***формулой общего члена последовательности***

По этой формуле можно найти любой член последовательности.

Например, для последовательности $(x_n)_{n\geq 1}$, заданной формулой общего члена $x_n = 1+(-1)^n$, имеем $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 0, x_4 = 2, ...$

2) *перечислением членов последовательности*

Например, последовательность простых чисел 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ...

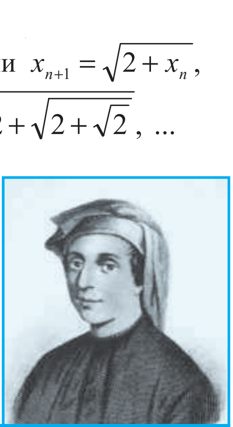
3) *рекуррентным соотношением*. В этом случае задаются один или несколько первых членов последовательности и рекуррентное соотношение, позволяющее получить последующие члены последовательности.

Примеры

1. При начальном условии $x_1 = \sqrt{2}$ и рекуррентном соотношении $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$, $\forall n \geq 1$, получим последовательность $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, $x_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, ...

2. Пусть $x_0 = 1$, $x_1 = 1$ и $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ для любого $n \geq 2$.
Найдем члены последовательности: $x_0 = 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = x_1 + x_0 = 2$, $x_3 = x_2 + x_1 = 3$, $x_4 = x_3 + x_2 = 5$, $x_5 = x_4 + x_3 = 8$, ...

Итак, получили последовательность 1, 1, 2, 3, 5, 8, ..., которая называется ***последовательностью Фибоначчи***[1].



Леонардо Пизанский (Фибоначчи)

Можно доказать, что общий член последовательности Фибоначчи выражается формулой:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right] \text{ для любого } n \in \mathbb{N}.$$

[1] Леонардо Пизанский (Фибоначчи) (1175–1250) – итальянский математик.

Последовательность Фибоначчи встречается во многих разделах математики: в комбинаторике, теории чисел, математическом анализе и др. В этой последовательности много интересного (например, все члены последовательности с номерами, кратными 3, – четные числа, с номерами, кратными 4, – делятся на 3, с номерами, кратными 15, – делятся на 10 и т. д.).

Определение. Две последовательности $(x_n)_{n\geq 1}$ и $(y_n)_{n\geq 1}$ называются **равными**, если $x_n = y_n$ для любого $n \in \mathbb{N}^*$.

Таким образом, последовательности $\left(\dfrac{1+(-1)^{n-1}}{2}\right)_{n\geq 1}$ и 1, 0, 1, 0, ... равны, а последовательности 1, 0, 1, 0, ... и 0, 1, 0, 1, ... не равны, несмотря на то, что имеют одно и то же множество значений их членов: $\{0, 1\}$.

Определение. Последовательность $(x_n)_{n\geq 1}$ называется **постоянной**, если $x_{n+1} = x_n$ для всех $n \in \mathbb{N}^*$.

Пример

Последовательность $(x_n)_{n\geq 1}$, заданная начальным значением $x_1 = 3$ и рекуррентным соотношением $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6}$, $\forall n \geq 1$, является постоянной: $x_1 = 3$, $x_2 = 3$, $x_3 = 3$, ...

1.3. Монотонные последовательности. *Ограниченные последовательности

Определения. • Последовательность $(x_n)_{n\geq 1}$ называется **возрастающей** (соответственно **убывающей**), если $x_n \leq x_{n+1}$ (соответственно $x_n \geq x_{n+1}$) $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

• Последовательность $(x_n)_{n\geq 1}$ называется **строго возрастающей** (соответственно **строго убывающей**), если $x_n < x_{n+1}$ (соответственно $x_n > x_{n+1}$) $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

• Возрастающие и убывающие последовательности называются **монотонными**.

• Строго возрастающие и строго убывающие последовательности называются **строго монотонными**.

Замечание. Существуют последовательности, которые не являются монотонными. Например, немонотонной является последовательность $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = (-1)^n$: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, ...

Чтобы выяснить, является ли последовательность $(x_n)_{n\geq 1}$ возрастающей или убывающей, можно поступить следующим образом:

1. Исследуем знак *разности* двух последовательных членов последовательности:

• если $x_{n+1} - x_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, то последовательность $(x_n)_{n\geq 1}$ возрастающая;

• если $x_{n+1} - x_n \leq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, то последовательность $(x_n)_{n\geq 1}$ убывающая.

2. Если члены последовательности положительные числа, то сравниваем с единицей *отношение* двух последовательных членов:

• если $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, и $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, то последовательность $(x_n)_{n\geq 1}$ возрастающая;

• если $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, и $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, то последовательность $(x_n)_{n\geq 1}$ убывающая.

Поставив знак „$>$“ („$<$“) вместо знака „$\geq$“ („$\leq$“), получим аналогичные критерии для строгой монотонности.

Задание с решением

Исследуем на монотонность последовательность $(x_n)_{n\geq 1}$, где:

а) $x_n = \dfrac{n+1}{n+2}$; б) $x_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Решение:

а) $x_{n+1} - x_n = \dfrac{(n+1)+1}{(n+1)+2} - \dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{n+2}{n+3} - \dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{(n+2)(n+2)-(n+1)(n+3)}{(n+3)(n+2)} =$

$= \dfrac{n^2+4n+4-n^2-4n-3}{(n+3)(n+2)} = \dfrac{1}{(n+3)(n+2)} > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

А это означает, что $x_{n+1} > x_n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$, то есть, последовательность строго возрастающая.

б) Заметим, что $x_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Тогда $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} : \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} \cdot n(n+1) = \dfrac{n}{n+2} < 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Следовательно, данная последовательность строго убывающая.

Определения. • Последовательность $(x_n)_{n\geq 1}$ называется **ограниченной сверху** (**ограниченной снизу**), если существует действительное число a (соответственно b) такое, что $x_n \leq a$ (соответственно $x_n \geq b$) для всех $n \in \mathbb{N}^*$.

• Последовательность $(x_n)_{n\geq 1}$ называется **ограниченной**, если она ограничена сверху и снизу, то есть существуют такие два числа $a, b \in \mathbb{R}$, что $a \leq x_n \leq b$ для всех $n \in \mathbb{N}^*$.

Последовательность $(x_n)_{n\geq 1}$ ***неограничена***, если $\forall M > 0$ найдется $n_M \in \mathbb{N}^*$ такой, что $|x_{n_M}| > M$.

Задания с решением

1. Исследуем на ограниченность последовательность $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = \dfrac{2n+1}{2n+3}$,

Решение:

$x_n = \dfrac{2n+1}{2n+3} > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$, следовательно, последовательность ограничена снизу.

Докажем, что последовательность ограничена и сверху.

В самом деле, $x_n = \dfrac{2n+1}{2n+3} = \dfrac{2n+1+2-2}{2n+3} = \dfrac{(2n+3)-2}{2n+3} = 1 - \dfrac{2}{2n+3} < 1,\ \forall n \geq 1$.

Итак, поскольку последовательность ограничена снизу и сверху, то она ограничена:

$$0 < \frac{2n+1}{2n+3} < 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

2. Исследуем на монотонность и на ограниченность последовательность $(x_n)_{n\geq 1}$, если $x_n = \dfrac{2^n}{n!}$.

Решение:

Выясним, является ли последовательность монотонной.

Имеем $x_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \dfrac{2^n}{n!} \cdot \dfrac{2}{n+1} \Leftrightarrow x_{n+1} = x_n \cdot \dfrac{2}{n+1} \Leftrightarrow \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{2}{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Так как $\dfrac{2}{n+1} \leq 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$, то $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \leq 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Следовательно, данная последовательность убывающая.
Очевидно, что последовательность ограничена, поскольку $0 < \frac{2^n}{n!} \le 2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Определение. Пусть $(x_n)_{n\ge1}$ – последовательность действительных чисел и $(n_k)_{k\ge1}$ – строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Последовательность $(x_{n_k})_{k\ge1}$ называется **подпоследовательностью** последовательности $(x_n)_{n\ge1}$.

Замечание. Последовательность $(a_n)_{n\ge1}$ имеет бесконечное число подпоследовательностей. Сама последовательность $(a_n)_{n\ge1}$ может рассматриваться как своя подпоследовательность. В этом случае $n_k = k,\ \forall k \in \mathbb{N}^*$.

Например, из последовательности $(x_n)_{n\ge1}$, $x_n = n$, можно извлечь подпоследовательности $(x_{n_k})_{k\ge1}$, $x_{n_k} = 2k+1$ или $x_{n_k} = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Упражнения и задачи

А

1. Приведите примеры конечных и бесконечных последовательностей.
2. Приведите пример строго убывающей числовой последовательности с положительными членами, которая „приближается“ к нулю.
3. Дана последовательность $(x_n)_{n\ge1}$, $x_n = \frac{2n+1}{n+4}$.
   а) Напишите первые пять членов последовательности.
   б) Исследуйте последовательность на монотонность.

Б

4. Приведите примеры подпоследовательностей последовательности.
5. Запишите при помощи кванторов отрицание высказывания:
   „Числовая последовательность $(x_n)_{n\ge1}$ ограничена сверху“.
6. Напишите первые пять членов последовательности $(x_n)_{n\ge1}$, $x_n = \frac{2n+(-1)^n}{3n}$.
7. Приведите пример строго убывающей числовой последовательности с отрицательными членами, которая „приближается“ к нулю.
8. Приведите примеры последовательностей, неограниченных: а) снизу; б) сверху.
9. Исследуйте на монотонность и на ограниченность последовательность $(x_n)_{n\ge1}$, если:
   а) $x_n = \frac{3n+1}{4n+3}$; б) $x_n = \frac{n-1}{n+1}$; в) $x_n = \frac{3n+1}{5n}$; г) $x_n = \frac{(-1)^n}{3^n}$; д) $x_n = \frac{2n}{n^2+3}$.
10. Дана последовательность $(x_n)_{n\ge1}$, общий член которой выражается формулой $x_n = \left(\frac{11}{10}\right)^n$.
    а) Напишите первые пять членов последовательности;
    б) Исследуйте последовательность на монотонность и ограниченность.
11. Докажите, что последовательность $(x_n)_{n\ge1}$, $x_n = \frac{3n-1}{3n+1}$, строго возрастающая и ограничена.
12. Пусть последовательность $(x_n)_{n\ge1}$ задана рекуррентным соотношением: $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{3^n}$, $\forall n \ge 1$, а $x_1 = 1$.
    а) Найдите формулу для общего члена последовательности.
    б) Исследуйте последовательность на монотонность.
    в) Исследуйте последовательность на ограниченность.

13. Последовательность $(x_n)_{n\geq1}$ задана рекуррентным соотношением $x_{n+1}=5x_n$, $\forall n\geq1$, а $x_1=3$.
а) Найдите формулу для общего члена последовательности.
б) Исследуйте последовательность на монотонность.

14. Последовательность $(x_n)_{n\geq1}$ задана рекуррентно: $x_1=-1$ и $x_{n+1}=x_n-2$, $\forall n\geq1$.
а) Найдите формулу для n-го члена последовательности.
б) Исследуйте последовательность на монотонность и ограниченность.

15. Напишите первые пять членов последовательности $(x_n)_{n\geq1}$ и найдите формулу для n-го члена этой последовательности, если:
а) $x_1=-10$, $x_{n+1}=x_n+5$ для $n\geq1$; б) $x_1=4$, $x_{n+1}=2x_n$ для $n\geq1$.
Исследуйте каждую последовательность на монотонность и ограниченность.

16. Последовательность $(x_n)_{n\geq1}$ с начальным условием $x_1=a$, $a\in\mathbb{R}^*$, задана рекуррентным соотношением с постоянными коэффициентами: $x_{n+1}=\alpha x_n+\beta$, $\forall n\geq1$; $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$.
Найдите формулу общего члена последовательности, если:
а) $\alpha=1$; $\beta\neq0$; б) $\alpha\neq0$; $\beta=0$; в) $\alpha\neq0$; $\beta\neq0$.

17. Последовательность $(x_n)_{n\geq1}$ задана рекуррентно: $x_1=3$, $x_{n+1}=x_n+5$, $\forall n\geq1$. Найдите формулу n-го члена последовательности.

§2 Арифметические прогрессии и геометрические прогрессии

В этои параграфе мы изучим последовательности, обладающие интересными свойствами, которые получили широкое применение в различных областях.

2.1. Арифметические прогрессии

2.1.1. Понятие арифметической прогрессии

Пусть дана последовательность действительных чисел $(a_n)_{n\geq1}$, в которой $a_1=2$ и $a_{n+1}=a_n+3$ для любого $n\geq1$. Тогда $a_1=2$, $a_2=a_1+3=2+3=5$, $a_3=a_2+3=5+3=8$, $a_4=a_3+3=8+3=11$, ...

Замечаем, что каждый член этой последовательности, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом 3.

> **Определение. Арифметической прогрессией** называется числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, получается из предыдущего прибавлением одного и того же числа.

Числовая последовательность $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ является арифметической прогрессией, если для любого $k\geq1$ имеем $a_{k+1}=a_k+r$, где r – действительное число. Число r называется ***разностью арифметической прогрессии***, а число a_1 – ***первым членом*** этой прогрессии.

Арифметическая прогрессия $(a_n)_{n\geq1}$ полностью определена, если известны ее первый член a_1 и разность r.

Если:
- $r>0$, то арифметическая прогрессия является ***строго возрастающей***;
- $r<0$, то арифметическая прогрессия является ***строго убывающей***;
- $r=0$, то арифметическая прогрессия является ***постоянной***.

Примеры

1. При $a_1 = 1,\ r = 2$ получим арифметическую прогрессию $1, 3, 5, 7, \ldots$

2. Для $a_1 = 1,\ r = -3$ получим арифметическую прогрессию $1, -2, -5, -8, \ldots$

3. При $a_1 = 7,\ r = 0$ получим арифметическую прогрессию $7, 7, 7, \ldots$

Определение. Говорят, что числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ **образуют арифметическую прогрессию**, если они являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии.

Арифметическая прогрессия получила свое название благодаря следующему важному свойству ее членов.

Теорема 4. Любой член арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots,$ начиная со второго, равен среднему арифметическому двух соседних с ним членов:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2},\quad \forall n \geq 2.$$

Задание. Докажите теорему 4.

Верно и обратное утверждение.

Теорема, обратная теореме 4. Если каждый член некоторой последовательности действительных чисел, начиная со второго, равен среднему арифметическому двух соседних с ним членов, то эта последовательность является арифметической прогрессией.

Доказательство

Предположим, что для любых трех последовательных членов последовательности $(a_n)_{n\geq 1}$ имеет место соотношение: $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2},\ n \geq 2.$

Тогда $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$, откуда получаем

$$a_n + a_n = a_{n-1} + a_{n+1} \quad \text{или} \quad a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n.$$

А это означает, что разность между последующим и предыдущим членами есть одно и то же число, значит, последовательность $(a_n)_{n\geq 1}$ – арифметическая прогрессия. ►

2.1.2. Формула общего члена арифметической прогрессии

Пусть a_1 – первый член арифметической прогрессии $(a_n)_{n\geq 1}$, а r – ее разность. Тогда по определению арифметической прогрессии получим:

$$\begin{aligned}
&a_2 = a_1 + r,\\
&a_3 = a_2 + r = (a_1 + r) + r = a_1 + 2r,\\
&a_4 = a_3 + r = (a_1 + 2r) + r = a_1 + 3r,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Теорема 5. Общий член арифметической прогрессии $(a_n)_{n\geq 1}$ задается формулой:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)\cdot r.} \tag{1}$$

Доказательство

Докажем формулу (1), используя метод математической индукции.

Обозначим через $A(n)$ утверждение из равенства (1).

1. Для $n=1$ утверждение $A(1)$ верно.

2. Пусть утверждение $A(k)$ верно для $k \geq 1$, то есть $a_k = a_1 + (k-1) \cdot r$.

Докажем, что верно и утверждение $A(k+1)$.

Действительно, $a_{k+1} = a_k + r = a_1 + (k-1) \cdot r + r = a_1 + k \cdot r$.

3. Согласно методу математической индукции, утверждение $A(n)$ верно для любого ненулевого натурального числа n. ►

Замечание. Арифметическую прогрессию $(a_n)_{n\geq 1}$ с разностью r можно задать рекуррентным соотношением $a_{n+1} = a_n + r$, $\forall n \geq 1$, или рекуррентным соотношением $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$, $\forall n \geq 1$, и первым членом a_1.

2.1.3. Формула суммы n первых членов арифметической прогрессии

Теорема 6. Пусть действительные числа $a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n$ образуют арифметическую прогрессию. Тогда сумма членов, равноудаленных от первого и последнего членов прогрессии, равна сумме первого и последнего членов прогрессии: $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$, для любых $k \geq 1$.

Доказательство

Пусть действительные числа $a_1, a_2, ..., a_n$ образуют арифметическую прогрессию. Если r – разность этой прогрессии, то

$$a_k = a_1 + (k-1) \cdot r \quad \text{и} \quad a_{n-k+1} = a_1 + (n-k) \cdot r,$$

откуда $a_k + a_{n-k+1} = [a_1 + (k-1)r] + [a_1 + (n-k)r] = 2a_1 + (n-1)r$.

Но $a_1 + a_n = a_1 + [a_1 + (n-1)r] = 2a_1 + (n-1)r$.

Таким образом, получили равенство $a_k + a_{n-k+1} = 2a_1 + (n-1)r = a_1 + a_n$. ►

Используя теорему 6, можно легко получить общую формулу для суммы n первых членов арифметической прогрессии.

Обозначим через S_n сумму n первых членов арифметической прогрессии $(a_n)_{n\geq 1}$ и запишем ее два раза следующим образом:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n,$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_3 + a_2 + a_1.$$

Сложив почленно эти равенства, получим:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + ... + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Согласно теореме 6, имеем:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = ... = a_{n-2} + a_3 = a_{n-1} + a_n.$$

Поэтому $2S_n = n(a_1 + a_n)$, следовательно, $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

Важно знать: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ (2) – формула суммы n первых членов арифметической прогрессии $(a_n)_{n\geq 1}$.

$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$ (3) – формула суммы n первых членов арифметической прогрессии, применяемая в случае, когда известны ее первый член a_1 и разность r.

Задание. Докажите формулу (3).

Задания с решением

1. Найдем сумму натуральных чисел от 1 до 100.

Решение:

Эти 100 чисел образуют арифметическую прогрессию. Первый член прогрессии равен 1, а последний член равен 100.

Значит, $S_{100}=\dfrac{a_1+a_{100}}{2}\cdot 100=\dfrac{1+100}{2}\cdot 100=5\,050.$

2. Найдем первый член арифметической прогрессии $(a_n)_{n\geq 1}$, если $a_{10}=131$, $r=12$.

Решение:

Применив формулу (1), получим: $131=a_1+(10-1)\cdot 12 \Leftrightarrow 131=a_1+108 \Leftrightarrow a_1=23.$

3. Найдем первый член и разность арифметической прогрессии $(a_n)_{n\geq 1}$, в которой $a_5=27$, $a_{27}=60$.

Решение:

Используя формулу (1), составим систему $\begin{cases} a_1+4r=27, \\ a_1+26r=60. \end{cases}$

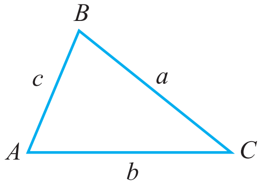
Решив эту систему, получим: $a_1=21$, $r=1{,}5$.

4. Вычислим сумму первых 100 членов арифметической прогрессии $(a_n)_{n\geq 1}$, в которой $a_1=10$, $a_{100}=150$.

Решение:

Применив формулу (2), получим: $S_{100}=\dfrac{10+150}{2}\cdot 100=80\cdot 100=8\,000.$

5. Докажем, что если котангенсы углов треугольника ABC образуют арифметическую прогрессию, то квадраты длин соответствующих сторон этого треугольника также образуют арифметическую прогрессию.



Решение:

Пусть R – радиус окружности, описанной около треугольника ABC. По условию задачи имеем, например, $\operatorname{ctg}A-\operatorname{ctg}B=\operatorname{ctg}B-\operatorname{ctg}C \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos A}{\sin A}-\frac{\cos B}{\sin B}=\frac{\cos B}{\sin B}-\frac{\cos C}{\sin C} \Leftrightarrow \frac{\sin B\cos A-\sin A\cos B}{\sin A\sin B}=\frac{\sin C\cos B-\sin B\cos C}{\sin B\sin C}.$$

Значит, $\dfrac{\sin(B-A)}{\sin A}=\dfrac{\sin(C-B)}{\sin C}.$

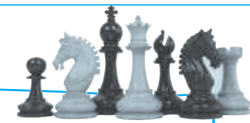
Так как $\sin C=\sin(B+A)$, $\sin A=\sin(B+C)$, получим

$$\sin(B-A)\sin(B+A)=\sin(C-B)\sin(C+B) \Leftrightarrow \sin^2 A-\sin^2 B=\sin^2 B-\sin^2 C.$$

Но $\sin A=\dfrac{a}{2R}$, $\sin B=\dfrac{b}{2R}$, $\sin C=\dfrac{c}{2R}$. Таким образом, $a^2-b^2=b^2-c^2$.

Следовательно, квадраты длин сторон треугольника, a^2, b^2, c^2, образуют арифметическую прогрессию.

2.2. Геометрические прогрессии



ЛЕГЕНДА О ШАХМАТНОЙ ИГРЕ

По преданию, шахматы были изобретены в IV веке от Р. Х. в Индии. Индусский царь был так восхищен этой игрой, что решил вознаградить изобретателя шахмат мудреца Сесса и очень удивился, когда тот попросил выдать ему за первую клетку шахматной доски одно пшеничное зерно, за вторую – 2 зерна, за третью – 4 зерна, за четвертую – 8 зерен и т. д. до 64-й клетки доски. Эта просьба показалась царю очень скромной. Так ли это?

2.2.1. Понятие геометрической прогрессии

Пусть дана последовательность действительных чисел $(b_n)_{n\geq 1}$, в которой $b_1 = 3$ и $b_{n+1} = b_n \cdot 4$ для любого $n \geq 1$.

Тогда $b_1 = 3,\ b_2 = b_1 \cdot 4 = 3 \cdot 4 = 12,\ b_3 = b_2 \cdot 4 = 12 \cdot 4 = 48,\ b_4 = b_3 \cdot 4 = 48 \cdot 4 = 192, \ldots$

Замечаем, что каждый член этой последовательности, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число 4.

Определение. **Геометрической прогрессией** называется числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый член, начиная со второго, получается из предыдущего умножением на одно и то же число.

Числовая последовательность $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ $(b_1 \in \mathbb{R}^*)$, является геометрической прогрессией, если для любого $k \geq 1$ имеем $b_{k+1} = b_k \cdot q$, $q \in \mathbb{R}^*$.

Число q называется ***знаменателем геометрической прогрессии***, а b_1 – ***первым членом*** этой прогрессии.

Геометрическая прогрессия $(b_n)_{n\geq 1}$ полностью определена, если известны ее первый член b_1 и знаменатель q.

Определение. Говорят, что числа $b_1, b_2, \ldots, b_n$ **образуют геометрическую прогрессию**, если они являются последовательными членами некоторой геометрической прогрессии.

Примеры

1. При $b_1 = 1$, $q = \dfrac{1}{2}$ получим геометрическую прогрессию $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2^2}, \ldots, \dfrac{1}{2^n}, \ldots$

2. При $b_1 = 2$, $q = -2$ получим геометрическую прогрессию $2, -4, 8, -16, 32, \ldots$

Геометрическая прогрессия с положительными членами получила свое название благодаря следующему важному свойству ее членов.

Теорема 7. Если все члены геометрической прогрессии $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{n-1}, b_n, b_{n+1}, \ldots$, положительны, то любой ее член, начиная со второго, равен среднему геометрическому соседних с ним членов: $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$, $\forall n \geq 2$.

Доказательство

По определению геометрической прогрессии $b_n = b_{n-1} \cdot q$ и $b_n = \dfrac{b_{n+1}}{q}$ для всех $n \geq 2$.

Поэтому $\dfrac{b_n}{b_{n-1}} = \dfrac{b_{n+1}}{b_n} = q$, откуда находим: $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$.

Так как $b_n > 0$, то получаем: $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$. ►

Замечание. Соотношение $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ (или $|b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$) справедливо для любой геометрической прогрессии $(b_n)_{n\geq 1}$.

Верно и обратное утверждение.

Теорема, обратная теореме 7. Если каждый член некоторой последовательности действительных положительных чисел, начиная со второго, равен среднему геометрическому соседних с ним членов, то эта последовательность является геометрической прогрессией.

Задание. Докажите теорему, обратную теореме 7.

2.2.2. Формула общего члена геометрической прогрессии

Пусть b_1 – первый член геометрической прогрессии $(b_n)_{n\geq 1}$ и q – ее знаменатель. Тогда по определению геометрической прогрессии получим:

$$b_2 = b_1 \cdot q,$$
$$b_3 = b_2 \cdot q = (b_1 \cdot q) \cdot q = b_1 \cdot q^2,$$
$$b_4 = b_3 \cdot q = (b_1 \cdot q^2) \cdot q = b_1 \cdot q^3,$$
....

Теорема 8. Общий член геометрической прогрессии $(b_n)_{n\geq 1}$ задается формулой:

$$\boxed{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.} \qquad (4)$$

Доказательство

Применим метод математической индукции.

Обозначим через $P(n)$ утверждение из равенства (4).

1. Для $n = 1$, утверждение $P(1)$ верно.

2. Пусть утверждение $P(k)$ верно для $k \geq 1$, то есть $b_k = b_1 \cdot q^{k-1}$.

Докажем, что верно утверждение $P(k+1)$.

Действительно, $b_{k+1} = b_k q = (b_1 q^{k-1}) q = b_1 q^k$.

3. Согласно методу математической индукции, утверждение $P(n)$ верно для любого ненулевого натурального числа n. ►

Замечание. Геометрическую прогрессию $(b_n)_{n\geq 1}$ со знаменателем q можно задать рекуррентным соотношением $b_{n+1} = b_n \cdot q$, $\forall n \geq 1$, и первым членом b_1.

2.2.3. Формула суммы n первых членов геометрической прогрессии

Пусть $(b_n)_{n\geq 1}$ – геометрическая прогрессия, первый член которой равен b_1 и q – ее знаменатель.

Замечание. Как и в случае арифметической прогрессии, для чисел $b_1, b_2, ..., b_n$, которые образуют геометрическую прогрессию, имеет место соотношение:

$$b_k \cdot b_{n-k+1} = b_1 \cdot b_n,$$

то есть, произведение членов, равноудаленных от первого и последнего членов прогрессии, равно произведению первого и последнего членов прогрессии.

Пусть сумма n первых членов этой прогрессии равна:

$$S_n = b_1 + b_2 + ... + b_n. \qquad (5)$$

Для того, чтобы вычислить S_n, рассмотрим два случая:

1) знаменатель $q=1$; тогда $S_n = b_1 \cdot n$.
2) знаменатель $q \neq 1$. Тогда умножим обе стороны равенства (5) на q и получим:

$$qS_n = b_1q + b_2q + \ldots + b_{n-1}q + b_nq.$$

Но $b_1q = b_2$, $b_2q = b_3$, ..., $b_{n-1}q = b_n$, следовательно,

$$qS_n = b_2 + b_3 + \ldots + b_n + b_nq. \qquad (6)$$

Вычитая почленно равенство (5) из равенства (6), получим:

$$qS_n - S_n = b_nq - b_1 \Leftrightarrow S_n \cdot (q-1) = b_nq - b_1.$$

Так как $q \neq 1$, то получим $S_n = \dfrac{b_nq - b_1}{q-1} = \dfrac{b_1 - b_nq}{1-q}$.

Важно знать: $S_n = \dfrac{b_1 - b_nq}{1-q}$, $q \neq 1$ – формула суммы n первых членов геометрической прогрессии $(b_n)_{n\geq 1}$.

$S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, $q \neq 1$ (7) – формула суммы n первых членов геометрической прогрессии $(b_n)_{n\geq 1}$, применяемая в случае, когда известны ее первый член b_1 и знаменатель q.

Задание. Докажите формулу (7).

Теперь вернемся к легенде о шахматной игре.

Чтобы ответить на вопрос, мы должны сложить зерна пшеницы, лежащие на клеточках доски, т. е. вычислить сумму $1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{63}$.

Имеем: $b_1 = 1$, $q = 2$, $b_{64} = 2^{63}$.

Тогда $S_{64} = \dfrac{2^{63}\cdot 2 - 1}{2-1} = 2^{64} - 1 = 18446744073709551615$.

Получили двадцатизначное число. Зная, что 30 000 000 зерен составляют приблизительно 1 тонну, убеждаемся, что желание мудреца Сесса не могло быть исполнено. (Сравните: мировой урожай зерна в 2012–2013 сельскохозяйственном году составил примерно 700 000 000 т, а мудрец попросил около 614 миллиардов тонн.)

Геометрическая прогрессия, в которой:

- $b_1 > 0$, $q > 1$ или $b_1 < 0$, $0 < q < 1$ является ***строго возрастающей***;
- $b_1 < 0$, $q > 1$ или $b_1 > 0$, $0 < q < 1$ является ***строго убывающей***;
- $q < 0$ не является монотонной;
- $q = 1$ является ***постоянной***.

Задание. Приведите по одному примеру для каждого случая.

Геометрическая прогрессия $(b_n)_{n\geq 1}$ называется ***бесконечно убывающей***, если для знаменателя прогрессии q верно неравенство $|q|<1$. Для бесконечно убывающей геометрической прогрессии $(b_n)_{n\geq 1}$ имеем :

$$S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1} = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1}{1-q}\cdot q^n.$$

При неограниченном увеличении n, q^n стремится к нулю („приближается“ к нулю), так как $|q|<1$, а сумма S_n стремится к значению выражения $\frac{b_1}{1-q}$. (См. также §3, п. 3.3.)

Задания с решением

1. Найдем первый член и знаменатель геометрической прогрессии $(b_n)_{n\geq 1}$, если $\begin{cases} b_2 - b_1 = -4, \\ b_3 - b_1 = 8. \end{cases}$

Решение:

Применив формулу (4), составим систему: $\begin{cases} b_1 q - b_1 = -4, \\ b_1 q^2 - b_1 = 8. \end{cases}$

Решив последнюю систему, получим $b_1 = 1$, $q = -3$.

2. Турист, взбираясь на гору, в первый час поднялся на 800 м. Каждый последующий час он поднимался на 25 м меньше, чем за предыдущий час. За какое время турист поднимется до отметки в 5 700 м?

Решение:

Числа 800, 775, 750, ... образуют арифметическую прогрессию, в которой $a_1 = 800$, $r = -25$. По условию задачи составим систему: $\begin{cases} a_n = x = 800 - 25(n-1), \\ S_n = \dfrac{800 + x}{2} \cdot n = 5\,700. \end{cases}$ Решив эту систему, получим $x = 1625$ м, $n = 8$ ч.

Ответ: 8 часов.

3. Найдем положительные числа x, y, z, которые одновременно удовлетворяют условиям:

1) числа x, y, z образуют геометрическую прогрессию;

2) числа x, $y+4$, z образуют арифметическую прогрессию;

3) числа x, $y+4$, $z+32$ образуют геометрическую прогрессию.

Решение:

По условию составим систему:

$$\begin{cases} xz = y^2 \\ x + z = 2(y+4) \\ x(z+32) = (y+4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xz = y^2 \\ y = 4x - 2 \\ z = 2y - x + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 - 20x + 4 = 0, \\ y = 4x - 2, \\ z = 7x + 4. \end{cases}$$

Решив последнюю систему, получим решение $x = 2$, $y = 6$, $z = 18$.

Упражнения и задачи

A

1. Запишите формулу общего члена последовательности:

а) 3, –3, 3, –3, …; б) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots$; в) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$; г) 1, 9, 25, 49, 81, …

2. Запишите первые четыре члена арифметической прогрессии $(a_n)_{n\geq 1}$, в которой:

а) $a_1 = 7$, $r = 2$; б) $a_1 = -3$, $r = 5$; в) $a_1 = 1{,}3$, $r = 0{,}3$; г) $a_1 = \frac{2}{7}$, $a_2 = \frac{1}{5}$.

3. Найдите первый член a_1 арифметической прогрессии $(a_n)_{n\geq 1}$, если:

а) $a_{10} = 131$, $r = 12$; б) $a_{200} = 0$, $r = -3$.

4. Запишите первые четыре члена геометрической прогрессии $(b_n)_{n\geq 1}$, в которой:

а) $b_1 = -10$, $q = \frac{1}{2}$; б) $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = \sqrt{3}$.

5. Для построения теплицы используют вертикальные металлические стержни, наименьший из которых равен 5 дм, а каждый следующий на 3 дм больше предыдущего. Найдите высоту седьмого, наибольшего стержня.

6. В амфитеатре 10 рядов. В первом ряду 100 мест, а в каждом следующем на 20 мест больше, чем в предыдущем. Сколько всего мест в амфитеатре?

7. Банк выплачивает 9% годовой прибыли. Какую сумму денег получит вкладчик через 5 лет, если его первоначальный вклад составляет 2 700 леев?

8. В горах температура воздуха летом при подъеме на каждые 100 м понижается в среднем на 0,7°C. У подножья температура составляет 26°C. Как высоко находится турист, если термометр показывает 14,8°C?

9. Людям, которые взялись копать колодец, обещали за первый метр заплатить 150 леев, а за каждый последующий метр – на 60 леев больше, чем за предыдущий. Сколько они заработают денег, выкопав колодец глубиной 12 метров?

10. В благоприятных условиях за один час каждая бактерия делится на две бактерии. Сколько бактерий размножится за 10 часов из одной бактерии?

Б

11. Найдите сумму первых пяти членов геометрической прогрессии $(b_n)_{n\geq 1}$, если $\dfrac{b_1+b_2}{b_2+b_3}=\dfrac{1}{3}$ и $b_1+b_2+b_3=52$.

12. Найдите формулу общего члена арифметической прогрессии $(a_n)_{n\geq 1}$ и S_n, если:

а) $a_1=-4,\ r=\dfrac{1}{3},\ n=14$;   б) $a_1=\dfrac{3}{5},\ r=\dfrac{1}{7},\ n=25$.

13. Докажите, что если числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию, то и числа $a^2-bc,\ b^2-ac,\ c^2-ab$ образуют арифметическую прогрессию.

14. Запишите формулу общего члена геометрической прогрессии $(b_n)_{n\geq 1}$, в которой:

а) $b_1=9,\ b_{n+1}=2b_n$;   б) $b_1=10,\ b_{n+1}=\dfrac{1}{5}b_n$.

15. Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии $(b_n)_{n\geq 1}$, если:

а) $b_4=-12,\ b_7=23\dfrac{7}{16}$;   б) $b_1+b_4=\dfrac{7}{16},\ b_3-b_2+b_1=\dfrac{7}{8}$.

16. Дана геометрическая прогрессия, у которой $S_3=40,\ S_6=60$. Найдите S_9.

17. Определите числа $x, y, z\in\mathbb{R}$, которые одновременно удовлетворяют условиям:
а) числа x, y, z образуют геометрическую прогрессию;
б) числа $x, y+a, z$ образуют арифметическую прогрессию;
в) числа $x, y+a, z+b$ образуют геометрическую прогрессию.

18. При каких значениях $x\in\mathbb{R}$ числа $2x-1,\ 2x+1,\ x+26$ образуют геометрическую прогрессию?

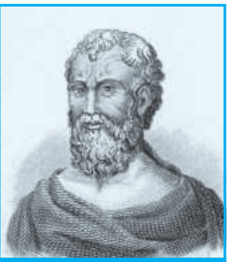
19. Найдите первый член геометрической прогрессии $(b_n)_{n\geq 1}$, если:
а) $S_4=12,\ q=3$;   б) $S_6=1,\ q=-2$.

20. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение: $1+7+13+\ldots+x=280$.

21. Длины сторон треугольника ABC, взятые последовательно, образуют возрастающую геометрическую прогрессию. Знаменатель этой прогрессии будет больше или меньше 2?

22. Представьте число 180 в виде суммы четырех положительных действительных чисел, которые образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q\neq\pm 1$, если известно, что третий член прогрессии на 36 больше, чем первый. Найдите два варианта.

§ 3 Предел последовательности. Сходящиеся последовательности, расходящиеся последовательности


Зенон Элейский

В античности греческие математики Архимед, Зенон Элейский[1] и другие применяли числовые последовательности для нахождения наилучших приближений некоторых величин. Намного позже были введены понятия сходящейся последовательности и предела.

3.1. Понятие предела последовательности

Окрестностью точки $a \in \mathbb{R}$ называется любой интервал вида $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Окрестность точки a обозначается $U(a, \varepsilon)$ или $V(a, \varepsilon)$.

Следовательно, $U(a, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid a-\varepsilon < x < a+\varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} \,\big|\, |x-a| < \varepsilon\}$.

Говорят, что точка x_0 является ***внутренней точкой*** множества X, если существует окрестность $U(x_0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, точки x_0 такая, что $U(x_0, \varepsilon) \subset X$.

Определение („на языке окрестностей“). Пусть $(x_n)_{n\geq 1}$ – последовательность действительных чисел и a – действительное число. Число a называется **пределом** последовательности $(x_n)_{n\geq 1}$, если любая окрестность числа a содержит все члены последовательности, за исключением, быть может, их конечного числа.

В этом случае пишут: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ (читают: „предел последовательности x_n при n, стремящемся к бесконечности, равен a“) или $x_n \to a$ при $n \to \infty$ (читают: „x_n стремится к a при n, стремящемся к ∞“). (Здесь lim – начальные буквы латинского слова *limes*, означающего „предел“.)

Замечание. Пишем $n \to \infty$, а не $n \to +\infty$, так как n – натуральное число, и не может возникнуть двусмысленности.

Определение („на языке ε“). Число $a \in \mathbb{R}$ называется **пределом** последовательности $(x_n)_{n\geq 1}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, что для каждого $n \in \mathbb{N}^*$, $n > n_\varepsilon$, выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Замечания. **1.** Для каждого определения можно сформулировать логическое отрицание. Например, логическое отрицание определения „на языке ε“: Число $a \in \mathbb{R}$ не является пределом последовательности $(x_n)_{n\geq 1}$, если $\exists \varepsilon_0 > 0$ такое, что $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists n > n_0$, при котором $|x_{n_0} - a| \geq \varepsilon_0$.

2. В определении предела последовательности на языке ε, вместо ε можно взять $\alpha\varepsilon$, где $\alpha > 0$ – фиксированное действительное число. Следовательно, критерий на языке ε можно сформулировать так: Число $a \in \mathbb{R}$ называется пределом последовательности $(x_n)_{n\geq 1}$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ такое, что $\forall n > n_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \alpha\varepsilon$, где $\alpha > 0$.

Задания с решением

1. Пусть последовательность $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = \dfrac{1}{n}$. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

[1] Зенон Элейский (490–430 до Р. Х.) – древне-греческий философ и математик.

Доказательство

Пусть U – произвольная окрестность точки 0, $U=(-\varepsilon,\varepsilon)$. Пусть $n\in\mathbb{N}^*$ такое, что $n>\frac{1}{\varepsilon}$, то есть, $0<\frac{1}{n}<\varepsilon$. Значит, $x_n=\frac{1}{n}\in(-\varepsilon,\varepsilon)=U$ при $n>\frac{1}{\varepsilon}$. Таким образом, члены данной последовательности, начиная с номера $n_\varepsilon=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$, содержатся в окрестности U точки 0.

Следовательно, число 0 является пределом последовательности $(x_n)_{n\geq1}$, $x_n=\frac{1}{n}$.

Важно знать: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$

2. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1}=2$.

Доказательство

Докажем, что для любого $\varepsilon>0$ найдется $n_\varepsilon\in\mathbb{N}^*$ такое, что для каждого $n\in\mathbb{N}^*$, $n>n_\varepsilon$, выполняется неравенство $\left|\frac{2n+1}{n+1}-2\right|<\varepsilon$. Вычислим $\left|\frac{2n+1}{n+1}-2\right|=\left|\frac{-1}{n+1}\right|=\frac{1}{n+1}$.

Для любого $\varepsilon>0$ положим, что $\left|\frac{2n+1}{n+1}-2\right|=\frac{1}{n+1}<\varepsilon$. Если $\varepsilon>\frac{1}{2}$, то неравенство $\frac{1}{n+1}<\varepsilon$ верно для любого $n\in\mathbb{N}^*$. Если $0<\varepsilon\leq\frac{1}{2}$, то неравенство верно для любого $n>\frac{1}{\varepsilon}-1$, $n\in\mathbb{N}^*$, и в этом случае полагаем $n_\varepsilon=\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]+1$, $n_\varepsilon\in\mathbb{N}^*$.

Значит, для любого $\varepsilon>0$ существует $n_\varepsilon\in\mathbb{N}^*$ такое, что неравенство $\left|\frac{2n+1}{n+1}-2\right|<\varepsilon$ верно для всех n, $n>n_\varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1}=2$.

3. Докажем, что у последовательности $(x_n)_{n\geq1}$, $x_n=(-1)^n$, нет предела.

Доказательство

Предположим противное, что существует такое число $a\in\mathbb{R}$, что $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n=a$. Тогда по определению предела для любого $\varepsilon>0$, в частности для $\varepsilon=\frac{1}{2}$, существует $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ такое, что для всех $n>n_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_n-a|<\frac{1}{2}$. Так как $x_n\in\{-1,1\}$, следовательно, одновременно выполняются неравенства $|1-a|<\frac{1}{2}$ и $|-1-a|<\frac{1}{2}$. Получим, что $2=|(1-a)+(a+1)|\leq|1-a|+|1+a|<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$, то есть, $2<1$, что неверно. Значит, у данной последовательности нет предела.

4. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0$, $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$.

Доказательство

Докажем, что для любого $\varepsilon>0$ существует $n_\varepsilon\in\mathbb{N}^*$ такое, что для всех $n\in\mathbb{N}^*$, $n>n_\varepsilon$, выполняется неравенство $\left|\frac{1}{n^\alpha}\right|<\varepsilon$, $\alpha>0$.

Действительно, для любого $\varepsilon > 0$, учитывая, что $\left|\frac{1}{n^\alpha}\right| = \frac{1}{n^\alpha}$ и решив неравенство $\left|\frac{1}{n^\alpha}\right| < \varepsilon$ относительно n, получим $n > \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}$. Заметим, что $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}\right]$ является натуральным числом. Значит, для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}\right] \in \mathbb{N}^*$ такое, что неравенство $\left|\frac{1}{n^\alpha} - 0\right| < \varepsilon$ верно для каждого $n \in \mathbb{N}^*$, $n > n_\varepsilon$. Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$, $\alpha > 0$.

Важно знать: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$, $\alpha > 0$.

Задание. Применив определение „на языке окрестностей“, докажите, что у последовательности $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = (-1)^n$, нет предела.

Определения. • Говорят, что числовая последовательность $(x_n)_{n\geq 1}$ имеет **предел плюс бесконечность**, пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такое, что неравенство $x_n > \varepsilon$ верно для каждого $n > n_\varepsilon$.

• Говорят, что числовая последовательность $(x_n)_{n\geq 1}$ имеет **предел минус бесконечность**, пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такое, что неравенство $x_n < -\varepsilon$ верно для каждого $n > n_\varepsilon$.

• Говорят, что числовая последовательность $(x_n)_{n\geq 1}$ имеет **бесконечный предел**, пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такое, что неравенство $|x_n| > \varepsilon$ верно для каждого $n > n_\varepsilon$.

Замечание. Очевидно, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Примеры

1. Пусть последовательность $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = n^2$. Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

2. Пусть последовательность $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = -2^n$. Имеем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

3. Для последовательности $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = (-1)^n \cdot n$, имеем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Задание с решением

Дана последовательность $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = q^n$, $q < -1$. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$.

Решение:

Согласно определению, надо показать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, что для каждого $n > n_\varepsilon$ верно неравенство $|q^n| > \varepsilon$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Неравенство $|q^n| > \varepsilon$ равносильно неравенству $|q|^n > \varepsilon$. Логарифмируя неравенство по основанию $|q|$, $|q| > 1$, получим:

$$\log_{|q|} |q|^n > \log_{|q|} \varepsilon \Leftrightarrow n > \log_{|q|} \varepsilon.$$

Значит, для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_\varepsilon = [\log_{|q|} \varepsilon] + 1$ такое, что неравенство $|q^n| > \varepsilon$ верно для каждого $n > n_\varepsilon$. Согласно определению $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$.

При доказательстве теорем и при выполнении заданий с бесконечными пределами иногда будем использовать следующие множества:

$$U(+\infty, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \varepsilon, \varepsilon > 0\};$$
$$U(-\infty, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\varepsilon, \varepsilon > 0\};$$
$$U(\infty, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > \varepsilon, \varepsilon > 0\},$$

которые называются ***окрестностями*** соответственно для $+\infty$, $-\infty$ и ∞.

В определениях окрестностей символов $+\infty$ и $-\infty$ условие $\varepsilon > 0$ иногда может быть опущено. Это условие необходимо, чтобы придать единообразие формулировкам понятий. Значит, окрестность любого конечного числа, $+\infty$, $-\infty$ и ∞ определяется положительным числом. Это условие иногда удобно при записи результатов, когда несущественно, каким является предел: конечным или бесконечным. Применив эту терминологию, определение конечного или бесконечного предела можно сформулировать следующим образом:

Определения. • Говорят, что число a (где a – конечное число, $+\infty$, $-\infty$ или ∞) является **пределом последовательности** $(x_n)_{n\geq1}$, если для любой окрестности $U(a, \varepsilon)$ точки a существует такое натуральное число n_u, что $x_n \in U$ для всех $n > n_u$.

• Последовательность, имеющая конечный предел, называется **сходящейся**. Последовательность, не являющаяся сходящейся (то есть последовательность, у которой нет предела, или предел равен бесконечности), называется **расходящейся**.

Теорема 9. Если последовательность действительных чисел имеет предел, то этот предел единственный.

Теорема 10 (Вейерштрасса[1]). Любая монотонная и ограниченная числовая последовательность является сходящейся.

Карл Вейерштрасс

Доказательство

Рассмотрим случай, когда последовательность $(x_n)_{n\geq1}$ возрастает и ограничена сверху. Тогда $x_n \leq x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Согласно условию, множество $\{x_n \mid n \geq 1\}$ непусто и ограничено. Пусть $x_0 = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*}(x_n)$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

По теореме о характеристическом свойстве точной верхней грани множества, для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что $x_{n_\varepsilon} > x_0 - \varepsilon$. Последовательность $(x_n)_{n\geq1}$ возрастающая, значит, $x_n > x_{n_\varepsilon} > x_0 - \varepsilon$ для любого $n > n_\varepsilon$. С другой стороны, из условия, что x_0 – точная верхняя грань, имеем $x_n \leq x_0 < x_0 + \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Таким образом, для любого $n > n_\varepsilon$ имеем $x_0 - \varepsilon < x_n < x_0 + \varepsilon$ или $|x_n - x_0| < \varepsilon$, то есть, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, и поскольку $x_0 \in \mathbb{R}$, последовательность $(x_n)_{n\geq1}$ является сходящейся. Аналогично доказывается случай, когда последовательность убывает и ограничена снизу. ▶

Задание с решением

Покажем, что последовательность $(x_n)_{n\geq1}$, заданная начальным условием $x_1 = \sqrt{2}$ и рекуррентным соотношением $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, $\forall n \geq 1$, является сходящейся.

[1] Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815–1897) – немецкий математик.

Решение:

Сначала докажем, что последовательность $(x_n)_{n\geq1}$ – возрастающая. Рассмотрим разность $x_{n+1}^2 - x_n^2$. Получаем: $x_{n+1}^2 - x_n^2 = 2 + x_n - x_n^2 = (1+x_n)(2-x_n) > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}^*$. Из последнего соотношения следует, что $x_{n+1}^2 > x_n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Так как $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, то получим, что $x_{n+1} > x_n$ для любого $n \in \mathbb{N}^*$. То есть, данная последовательность – возрастающая.

Применяя метод математической индукции, докажем, что последовательность ограничена сверху.

Имеем: $x_1 = \sqrt{2} < 2$, $x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} < \sqrt{2+2} = 2$.

Предположим, что $x_n < 2$. Тогда $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} < \sqrt{2+2} = 2$.

Из метода математической индукции вытекает, что $x_n < 2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

По теореме Вейерштрасса, последовательность $(x_n)_{n\geq1}$, монотонно возрастающая и ограниченная сверху, является сходящейся.

***Замечания.* 1.** В доказательстве теоремы 10 получили, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*}(x_n)$, если последовательность $(x_n)_{n\geq1}$ возрастающая. Если последовательность $(x_n)_{n\geq1}$ убывающая, то аналогично получаем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*}(x_n)$.

2. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то еще говорят, что ***последовательность*** $(x_n)_{n\geq1}$ ***сходится*** к числу a.

Теорема 11. Последовательность $(x_n)_{n\geq1}$ сходится к x_0 тогда и только тогда, когда любая ее подпоследовательность $(x_{n_k})_{k\geq1}$ сходится к x_0.

То есть $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$ для любой $(x_{n_k})_{k\geq1}$.

Замечание. Чтобы числовая последовательность не имела предела, достаточно, чтобы две ее подпоследовательности имели различные пределы.

3.2. Свойства сходящихся последовательностей

Пусть $(x_n)_{n\geq1}$ и $(y_n)_{n\geq1}$ – две числовые последовательности. Последовательности $(\lambda\cdot x_n)_{n\geq1}$, $\lambda\in\mathbb{R}$; $(x_n + y_n)_{n\geq1}$; $(x_n\cdot y_n)_{n\geq1}$; $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)_{n\geq1}$, $y_n \neq 0$, $\forall_n \in \mathbb{N}^*$; $(x_n^{y_n})_{n\geq1}$, $\forall x_n > 0$, $n\in\mathbb{N}^*$, соответственно называются ***произведение последовательности на число***, ***последовательностью–суммой***, ***последовательностью–произведением***, ***последовательностью–частным***, ***последовательностью–степенью***.

Естественным образом возникает вопрос: что можно сказать о пределах последовательностей, определенных выше, если последовательности $(x_n)_{n\geq1}$, $(y_n)_{n\geq1}$ имеют пределы, и если имеют, то как вычислить предел.

Теорема 12

1. Если последовательность $(x_n)_{n\geq1}$ является сходящейся и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, а число $\lambda\in\mathbb{R}$, то последовательность $(\lambda\cdot x_n)_{n\geq1}$ – сходящаяся, и $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda\cdot x_n) = \lambda\cdot a = \lambda\cdot\lim\limits_{n+\infty} x_n$, то есть, *постоянный множитель может быть вынесен за знак предела*.

2. Если последовательности $(x_n)_{n\ge1}$ и $(y_n)_{n\ge1}$ являются сходящимися и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то последовательность $(x_n + y_n)_{n\ge1}$ – сходящаяся, и $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, то есть, *предел суммы двух сходящихся последовательностей равен сумме пределов этих последовательностей.*

3. Если последовательности $(x_n)_{n\ge1}$ и $(y_n)_{n\ge1}$ являются сходящимися и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то последовательность $(x_n \cdot y_n)_{n\ge1}$ – сходящаяся, и $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a\cdot b = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, то есть, *предел произведения двух сходящихся последовательностей равен произведению пределов этих последовательностей.*

4. Если последовательности $(x_n)_{n\ge1}$ и $(y_n)_{n\ge1}$ являются сходящимися и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ $(y_n \ne 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*)$ и $b \ne 0$, то последовательность $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)_{n\ge1}$ – сходящаяся, и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{a}{b} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$, то есть *предел частного двух сходящихся последовательностей равен частному пределов этих последовательностей.*

3.3. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии

Теорема 13. Пусть последовательность $(S_n)_{n\ge1}$, $S_n = b_1 + b_1q + \ldots + b_1q^{n-1}$, у которой $0 < |q| < 1$ и $b_1 \ne 0$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{b_1}{1-q}$.

Доказательство

Сумму первых n членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии $b_1,\ b_1q,\ b_1q^2,\ \ldots$ можно записать в виде $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} b_1q^{i-1}$, $|q|<1$.

Зная, что $S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, $|q|<1$, получаем:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{b_1}{1-q}\cdot\lim_{n\to\infty}(1-q^n) = \frac{b_1}{1-q},\ \text{так как}\ \lim_{n\to\infty} q^n = 0. \quad ►$$

3.4. Число *e*

Теорема 14. Последовательность $(x_n)_{n\ge1}$, $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, является сходящейся.

Доказательство

Применим теорему 10 (Вейерштрасса) из пункта 3.1 и *неравенство средних*:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n},\quad a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+.$$

Покажем, что последовательность $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, $n \ge 1$, монотонна и ограничена.

Докажем монотонность последовательности $(x_n)_{n\ge1}$.

Рассмотрим числа $\underbrace{1+\dfrac{1}{n},\ 1+\dfrac{1}{n},\ \ldots,\ 1+\dfrac{1}{n}}_{n\ \text{раз}},\ 1.$

Согласно неравенству средних, для этих $n+1$ положительных чисел верно неравенство:

$$\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 1} \Leftrightarrow \frac{n+2}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \Leftrightarrow \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad \forall n \geq 1.$$

Значит, $x_n < x_{n+1}$, $\forall n \geq 1$, откуда следует, что данная последовательность строго возрастает.

Докажем, что данная последовательность ограничена сверху. Рассмотрим следующие $n+2$ положительные числа $\underbrace{1+\frac{1}{n},\ 1+\frac{1}{n},\ \ldots,\ 1+\frac{1}{n}}_{n \text{ раз}},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}$.

Из неравенства средних для этих $n+2$ чисел следует, что

$$\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{n+2} > \sqrt[n+2]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n+2}{n+2} > \sqrt[n+2]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{4}} \Leftrightarrow 1 > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 4, \quad \forall n \geq 1.$$

Значит, последовательность $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \geq 1$, ограничена сверху. Последовательность $(x_n)_{n\geq 1}$ монотонно возрастает и ограничена сверху, следовательно, по теореме Вейерштрасса, является сходящейся. ►

Предел последовательности $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, следуя Эйлеру[1], обозначают через *e*. Число *e* является иррациональным и принадлежит интервалу $(2, 3)$. Иррациональность числа *e* была доказана в 1815 году Ж. Фурье[2]. В 1728 году Д. Бернулли[3] установил, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}7182818284590\ldots$$

Леонард Эйлер

Даниил Бернулли

Важно знать: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \quad (8)$

Жозеф Жан Батист Фурье

Замечание. Число *e* – фундаментальная константа математического анализа. Логарифм по основанию *e* широко используется в математике, физике и других областях, называется ***натуральным логарифмом***, и обозначается $\ln x \ (= \log_e x)$.

[1] Леонард Эйлер (1707–1783) – швейцарский математик, физик и астроном.
[2] Жозеф Жан Батист Фурье (1768–1830) – французский математик.
[3] Даниил Бернулли (1700–1782) – швейцарский математик и физик.

Задания с решением

1. Вычислим $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+8}{3n+7}\right)^{6n+1}$.

Решение:

Применив теорему 11 и соотношение (8), получим:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+8}{3n+7}\right)^{6n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n+7}\right)^{6n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n+7}\right)^{\frac{3n+7}{1}\cdot\frac{1}{3n+7}\cdot(6n+1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{3n+7}\right)^{\frac{3n+7}{1}}\right\}^{\frac{1(6n+1)}{3n+7}}=e^2.$$

2. Вычислим предел последовательности $(x_n)_{n\geq 1}$, если:

а) $x_n=\sqrt{n^2+2n-3}-n$;

б) $x_n=\dfrac{n+2}{3n+1}$;

в) $x_n=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$;

г) $x_n=\dfrac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$.

Решение:

а) Умножим и разделим выражение на сопряженное ему выражение:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n-3}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+2n-3)-n^2}{\sqrt{n^2+2n-3}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-3}{\sqrt{n^2+2n-3}+n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(2-\frac{3}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}}+1\right)}=1.$$

б) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n\left(3+\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{3+\frac{1}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right)}=\frac{1+0}{3+0}=\frac{1}{3}.$$

в) Умножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=0.$$

г) Воспользуемся формулой суммы n первых членов геометрической прогрессии:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}}{\dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}}=\frac{4}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}=\frac{4}{3}.$$

Упражнения и задачи

Б

1. Приведите примеры сходящихся, расходящихся числовых последовательностей.

2. Применяя понятие подпоследовательности, докажите, что последовательность $(x_n)_{n\geq1}$, $x_n=(-1)^n$, расходящаяся.

3. Пользуясь определением предела числовой последовательности, докажите, что:
а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n-1}{n}=4$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{n^2}=2$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-3}{4n+5}=\frac{1}{2}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n+6}{n+1}=5$.

4. Пользуясь определением предела последовательности, докажите, что:
а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+1}\neq\frac{1}{2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{5n+1}\neq1$.

5. Применяя теорему Вейерштрасса, докажите сходимость последовательности $(x_n)_{n\geq1}$, если:
а) $x_n=\frac{2n+1}{n+1}$; б) $x_n=1+\frac{1}{3^n}$; в) $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

6. Вычислите предел:
а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2+n}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{3^n}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{3n+1}$;
д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{C_n^2}{2^n}\right)$; е) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$; ж) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n+5\cdot2^n}{4^n+5^{n+1}}$; з) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n+3}-n)$;
и) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{4^n}}$; к) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n}$; л) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-2+3-4+\ldots-2n}{n}$;
м) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{2n^2+1}+\frac{\sqrt{n}+2}{n+3}\right)$; н) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+3}\right)^n$; о) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!-n!}$.

Упражнения и задачи на повторение

А

1. Запишите первые пять членов последовательности $(x_n)_{n\geq1}$, заданной формулой:
а) $x_n=\frac{3n-2}{2+n}$; б) $x_n=\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot n\right)$; в) $x_n=(-1)^n\cdot7+\frac{1}{n}$.

2. Найдите формулу n-го члена последовательности:
а) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \ldots$; б) 2, 4, 6, 8, 10, ...; в) 3, –3, 3, –3, ...; г) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$

3. Приведите примеры: а) конечных последовательностей; б) бесконечных последовательностей; в) монотонных последовательностей.

4. Выясните, является ли монотонной последовательность $(x_n)_{n\geq1}$, $x_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

5. Запишите формулу общего члена арифметической прогрессии $(a_n)_{n\geq1}$, в которой:
а) $a_1=-2$ и $r=-4$; б) $a_1=1$ и $r=2$; в) $a_1=-10$ и $r=5$; г) $a_1=3$ и $r=7$.

6. Найдите сумму первых 100 членов арифметической прогрессии $(a_n)_{n\geq1}$, если:
а) $a_1=2$, $r=-5$; б) $a_1=-1$, $r=1$.

7. Найдите $x\in\mathbb{R}$, при котором числа образуют арифметическую прогрессию:
а) $1+x^2$, $(a+x)^2$, $(a^2+x)^2$; б) a^2+x, $ab+x$, b^2+x.

8. Запишите формулу общего члена геометрической прогрессии $(b_n)_{n\geq 1}$, в которой:

а) $b_1 = 2,\ q = 6$; б) $b_1 = -10,\ q = \frac{1}{2}$; в) $b_1 = 3,\ q = 2$.

9. Выясните, является ли последовательность $(x_n)_{n\geq 1}$ арифметической или геометрической прогрессией, если:

а) $x_1 = 2,\ x_{n+1} = 3x_n$; б) $x_1 = 4,\ x_{n+1} = 2 + x_n$; в) $x_1 = -4,\ x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n$; г) $x_1 = -1,\ x_{n+1} = 5 + x_n$.

В положительном случае найдите формулу общего члена прогрессии и ее разность или соответственно знаменатель.

10. Пусть числа $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n$ образуют арифметическую прогрессию.

а) Найдите n и S_n, если $a_n = 5,\ a_1 = 23,\ r = -2$;

б) Найдите a_1 и n, если $a_n = 18,\ r = 2,\ S_n = 88$.

11. Пусть числа $b_1,\ b_2,\ ...,\ b_n$ образуют геометрическую прогрессию. Найдите S_n, если:

а) $b_n = 1280,\ b_1 = 5,\ n = 9$; б) $b_n = 384,\ q = 2,\ n = 8$.

12. Велосипедист проехал за первый час 8 км. За каждый следующий час от проезжал расстояние на 2 км больше, чем за предыдущий. За сколько часов он преодолел 60 км?

13. Камень, брошенный в скважину, проходит за первую секунду 4,9 м, и его скорость увеличивается на 9,8 м/с. Найдите глубину скважины, если камень достиг ее дна через 8 с.

14. Найдите значения $x \in \mathbb{R}$, при которых числа $2x-2,\ x^2+1,\ 3x^2-1$ образуют арифметическую прогрессию.

15. Извлеките подпоследовательности из последовательности $(x_n)_{n\geq 1}$, если:

а) $x_n = 1 + (-1)^n$; б) $x_n = \frac{2^n + (-2)^n}{2^n}$; в) $x_n = n \cdot \sin\frac{n\pi}{2}$; г) $x_n = \cos n\pi$; д) $x_n = \frac{2n + (-1)^n}{3n}$.

Б

16. Длины сторон треугольника образуют арифметическую прогрессию с разностью 2. Косинус наименьшего угла этого треугольника равен $\frac{4}{5}$. Найдите периметр треугольника.

17. Применяя определение предела последовательности, докажите, что:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1} = 2$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n^2+1} = 0$.

18. Пользуясь определением предела последовательности, докажите, что:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n+1}{3n} \neq \frac{9}{4}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{2n+1} \neq 1$.

19. Из полного сосуда, содержащего 729 л кислоты, забрали a литров кислоты, затем дополнили сосуд водой. После получения однородного раствора опять забрали a литров кислоты и столько же долили воды. Эту процедуру проделали 6 раз, и после этого в сосуде осталось 64 л кислоты. Найдите величину a.

20. Найдите сумму всех двузначных натуральных чисел, которые при делении на 4 дают в остатке 1.

21. Докажите, что числа $(a+x)^2,\ a^2+x^2,\ (a-x)^2,\ a, x \in \mathbb{R}$, образуют арифметическую прогрессию. Найдите сумму первых n членов прогрессии, если $(a+x)^2$ – первый член.

22. Вычислите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n+1}{2^n+1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}(2n^3 - n^2 + 1)$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + 3n - n^5)$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2-3n}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n} + \frac{2n}{3n+1}\right)$; е) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+...+n}{n^2}$;

ж) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$; з) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$; и) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})$.

Проверочная работа

А

Время выполнения работы: 45 минут

1. Запишите первые 5 членов последовательности $(x_n)_{n\geq 1}$: ②

а) $x_n = \dfrac{3n-2}{n+2}$; б) $x_n = \dfrac{1+(-1)^n}{3}$.

2. Исследуйте на монотонность последовательность $(x_n)_{n\geq 1}$, заданную формулой: ②

$$x_n = \frac{2n-1}{2n+1}.$$

3. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии $(a_n)_{n\geq 1}$, в которой: $a_2 + a_4 = 16$, $a_1 a_5 = 28$. ②

4. Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии $(b_n)_{n\geq 1}$, если: $b_2 - b_1 = -4$, $b_3 - b_1 = 8$. ②

5. Чтобы поднять пианино на второй этаж, заплатили 3 у.е., а за каждый следующий этаж платили в два раза больше, чем за предыдущий. Определите, на какой этаж подняли пианино, если за последний этаж заплатили 48 у.е. ②

Б

Время выполнения работы: 90 минут

1. Запишите первые пять членов последовательности $(x_n)_{n\geq 1}$: ①

$$x_n = (-1)^{n-1}\cdot\left(2+\frac{3}{n}\right).$$

2. Найдите общий член геометрической прогрессии $(b_n)_{n\geq 1}$, если $b_1 = 4$, $b_{n+1} = (-3)\cdot b_n$. ①

3. Исследуйте на монотонность последовательность $(x_n)_{n\geq 1}$, заданную формулой общего члена: ①

$$x_n = 1+\frac{n}{n^2+1}.$$

4. Применяя теорему Вейерштрасса, докажите сходимость последовательности $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = \dfrac{10\cdot 11\cdot\ldots\cdot(n+9)}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}$. ②

5. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии $(a_n)_{n\geq 1}$, в которой $a_1 + a_5 = \dfrac{5}{3}$, $a_3\cdot a_4 = \dfrac{65}{72}$. ①

6. Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии $(b_n)_{n\geq 1}$, если: $b_4 - b_2 = -\dfrac{45}{32}$, $b_6 - b_4 = -\dfrac{405}{512}$. ②

7. За изготовление и монтаж нижнего кольца скважины заплатили 26 у.е., а за каждое следующее кольцо платили на 2 у.е. меньше, чем за предыдущее. Дополнительно заплатили еще 40 у.е. Средняя цена за изготовление и монтаж одного кольца $22\dfrac{4}{9}$ у.е. Найдите, сколько всего колец было смонтировано. ②

Последовательности действительных чисел

Числовая последовательность

$f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$

Обозначают: $(x_n)_{n\geq 1}$

Способы задания последовательности

1) аналитический;
2) перечислением членов последовательности;
3) рекуррентным соотношением.

Ограниченная последовательность

сверху:
$\exists M \in \mathbb{R}$: $x_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

снизу:
$\exists m \in \mathbb{R}$: $x_n \geq m$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Равные последовательности

$(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ равны $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ $x_n = y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Свойства сходящихся последовательностей

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda \cdot x_n) = \lambda \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, λ – const.
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$
5. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)^{y_n} = [\lim\limits_{n\to\infty} x_n]^{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$

Последовательность-сумма

$(x_n + y_n)_{n\geq 1}$

Последовательность-произведение

$(x_n \cdot y_n)_{n\geq 1}$

Теорема о характеристическом свойстве точной верхней грани множества

Пусть $X \subset \mathbb{R}$ – непустое множество, ограниченное сверху. Число M^* является точной верхней гранью множества X тогда и только тогда, когда:
1) любой элемент $x \in X$ удовлетворяет неравенству $x \leq M^*$;
2) для любого $\varepsilon > 0$ существует элемент $x_\varepsilon \in X$ такой, что $x_\varepsilon > M^* - \varepsilon$.

Теорема о характеристическом свойстве точной нижней грани множества

Пусть $X \subset \mathbb{R}$ – непустое множество, ограниченное снизу. Число m^* является точной нижней гранью множества X тогда и только тогда, когда:
1) любой элемент $x \in X$ удовлетворяет неравенству $x \geq m^*$;
2) для любого $\varepsilon > 0$ существует элемент $x_\varepsilon \in X$ такой, что $x_\varepsilon < m^* + \varepsilon$.

Теорема Вейерштрасса

Любая монотонная и ограниченная числовая последовательность является сходящейся.

Монотонная последовательность

возрастающая: $x_n \leq x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

убывающая: $x_n \geq x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Последовательность-частное

$\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)_{n\geq 1}$

Последовательность-степень

$((x_n)^{y_n})_{n\geq 1}$

Арифметическая прогрессия

$a_n = a_1 + r(n-1)$, $n \in \mathbb{N}^*$

$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$, $n \in \mathbb{N}^*$

$a_k = \dfrac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$, $k \in \mathbb{N}^*$

Геометрическая прогрессия

$b_n = b_1 q^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$

$S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, $n \in \mathbb{N}^*$

$b_k^2 = b_{k-1} \cdot b_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}^*$

Неравенство средних

$\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$,
$a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$

Число *e*

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$

Модуль 2

Предел функции

Цели

- *определение предельных и изолированных точек множества;
- применение эквивалентных определений предела функций в точке*, использование понятия *односторонние пределы*, *распознавание функций, имеющих или не имеющих предел в данной точке;
- *вычисление пределов элементарных и сложных функций в точке, *применение признаков существования предела функции и алгебраических операций над пределами функций;
- *применение замечательных пределов при вычислении пределов функций, *распознавание неопределенностей и использование методов их раскрытия.

§1 Предел функции в точке

1.1. Предельные точки множества

Пусть $E \subseteq \mathbb{R}$ – подмножество множества действительных чисел и $f\colon E \to \mathbb{R}$ – некоторая функция. В этом модуле рассматривается поведение функции f в окрестности точки x_0, которая, в общем случае, не принадлежит множеству E, то есть исследуется, что происходит со значениями $f(x)$ функции f, если значения аргумента x, $x \neq x_0$, сколь угодно близки к x_0. Для того, чтобы аргумент $x \in E$ приближался достаточно близко к x_0, необходимо, чтобы в любой окрестности x_0 находились точки множества E, то есть, чтобы точка x_0 была предельной точкой множества E.

Определение. Пусть $E \subseteq \mathbb{R}$. Точка $x_0 \in \mathbb{R}$ называется **предельной точкой** множества E, если в любую окрестность x_0 попадает хотя бы одна точка множества $E \setminus \{x_0\}$.

Следовательно, $x_0 \in \mathbb{R}$ является ***предельной точкой*** множества E, если для любой окрестности V точки x_0 верно соотношение $V \cap (E \setminus \{x_0\}) \neq \varnothing$. И наоборот, $x_0 \in \mathbb{R}$ ***не является предельной точкой*** множества E, если существует окрестность V' точки x_0, которая не содержит ни одной точки множества $E \setminus \{x_0\}$, то есть $V' \cap (E \setminus \{x_0\}) = \varnothing$. Точка $x_0 \in E$, не являющаяся предельной точкой для E, называется ***изолированной точкой*** множества E. Множество $E \subseteq \mathbb{R}$ называется ***замкнутым множеством***, если ему принадлежат все его предельные точки. Ограниченное и замкнутое множество называется ***компактным множеством***.

Теорема 1. Точка $x_0 \in \mathbb{R}$ является предельной точкой множества $E \subseteq \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда существует последовательность $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n \in E \setminus \{x_0\}$, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Доказательство

Необходимость. Предположим, что x_0 является предельной точкой множества E, и рассмотрим окрестности $V_n = \left(x_0 - \dfrac{1}{n},\ x_0 + \dfrac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, точки x_0. Тогда в каждую окрестность V_n попадает хотя бы одна точка $x_n \in E$, $x_n \neq x_0$, то есть $x_0 - \dfrac{1}{n} < x_n < x_0 + \dfrac{1}{n}$, откуда следует, что $|x_n - x_0| < \dfrac{1}{n} < \varepsilon$ для любого $n > \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Достаточность. Если множество E содержит последовательность $(x_n)_{n\geq 1}$, члены которой $x_n \neq x_0$, такую, что $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$, то из определения предела числовой последовательности следует, что для любой окрестности V точки x_0 все члены x_n данной последовательности принадлежат окрестности V, начиная с некоторого номера N. Следовательно, $V \cap (E \setminus \{x_0\}) \neq \varnothing$, то есть x_0 является предельной точкой множества E. ►

Замечание. Определение предельной точки и теорема 1 верны и тогда, когда x_0 является $+\infty$, $-\infty$ или ∞. В этих случаях при доказательстве теоремы 1 рассматривают окрестности $V_n = (n,\ +\infty)$, $V_n = (-\infty,\ -n)$ или $V_n = (-\infty,\ -n) \cup (n,\ +\infty)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Примеры

1. Для $E = (a,\ b)$ или $E = [a,\ b]$ любая точка $x_0 \in [a,\ b]$ является предельной точкой.

2. Для множества $\mathbb{N}$ предельной точкой является $+\infty$. Все точки множества $\mathbb{N}$ являются изолированными точками.

3. Для множества $E = [-2,\ 1) \cup \{3\}$ в качестве предельной точки может быть любая точка $x_0 \in [-2,\ 1]$, а точка $x_0 = 3$ является изолированной точкой этого множества.

4. Предельными точками множества $E = \left\{-1,\ 2,\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2},\ -\dfrac{1}{3},\ \dfrac{4}{3},\ -\dfrac{1}{4},\ \dfrac{5}{4},\ -\dfrac{1}{5},\ \dfrac{6}{5},\ \ldots\right\}$, являются точки $x_0 = 0$ и $x_0 = 1$, так как это множество содержит последовательности $(x'_n)_{n\geq 1}$, $x'_n = -\dfrac{1}{n}$, и $(x''_n)_{n\geq 1}$, $x''_n = 1 + \dfrac{1}{n}$, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x''_n = 1$, где $x'_n \neq 0$, $x''_n \neq 1$, $\forall n \geq 1$. Все точки $x_0 \in E$ являются изолированными точками множества .

1.2. Предел функции в точке

Пусть $E \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon E \to \mathbb{R}$ – некоторая функция, $x_0 \in \mathbb{R}$ – предельная точка множества E и $l \in \mathbb{R}$. Далее раскроем точный смысл утверждения: „Если значения аргумента x приближаются к точке x_0, то значения $f(x)$ функции f приближаются к числу l“.

Для начала рассмотрим несколько примеров.

Примеры

1. Дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{2}$, и точка $x_0 = 2$ (рис. 2.1).

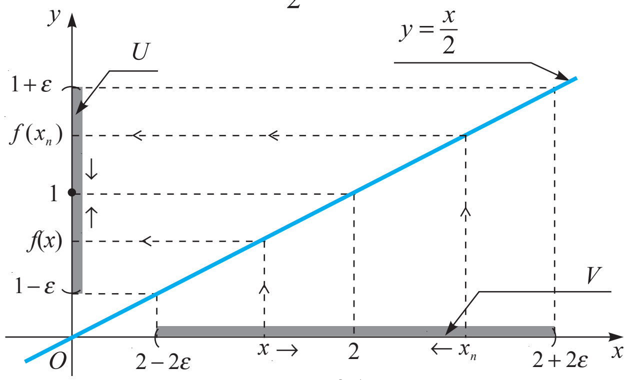


Рис. 2.1

На рисунке 2.1 видно, что если значения аргумента x приближаются сколь угодно близко к $x_0 = 2$, то значения $f(x)$ функции f приближаются сколь угодно близко к $l = 1$.

Полученный результат можно описать различными способами.

Например, если $(x_n)_{n\geq 1}$ – произвольная последовательность, сходящаяся к $x_0 = 2$, то последовательность $(f(x_n))_{n\geq 1}$, где $f(x_n) = \frac{x_n}{2}$, сходится к $l = 1$ (рис. 2.1).

Другой способ: для любой окрестности $U = (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, с центром в точке $l = 1$ оси Oy, существует окрестность $V = (2-2\varepsilon, 2+2\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, с центром в точке $x_0 = 2$ оси Ox такая, что для любого $x \in V$ следует, что $f(x) \in U$ (рис. 2.1).

2. Рассмотрим функцию $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, которая не определена в точке 1. Для любой последовательности $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n \neq 1$, где $x_n \to 1$ при $n \to \infty$, получим $f(x_n) = \frac{x_n^2 - 1}{x_n - 1} = x_n + 1 \to 2$ при $n \to \infty$ (рис. 2.2).

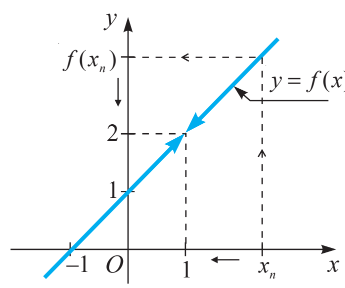


Рис. 2.2

3. Даны функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x+1, & \text{если } x < 1, \\ x+1, & \text{если } x \geq 1, \end{cases}$

и точка $x_0 = 1$ (рис. 2.3). Из графического изображения функции f следует: если значения x сколь угодно близки к $x_0 = 1$, но больше 1, то значения функции f близки к $l = 2$; если же значения x сколь угодно близки к $x_0 = 1$, но меньше 1, то значения функции f близки к $l = 0$. Значит, не существует такое число $l \in \mathbb{R}$, к которому значения функции f приближаются тогда, когда значения аргумента x приближаются к $x_0 = 1$.

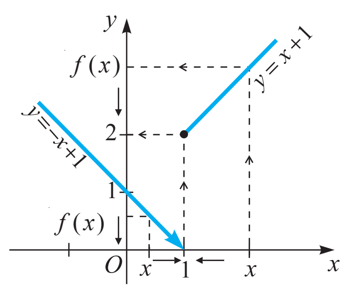


Рис. 2.3

Таким образом, в примере **1** (соответственно в примере **2**) будем говорить, что число $l=1$ (соответственно число $l=2$) является пределом функции f в точке $x_0=2$ (соответственно в точке $x_0=1$), а в примере **3** будем говорить, что функция f не имеет предела в точке $x_0=1$.

Рассмотренные примеры приводят к трем определениям предела функции в точке.

Пусть $f\colon E\to\mathbb{R}$ $(E\subseteq\mathbb{R})$ – некоторая функция и $x_0\in\mathbb{R}$ – предельная точка множества E.

Определение („на языке окрестностей“). Говорят, что **функция f имеет предел $l\in\mathbb{R}$ в точке x_0**, если для любой окрестности U точки l существует окрестность V точки x_0 такая, что для любого $x\in V\cap(E\setminus\{x_0\})$ следует, что $f(x)\in U$.

Предел функции f в точке x_0 обозначают $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ или $f(x)\to l$ при $x\to x_0$ и читают: *Предел функции* $f(x)$ *при x, стремящемся к* x_0, *равен l,* или $f(x)$ *стремится к l при x, стремящемся к* x_0.

В определении предела функции в точке, окрестности точки l можно рассматривать в виде $U=\{y\in\mathbb{R}\,\big|\,|y-l|<\varepsilon\}=(l-\varepsilon,\,l+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, а окрестности точки x_0 – в виде $V=\{x\in\mathbb{R}\,\big|\,|x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,\,x_0+\delta)$, $\delta>0$, и очевидно, что в общем случае, V зависит от U. Значит, δ зависит от ε, то есть $\delta=\delta(\varepsilon)$. Следовательно, определение предела может быть сформулировано эквивалентно при помощи числовых неравенств.

Определение (по Коши[1], или на языке $\varepsilon-\delta$). Говорят, что **функция f имеет предел $l\in\mathbb{R}$ в точке x_0**, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для любого $x\in E\setminus\{x_0\}$ из $|x-x_0|<\delta$ следует, что $|f(x)-l|<\varepsilon$.

Огюстен Луи Коши

Предел функции в точке можно определить и при помощи пределов числовых последовательностей.

Определение (по Гейне[2], или „на языке последовательностей“). Говорят, что **функция f имеет предел $l\in\mathbb{R}$ в точке x_0**, если для любой последовательности $(x_n)_{n\geq1}$ множества $E\setminus\{x_0\}$, стремящейся к x_0, соответствующая последовательность $(f(x_n))_{n\geq1}$ значений функции f стремится к числу l.

Генрих Эдуард Гейне

Понятия предела $l=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ функции f в точке x_0 распространяется и на случай, когда одно или оба значения x_0, l не являются конечными.

[1] Огюстен Луи Коши (1789–1857) – французский математик.
[2] Генрих Эдуард Гейне (1821–1881) – немецкий математик.

Представим некоторые из этих определений.

Определения (по Коши)

1. Говорят, что предел функции f в точке x_0 равен $+\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого $x \in E \setminus \{x_0\}$ из неравенства $|x - x_0| < \delta$ следует, что $f(x) > \varepsilon$. Обозначают: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

При помощи символов $\exists, \forall,$ определение 1 можно записать короче:
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ $(x_0 \in \mathbb{R})$, если $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x \in E \setminus \{x_0\}$, $|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon$.

2. Говорят, что предел функции f в точке x_0 равен ∞, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого $x \in E \setminus \{x_0\}$ из неравенства $|x - x_0| < \delta$ следует, что $|f(x)| > \varepsilon$. Обозначают: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

В сокращенном виде определение 2 можно записать так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ $(x_0 \in \mathbb{R})$ если $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x \in E \setminus \{x_0\}$, $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon$.

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ $(l \in \mathbb{R})$, если $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x \in E$, $x > \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

4. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$, если $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x \in E$, $|x| > \delta \Rightarrow f(x) < -\varepsilon$.

5. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$, если $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x \in E$, $x > \delta \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon$.

***Замечания.* 1.** Для $x_0, l \in \mathbb{R}$ геометрический смысл определений предела функции f в точке x_0 „на языке окрестностей“ и по Коши состоит в следующем: *для значений аргумента x, достаточно близких к x_0, соответствующие значения $f(x)$ функции f сколь угодно близки к l* (рис. 2.4).

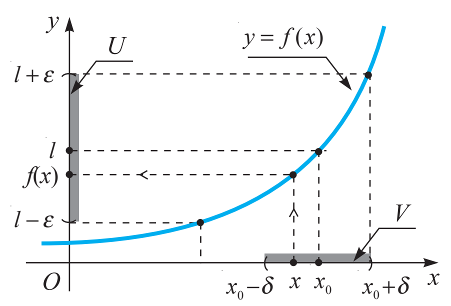


Рис. 2.4

2. Для функции $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = a_n$, определения 3 и 5 (по Коши) предела функции в точке представляют собой определение предела числовой последовательности с конечным или бесконечным пределом.

3. Из определения предела функции в точке по Гейне следует, что если существуют две последовательности $(x'_n)_{n \ge 1}$ и $(x''_n)_{n \ge 1}$ множества $E \setminus \{x_0\}$, у которых $\lim\limits_{n \to \infty} x'_n = \lim\limits_{n \to \infty} x''_n = x_0$ такие, что соответствующие последовательности $(f(x'_n))_{n \ge 1}$ и $(f(x''_n))_{n \ge 1}$ имеют различные пределы или вообще не имеют предела, то функция f не имеет предела в точке x_0.

Замечание **3** применяется при доказательстве того, что функция f не имеет предела в x_0.

4. Можно доказать, что *если существует предел функции в точке, то этот предел – единственный.*

При выполнении каждого из следующих заданий было применено то определение предела функции в точке, которое ему адекватно.

Задание с решением

1. Применив определение предела функции в точке „на языке окрестностей“, покажем, что функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} 3x, \text{ если } x<1, \\ 0, \text{ если } x=1, \\ 2x+1, \text{ если } x>1, \end{cases}$ имеет предел в $x_0=1$ и $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=3$.

Решение:

Пусть $U=(3-\varepsilon,\ 3+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, – произвольная окрестность точки $l=3$.

Если $x<1$, то

$$f(x)=3x\in U \Leftrightarrow 3-\varepsilon<3x<3+\varepsilon \Leftrightarrow 1-\frac{\varepsilon}{3}<x<1+\frac{\varepsilon}{3} \Leftrightarrow x\in\left(1-\frac{\varepsilon}{3},\ 1\right).$$

Если же $x>1$, то

$$f(x)=2x+1\in U \Leftrightarrow 3-\varepsilon<2x+1<3+\varepsilon \Leftrightarrow 1-\frac{\varepsilon}{2}<x<1+\frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow x\in\left(1,\ 1+\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Пусть $V=\left(1-\frac{\varepsilon}{3},\ 1+\frac{\varepsilon}{3}\right)$ – окрестность точки $x_0=1$, $V\subset\left(1-\frac{\varepsilon}{3},\ 1+\frac{\varepsilon}{2}\right)$. Из $x\in V$, $x\neq 1$, следует, что $x\in\left(1-\frac{\varepsilon}{3},\ 1\right)$ или $x\in\left(1,\ 1+\frac{\varepsilon}{2}\right)$, откуда $f(x)\in U$.

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=3$.

2. Дана функция $f: [-1,\ 3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2-4x+1$. Применив определение предела функции в точке по Коши, покажем, что $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=5$.

Решение:

$\forall\varepsilon>0$ и $\forall x\in[-1,\ 3]$ имеем $|x|\le 3$ и $|f(x)-5|=|3x^2-4x-4|=|(x-2)(3x+2)|\le$ $\le|x-2|(3|x|+2)\le 11|x-2|<\varepsilon$, если $|x-2|<\frac{\varepsilon}{11}$. Значит, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ $\left(\delta=\frac{\varepsilon}{11}\right)$ такое, что $\forall x\in[-1,\ 3]\setminus\{2\}$ из $|x-2|<\delta$ следует, что $|f(x)-5|<\varepsilon$.

То есть , $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=5$.

3. Дана функция $f: \mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{(x+1)^3}$. Покажем, что $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\infty$.

Решение:

Зададим $\varepsilon>0$. Взяв любой $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, получим $|f(x)|>\varepsilon \Leftrightarrow |x+1|^3<\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow |x+1|<\frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}$. Значит, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ $\left(\delta=\frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}\right)$ такое, что $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ из $|x+1|<\delta$ следует, что $|f(x)|>\varepsilon$ и, согласно определению по Коши получим, что $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\infty$.

4. Дана функция $f: \mathbb{R}\setminus\{-2\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x^2+5x+2}{x+2}$. Докажем, что $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=-3$.

Решение:

Для любой последовательности $(x_n)_{n\geq 1}$ множества $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$, предел которой $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -2$, соответствующая последовательность $(f(x_n))_{n\geq 1}$ значений функции f имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2x_n^2+5x_n+2}{x_n+2} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2x_n+1)(x_n+2)}{x_n+2} = \lim\limits_{n\to\infty}(2x_n+1) = 1+2\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -3.$ Из определения по Гейне следует, что $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = -3.$

5. Даны функции $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos\frac{1}{x}$, и $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\sin x$. Покажем на основании замечания 3, что не существуют пределы $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.

Решение:

Функция f не имеет предела в точке $x_0=0$, так как существуют, по крайней мере, две последовательности $(x'_n)_{n\geq 1}$, $x'_n=\frac{1}{2n\pi}$, и $(x''_n)_{n\geq 1}$, $x''_n=\frac{1}{\pi+2n\pi}$, предел которых равен 0 при $n\to\infty$, тем не менее соответствующие им последовательности $(f(x'_n))_{n\geq 1}$, $f(x'_n)=1$, и $(f(x''_n))_{n\geq 1}$, $f(x''_n)=-1$, имеют различные пределы: 1 и –1 соответственно. Аналогично, функция g не имеет предела при $x\to+\infty$, потому что у последовательностей $(x'_n)_{n\geq 1}$, $x'_n=n\pi$, и $(x''_n)_{n\geq 1}$, $x''_n=\frac{\pi}{2}+2n\pi$, предел равен $+\infty$ (см. замечание 2), а $\lim\limits_{n\to\infty} g(x'_n)=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} g(x''_n)=1$.

1.3. Односторонние пределы

Пусть $f\colon E\to\mathbb{R}$ $(E\subseteq\mathbb{R})$ – некоторая функция и $x_0\in\mathbb{R}$ – предельная точка множества E. Предположим, что x_0 является предельной точкой множества $E_-=E\cap(-\infty,\ x_0)$ или множества $E_+=E\cap(x_0,\ +\infty)$. В этом случае будем говорить, что ***x_0 является предельной точкой слева или предельной точкой справа множества E***.

Пусть $x_0\in\mathbb{R}$ – предельная точка слева (справа) множества E. Если x приближается к x_0 слева (соответственно справа) со значениями $x<x_0$ (соответственно $x>x_0$), то пишем $x\to x_0-0$ (соответственно $x\to x_0+0$). Для $x_0=0$ в этих случаях пишем $x\to -0$ (соответственно $x\to +0$).

Для функции $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}-x+1, & \text{если } x<1,\\ x+1, & \text{если } x\geq 1,\end{cases}$ рассмотренной в разделе 1.2, мы получили, что не существует такого числа $l\in\mathbb{R}$, к которому значения $f(x)$ функции f приближаются, в то время как значения аргумента x достаточно близки к 1. Если же значения аргумента x стремятся к 1 слева ($x<1$), то значения $f(x)=-x+1$ стремятся к 0, но если значения аргумента x стремятся к 1 справа ($x>1$), то значения $f(x)=x+1$ стремятся к 2. Значит, функция f не имеет предела в точке $x_0=1$, но говорят, что у нее есть односторонние пределы в этой точке.

В следующих определениях предполагается, что $f\colon E\to\mathbb{R}$ $(E\subseteq\mathbb{R})$ – некоторая функция, а $x_0\in\mathbb{R}$ – предельная точка слева (справа) множества E.

Определение. Говорят, что число $l_л = l_л(x_0) \in \mathbb{R}$ является **пределом слева функции f в точке $x_0 \in \mathbb{R}$**, если для любой окрестности U точки $l_л$ существует окрестность V точки x_0 такая, что для любого $x \in V \cap E_-$ следует, что $f(x) \in U$.

Определение. Говорят, что число $l_п = l_п(x_0) \in \mathbb{R}$ является **пределом справа функции f в точке $x_0 \in \mathbb{R}$**, если для любой окрестности U точки $l_п$ существует окрестность V точки x_0 такая, что для любого $x \in V \cap E_+$ следует, что $f(x) \in U$.

Числа $l_л(x_0)$ и $l_п(x_0)$ называются ***односторонними пределами функции f в точке x_0***. Для них приняты обозначения:

$$l_л(x_0) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x), \quad l_п(x_0) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x)$$

или эквивалентные им обозначения:

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x\to x_0 - 0} f(x), \quad f(x_0 + 0) = \lim_{x\to x_0 + 0} f(x)$$

(рис. 2.5).

Если $x_0 = 0$, в таких случаях пишем:

$$\lim_{x\to -0} f(x) = f(-0), \quad \lim_{x\to +0} f(x) = f(+0).$$

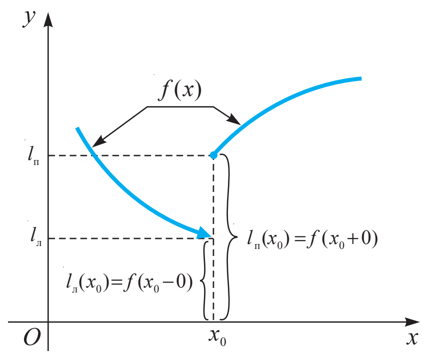


Рис. 2.5

Отметим, что определения односторонних пределов могут также быть сформулированы по Гейне или по Коши. Представим формулировку одного из этих определений, а остальные сформулируйте самостоятельно.

Определение (по Коши). Говорят, что число $l_п \in \mathbb{R}$ является **пределом справа функции f в точке $x_0 \in \mathbb{R}$**, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого $x \in E$ из двойного неравенства $x_0 < x < x_0 + \delta$ следует, что $|f(x) - l_п| < \varepsilon$.

Замечание. Как и в случае предела функции, односторонние пределы $l_л$ и $l_п$ могут быть бесконечны ($+\infty$, $-\infty$ или ∞). Определения этих понятий возможно сформулировать на трех эквивалентных „языках“. Представляем одно из этих определений.

Определение (по Коши). Будем говорить, что $-\infty$ является **пределом справа** функции f в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого $x \in E$ из двойного неравенства $x_0 < x < x_0 + \delta$ следует, что $f(x) < -\varepsilon$. Обозначают: $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = -\infty$.

Полезный критерий существования предела функции в точке сформулирован в следующей теореме.

Теорема 2 (критерий „на языке односторонних пределов“). Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}$ $(E \subseteq \mathbb{R})$ – некоторая функция и $x_0 \in \mathbb{R}$ является предельной точкой множеств E_- и E_+. Функция f имеет предел в точке x_0 тогда и только тогда, когда функция f имеет в x_0 равные односторонние пределы: $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$. В этом случае, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$.

Доказательство

Необходимость. Если существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$, то согласно определению существуют и односторонние пределы $f(x_0-0)=l$ и $f(x_0+0)=l$.

Достаточность. Предположим, что существуют односторонние пределы $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$, причем $f(x_0-0)=f(x_0+0)=l$, $l\in\mathbb{R}$. Из определения односторонних пределов функции в точке (по Коши) следует: $(\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=l$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=l)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(\forall\varepsilon>0,\ \exists\,\delta_1>0,\ \exists\,\delta_2>0$ такие, что $\forall x\in E\setminus\{x_0\}$, если $x_0-\delta_1<x<x_0$ или $x_0<x<x_0+\delta_2\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon)$.

Пусть $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)>0$. Очевидно, что $\forall x\in E\setminus\{x_0\}$ из $|x-x_0|<\delta\Rightarrow$ $\Rightarrow(x_0-\delta_1<x<x_0$ или $x_0<x<x_0+\delta_2)\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$.

Аналогично доказывается случай, когда предел l бесконечен. ►

Задание с решением

1. Дана функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2+x, & \text{если } x\le 2,\\ 2x+3, & \text{если } x>2.\end{cases}$ Вычислим односторонние пределы функции f в точке $x_0=2$. Имеет ли функция f предел в точке $x_0=2$?

Решение:

Если $x<2$, то $f(x)=x^2+x$, и для любой числовой последовательности $(x_n)_{n\ge1}$, $x_n\in(-\infty,\ 2)$, предел которой $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$, получим $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(x_n^2+x_n)=6$.

Если $x>2$, то $f(x)=2x+3$, и для любой числовой последовательности $(t_n)_{n\ge1}$, $t_n\in(2,+\infty)$, предел которой $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=2$, получим $\lim\limits_{n\to\infty}f(t_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(2t_n+3)=7$.

Согласно определению по Гейне, односторонние пределы $f(2-0)=6$, $f(2+0)=7$ и так как $f(2-0)\ne f(2+0)$, то в силу теоремы 2 функция f не имеет предела в точке $x_0=2$.

2. Найдем значения действительного параметра a, при которых функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2+a^2, & \text{если } x\in[-1,\ 1],\\ 3ax+1, & \text{если } x\in(-\infty,\ -1)\cup(1,\ +\infty),\end{cases}$ имеет предел хотя бы в одной из точек -1 или 1. Чему равны эти пределы?

Решение:

Для любого $x_n\in(-1,\ 1)$ имеем $f(x_n)=x_n^2+a^2$ и если $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=1+a^2$, а если $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=1+a^2$. Значит, $l_{\text{л}}(1)=l_{\text{п}}(-1)=1+a^2$. Аналогично, для любого $x_n\in(-\infty,\ -1)\cup(1,\ +\infty)$ получим, что $f(x_n)=3ax_n+1$ и если $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=1-3a$, а если $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=1+3a$. Следовательно, $l_{\text{л}}(-1)=1-3a$, $l_{\text{п}}(1)=1+3a$.

Таким образом, функция f имеет предел в точке $x_0=-1$, если: $l_{\text{л}}(-1)=l_{\text{п}}(-1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1+a^2=1-3a \Leftrightarrow a\in\{-3,\ 0\}$. Если $a=0$, то $l_л(-1)=l_п(-1)=1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to -1} f(x)=1$, а если $a=-3$, то $l_л(-1)=l_п(-1)=10 \Rightarrow \lim\limits_{x\to -1} f(x)=10$.

Аналогично, функция f имеет предел в точке $x_0=1$, если: $l_л(1)=l_п(1) \Leftrightarrow 1+a^2 = 1+3a \Leftrightarrow a\in\{0,\ 3\}$. При $a=0$ получим $l_л(1)=l_п(1)=1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$, а при $a=3$ получим $l_л(1)=l_п(1)=10 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=10$.

Таким образом, при $a=0$ функция f имеет предел в обеих точках, -1 и 1, а при $a\in\{-3,\ 3\}$ функция f имеет предел только в одной из них.

Упражнения и задачи

Б

1. Покажите, что точка $x_0=2$ является предельной точкой подмножества $E\subseteq\mathbb{R}$:

а) $E=\left\{\dfrac{2n}{n+1}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}^*\right\}$; б) $E=\left\{2+\dfrac{(-1)^n}{2^n}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}^*\right\}$; в) $E=\left\{\dfrac{4n+3}{2n+1}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}^*\right\}$.

2. Найдите предельные точки множества:

а) $E=\left\{(-1)^n\cdot\dfrac{2n+3}{n+1}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$; б) $E=\left\{\dfrac{n}{n+3}(3+(-1)^n)\mid n\in\mathbb{N}\right\}$; в) $E=\left\{\dfrac{n-1}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{3}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$.

3. Напишите хотя бы одну числовую последовательность из E, предел которой равен x_0, где x_0 – предельная точка множества E:

а) $E=\mathbb{R}\setminus[0,\ 4)$, $x_0=4$; б) $E=\left\{\dfrac{(-1)^n\cdot n}{n+2}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}^*\right\}$, $x_0\in\{-1,\ 1\}$.

4. Применив определение предела функции в точке „на языке окрестностей“, покажите, что:

а) $\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{2}x-3\right)=-2$; в) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\left(\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{4}\right)=-\dfrac{1}{2}$;

г) $\lim\limits_{x\to -1}(1-2x)=3$; д) $\lim\limits_{x\to 2}(x-3)=-1$; е) $\lim\limits_{x\to -1}x^2=1$.

5. Используя определение предела функции в точке по Гейне вычислите:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3-3x+5}{x^2+1}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+5x+2}{3x^2+5x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^2-4x-5}$.

6. Используя определение предела функции в точке по Коши, докажите, что:

а) $\lim\limits_{x\to 2}(2x^2-5x+3)=1$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x+7}{x+3}=1$; в) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x-1}{x+1}=2$.

7. Покажите, что не существует предела:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\cos\dfrac{1}{x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin^2\pi x$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{\pi}{x}$.

8. Вычислите в указанной точке x_0 односторонние пределы функции $f\colon D$[1] $\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=\begin{cases}2x+1, & \text{если } x\le 2,\\ x^2+x, & \text{если } x>2,\end{cases}$ $x_0=2$; б) $f(x)=\dfrac{3x^2+4x+1}{x^2-1}$, $x_0\in\{-1,\ 1\}$.

---

[1] Здесь и далее множество D означает максимальную область определения функции.

9. Убедитесь, что функция f имеет предел в указанной точке x_0, и вычислите предел $l=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, если $f\colon D\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=\begin{cases}3x+1, & \text{если } x\le 1,\\ x^3-2x, & \text{если } x>1,\end{cases}$ $x_0\in\{0,1\}$; б) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{2-x}$, $x_0\in\{0,2\}$.

10. Исследуйте в указанных точках x_k, $k\in\mathbb{Z}$, существование предела функции $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=\operatorname{sgn}(\sin x)$, $x_k=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $f(x)=[x]$, $x_k=k$, $k\in\mathbb{Z}$.

11. Пусть $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=x-[x]$;

б) $f(x)=[\cos x]$;

в) $f(x)=\sigma(\sin x)$, где $\sigma(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<0,\\ 1, & \text{если } x\ge 0,\end{cases}$ – единичная функция Хевисайда.

Выполните эскиз графика функции f и определите точки $x_0\in\mathbb{R}$, в которых существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

12. Пусть $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=\begin{cases}(ax+1)^2, & \text{если } x\le 1,\\ ax+3, & \text{если } x>1,\end{cases}$ $x_0=1$; б) $f(x)=\begin{cases}a^2-x^2, & \text{если } x<2,\\ x-a, & \text{если } x\ge 2,\end{cases}$ $x_0=2$.

Найдите $a\in\mathbb{R}$ такое, что существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, и вычислите этот предел.

13. Пусть $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}a^2x-x^2, & \text{если } x<-2,\\ -6, & \text{если } x=-2,\\ 3ax, & \text{если } x>-2.\end{cases}$ При каких значениях действительного параметра a существует $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=f(-2)$?

§2 Операции над пределами функций. Пределы элементарных функций

2.1. Операции над пределами функций

Рассмотрим операции, которые можно выполнять над пределами функции. Докажем некоторые из этих операций, а доказательства остальных операций будут предложены в качестве упражнений.

Пусть E – непустое подмножество $\mathbb{R}$, x_0 – конечная или бесконечная предельная точка множества E и $f, g\colon E\to\mathbb{R}$ – две функции такие, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$, где a и b конечны. Верны следующие ***высказывания***:

① Если функция f имеет предел в точке x_0 и $c\in\mathbb{R}$, то и функция $c\cdot f$ имеет предел в точке x_0 и $\lim\limits_{x\to x_0}[cf(x)]=c\,a=c\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Следовательно, *постоянный множитель можно вынести за знак предела*.

Замечание. Если в высказывании ① допустить, что $f(x)=1$, то $\lim\limits_{x\to x_0} c=c$. Следовательно, предел постоянной в любой точке x_0 равен этой постоянной.

② Если функции f, g имеют предел в точке x_0, то и функция $f \pm g$ имеет предел в точке x_0 и $\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) \pm g(x)] = a \pm b = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ – *предел суммы (разности) функций равен сумме (разности) пределов этих функций.*

Доказательство

Пусть $(x_n)_{n\geq 1}$ – произвольная последовательность множества $E \setminus \{x_0\}$, предел которой $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$. Так как функции f и g имеют предел в точке x_0, в силу определения по Гейне $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = a$ и $\lim\limits_{n \to \infty} g(x_n) = b$.

Применив свойства операций над сходящимися числовыми последовательностями, получим $\lim\limits_{n \to \infty}[f(x_n) \pm g(x_n)] = a \pm b$.

Значит, из определения по Гейне следует, что $\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) \pm g(x)] = a \pm b$. ►

③ Если функции f, g имеют предел в точке x_0, то и функция $f \cdot g$ имеет предел в точке x_0 и $\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) \cdot g(x)] = a \cdot b = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ – *предел произведения функций равен произведению пределов этих функций.*

Высказывания ② и ③ истинны и для конечного числа функций $f_1, f_2, \ldots, f_n$, имеющих предел в точке x_0. В частности, из высказывания ③, для $f_1 = f_2 = \ldots = f_n = f$, получим, что $\lim\limits_{x \to x_0}[f(x)]^n = [\lim\limits_{x \to x_0} f(x)]^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

④ Если функции f и g имеют предел в точке x_0 и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b \neq 0$, то частное $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ определено в некоторой окрестности точки x_0 множества $E \setminus \{x_0\}$, функция $\dfrac{f}{g}$ имеет предел в точке x_0 и $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$ – *предел частного двух функций равен частному пределов этих функций.*

⑤ Если функции f и g имеют предел в точке x_0 и $f(x) > 0$ для любого $x \in E$, то и функция $f^g\colon E \to \mathbb{R}$, $(f^g)(x) = [f(x)]^{g(x)}$ имеет предел в точке x_0 (за исключением случая 0^0) и

$$\lim_{x \to x_0}[f(x)]^{g(x)} = a^b = [\lim_{x \to x_0} f(x)]^{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}.$$

Условие существования предела сложной функции сформулировано в высказывании ⑥.

⑥ Пусть E и F – непустые подмножества множества $\mathbb{R}$, x_0 – предельная точка множества E, $u\colon E \to F$, $f\colon F \to \mathbb{R}$ – две функции, а $f \circ u\colon E \to \mathbb{R}$, $(f \circ u)(x) = f(u(x))$, $\forall x \in E$, – сложная функция. Если

1) $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = u_0$,

2) $u(x) \neq u_0$ для любого x из некоторой окрестности точки x_0 множества E и $x \neq x_0$,

3) $\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = l$,

то сложная функция $f \circ u$ имеет предел в точке x_0 и $\lim\limits_{x \to x_0} f(u(x)) = \lim\limits_{u \to u_0} f(u) = l$.

Замечания. **1.** Равенство $\lim\limits_{x \to x_0} f(u(x)) = \lim\limits_{u \to u_0} f(u)$, установленное в высказывании ⑥, подтверждает общий способ, названный ***методом подстановки***, или ***методом замены переменной*** при вычислении пределов функций. А именно, правая часть равенства следует из левой, при обозначении $u = u(x)$, которое называется ***подстановкой*** или ***заменой переменной***, и учитывая условия 1) и 2) высказывания ⑥: $u \to u_0$ и $u \neq u_0$.

2. Операции над пределами функций верны и для односторонних пределов.

Высказывания ①–⑤ верны и в тех случаях, когда одна или обе функции f и g имеют бесконечный предел в точке x_0 или когда в частном $\dfrac{f}{g}$ имеем $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$.

Например, предположим, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$, а $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ и докажем, что в этом случае функция $f + g$ имеет предел в точке x_0 и $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = +\infty$.

Согласно определению предела функции в точке по Коши, имеем:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_1(\varepsilon) > 0,\ \forall x \in E \setminus \{x_0\},$$

$$|x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon; \qquad (1)$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0,\ \exists \delta_2(M) > 0,\ \forall x \in E \setminus \{x_0\},$$

$$|x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow g(x) > M - (a - \varepsilon). \qquad (2)$$

Из соотношений (1) и (2) следует, что для любого $M > 0$, $\exists \delta = \min(\delta_1(\varepsilon), \delta_2(M)) > 0$, такое, что для любого $x \in E \setminus \{x_0\}$ из неравенства $|x - x_0| < \delta$ следует $|x - x_0| < \delta_1$ и $|x - x_0| < \delta_2$, в свою очередь, из этих неравенств следует

$$f(x) + g(x) > (a - \varepsilon) + M - (a - \varepsilon) = M.$$

По определению предела функции в точке по Коши, $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = +\infty$.

При помощи символов этот результат можно записать так: $a + (+\infty) = +\infty$, и он называется ***определенным выражением*** или просто ***определенностью***.

Аналогично можно доказать и определенности вида:

$a + (-\infty) = -\infty$; $\quad a + \infty = \infty$; $\quad (+\infty) + (+\infty) = +\infty$; $\quad a \cdot (+\infty) = +\infty$ $(a > 0)$;

$a \cdot (-\infty) = +\infty$ $(a < 0)$; $\quad \dfrac{a}{0} = \infty$ $(a \neq 0)$ и т.д.

В случае, когда $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$, о существовании предела функции $f + g$ или $\dfrac{f}{g}$ в точке x_0 нельзя ничего утверждать.

При помощи символов этот результат можно записать так: $\infty - \infty$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$, и он называется ***неопределенным выражением*** или просто ***неопределенностью*** (более подробно эти случаи будут рассмотрены в § 4).

Таким образом,операции над пределами функций могут иметь смысл или не иметь смысла. Поэтому эти операции могут привести к определенным (определенности) и неопределенным (неопределенности) выражениям.

Таблица определенностей	
Если $a \in \mathbb{R}$, то:	
1. $\infty + a = \infty$	**15.** $\dfrac{a}{\infty} = 0$
2. $(+\infty) + a = +\infty$	**16.** $\dfrac{\infty}{a} = \infty$
3. $(-\infty) + a = -\infty$	**17.** $\dfrac{a}{0} = \infty \ (a \neq 0)$
4. $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$	**18.** $a^{+\infty} = +\infty \ (a > 1)$
5. $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$	**19.** $a^{-\infty} = 0 \ (a > 1)$
6. $a \cdot \infty = \infty \ (a \neq 0)$	**20.** $a^{+\infty} = 0 \ (0 < a < 1)$
7. $a \cdot (+\infty) = +\infty \ (a > 0)$	**21.** $a^{-\infty} = +\infty \ (0 < a < 1)$
8. $a \cdot (-\infty) = -\infty \ (a > 0)$	**22.** $(+\infty)^a = +\infty \ (a > 0)$
9. $a \cdot (+\infty) = -\infty \ (a < 0)$	**23.** $(+\infty)^a = 0 \ (a < 0)$
10. $a \cdot (-\infty) = +\infty \ (a < 0)$	**24.** $0^{+\infty} = 0$
11. $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$	**25.** $(+\infty)^{+\infty} = +\infty$
12. $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$	**26.** $(+\infty)^{-\infty} = 0.$
13. $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$	
14. $\infty \cdot \infty = \infty$	

Таблица неопределенностей						
1. $\dfrac{\infty}{\infty}$	**2.** $\dfrac{0}{0}$	**3.** $0 \cdot \infty$	**4.** $\infty - \infty$	**5.** 1^{∞}	**6.** 0^0	**7.** ∞^0

Примеры

Из определения предела функции в точке следует, что $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$, где $x_0 \in \mathbb{R}$.

Следовательно, на основании высказываний ①–⑥ получаем:

1. $\lim\limits_{x \to 2}(3x^2 - 4x - 2) = 3(\lim\limits_{x \to 2} x)^2 - 4\lim\limits_{x \to 2} x - \lim\limits_{x \to 2} 2 = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 - 2 = 2;$

2. $\lim\limits_{x \to 2}[(x+3) \cdot (3x^2 - 4x - 2)] = \lim\limits_{x \to 2}(x+3) \cdot \lim\limits_{x \to 2}(3x^2 - 4x - 2) = 5 \cdot 2 = 10;$

3. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^2 - 4x - 2}{x+3} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 2}(3x^2 - 4x - 2)}{\lim\limits_{x \to 2}(x+3)} = \dfrac{2}{5};$

4. $\lim\limits_{x \to 2}(3x^2 - 4x - 2)^{(x+3)} = [\lim\limits_{x \to 2}(3x^2 - 4x - 2)]^{\lim\limits_{x \to 2}(x+3)} = 2^5 = 32;$

5. $\lim\limits_{x \to -1}[3(x+3)^2 - 4(x+3) - 2] = \lim\limits_{u \to 2}(3u^2 - 4u - 2) = 2 \quad (u = x + 3 \to 2 \ \text{cond} \ x \to -1).$

2.2. Пределы элементарных функций

В п. 2.2. будут изучены пределы элементарных функций, функций при помощи которых можно описать на математическом языке различные природные процессы. Приведем без доказательства соотношения для вычисления пределов соответствующих функций. Эти соотношения можно вывести при помощи определения предела функции в точке по Гейне или по Коши.

I. Степенная функция с натуральным показателем

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ f(x) = x^n,\ \ n \in \mathbb{N},\ \ n \geq 1$ (рис. 2.6)

а) $\lim\limits_{x \to x_0} x^n = x_0^n,\ \ x_0 \in \mathbb{R};$

б) $\lim\limits_{x \to \infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{если } n - \text{четное}, \\ \infty, & \text{если } n - \text{нечетное}; \end{cases}$

в) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{если } n - \text{четное}, \\ -\infty, & \text{если } n - \text{нечетное}; \end{cases}$

г) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty.$

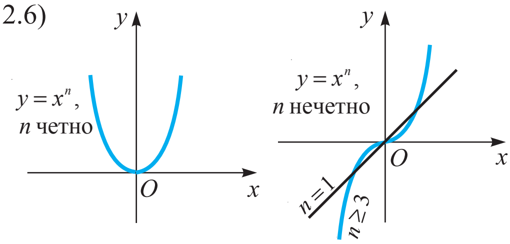


Рис. 2.6

II. Степенная функция с целым отрицательным показателем

$f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ \ f(x) = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n},\ \ n \in \mathbb{N},\ \ n \geq 1$ (рис. 2.7)

а) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{x^n} = \dfrac{1}{x_0^n},\ \ x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$

б) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^n} = 0;$

в) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty, & \text{если } n - \text{четное}, \\ \infty, & \text{если } n - \text{нечетное}; \end{cases}$

г) $\lim\limits_{x \to +0} \dfrac{1}{x^n} = +\infty;$

д) $\lim\limits_{x \to -0} \dfrac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty, & \text{если } n - \text{четное}, \\ -\infty, & \text{если } n - \text{нечетное}. \end{cases}$

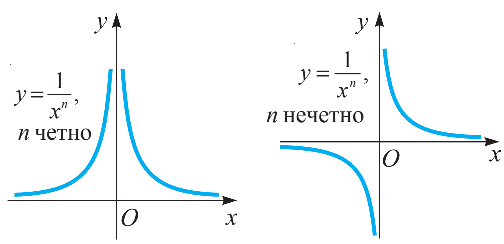


Рис. 2.7

III. Функция-многочлен

$P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,\ \ a_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{0, n},\ \ a_0 \neq 0,\ \ n \in \mathbb{N}^*.$

а) $\lim\limits_{x \to x_0} P(x) = P(x_0),\ \ x_0 \in \mathbb{R};$

б) $\lim\limits_{x \to \infty} P(x) = \lim\limits_{x \to \infty} a_0 x^n;$

в) $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} a_0 x^n;$

г) $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} a_0 x^n.$

Примеры

1. $\lim\limits_{x \to -1} (3x^3 - 4x + 2) = 3 \cdot (-1)^3 - 4 \cdot (-1) + 2 = 3.$

2. $\lim\limits_{x \to \infty} (-3x^2 + 5x - 2) = \lim\limits_{x \to \infty} (-3x^2) = -\infty.$

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} (-2x^5 + 100x^4 - 3) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-2x^5) = +\infty.$

IV. Рациональная функция

Пусть P и Q – функции-многочлены с действительными коэффициентами:

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n \text{ и } Q(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m,\ a_0\neq 0,\ b_0\neq 0,\ m, n\in\mathbb{N}^*.$$

Функция $\frac{P}{Q}: E\to\mathbb{R}$, где $E=\{x\in\mathbb{R}\mid Q(x)\neq 0\}$, называется ***рациональной функцией***.

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)},\quad \forall x_0\in E;$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_0x^n}{b_0x^m}=\begin{cases}\infty, \text{ если } n>m,\\ \frac{a_0}{b_0}, \text{ если } n=m,\\ 0, \text{ если } n<m.\end{cases}$

Если $x\to+\infty$ или $x\to-\infty$, то в б) следует указать и знак выражения $\frac{a_0}{b_0}\lim\limits_{x\to+\infty}x^{n-m}$.
Случай $Q(x_0)=0$ будет рассмотрен в § 4.

Примеры

1. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^3-4x^2+3}{-x^2+6x-2}=\frac{2\cdot 2^3-4\cdot 2^2+3}{-2^2+6\cdot 2-2}=\frac{1}{2}.$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2x^5+3x+1}{4x^2-x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2x^5}{4x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}x^3\right)=+\infty.$

V. Функция радикал

❶ $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty),\quad f(x)=\sqrt[n]{x},\quad n\in\mathbb{N},\quad n\geq 2,\quad n$ – четное (рис. 2.8)

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{x_0},\quad x_0\in[0,+\infty);$

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[n]{x}=+\infty,\ n$ – четное число.

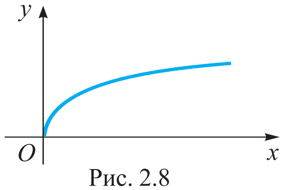


Рис. 2.8

❷ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\sqrt[n]{x},\quad n\in\mathbb{N},\quad n\geq 3,\quad n$ – нечетное число (рис. 2.9)

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{x_0},\quad x_0\in\mathbb{R};$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[n]{x}=\infty,$ если n – нечетное число;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[n]{x}=+\infty,$ если n – нечетное число;

г) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[n]{x}=-\infty,$ если n – нечетное число.

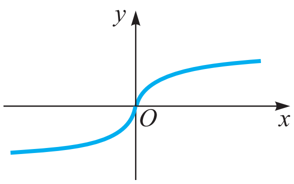


Рис. 2.9

VI. Показательная функция

$f\colon \mathbb{R} \to (0, +\infty),\ \ f(x) = a^x,\ \ a > 0,\ \ a \neq 1$ (рис. 2.10)

а) $\lim\limits_{x \to x_0} a^x = a^{x_0},\ \ x_0 \in \mathbb{R};$

б) если $a > 1$, то: $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty,\ \ \lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0;$

в) если $0 < a < 1$, то: $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0,\ \ \lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty;$

г) не существует $\lim\limits_{x \to \infty} a^x$.

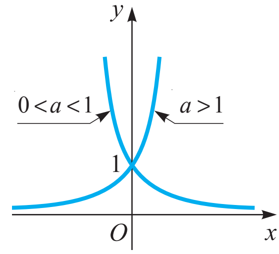


Рис. 2.10

VII. Логарифмическая функция

$f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R},\ \ f(x) = \log_a x,\ \ a > 0,\ \ a \neq 1$ (рис. 2.11)

а) $\lim\limits_{x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0,\ \ x_0 > 0;$

б) если $a > 1$, то: $\lim\limits_{x \to +0} \log_a x = -\infty,\ \ \lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty;$

в) если $0 < a < 1$, то: $\lim\limits_{x \to +0} \log_a x = +\infty,\ \ \lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty.$

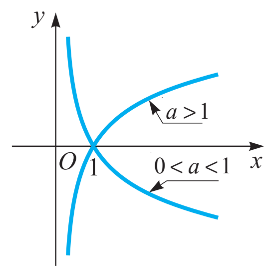


Рис. 2.11

VIII. Степенная функция с действительным показателем

$f\colon (0, +\infty) \to (0, +\infty),\ \ f(x) = x^\alpha,\ \ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (рис. 2.12)

а) $\lim\limits_{x \to x_0} x^\alpha = x_0^\alpha,\ \ x_0 > 0;$

б) $\alpha > 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to +0} x^\alpha = 0,\ \ \lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty;$

в) $\alpha < 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0,\ \ \lim\limits_{x \to +0} x^\alpha = +\infty.$

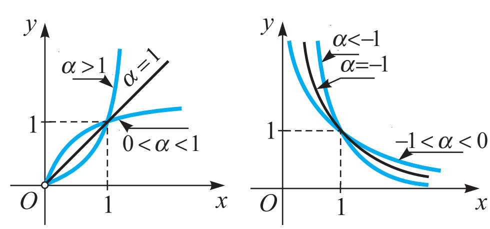


Рис. 2.12

IX. Тригонометрические функции

❶ ***Функция синус*** $f\colon \mathbb{R} \to [-1, 1],\ \ f(x) = \sin x$ (рис. 2.13)

а) $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0,\ \ x_0 \in \mathbb{R};$

б) не существует $\lim\limits_{x \to \infty} \sin x,\ \ \lim\limits_{x \to +\infty} \sin x,\ \ \lim\limits_{x \to -\infty} \sin x.$

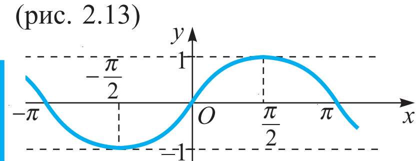


Рис. 2.13

❷ ***Функция косинус*** $f\colon \mathbb{R} \to [-1, 1],\ \ f(x) = \cos x$ (рис. 2.14)

а) $\lim\limits_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0,\ \ x_0 \in \mathbb{R};$

б) не существует $\lim\limits_{x \to \infty} \cos x,\ \ \lim\limits_{x \to +\infty} \cos x,\ \ \lim\limits_{x \to -\infty} \cos x.$

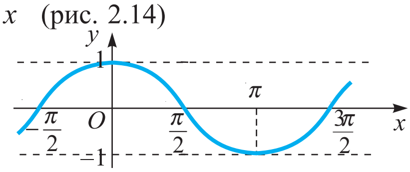


Рис. 2.14

❸ *Функция тангенс*

$$f\colon \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\operatorname{tg}x \ \ (\text{рис. } 2.15)$$

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}x_0,\quad x_0\neq\alpha_k=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\quad k\in\mathbb{Z};$

б) $\lim\limits_{x\to\alpha_k-0}\operatorname{tg}x=+\infty,\quad \lim\limits_{x\to\alpha_k+0}\operatorname{tg}x=-\infty,\quad k\in\mathbb{Z}.$

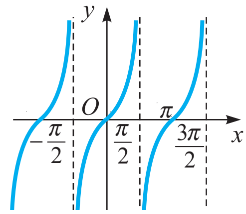


Рис. 2.15

❹ *Функция котангенс*

$$f\colon \mathbb{R}\setminus\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\operatorname{ctg}x \ \ (\text{рис. } 2.16)$$

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\operatorname{ctg}x=\operatorname{ctg}x_0,\quad x_0\neq\beta_k=k\pi,\quad k\in\mathbb{Z};$

б) $\lim\limits_{x\to\beta_k-0}\operatorname{ctg}x=-\infty,\quad \lim\limits_{x\to\beta_k+0}\operatorname{ctg}x=+\infty,\quad k\in\mathbb{Z}.$

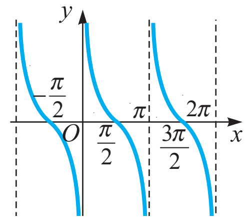


Рис. 2.16

X. Обратные тригонометрические функции

❶ *Функция арксинус*

$$f\colon [-1,\ 1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right],\quad f(x)=\arcsin x \ \ (\text{рис. } 2.17)$$

$\lim\limits_{x\to x_0}\arcsin x=\arcsin x_0,\ \ x_0\in[-1,\ 1].$

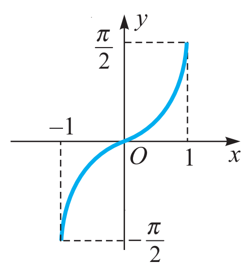


Рис. 2.17

❷ *Функция арккосинус*

$$f\colon [-1,\ 1]\to[0,\ \pi],\quad f(x)=\arccos x \ \ (\text{рис. } 2.18)$$

$\lim\limits_{x\to x_0}\arccos x=\arccos x_0,\quad x_0\in[-1,\ 1].$

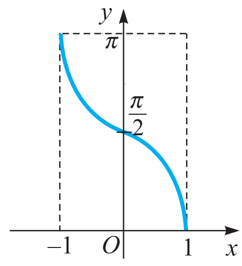


Рис. 2.18

❸ *Функция арктангенс*

$$f\colon \mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right),\quad f(x)=\operatorname{arctg}x \quad (\text{рис. } 2.19)$$

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\operatorname{arctg}x=\operatorname{arctg}x_0,\quad x_0\in\mathbb{R};$

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}x=\dfrac{\pi}{2},\quad \lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}x=-\dfrac{\pi}{2};$

в) не существует $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arctg}x.$

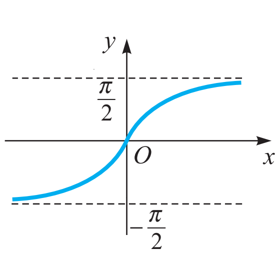


Рис. 2.19

❹ ***Функция арккотангенс***

$f\colon \mathbb{R} \to (0,\ \pi),\quad f(x) = \operatorname{arcctg} x\quad$ (рис. 2.20)

а) $\lim\limits_{x\to x_0} \operatorname{arcctg} x = \operatorname{arcctg} x_0,\ \ x_0 \in \mathbb{R};$

б) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arcctg} x = 0,\ \ \lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi;$

в) не существует $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arcctg} x.$

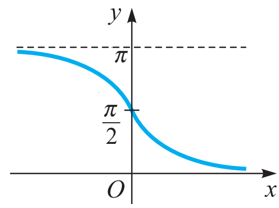


Рис. 2.20

XI. Функция модуль (абсолютная величина)

$f\colon \mathbb{R} \to [0,\ +\infty),\quad f(x) = |x|\quad$ (рис. 2.21)

а) $\lim\limits_{x\to x_0} |x| = |x_0|,\ \ x_0 \in \mathbb{R};$

б) $\lim\limits_{x\to+\infty} |x| = +\infty,\ \ \lim\limits_{x\to-\infty} |x| = +\infty,\ \ \lim\limits_{x\to\infty} |x| = +\infty.$

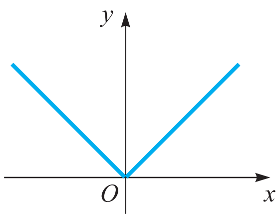


Рис. 2.21

Простейший класс функций, который изучается в математическом анализе – это множество элементарных функций I–XI. Функции, которые получаются из элементарных функций посредством последовательного выполнения конечного числа алгебраических операций и операции композиции, иногда также называются ***элементарными функциями***. Из результатов этого параграфа делаем вывод, что для элементарных функций $f\colon D \to \mathbb{R}$ $(D \subseteq \mathbb{R}$, где D – максимальная область определения функции) верно соотношение $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),\ x_0 \in D,$ то есть *предел функции в точке равен значению функции в этой точке*.

Примеры

1. а) Функция, заданная формулой $f(x) = \sqrt{x} + 2^x - 3\log_2 x$, – элементарная, значит, $\lim\limits_{x\to 4}(\sqrt{x} + 2^x - 3\log_2 x) = f(4) = \sqrt{4} + 2^4 - 3\log_2 4 = 12.$

б) Аналогично,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\left(\ln(\sin x) + 3\ln\left(\frac{5}{4} + \cos^2 x\right)\right) = \ln\left(\sin\frac{\pi}{6}\right) + 3\ln\left(\frac{5}{4} + \cos^2\frac{\pi}{6}\right) = \ln\frac{1}{2} + 3\ln 2 = 2\ln 2.$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3} = \infty;\ \ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 0;\ \ \lim\limits_{x\to+0}\ln x = -\infty;\ \ \lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{x} = \infty;\ \ \lim\limits_{x\to+\infty} x^{-\frac{1}{3}} = 0;\ \ \lim\limits_{x\to+0}\operatorname{ctg} x = +\infty$ etc.

Упражнения и задачи

Б

1. Вычислите предел:

а) $\lim\limits_{x\to 4}\left(-\dfrac{1}{8}x^3 + \sqrt{x} + 5\right);$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^4 + \dfrac{1}{x} + \sqrt[3]{x^2}\right);$ в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{x} - \dfrac{2}{x^2} + x^3\right);$

г) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x^2 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} + \sqrt[3]{x}\right);$ д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt[5]{x^3} + \dfrac{1}{x^2} - 3x^2\right);$ е) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} + 3 + x^3 + \sqrt[3]{x}\right).$

2. Вычислите предел:

а) $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2+x-10)$; б) $\lim\limits_{x\to -\infty}(2x^3+5x^2+3)$; в) $\lim\limits_{x\to \infty}(2x^4+3x^3+1)$;

г) $\lim\limits_{x\to +\infty}(-5x^3+100x^2)$; д) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^3-10x^2+1}{x^2+3x+1}$; е) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3+x-3}{x^2-5x^3}$;

ж) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x-x^3}{2x^4+3}$; з) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^3-2x^2+4}{1+x-x^2}$; и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3-x^2+3x}{5x^4-x^3-x}$.

3. Вычислите предел:

а) $\lim\limits_{x\to 2}(2^x+\log_{0,25}x-(\sqrt{3})^x)$; б) $\lim\limits_{x\to +0}(\pi^x+\log_3 x)$; в) $\lim\limits_{x\to +0}(\log_{0,5}x-2^x)$;

г) $\lim\limits_{x\to \log_2 e}(2^x-2\cdot 4^x+8^x)$; д) $\lim\limits_{x\to 2^e}(\log_2 x+\log_4 x-e)$; е) $\lim\limits_{x\to +\infty}(e^x+\lg x)$.

4. Вычислите предел:

а) $\lim\limits_{x\to -\infty}(-\sqrt[4]{x^4+1})$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x^4-x^3+1)(1-x^2)$; в) $\lim\limits_{x\to -\infty}(x^6-x^3)(x^3-x+1)$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{|x-1|}$; д) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x+1}{|x+1|}$; е) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{|x-1|}{3x-1}$.

5. Вычислите предел:

а) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}(\sin x+\sqrt{3}\cos x-\sqrt{3}\operatorname{tg} x)$; б) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(\sin x+2\operatorname{ctg} x-\cos x)$;

в) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}+n\pi}(\sin x+2\cos x-3\operatorname{ctg} x)$, $n\in\mathbb{Z}$; г) $\lim\limits_{x\to n\pi}(2\sin x-3\cos x+\operatorname{tg} x)$, $n\in\mathbb{Z}$.

6. Заполните пропуски, чтобы получить истинное высказывание:

а) $\lim\limits_{x\to -\infty}\sin(2^x)=\lim\limits_{y\to \ldots}\sin y=0$, где $y=2^x$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}\operatorname{tg}(\pi^x+\ln x)=\lim\limits_{y\to \ldots}\operatorname{tg} y=\ldots$, где $y=\ldots$

7. Определите, истинно ли высказывание:

а) $\nexists\lim\limits_{x\to +\infty}\cos(1-2x)$; б) $\exists\lim\limits_{x\to -\infty}\sin x^2$; в) $\nexists\lim\limits_{x\to +\infty}(\sin x-\cos x)$,

где символ $\nexists$ обозначает „не существует“.

8. Вычислите в указанной точке x_0 односторонние пределы функции $f\colon D\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=\dfrac{1}{\ln|x|}$, $x_0\in\{-1, 0, 1\}$; б) $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2-1}}$, $x_0\in\{-1, 1\}$; в) $f(x)=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x+1}}}$, $x_0=1$.

9. При каких значениях $m\in\mathbb{R}$ функция $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}3\sqrt{x^2+m^2}-2, & \text{если } x<0,\\ m+2, & \text{если } x=0,\\ (m^2e^x):\left(1+2^{-\frac{1}{x}}\right), & \text{если } x>0,\end{cases}$

имеет в точке $x_0=0$ предел, равный $f(0)$?

10. Найдите значения параметра $m\in\mathbb{R}$, при которых функция $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$f(x)=\begin{cases}\sqrt{m^2x^2-6mx+9\cdot 2^{1-x}}, & \text{если } x<1,\\ 4-\sqrt{m^2x^2+2mx+3^{x-1}}, & \text{если } x\ge 1,\end{cases}$ имеет предел в точке $x_0=1$.

11. Используя понятие одностороннего предела и теорему о пределе сложной функции, вычислите предел:

а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\cos(1-2\sin x)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\ln(\sin^2 x)$; в) $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}}$; г) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{3^x-\ln x^2+x^3}$;

д) $\lim\limits_{x\to\pi}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\sin\frac{x}{2}\right)$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ctg}^3(\pi\cos x)$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^{\sin x}}{\ln(\cos x)}$; з) $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin x\right)$.

§3 Вычисление пределов функций

3.1. Свойства пределов функций

Пусть $E\subseteq\mathbb{R}$, $f, g\colon E\to\mathbb{R}$ – две функции и $x_0\in\mathbb{R}$ – предельная точка множества E. Следующие утверждения выражают ***свойства пределов функций*** или ***достаточные условия существования предела функции в точке*** и могут быть выведены при помощи определения предела функции в точке.

1° Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$, $a\in\mathbb{R}$, то существует окрестность $V(x_0)$ точки x_0 такая, что функция f ограничена на множестве $V(x_0)\cap E$.

2° Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$, $a, b\in\mathbb{R}$, и $a<b$ (соответственно $a>b$), то существует окрестность $V(x_0)$ точки x_0 такая, что $f(x)<g(x)$ (соответственно $f(x)>g(x)$) для любого $x\in V(x_0)\cap E\setminus\{x_0\}$.

Следствие. В свойстве 2°, если $g(x)=\lambda$ $(\forall x\in E,\ \lambda\in\mathbb{R})$, то существует окрестность $V(x_0)$ точки x_0 такая, что $f(x)<\lambda$ (соответственно $f(x)>\lambda$) для любого $x\in V(x_0)\cap E\setminus\{x_0\}$.

При $\lambda=0$ получим, что $f(x)<0$ (соответственно $f(x)>0$) для любого $x\in V(x_0)\cap E\setminus\{x_0\}$.

3° Переход к пределу в неравенствах. Если

а) существуют пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$,

б) $f(x)\le g(x)$ для любого $x\in E$ или в некоторой окрестности точки x_0 из E,

то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

Следствие. В свойстве 3°, если $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-\infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, а если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$.

4° Признак „зажима“. Пусть функции $f, g, h\colon E\to\mathbb{R}$ удовлетворяют условиям:

а) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=a$, $a\in\mathbb{R}$,

б) $f(x)\le h(x)\le g(x)$ для любого $x\in E$ или в некоторой окрестности точки x_0 из E. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=a$.

Задание с решением

Вычислим:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sin x)$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sin x^2-e^{-x})$.

Решение:

а) Для любого $x\in\mathbb{R}$ верно двойное неравенство: $-1\le-\sin x\le 1$.

Тогда $x-\sin x\ge x-1$ (1). Поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$, в силу следствия свойства 3° и неравенства (1) следует, что $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sin x)=+\infty$.

б) Так как $\sin x^2-e^{-x}\le 1-e^{-x}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, и $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-e^{-x})=-\infty$, в силу следствия свойства 3° следует, что $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sin x^2-e^{-x})=-\infty$.

3.2. Замечательные пределы

Следующие пределы применяются при вычислении пределов функций и называются ***замечательными пределами***:

❶ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ ❷ а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

Лемма. Двойное неравенство $|\sin x|\le|x|\le|\operatorname{tg}x|$ верно при $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$.

Доказательство

Пусть $0<x<\dfrac{\pi}{2}$. Рассмотрим окружность радиуса 1 и центральный угол AOC, радианная мера которого равна x (рис. 2.22). Обозначим через B точку пересечения касательной к окружности в точке A с полупрямой OC, а через D – основание перпендикуляра, опущенного из точки C на прямую OA. Очевидно, что площадь треугольника AOC меньше площади сектора AOC, которая, в свою очередь, меньше площади треугольника AOB, то есть

$$\frac{1}{2}AO\cdot DC\le\frac{1}{2}AO^2\cdot x\le\frac{1}{2}AO\cdot AB. \qquad (2)$$

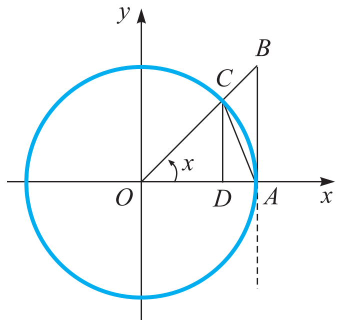


Рис. 2.22

Учитывая, что $AO=1$, $DC=\sin x$, $AB=\operatorname{tg}x$, из (2) получим двойное неравенство

$$\sin x\le x\le\operatorname{tg}x,\ \text{где}\ \ 0\le x<\frac{\pi}{2}. \qquad (3)$$

Если $-\dfrac{\pi}{2}<x<0$, то $0<-x<\dfrac{\pi}{2}$. Из (3) следует, что $\sin(-x)\le -x\le\operatorname{tg}(-x)$, то есть

$$-\sin x\le -x\le -\operatorname{tg}x,\ \text{где}\ \ -\frac{\pi}{2}<x<0. \qquad (4)$$

Неравенства (3) и (4), на основании определения абсолютной величины, равносильны двойному неравенству, указанному в лемме. ▶

Рассмотрим доказательства замечательных пределов ❶ и ❷.

1. Если $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)\setminus\{0\}$, то $\sin x\neq 0$, и так как $x\neq 0$, из двойного неравенства, указанного в лемме, при делении на $|\sin x|$, получим: $1<\left|\frac{x}{\sin x}\right|<\left|\frac{1}{\cos x}\right|\Leftrightarrow$ $|\cos x|<\left|\frac{\sin x}{x}\right|<1$. Но $|\cos x|=\cos x$, а x и $\sin x$ – числа одного и того же знака при $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$. Следовательно, $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$, если $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)\setminus\{0\}$. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=\cos 0=1$, из последнего двойного неравенства, согласно признаку „зажима“, следует, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

2. Доказательство замечательного предела ❷ дано лишь схематически.

а) Применив соотношение $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ (см. модуль 1, §3, пункт 3.3), можно доказать, что для любой последовательности $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n\in(-\infty,\ -1)\cup(0,\ +\infty)$, предел которой $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$, верно соотношение $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}=e$. В этом случае из определения предела функции в точке по Гейне следует, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

Случай б) следует из случая а) и высказывания ⑥ о пределе сложной функции, если в а) выполнить подстановку $u=\frac{1}{x}$ и $u\to 0$ при $x\to\infty$.

Задание с решением

1. Покажем, что:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\ a>0$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$.

Решение:

Применив соответствующие соотношения для пределов элементарных функций, замечательные пределы ❶, ❷ и высказывание ⑥ о пределе сложной функции, получим.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$.

б) Выполнив замену переменной $u=a^x-1$, получим $x=\log_a(1+u)$ и $u\to 0$ при $x\to 0$. Таким образом (см. пример а)), получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\log_a(1+u)}=\lim_{u\to 0}\frac{1}{\log_a(1+u)^{\frac{1}{u}}}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a.$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)}\cdot\alpha\cdot\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]=$

$=\alpha\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{e^u-1}{u}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\alpha\ln e\cdot 1=\alpha$, где $u=\alpha\ln(1+x)$ и $u\to 0$ при $x\to 0$.

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1\cdot\dfrac{1}{\cos 0}=1.$

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}\left(\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}\right)^2=\dfrac{1}{2}$, где $u=\dfrac{x}{2}\to 0$ при $x\to 0$.

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u}{\sin u}=\lim\limits_{u\to 0}\left(\dfrac{\sin u}{u}\right)^{-1}=1$, где $u=\arcsin x$ и $u\to 0$ при $x\to 0$.

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u}{\operatorname{tg}u}=\lim\limits_{u\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{tg}u}{u}\right)^{-1}=1$, где $u=\operatorname{arctg}x$ и $u\to 0$ при $x\to 0$.

Замечание. Замечательные пределы ❶ и ❷, а также все пределы, приведенные в задании с решением **1**, в силу высказывания ⑥ о пределе сложной функции, верны и в том случае, когда выполняется замена переменной $x=u(t)$, где $\lim\limits_{t\to t_0}u(t)=0$ (за исключением замечательного предела ❷ а), где $\lim\limits_{t\to t_0}u(t)=\infty$).

2. Вычислим предел:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\operatorname{tg}5x}{\sin 4x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3\sin^2 2x}-1}{x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x^2}-3^{2x^2}}{\cos x-\cos 2x}$.

Решение:

На основании замечательного предела ❶, примеров задания с решением **1** и предыдущего замечания, получаем:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\operatorname{tg}5x}{\sin 4x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\frac{\sin 3x}{3x}-5\frac{\operatorname{tg}5x}{5x}}{4\frac{\sin 4x}{4x}}=\dfrac{3\cdot 1-5\cdot 1}{4\cdot 1}=-\dfrac{1}{2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3\sin^2 2x}-1}{x^2}=12\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{e^{3\sin^2 2x}-1}{3\sin^2 2x}\cdot\left(\dfrac{\sin 2x}{2x}\right)^2\right]=12\ln e\cdot 1^2=12$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x^2}-3^{2x^2}}{\cos x-\cos 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2^{3x^2}-1)-(3^{2x^2}-1)}{(1-\cos 2x)-(1-\cos x)}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\cdot\frac{2^{3x^2}-1}{3x^2}-2\cdot\frac{3^{2x^2}-1}{2x^2}}{4\cdot\frac{1-\cos 2x}{(2x)^2}-\frac{1-\cos x}{x^2}}=\dfrac{3\ln 2-2\ln 3}{4\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{3}\ln\dfrac{8}{9}.$

3. Вычислим предел:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos 3x)}{2x^2+x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{5+3x}-2}{x^2+2x-3}$.

Решение:

а) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 3x)}{2x^2+x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+(\cos 3x-1))}{2x^2+x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+(\cos 3x-1))}{\cos 3x-1}\cdot\frac{\cos 3x-1}{(3x)^2}\cdot\frac{9}{2+x}\right]=1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{9}{2+0}=-\frac{9}{4};$$

б) Выполняем замену переменной: $u=x-1$. Тогда $u\to 0$ при $x\to 1$ и

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{5+3x}-2}{x^2+2x-3}=\lim_{u\to 0}\frac{\sqrt[3]{5+3(1+u)}-2}{(1+u)^2+2(1+u)-3}=\lim_{u\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+3u}-2}{u^2+4u}=$$

$$=2\lim_{u\to 0}\left[\frac{\left(1+\frac{3}{8}u\right)^{\frac{1}{3}}-1}{\frac{3}{8}u}\cdot\frac{\frac{3}{8}}{u+4}\right]=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{3}{8}}{4}=\frac{1}{16}.$$

4. Вычислим предел:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+3}\right)^{1-x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Решение:

Воспользуемся замечательными пределами ❷ а) и ❷ б).

а) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{1-x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1}{2x+3}-1\right)^{1-x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{2x+3}\right)^{1-x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2x+3}{-4}}\right)^{\frac{2x+3}{-4}}\right]^{\frac{-4}{2x+3}(1-x)}=\left[\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4(x-1)}{2x+3}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4\left(1-\frac{1}{x}\right)}{2+\frac{3}{x}}}=e^2,$$

где $u=\dfrac{2x+3}{-4}$ и $u\to\infty$ при $x\to\infty$;

б) $$\lim_{x\to 0}\left(1+\sin\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\sin\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}}\right]^{\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}}=\left[\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}=e^{\frac{1}{2}\cdot 1}=\sqrt{e},$$ где

$u=\sin\dfrac{x}{2}$ и $u\to 0$ при $x\to 0$.

Упражнения и задачи

Б

1. Вычислите предел:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x-1)(2x+1)-3}{(x-3)(x+2)+x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+2x)(1+3x)}{(1+x)(1-2x)}$; в) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{9x^2+1}{16x^2+1}}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+2x)(1+3x)-1}{10x+x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-x)(1-3x)-1}{(1-5x)(1+7x)-1}$; е) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(2+x)^2-9}{(3+x)^2-16}$;

ж) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{(x-2)^3-8}{(x-3)^3-1}$; з) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^3-1-3x}{6x^2+x^4}$; и) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)^2(x+1)}{(x^3-8)(x^2-4)}$;

к) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+3x-10}{2x^2-x-6}$; л) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$; м) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{x^3+1}$;

н) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{1+4x}-3}$; о) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^3}-1}{\sqrt{x}-1}$; п) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sqrt{1-x}-1}$;

р) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin4x}{\sin3x}$; с) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x+\sin3x}{\sin4x}$; т) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^x$;

у) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{2x}$; ф) $\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$; х) $\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$.

2. Вычислите предел:

а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{\sqrt[3]{1+2x+x^3}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{1+4x}-3}{\sqrt[3]{2+3x}-2}$; в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt[3]{1+7x}}{1+\sqrt[5]{1-2x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sin2(x-2)}{x-2}$; д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(3x+x^2)}{x}$; е) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-2\sin x}{x+3\sin x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(\pi+3x)}{\sin(2\pi-6x)}$; з) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}+e^{3x}+e^{4x}-3}{\operatorname{tg}x+\sin2x}$; и) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x+x^2)}{e^{5x}-e^{3x}}$;

к) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\sin4x)}{\ln(1+\operatorname{tg}2x)}$; л) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos3x}{\sin^2x}$; м) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos3x-\cos x}{e^{6x^2}-1}$;

н) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin2x}{\sin(3x+\sin x)}$; о) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{arctg}^2x}{\cos2x-e^{x^2}}$; п) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin2x}-e^{\sin3x}}{\sin(\sin(\sin x))}$;

р) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\sin2x}-\sqrt{1-\sin3x}}{\operatorname{tg}x-\sin4x}$; с) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{\cos2x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\operatorname{arctg}x^2}$; т) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\arcsin x)}{\sqrt[5]{1-\sin2x}-1}$;

у) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos3x)}{\ln(e^{x^2}+\sin^2x)}$; ф) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x\cos2x}{e^{\sin x^2}-\cos2x}$; х) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{(1-\sin x)(1-\sin^3x)}{\cos^4x}$.

3. Применив свойства пределов функций, вычислите:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-\cos x^2)$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sin2x-\cos3x)$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin x-2^x)$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2+\sin x)e^x$.

4. Найдите $m, n\in\mathbb{R}$, если:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}+mx+n\right)=3$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(mx+n)}{x-1}=2$, где $m+n=\pi$.

§4 Неопределенности в операциях над пределами функций

В §2 утверждалось, что некоторые операции над пределами функций не имеют смысла. Рассмотрим более подробно одну из этих операций.

Пусть x_0 – предельная точка множества $E \subseteq \mathbb{R}$, $f, g\colon E \to \mathbb{R}$ – две функции, для которых существуют конечные или бесконечные пределы $a = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $b = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$. Например, из соответствующих определений предела функции в точке следует, что:

если $a = \infty$, $b \in \mathbb{R}$, то $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \infty$;

если $a = +\infty$, $b = +\infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = +\infty$ и т. д.

При помощи символов эти высказывания записываются так: $\infty + b = \infty$ $(b \in \mathbb{R})$, $(+\infty)+(+\infty) = +\infty$ и называются ***определенностями***, а про сумму $a+b$ в этом случае говорят, что она имеет смысл. Полная таблица ***определенностей***, к которым могут привести операции над пределами функций, представлена в пункте 2.1.

Если же $a = +\infty$, $b = -\infty$ или $a = -\infty$, $b = +\infty$, то про предел функции $f+g$ в точке x_0 нельзя ничего утверждать. В самом деле, если $x \to +\infty$, то:

а) $f(x) = x^2 \to +\infty$, $g(x) = -x \to -\infty$ и $f(x)+g(x) = x^2\left(1-\dfrac{1}{x}\right) \to +\infty$;

б) $f(x) = x + \dfrac{1}{x} \to +\infty$, $g(x) = -x \to -\infty$ и $f(x)+g(x) = \dfrac{1}{x} \to 0$;

в) $f(x) = x + l \to +\infty$, $g(x) = -x \to -\infty$ и $f(x)+g(x) = l \to l$, $l \in \mathbb{R}$;

г) $f(x) = x + \sin x \to +\infty$, $g(x) = -x \to -\infty$ и $f(x)+g(x) = \sin x$ не имеет предела.

Таким образом, предел $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$ зависит от самой природы функций f и g и может быть бесконечным, нулем, любым действительным числом, а также может и не существовать. В этом случае говорят, что рассмотренный предел представляет собой *неопределенность* вида $\infty - \infty$, а про сумму $a+b$ говорят, что не имеет смысла.

Итак, операции $a+b$, $a\cdot b$, $\dfrac{a}{b}$ и a^b с пределами функций $a = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $b = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ приводят к следующим семи случаям:

$$\boxed{\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad 0\cdot\infty,\quad \infty-\infty,\quad 1^{\infty},\quad 0^{0},\quad \infty^{0}}\,.$$

Не существует четкого правила, позволяющего избавиться от неопределенности. Но есть некоторые рекомендации, позволяющие раскрывать эти неопределенности.

I. Неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, где $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$.

Рекомендуется разложить, если возможно, на множители $f(x)$ и $g(x)$, умножить и числитель и знаменатель отношения $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ на сопряженное, сократив затем на $x - x_0$, или применить замечательный предел ❶ или пределы из задания с решением **1**, пункта 3.2.

Примеры

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{3x^2-2x-1}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(3x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{3x+1}=\dfrac{3}{4}.$

(Сокращение на $x-1$ было возможным, так как $x\to 1$, но $x\neq 1$.)

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin(2x+x^6))}{4x-x^2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin(2x+x^6))}{\sin(2x+x^6)}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x+x^6)}{4x-x^2}=$

$=1\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x+x^6)}{4x-x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x+x^6)}{2x+x^6}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+x^6}{4x-x^2}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(2+x^5)}{x(4-x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+x^5}{4-x}=\dfrac{1}{2}.$

Аналогично примеру **1** поступают с пределом $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где P и Q – многочлены.

Пусть $P,\ Q\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – ненулевые многочлены.

а) Если $P(x_0)=Q(x_0)=0$, то найдутся многочлены $P_1,\ Q_1\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и числа $i,\ j\in\mathbb{N}^*$ такие, что $P_1(x_0)\neq 0$, $Q_1(x_0)\neq 0$, $P(x)=(x-x_0)^i P_1(x)$, $Q(x)=(x-x_0)^j Q_1(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P_1(x_0)}{Q_1(x_0)}\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{(x-x_0)^{j-i}}$.

б) Если $P(x_0)\neq 0$, а $Q(x_0)=0$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P(x_0)}{Q_1(x_0)}\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{(x-x_0)^j}=\infty$.

II. Неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$ встречается при вычислении предела $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, где $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$.

Рекомендуется выделить, если это возможно, в числителе и знаменателе отношения $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ функции (члены), дающие наибольший рост на бесконечности, так называемые ***функции доминанты***; вынести за скобки эти функции как общий множитель и эквивалентно преобразовать полученные выражения, применив, если это необходимо, замечательные пределы или пределы из задания с решением **1**, пункта 3.2.

Пример

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x+3^{x+1}}{4^{x+1}+2^{x+2}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x\left[\left(\frac{2}{3}\right)^x+3\right]}{4^{x+1}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]}=\frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^x\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x+3}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^x}=\frac{1}{4}\cdot 0\cdot\frac{0+3}{1+0}=0,$$

где 3^x и 4^{x+1} – функции доминанты.

III. Неопределенность вида $0\cdot\infty$ встречается при вычислении предела $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]$, где $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$.

> ***Рекомендуется*** выполнить эквивалентные преобразования $f(x)\cdot g(x)=\dfrac{g(x)}{(f(x))^{-1}}$, $f(x)\neq 0$, или $f(x)\cdot g(x)=\dfrac{f(x)}{(g(x))^{-1}}$, $g(x)\neq 0$, чтобы получить неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$ или $\dfrac{0}{0}$.

Пример

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^2\cdot\sin\frac{1}{x}\cdot\sin\frac{2}{x}\right)=(\infty\cdot 0)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}\cdot\sin\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y\cdot\sin 2y}{y^2}=$$

$$=2\lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin y}{y}\cdot\frac{\sin 2y}{2y}\right)=2\cdot 1\cdot 1=2,\quad \text{где } y=\frac{1}{x}\to 0 \text{ при } x\to\infty.$$

IV. Неопределенность вида $\infty-\infty$ встречается при вычислении предела $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]$, где $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$ и $a=+\infty$, $b=+\infty$ или $a=-\infty$, $b=-\infty$.

> ***Рекомендуется*** выполнить эквивалентное преобразование выражения $f(x)-g(x)$ путем приведения к общему знаменателю или избавления от иррациональности при помощи сопряженных выражений, или применением тождества
> $f(x)-g(x)=\dfrac{(g(x))^{-1}-(f(x))^{-1}}{(f(x)\cdot g(x))^{-1}}$, $f(x)\cdot g(x)\neq 0$, и т. д., чтобы получить неопределенность $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Примеры

1. $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{2x+1}-\frac{x^2-1}{2x-1}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2+4x}{4x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2}{4x^2}=-\frac{1}{2}.$$

2. $$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4x+5}-x)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+4x+5}-x)(\sqrt{x^2+4x+5}+x)}{\sqrt{x^2+4x+5}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x+5}{\sqrt{x^2+4x+5}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4+\frac{5}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+1}=2.$$

V. Неопределенности вида 1^∞, 0^0, ∞^0 встречаются при вычислении предела $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}$.

> ***Рекомендуется*:** а) *при неопределенности вида* 1^∞ использовать замечательные пределы, относящиеся к числу e;
> б) *при неопределенностях вида* 1^∞, 0^0, ∞^0 применять основное логарифмическое тождество $[f(x)]^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$, $f(x)>0$, и соотношение $\lim\limits_{x\to x_0} e^{g(x)\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)}$ (высказывание ⑤ из §2), чтобы привести показатель степени $g(x)\cdot\ln f(x)$ к неопределенности вида $0\cdot\infty$.

Примеры

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+3}\right)^{2x+1}=(1^{\infty})=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{x+1}{x+3}-1\right)^{2x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\dfrac{-2}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{-2}}\right]^{\frac{-2(2x+1)}{x+3}}=$

$=\left[\lim\limits_{y\to0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2(2x+1)}{x+3}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2\left(2+\frac{1}{x}\right)}{1+\frac{3}{x}}}=e^{-4}$, где $y=-\dfrac{2}{x+3}\to0$ при $x\to+\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x^2)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln(1+x^2)}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{2\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln x}}=e^{2+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln x}}=e^{2+0}=e^2.$

В 4 модуле будут сформулированы правила Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$ при вычислениях пределов функций. Следствиями этих правил являются пределы:

$$\textbf{1.}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^{\alpha}}=0\quad(\alpha>0,\ a>0,\ a\neq1)$$

$$\textbf{2.}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{a^{x}}=0\quad(\alpha>0,\ a>1)$$

Эти пределы следует применять при раскрытии неопределенностей вида $\dfrac{\infty}{\infty}$ и $0\cdot\infty$.

Замечание. Если $x\to+\infty$ и $\alpha>0$, $a>1$, то логарифмическая $\log_a x$, степенная x^{α} и показательная a^x функции стремятся к плюс бесконечности. Из пределов **1** и **2** следует, что самой „медленной“ является функция $\log_a x$, быстрой” – функция x^{α}, а самой „быстрой“ – функция a^x.

Данное замечание применяется при раскрытии неопределенности вида $\dfrac{\infty}{\infty}$ тогда, когда нужно определить доминантные функции.

Упражнения и задачи

Б

1. Вычислите предел:

1) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x^2-4)(x^2-x-2)}{(x^2+x-6)^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)^5(3x+1)^5}{(2x+6)^{10}}$; 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+2\cdot\sqrt[4]{x}}{\sqrt[6]{x}+3\sqrt{x}}$;

4) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+5x+2}{\sqrt[3]{x}+1}$; 5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x-4^x}{2^x-4^x}$; 6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3^x-4^x}{2^x-4^x}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3^x-4^x}{2^x-4^x}$; 8) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(x^2+x^6)}{\ln(x^4+x^{10})}$; 9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x^2+x^6)}{\ln(x^4+x^{10})}$;

10) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x+x^2)}{\ln(1-x^3+x^6)}$; 11) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x^2+e^{5x})}{\ln(x^{10}+e^{4x})}$; 12) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(x^2+e^{5x})}{\ln(x^{10}+e^{4x})}$;

13) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+6x}-x)$; 14) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}+x)$; 15) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2}-x)$;

16) $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{x^3+1}\right)$; 17) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+2}-\dfrac{x^2+3}{x-1}\right)$; 18) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+1}{4x+3}\right)^{x^2}$;

19) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+3}\right)^{5-2x}$; 20) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+4x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}$; 21) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2^x+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$;

22) $\lim\limits_{x\to2}(x^2+x-5)^{\frac{1}{x-2}}$; 23) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x+2}$; 24) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x-1}{x+1}-\dfrac{x^2-2x-1}{x-1}\right)$;

25) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+x)(1+x^2)...(1+x^n)}{[(4x)^n+1]^{\frac{n+1}{2}}}$, $n\geq1$; 26) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+x^2+...+x^n-n}{x-1}$, $n\geq1$;

27) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$; 28) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(3^{-x}+2^{3x})}{\ln(e^{-x}+e^{2x})}$; 29) $\lim\limits_{x\to+\infty}[x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+3}-2\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})]$;

30) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{6\sin^2x+\sin x-2}{4\sin^2x-8\sin x+3}$; 31) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+\operatorname{tg}x}{2+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 2x}}$; 32) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\cos2x}{\cos5x}\right)^{\frac{1}{\sin^2x}}$;

33) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{\ln(x^2+x^3)}}$; 34) $\lim\limits_{x\to+0}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})^{\frac{1}{\ln(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}}$; 35) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})^{\frac{1}{\ln(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}}$.

2. Найдите значения параметров $a,b\in\mathbb{R}$, если $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{4x^2-x^3}+ax+b)=\dfrac{1}{3}$.

3. Вычислите $\lim\limits_{x\to+\infty}(a\sqrt{x^2+x}+b\sqrt{4x^2+x})$ в зависимости от значений параметров $a,b\in\mathbb{R}$.

4. Дана функция $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+4}{x+1}$. Найдите значения $a,b\in\mathbb{R}$, зная, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$, $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=3$, а затем вычислите $\lim\limits_{x\to-1\pm0}f(x)$.

5. Дана функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2+ax+1, \text{ если } x<2,\\ b+\ln(x-1), \text{ если } x\geq2.\end{cases}$ Найдите значения параметров $a,b\in\mathbb{R}$, при которых существуют пределы $\lim\limits_{x\to2}f(x)$ и $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$, причем $\lim\limits_{x\to2}f(x)=f(2)$.

Упражнения и задачи на повторение

Б

1. Вычислите предел:

а) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{8-6x+x^2}{2+3x-2x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x+1}{(1-2x)(3x+4)}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(2+x)(1+3x)-2}{9-(3-2x)^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x+1)(3x+1)(4x+1)}{(3-2x)^3}$; д) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2-3x}{x+1}-\dfrac{2x^2+5x}{x-2}\right)$; е) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2\sqrt[4]{x^3}}{2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x^2}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{6-10x}-4}{2x^2-3x-5}$; з) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{5-\sqrt{10x+5}}$; и) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{7+x}-2}{x-1}$;

к) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{5+x}}{\sqrt[3]{1+2x}+1}$; л) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{7-6x}-\sqrt[5]{16-15x}}{\sqrt[6]{9-8x}-1}$;

м) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{2x^2-x+1})$; н) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt[3]{x^3-x^2})$;

о) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-2\sqrt{x}+\sqrt{x-1})$.

2. Вычислите предел:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x+\sin 4x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 3x+2\sin x}{3\sin 2x-\operatorname{tg} x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\cdot \arcsin 6x}{\operatorname{tg}^2(3x)}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 5x-3\operatorname{arctg} 2x}{\operatorname{arctg} 6x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-3^{2x}}{2^{3x}+3^{2x}-2}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-1}{\operatorname{tg} 6x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{\sin^2(2x)}$; з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\cos 2x-\cos 3x}$; и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2\sin 3x)}{e^{5x}-e^{3x}}$;

к) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos 6x)}{\ln(\cos 3x)}$; л) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^{x+4}$; м) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\sin x}{1+\sin 2x}\right)^{\frac{1}{x}}$;

н) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos 2x}{\cos x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; о) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x\cdot 3^x}{1+x\cdot 5^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

3. Вычислите односторонний предел:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}\dfrac{x}{(x+1)(x-2)}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{|1-x|}{\sqrt{x^2-1}}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\dfrac{1}{2-2^{\frac{x}{2-x}}}$;

г) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{1}{1-2^x}$; д) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{x-2}{\ln(1+x)}$; е) $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\dfrac{1}{3-3^{\frac{1+|x|}{1-x^2}}}$.

4. Найдите значения параметра $a\in\mathbb{R}$, при которых существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$:

а) $f(x)=\begin{cases}4x^2+a, & \text{если } x\le 1\\ \sqrt{5x+4}+2a^2, & \text{если } x>1,\end{cases}$ $x_0=1$;

б) $f(x)=\begin{cases}a^2+3x+2, & \text{если } x<0\\ 5\sqrt{a^2+x^2}-2, & \text{если } x\ge 0,\end{cases}$ $x_0=0$;

в) $f(x)=\begin{cases}x^2\sqrt{3a+1}+ax+a, & \text{если } x\le -1\\ x^2-x\sqrt{a+4}, & \text{если } x>-1,\end{cases}$ $x_0=-1$;

г) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{a^2x^2+1}, & \text{если } x<1\\ 1+2ax, & \text{если } x\ge 1,\end{cases}$ $x_0=1$.

5. Найдите значения параметров $a, b\in\mathbb{R}$ зная, что:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2+ax+b)}{2x^2-3x+1}=3$, если $a+b=-1$;

б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2x^2-x+3}{x-2}+ax+b\right)=6$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{ax}-ae^{bx}}{x}=-4$.

6. Вертикальное сечение рельефа гористой местности задано функцией $f\colon\left[-6, \dfrac{11}{2}\right]\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}1-6x-x^2, & \text{если } x\in[-6, -1),\\ 0{,}1x+2{,}1, & \text{если } x\in[-1, 1],\\ -0{,}45x^2+2{,}7x-0{,}05, & \text{если } x\in\left(1, \dfrac{11}{2}\right],\end{cases}$$ масштаб 1 : 100 м для осей координат.

Между двумя горами, на плоскогорье, соответствующем значению абсцисс $x\in[-1, 1]$ расположена деревушка.

а) Постройте график функции f и определите абсциссы вершин гор.
б) Найдите разность между вершинами гор.
в) Найдите высоту вертикальной стены горы, соответствующей абсциссе $x=-1$.
г) Вычислите угол наклона плоскогорья, на котором расположена деревушка.
д) Какова минимальная глубина колодца деревушки, если ось Ox является уровнем поверхности подземных вод?

7. График функции $f: [-10{,}2;\, 52] \to \mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{200}x^2-\dfrac{1}{50}, & \text{если } x\in[-10{,}2;\, 2] \\ \dfrac{1}{5000}(x-2)^2+\dfrac{1}{1000}, & \text{если } x\in(2;\, 52], \end{cases}$

представляет рельеф морского дна, масштаба 1 : 10 000 м. Поверхность воды моря соответствует горизонтальной прямой $y=0{,}5$.
а) Постройте график функции f и определите максимальную глубину моря.
б) Какова ширина моря, если она соответствует горизонтальной прямой $y=0{,}5$?
в) Определите высоту трещины тектонической плиты в точке с абсциссой $x=2$.

Проверочная работа

Б

Время выполнения работы: 45 минут

В заданиях 1 и 2 определите букву, соответствующую верному варианту.

1. Функция $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} m^2-\sqrt{4-2x}, & \text{если } x\le 0, \\ \dfrac{\sin mx}{x}, & \text{если } x>0, \end{cases}$ где $m\in\mathbb{R}$, имеет предел в точке $x_0=0$, если ②

A $m=2$. **B** $m\in\{-1,\ 3\}$. **C** $m\in\{-1,\ 2\}$. **D** $m=-1$.

2. Предел $\lim\limits_{x\to+\infty}(ax+b-\sqrt{ax^2+bx+1})=4$, где $a,\ b\in\mathbb{R}$, если ②

A $a=0,\ b=4$. **B** $a=1,\ b\in\mathbb{R}$. **C** $a=1,\ b=8$. **D** $a\in\{0,\ 1\},\ b\in\mathbb{R}$.

3. Пусть $l_1=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x^2+2x-3)^2}{(x^2-1)^2}$, $l_2=\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2x-3}\right)^2$, $l_3=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x^2+x-2)^2}{(x^2-3x+2)^2}$. ④

а) Вычислите l_1 и l_3.
б) Не вычисляя значение предела l_2, найдите значение $l=l_1l_2l_3$.
в) Применив результаты пункта б), найдите значение предела l_2.
г) Решите неравенство $\log_{l_2}(x-l_1)+\log_{l_2}(l_3-x)\ge\log_{l_2}9-\log_{l_2}l$.

4. Вычислите: ②

а) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{10-3x}-\sqrt{2+x}}{\sqrt[4]{9-4x}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}\sin5x-3\sin\frac{x}{2}}{\sin2x-4\sin\frac{3x}{2}+\sin6x}$.

Предел функции

Множество
$E \subseteq \mathbb{R}$

Предельная точка
$\forall V(x_0)$ верно соотношение $V(x_0) \bigcap (E \setminus \{x_0\}) \neq \varnothing$, где $V(x_0)$ – окрестность точки x_0

Признак существования предельной точки множества
x_0 – предельная точка множества $E \Leftrightarrow E \supset (x_n)_{n \geq 1}$, $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Функция
$f\colon E \to \mathbb{R}$

Предел функции
$l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

Односторонние пределы
$l_л(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$; $l_п(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$.

Признак существования предела функции в точке
$\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \exists l_л(x_0) = l_п(x_0) = l$

Операции над пределами функций
1. $\lim\limits_{x \to x_0}[cf(x)] = c \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, c – const.
2. $\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$
3. $\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$
4. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$
5. $\lim\limits_{x \to x_0}[f(x)]^{g(x)} = [\lim\limits_{x \to x_0} f(x)]^{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$

Свойства пределов функции в точке
1° Если функция имеет предел в точке, то этот предел единственный.

2° Если предел функции в точке меньше (больше) предела другой функции в соответствующей точке, то в окрестности этой точки и первая функция меньше (больше) второй функции.

3° Если предел функции в точке положительный (отрицательный), то в окрестности этой точки функция сохраняет свой знак, то есть она положительна (отрицательна).

4° Если функция имеет конечный предел в точке, то в окрестности этой точки она ограничена.

5° В неравенстве функций можно перейти к пределу, сохранив при этом знак неравенства.

6° Композиция функций, имеющих предел в точке, есть функция, имеющая предел в этой точке.

7° Если f – элементарная функция, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, где x_0 – произвольная точка, принадлежащая ее области определения.

Замечательные пределы
❶ $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

❷ $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x \to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$

Неопределенности в операциях над пределами функций
$\dfrac{0}{0}$; $\dfrac{\infty}{\infty}$; $\infty - \infty$; $0 \cdot \infty$; 1^∞; 0^0; ∞^0.

Раскрытие неопределенностей
$\mathbf{\dfrac{0}{0}}$ – методом разложения на множители или используя известные пределы.

$\dfrac{\infty}{\infty}$ – вынесением за скобки функций, дающих наибольший рост на бесконечности.

$\infty - \infty$ – приведением к общему знаменателю или умножением числителя и знаменателя на сопряженные выражения.

$\mathbf{0 \cdot \infty}$ – эквивалентными преобразованиями произведения в частное двух функций.

$\mathbf{1^\infty}$, $\mathbf{0^0}$, $\mathbf{\infty^0}$ – применением замечательных пределов, относящихся к числу e, или применением основного логарифмического тождества.

Порядок роста некоторых функций на бесконечности
1. „Самой медленной“ является логарифмическая функция: $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$, $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$.
2. „Быстрой“ является степенная функция: $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$.
3. „Более быстрой“ является показательная функция: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = a^x$, $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$.
4. „Самой быстрой“ является функция факториал: $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n!$.

Модуль

3 Непрерывные функции

Цели

⇨ *установление *непрерывности*, нахождение *точек разрыва* на основании аналитических формул или по графикам заданных функций;

⇨ *применение понятий *непрерывная функция*, **односторонняя непрерывная функция*, *разрывная функция в точке* или *на множестве* при решении задач;

⇨ *применение арифметических операций над функциями, непрерывными в точке или на промежутке в различных контекстах;

⇨ *использование свойств функций, непрерывных на промежутке в различных контекстах.

Дана функция $f: E \to \mathbb{R}$ $(E \subseteq \mathbb{R})$. В модуле 2 было изучено поведение функции f в окрестности предельной точки x_0 множества E, причем условие принадлежности точки x_0 множеству E не было существенным, а в случае, когда точка x_0 принадлежала множеству E, значение функции f в точке x_0 не принималось во внимание.

В этом модуле мы изучим поведение функции f не только в окрестности точки x_0, но и в самой точке x_0, а именно: мы сравним значение функции f в x_0 с ее значениями в точках из окрестности x_0. Для этого необходимо, чтобы функция f была определена в точке x_0, то есть, чтобы точка x_0 принадлежала множеству E.

§1 Функции, непрерывные в точке. Функции, непрерывные на множестве


Бернард Больцано

С понятием *предела функции* тесно связано другое важное понятие математического анализа – *непрерывность функции*. Это понятие было четко сформулировано математиками Б. Больцано[1] и О. Л. Коши.

1.1. Понятие непрерывности

Интуитивно, утверждения *кривая непрерывна* и *кривая не имеет разрывов*, то есть она может быть проведена, не отрывая карандаша от бумаги, являются эквивалентными.

Понятия *непрерывная функция*, *разрывная функция* (*в точке* или *на множестве*) легче понять, рассмотрев графики некоторых функций. Рассмотрим несколько примеров.

[1] Бернард Больцано (1781–1848) – чешский философ, логик и математик итальянского происхождения.

Примеры

1. Предположим, что по числовой оси равномерно движется материальная точка, которая в момент времени $t=0$ находится в начале отсчета. Если скорость точки постоянна и равна v, то, обозначив через $s(t)$ расстояние, пройденное точкой за время t, получим уравнение $s(t)=vt,\ t\ge 0$. График функции $s\colon [0,\ +\infty)\to\mathbb{R},\ s(t)=vt,$ изображен на рисунке 3.1.

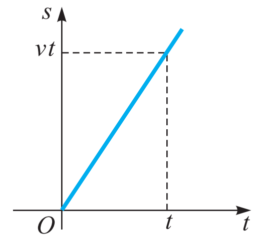


Рис. 3.1

2. Рассмотрим функции $f,\ g,\ h\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}x, & \text{если } x\le 1,\\ 1, & \text{если } x>1,\end{cases}\quad g(x)=\begin{cases}x, & \text{если } x<1,\\ 2, & \text{если } x=1,\\ 1, & \text{если } x>1,\end{cases}\quad h(x)=\begin{cases}x, & \text{если } x\le 1,\\ 1+x, & \text{если } x>1.\end{cases}$$

Графики этих функций изображены на рис. 3.2.

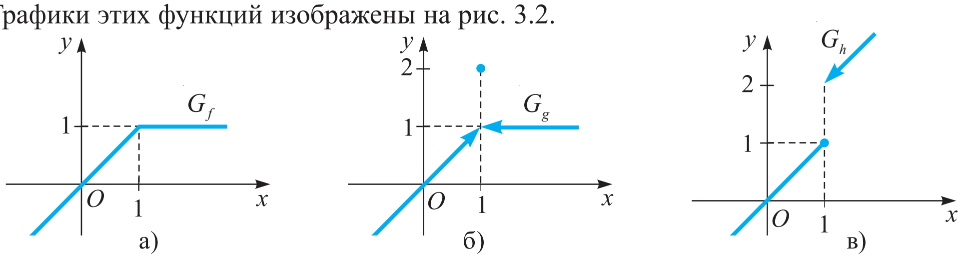


Рис. 3.2

Графики функций s (рис. 3.1) и f (рис. 3.2 а)) могут быть проведены не отрывая карандаша от бумаги, а графики функций g и h (рис. 3.2 б), в)) разрываются в точке с абсциссой $x_0=1$.

Чтобы выделить различия в поведении функций f, g и h в точке $x_0=1$, сравним их односторонние пределы в $x_0=1$ с их соответствующими значениями в этой точке:

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1-0}x=1,\ f(1+0)=\lim_{x\to 1+0}f(x)=\lim_{x\to 1+0}1=1,\ f(1)=1;$$

$$g(1-0)=\lim_{x\to 1-0}g(x)=\lim_{x\to 1-0}x=1,\ g(1+0)=\lim_{x\to 1+0}g(x)=\lim_{x\to 1+0}1=1,\ g(1)=2;$$

$$h(1-0)=\lim_{x\to 1-0}h(x)=\lim_{x\to 1-0}x=1,\ h(1+0)=\lim_{x\to 1+0}h(x)=\lim_{x\to 1+0}(1+x)=2,\ h(1)=1.$$

Предел функций f и g в точке $x_0=1$ равен 1, то есть $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$ и $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=1$. Отметим, что $f(1)=1,\ g(1)=2$. График функции g разрывается в точке с абсциссой $x_0=1$, так как $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=1$, а $g(1)=2$. График функции h разрывается в точке с абсциссой $x_0=1$, так как ее односторонние пределы в этой точке различны (функция h не имеет предела в точке $x_0=1$). Таким образом, можно сделать вывод, что график функции f не разрывается в точке с абсциссой $x_0=1$ по двум причинам:

1) существует $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$; 2) этот предел равен значению функции f в точке $x_0=1$.

На основании этих рассуждений, сформулируем следующее

Определение. Пусть $f\colon E\to\mathbb{R}$ – некоторая функция и точка $x_0\in E$ предельная точка множества E. Говорят, что функция f **непрерывна в точке** x_0, если она имеет предел в этой точке, и этот предел равен значению функции в точке x_0: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

Замечание. Если x_0 не является предельной точкой, то есть это изолированная точка, то по определению функция ***непрерывна*** в такого рода точке.

Учитывая это замечание, далее рассмотрим вопрос о непрерывности функции *только* в предельных точках ее области определения.

Определение непрерывности функции f в точке x_0 основано на понятии предела функции f в этой точке x_0. Поэтому многие из свойств пределов функций верны и для непрерывных функций. Применив определения предела функции в точке, получим характеристики непрерывности.

Теорема 1. Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}$ – некоторая функция и $x_0 \in E$.

1. Функция f непрерывна в точке $x_0 \Leftrightarrow$ для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in E$ из неравенства $|x - x_0| < \delta$ следует, что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

2. Функция f непрерывна в точке $x_0 \Leftrightarrow$ для любой последовательности $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n \in E$, из того, что $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$ следует, что соответствующая последовательность $(f(x_n))_{n\geq 1}$ стремится к $f(x_0)$, то есть $f(x_n) \to f(x_0)$ при $n \to \infty$.

3. Функция f непрерывна в точке $x_0 \Leftrightarrow$ существуют односторонние пределы (x_0 – внутренняя точка множества E):

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0 - 0), \quad \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0 + 0) \text{ и } f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0).$$

Высказывания 1–3 означают существование предела функции в точке x_0 и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Если функция f непрерывна в точке $x_0 \in E$, то x_0 называется ***точкой непрерывности*** функции f. Если функция f не является непрерывной в точке $x_0 \in E$, она называется ***разрывной в точке*** $\boldsymbol{x_0}$, а x_0 называется ***точкой разрыва*** функции f.

Функция f, непрерывная в любой точке множества $A \subseteq E$, называется ***непрерывной на множестве*** $\boldsymbol{A}$.

В случае когда $A = E$, вместо того, чтобы говорить, что функция f непрерывна на всей области определения или, по определению, можно просто говорить, что функция f ***непрерывна*** (не указывая на каком множестве).

Замечание. Было доказано, что предел элементарных функций в любой точке x_0, принадлежащей их области определения, вычисляется прямой заменой x на x_0, то есть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Значит, элементарные функции (рациональные, показательные и др.) непрерывны на любом промежутке, на котором они определены.

Вывод. Элементарные функции непрерывны в любой точке, принадлежащей их области определения.

Примеры

1. Функция f (рис. 3.2 а)) непрерывна в точке $x_0 = 1$, а функции g, h (рис. 3.2 б), в)) разрывны в этой точке.

2. Функции $f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 + 2x^3 - 1$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = 3^x$, – элементарные, поэтому они непрерывны на множестве $\mathbb{R}$, а функция $\varphi\colon (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \sqrt{1 - 3^x}$, непрерывна на промежутке $(-\infty, 0]$ из тех же соображений.

Задание с решением

Исследуем на непрерывность функцию $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ если } x \in (0, 1], \\ \dfrac{x+1}{2}, \text{ если } x \in (1, +\infty). \end{cases}$

Решение:

Исследование на непрерывность функции, без указания определенной точки, подразумевает исследование функции на всей ее области определения.

На промежутке $(0, 1]$ функция f задана формулой $f(x) = x^2$, а на интервале $(1, +\infty)$ – формулой $f(x) = \dfrac{x+1}{2}$ и f непрерывна на этих промежутках (рис. 3.3). Далее исследуем на непрерывность функцию f в точке $x_0 = 1$.

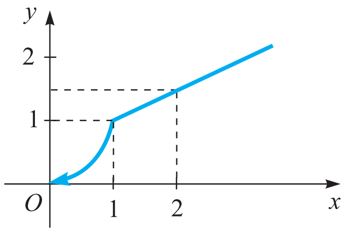


Рис. 3.3

Имеем: $f(1-0) = \lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1-0} x^2 = 1$,

$f(1+0) = \lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1+0} \dfrac{x+1}{2} = 1$ и $f(1) = 1$.

Следовательно, $f(1-0) = f(1+0) = f(1)$. По теореме 1 (высказывание 3), функция f непрерывна и в точке $x_0 = 1$.

Ответ: Функция f непрерывна на интервале $(0, +\infty)$.

1.2. Точки разрыва

Точки разрыва функции делятся на две категории (два рода).

Пусть $f: E \to \mathbb{R}$ $(E \subseteq \mathbb{R})$ – некоторая функция и точка $x_0 \in E$ (x_0 – внутренняя точка множества E).

Определение. Точка разрыва x_0 называется **точкой разрыва первого рода** функции f, если односторонние пределы функции f в точке x_0 существуют и конечны, однако $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$ или $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$.

Задания с решением

1. Дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, \text{ если } x < 0, \\ 2, \text{ если } x \geq 0. \end{cases}$

Исследуем на непрерывность функцию f в точке $x_0 = 0$.

Решение:

$f(-0) = \lim\limits_{x \to -0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, $f(+0) = \lim\limits_{x \to +0} f(x) = 2$.

Так как $f(-0) \neq f(+0)$, значит, точка $x_0 = 0$ является точкой разрыва первого рода функции f.

2. Дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, \text{ если } x < 1, \\ 1, \text{ если } x = 1, \\ 2, \text{ если } x > 1. \end{cases}$

Исследуем на непрерывность функцию f на множестве $\mathbb{R}$.

Решение:

Функция f непрерывна на множестве $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, а в точке $x_0 = 1$ имеем $f(1-0) = f(1+0) = 2$ и $f(1) = 1$ (рис. 3.4).

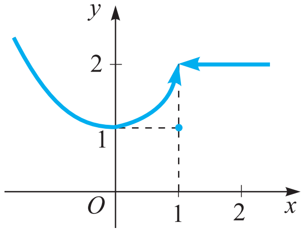


Рис. 3.4

Значит, функция f не является непрерывной в точке $x_0=1$, имея в этой точке разрыв первого рода.

Определение. Точка разрыва x_0 называется **точкой разрыва второго рода** функции f, если она не является точкой разрыва первого рода.

Из определения следует, что в точке разрыва второго рода хотя бы один из односторонних пределов бесконечен (то есть равен ∞), или хотя бы один из односторонних пределов не существует.

Задания с решением

1. Дана функция $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & \text{если } x<0,\\ 1, & \text{если } x\ge 0.\end{cases}$

Исследуем на непрерывность функции f (рис. 3.5) в точке $x_0=0$.

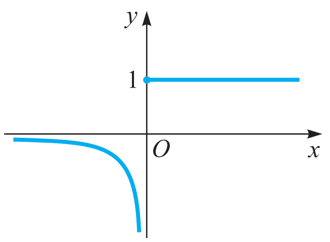


Рис. 3.5

Решение:

$\lim\limits_{x\to-0} f(x)=\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{1}{x}=-\infty$. Следовательно, точка $x_0=0$ является точкой разрыва второго рода функции f.

2. Дана функция $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x, & \text{если } x\in\mathbb{Q},\\ 0, & \text{если } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$

Покажем, что функция f непрерывна в точке $x_0=0$, и любая точка $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ является точкой разрыва второго рода функции f.

Решение:

Пусть $x_0=0$ и дана произвольная последовательность $(x_n)_{n\ge1}$, $x_n\to0$ при $n\to\infty$. Тогда $f(x_n)=\begin{cases}x_n, & \text{если } x_n\in\mathbb{Q},\\ 0, & \text{если } x_n\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ и очевидно, что $f(x_n)\to0=f(0)$ при $n\to\infty$. Значит, функция f непрерывна в точке $x_0=0$.

Пусть теперь x_0 – произвольная точка и $x_0\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Покажем, что не существует предела слева функции f в точке x_0. Рассмотрим такие две последовательности $(x_n')_{n\ge1}$, $x_n'\in\mathbb{Q}$, и $(x_n'')_{n\ge1}$, $x_n''\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, что $x_n'\to x_0-0$ и $x_n''\to x_0-0$ при $n\to\infty$. Тогда согласно определению функции f следует, что $f(x_n')=x_n'\to x_0$, а $f(x_n'')=0\to0$ при $n\to\infty$. Но $x_0\ne0$. Значит, мы показали, что существуют две последовательности $(x_n')_{n\ge1}$ и $(x_n'')_{n\ge1}$, которые стремятся слева к x_0, но соответствующие им последовательности $(f(x_n'))_{n\ge1}$ и $(f(x_n''))_{n\ge1}$, стремятся к различным пределам. Это означает, что не существует $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$. Следовательно, x_0 является точкой разрыва второго рода функции f.

Определение. Пусть $f\colon E\to\mathbb{R}$ $(E\subseteq\mathbb{R})$ – некоторая функция и x_0 – внутренняя точка множества E. Если существуют конечные односторонние пределы, $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$, то разность $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ называется **скачком функции** f в точке x_0.

Например, функция $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{sgn} x$, в точке $x_0=0$ имеет скачок, равный 2 (рис. 3.6 а)).

Замечания. 1. Очевидно, что скачок функции f в точке непрерывности x_0 равен нулю, поскольку в этом случае $f(x_0-0)=f(x_0+0)$.

2. Скачок функции f может быть равен нулю и в точке разрыва x_0, если
$f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$.

Например, рассмотрим функцию $f\colon [-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} x, \text{ если } x\in[-\pi,0),\\ 1, \text{ если } x=0,\\ \sin x, \text{ если } x\in(0,\pi].\end{cases}$$

Имеем $f(-0)=f(+0)=0$, а $f(0)=1$. Значит, функция f разрывна в точке $x_0=0$ и ее скачок равен нулю (рис. 3.6 б)).

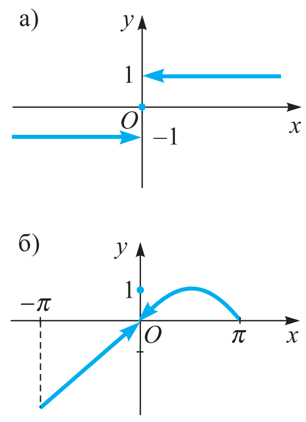


Рис. 3.6

1.3. Односторонняя непрерывность

Пусть $f\colon E\to\mathbb{R}$ $(E\subseteq\mathbb{R})$ – некоторая функция и $x_0\in E$ – предельная точка множества $E_-=E\cap(-\infty,x_0)=\{x\mid x\in E,\ x<x_0\}$.

Определение. Функция f называется **непрерывной слева** в точке x_0, если в x_0 существует предел слева $f(x_0-0)$ и $f(x_0-0)=f(x_0)$.

Пусть $f\colon E\to\mathbb{R}$ – некоторая функция и $x_0\in E$ – предельная точка множества $E_+=E\cap(x_0,+\infty)=\{x\mid x\in E,\ x>x_0\}$.

Определение. Функция f называется **непрерывной справа** в точке x_0, если в x_0 существует предел справа $f(x_0+0)$ и $f(x_0+0)=f(x_0)$.

Примеры

1. Функция $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}1, \text{ если } x\le 0,\\ -1, \text{ если } x>0,\end{cases}$ непрерывна слева в точке $x_0=0$, поскольку $f(-0)=1=f(0)$, и не является непрерывной справа в этой точке, так как $f(+0)=-1$, а $f(0)=1$, то есть $f(+0)\neq f(0)$.

2. Функция $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}1, \text{ если } x<0,\\ -1, \text{ если } x\ge 0,\end{cases}$ непрерывная справа в точке $x_0=0$, поскольку $f(+0)=-1=f(0)$, и не является непрерывной слева в этой точке, так как $f(-0)=1$, а $f(0)=-1$, то есть $f(-0)\neq f(0)$.

Замечания. 1. Функция $f\colon E\to\mathbb{R}$ $(E\subseteq\mathbb{R})$ непрерывна в точке $x_0\in E$ (x_0 – внутренняя точка множества E) тогда и только тогда, когда она непрерывна и слева, и справа в точке x_0 (сравните с теоремой 1, высказывание 3).

2. Если $E=[a, b]$, то задача непрерывности слева в точке a и соответственно справа в точке b не имеет смысла. А также функция $f\colon [a, b]\to\mathbb{R}$ непрерывна в точке a (соответственно b) тогда и только тогда, когда она непрерывна в точке a справа (соответственно в точке b слева).

Задания с решением

1. Рассмотрим функцию $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} e^x+a\cos x, \text{ если } x<0,\\ 1, \text{ если } x=0,\\ x^2+b, \text{ если } x>0,\end{cases}$ где $a, b\in\mathbb{R}$.

Найдем значения действительных параметров a и b, при которых функция f:

а) непрерывна слева в точке $x_0=0$;

б) непрерывна справа в точке $x_0=0$;

в) непрерывна на множестве $\mathbb{R}$.

Решение:

а) $\lim\limits_{x\to-0} f(x)=\lim\limits_{x\to-0}(e^x+a\cos x)=1+a$. По определению функция f непрерывна слева в точке $x_0=0$ тогда и только тогда, когда $f(-0)=f(0)\Leftrightarrow 1+a=1\Leftrightarrow a=0$ и $b\in\mathbb{R}$.

б) $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=\lim\limits_{x\to+0}(x^2+b)=b$. Согласно определению функция f непрерывна справа в точке $x_0=0$ тогда и только тогда, когда $f(+0)=f(0)\Leftrightarrow b=1$ и $a\in\mathbb{R}$.

в) Функция f непрерывна на интервалах $(-\infty,\ 0)$ и $(0,\ +\infty)$ при любых значениях параметров a и b. В точке $x_0=0$ функция f непрерывна тогда и только тогда, когда $f(-0)=f(+0)=f(0)\Leftrightarrow a=0$ и $b=1$.

Ответ: а) $a=0, b\in\mathbb{R}$; б) $a\in\mathbb{R}, b=1$; в) $a=0, b=1$.

2. Исследуйте на непрерывность слева и справа функцию $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} 3x-2, \text{ если } x\le 1\\ x^2+1, \text{ если } x>1.\end{cases}$$

Решение:

Функция f – элементарная, поэтому при $x<1$ и $x>1$ она непрерывна. Исследуем ее на непрерывность в точке $x=1$. Вычислим односторонние пределы:

$\lim\limits_{x\to1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to1}(3x-2)=1=f(1)$, $\lim\limits_{x\to1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to1}(x^2+1)=2\neq f(1)$. Следовательно, f непрерывна слева в точке $x=1$ и не является непрерывной справа в этой точке.

Упражнения и задачи

Б

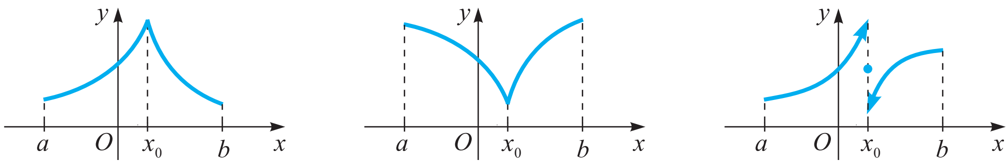
1. Покажите, что функция $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x-1$, непрерывна в точках $x_0=0$ и $x_1=2$.

2. Исследуйте на непрерывность функцию f на ее области определения:

а) $f\colon [-1; 1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^x+x+\dfrac{x}{x+3}$; б) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+\dfrac{1}{x^2+1}$;

в) $f\colon (-3, +\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x+3}+\ln(x+4)$.

3. Найдите промежутки непрерывности функции $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, заданной графически:

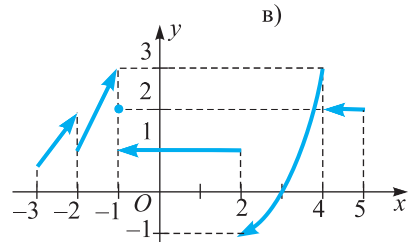


а) б) в)

4. Функция $f: [-3, 5] \to \mathbb{R}$ задана графически на данном рисунке.

а) Укажите промежутки, на которых функция f непрерывна.

б) Вычислите: $f(-1)\cdot f(0)$, $f(2)\cdot f(4)$, $f(0)\cdot f(-1)$, $f(0)\cdot f(4{,}5)$.



5. Применив неравенство $|\sin x| \le |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$, докажите непрерывность функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = \sin x$; б) $g(x) = \cos x$; в) $f(x) = \sin 2x$; г) $f(x) = \cos 2x$.

6. Дана функция $f: [0, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x$. Покажите, что существует $\delta > 0$ такое, что для любого x, для которого $|x-2| < \delta$, верно неравенство $|f(x) - 6| < \frac{1}{10}$. Следует ли из этого, что функция f непрерывна в точке $x_0 = 2$?

7. Определите, какие из следующих функций $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывны на множестве $\mathbb{R}$:

а) $f(x) = |x+1|$; б) $f(x) = x + |x-1|$; в) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, \text{ если } x \ne 0, \\ 1, \text{ если } x = 0; \end{cases}$ г) $f(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}}, \text{ если } x > 0, \\ 2{,}7, \text{ если } x \le 0. \end{cases}$

8. Дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2ax, \text{ если } x \le 1, \\ x^3 + a^3, \text{ если } x > 1, \end{cases}$ где $a \in \mathbb{R}$. Найдите действительные значения параметра a, при которых функция f непрерывна на множестве $\mathbb{R}$.

9. Найдите точки разрыва и вычислите в этих точках скачок функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{x^2}{n}\right)^n, \text{ если } x \le 1, \\ \sin(x-1), \text{ если } x > 1; \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x+1), \text{ если } x \le 0, \\ 2, \text{ если } x > 0. \end{cases}$

10. Исследуйте на непрерывность функцию $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2, \text{ если } x \in \mathbb{Q} \\ x + 1, \text{ если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, \text{ если } x < 0 \\ 2, \text{ если } x = 0 \\ \dfrac{\sin 2x}{2}, \text{ если } x > 0. \end{cases}$

11. Исследуйте на непрерывность и постройте график функции:

а) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \begin{cases} \dfrac{x}{n}, \text{ если } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, \text{ если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \end{cases}$ б) $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}(x^{2n} + x^{2n+2})$.

12. Дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax + be^x, \text{ если } x < 1, \\ 2, \text{ если } x = 1, \\ 1 - ax, \text{ если } x > 1. \end{cases}$ Найдите значения параметров $a, b \in \mathbb{R}$, при которых функция f непрерывна:

а) слева в точке $x_0 = 1$; б) справа в точке $x_0 = 1$.

§2 Операции над непрерывными функциями

Покажем, что арифметические операции над непрерывными функциями, а также их композиция, сохраняют непрерывность.

2.1. Сумма, произведение и частное непрерывных функций

Теорема 2. Если $f, g\colon E \to \mathbb{R}$ $(E \subseteq \mathbb{R})$ – непрерывные функции в точке $x_0 \in E$, то αf $(\alpha \in \mathbb{R})$, $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ являются непрерывными функциями в точке x_0. Если к тому же $g(x_0) \neq 0$, то и $\dfrac{f}{g}$ – непрерывная функция в точке x_0.

Доказательство

Докажем первые два утверждения.

По условию $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$. Тогда

$$\lim_{x \to x_0} (\alpha f(x)) = \alpha \lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha f(x_0) \text{ и}$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0), \text{ то есть}$$

$$\lim_{x \to x_0} (\alpha f)(x) = (\alpha f)(x_0) \text{ и } \lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = (f+g)(x_0).$$

Значит, функции αf и $f+g$ непрерывны в точке x_0. ▶

Задание. Докажите непрерывность функций $f-g$, $f \cdot g$ и $\dfrac{f}{g}$.

Эту теорему, сформулированную локально (для одной точки x_0), можно расширить на множество, в частности, на всю область определения E.

Примеры

1. Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x + \sin x + x$, непрерывна на множестве $\mathbb{R}$, так как является суммой трех непрерывных функций на множестве $\mathbb{R}$.

2. Функция, заданная формулой $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$, непрерывна на множестве $E = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, поскольку является частным двух непрерывных функций на этом множестве и ее знаменатель не обращается в нуль на множестве E.

3. Функция, заданная формулой $f(x) = \operatorname{tg} x$, непрерывна на множестве $E = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$, так как $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ $(\cos x \neq 0,\ x \in E)$, и синус, косинус – непрерывные функции на множестве E.

2.2. Композиция непрерывных функций

Теорема 3. Пусть $g\colon E_1 \to E_2$, $f\colon E_2 \to \mathbb{R}$ $(E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R})$ – две функции и $h = f \circ g\colon E_1 \to \mathbb{R}$ – их композиция. Если функция g непрерывна в точке $x_0 \in E_1$ и функция f непрерывна в точке $y_0 = g(x_0) \in E_2$, то функция h непрерывна в x_0.

Доказательство

Пусть $(x_n)_{n\ge 1}$ – произвольная последовательность, $x_n \in E_1$ и $x_n \to x_0$ при $n\to\infty$. Покажем, что $h(x_n)\to h(x_0)$ при $n\to\infty$. Обозначим $y_n = g(x_n)\in E_2$. Поскольку функция g непрерывна в точке x_0, следует, что $y_n = g(x_n)\to g(x_0) = y_0$ при $n\to\infty$. Так как функция f непрерывна в точке y_0, то $f(y_n)\to f(y_0)$, то есть $f(g(x_n))\to f(g(x_0))$ или $h(x_n)\to h(x_0)$ при $n\to\infty$. Таким образом, мы доказали, что функция h непрерывна в точке x_0. ►

Замечание. Из условий теоремы 3 и из определения непрерывности следует равенство: $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = f(g(x_0)) = f(\lim\limits_{x\to x_0} g(x))$, которое означает, что *предел „взаимодействует“ со всеми непрерывными функциями.*

Примеры

1. $\lim\limits_{x\to 0} e^{\sin x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\sin x} = e^0 = 1$ на основании непрерывности функций $f(x) = e^x$ и $g(x) = \sin x$;

2. $\lim\limits_{x\to\pi} \mathrm{tg}(2^{\sqrt{x}}) = \mathrm{tg}(\lim\limits_{x\to\pi} 2^{\sqrt{x}}) = \mathrm{tg}(2^{\lim\limits_{x\to\pi}\sqrt{x}}) = \mathrm{tg}2^{\sqrt{\pi}}$ на основании непрерывности функций a^x, $\mathrm{tg}x$ и x^α в соответствующих точках.

Следствие. Если функция $g\colon E_1 \to E_2$ непрерывна на множестве E_1 и функция $f\colon E_2 \to \mathbb{R}$ непрерывна на множестве E_2 $(E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R})$, то функция $h = f\circ g\colon E_1 \to \mathbb{R}$ непрерывна на множестве E_1.

Итак, композиция двух непрерывных функций является непрерывной функцией, а теоремы 2 и 3 распространяются на сумму, произведение и композицию конечного числа непрерывных функций.

Задание с решением

Пусть $f, g\colon E\to\mathbb{R}$ – непрерывные функции в точке $x_0 \in E$ (на множестве E). Покажем, что функции $|f|$, $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ непрерывны в точке x_0 (соответственно непрерывны на множестве E).

Решение:

Функция $|f|$, то есть $|f|(x) = |f(x)|$, может быть представлена в виде композиции двух непрерывных функций: $|f| = \varphi\circ f$, где $\varphi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\varphi(x) = |x|$, – функция модуль, непрерывная на множестве E. Согласно теореме 3 функция $|f|$ непрерывна в точке x_0 (соответственно непрерывна на множестве E).

Непрерывность двух других функций следует из теоремы 2 и соотношений:

$$\max(f, g) = \frac{1}{2}((f+g)+|f-g|), \quad \min(f, g) = \frac{1}{2}((f+g)-|f-g|).$$

Упражнения и задачи

Б

1. Исследуйте на непрерывность функцию f и постройте ее график:

а) $f\colon [-1, 4]\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2^x, & \text{если } -1\le x<1, \\ 1, & \text{если } x=1, \\ x-1, & \text{если } 1<x\le 4; \end{cases}$ б) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{если } x\le 1, \\ \dfrac{2}{x-1}, & \text{если } x>1; \end{cases}$

в) $f\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \cos x, \text{ если } -\frac{\pi}{2} \le x < \frac{\pi}{4}, \\ 1, \text{ если } x = \frac{\pi}{4}, \\ x^2 - \frac{\pi^2}{16}, \text{ если } \frac{\pi}{4} < x \le \frac{\pi}{2}; \end{cases}$ г) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x - [x]$.

2. Пусть функция f определена в окрестности точки x_0. Используя символы $\exists, \forall$, сформулируйте утверждение о том, что функция f не является непрерывной в точке x_0.

3. Дана функция $f\colon \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}, \text{ если } x \ne 0, \\ 0, \text{ если } x = 0. \end{cases}$

Докажите, что функция f непрерывна на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

4. Установите, существуют ли значения параметров $a, b \in \mathbb{R}$, при которых функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна на всей области определения $\mathbb{R}$:

а) $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, \text{ если } x \le 0, \\ ax + b, \text{ если } 0 < x < 1, \\ \sqrt{x}, \text{ если } x \ge 1; \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{x^2-1}, \text{ если } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \\ a, \text{ если } x = -1, \\ b, \text{ если } x = 1. \end{cases}$

5. Даны функции $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = \operatorname{sgn} x,\ g(x) = 1 + x^2$; б) $f(x) = \operatorname{sgn} x,\ g(x) = x^3 - x$;

в) $f(x) = \operatorname{sgn} x,\ g(x) = \sin x$; г) $f(x) = \operatorname{sgn}(x-1),\ g(x) = \operatorname{sgn}(x+1)$.

1) Исследуйте на непрерывность каждую из функций $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ и $\frac{f}{g}$ на их области определения.

2) Исследуйте на непрерывность сложные функции $f \circ g$ и $g \circ f$.

6. Даны функции $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = x^2,\ g(x) = x + 1$; б) $f(x) = \begin{cases} x+1, \text{ если } x \le 0, \\ x-1, \text{ если } x > 0, \end{cases}\ g(x) = x - 1$;

в) $f(x) = [x],\ g(x) = e^x$; г) $f(x) = [x],\ g(x) = \sin x$;

д) $f(x) = [x],\ g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, \text{ если } x \ne 0, \\ 1, \text{ если } x = 0; \end{cases}$ е) $f(x) = [x],\ g(x) = \begin{cases} x, \text{ если } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, \text{ если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

Определите точки разрыва сложных функций $f \circ g$ и $g \circ f$.

7. Найдите значение параметра $a \in \mathbb{R}$, при котором функция f непрерывна на ее области определения:

а) $f\colon [0, 3] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x + 2, \text{ если } x \in [0, 1], \\ 2ax + 1, \text{ если } x \in (1, 3]; \end{cases}$

б) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 2^x, \text{ если } x \in (-\infty, 0), \\ a + x^2, \text{ если } x \in [0, +\infty); \end{cases}$

в) $f\colon [2, +\infty),\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x-2} - 1}{x - 3}, \text{ если } x \in [2, 3), \\ ax + \frac{1}{3}, \text{ если } x \in [3, +\infty); \end{cases}$

г) $f\colon [0,\ 2] \to \mathbb{R},\ \ f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin a(x-1)}{x-1}, & \text{если } x \in [0, 1), \\ 3x - a, & \text{если } x \in [1, 2]; \end{cases}$

д) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\dfrac{1}{x}, & \text{если } x \in (-\infty, 0), \\ ax^2 + x + \sin x, & \text{если } x \in [0,\ +\infty). \end{cases}$

8. Существуют ли функции, разрывные в любой точке $x \in \mathbb{R}$, сумма и соответственно произведение которых – непрерывные функции на множестве $\mathbb{R}$? Приведите примеры.

9. Приведите пример разрывной на некотором интервале I функции и непрерывной, не тождественно равной нулю функции на этом же интервале таких, что произведение этих функций является непрерывной функцией на промежутке I.

§3 Свойства непрерывных функций

Определение. Функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ $(E \subseteq \mathbb{R})$ называется:

а) **ограниченной сверху**, если ее образ $f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}$ является множеством, ограниченным сверху, то есть существует $\overline{M} \in \mathbb{R}$, такое, что $f(x) \le \overline{M},\ \forall x \in E.$

б) **ограниченной снизу**, если ее образ $f(E)$ является множеством, ограниченным снизу, то есть существует $\overline{m} \in \mathbb{R}$ такое, что $\overline{m} \le f(x),\ \forall x \in E.$

в) **ограниченной**, если ее образ $f(E)$ является ограниченным множеством, то есть существуют $\overline{m},\ \overline{M} \in \mathbb{R}$, такие, что $\overline{m} \le f(x) \le \overline{M},\ \forall x \in E.$

Числа $M = \sup\limits_{x \in E} f(x)$ и $m = \inf\limits_{x \in E} f(x)$ называются соответственно ***точной верхней гранью*** и ***точной нижней гранью*** функции f.

3.1. Свойства ограниченности

Непрерывные функции не обязательно являются ограниченными. Например, функция $f\colon (0,\ +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$, определенная на неограниченном промежутке, не ограничена сверху (рис. 3.7 а)). Но и непрерывная функция $g\colon \left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \operatorname{tg} x$, несмотря на то, что определена на ограниченном промежутке, не является ограниченной сверху (рис. 3.7 б)).

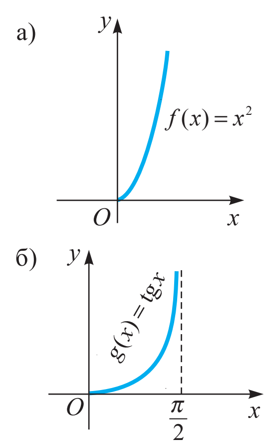


Рис. 3.7

Отметим, что верным является следующий фундаментальный результат, из которого следует, что условие компактности множества E является существенным.

Теорема 4 (теорема Вейерштрасса об ограниченности).
Если $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция на отрезке, то:

1) f является ограниченной на этом отрезке;

2) f достигает на этом отрезке своих точных граней, то есть существуют $x_1,\ x_2 \in [a, b]$ такие, что $f(x_1) = m$ и $f(x_2) = M$, где m и M соответственно точная нижняя и точная верхняя грани функции f:

$$m = \inf_{x \in E} f(x),\ \ M = \sup_{x \in E} f(x).$$

Числа m и M называются соответственно **наименьшим значением** и **наибольшим значением** функции f на отрезке $[a, b]$.

Примеры

1. Функция $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x+1$, непрерывна на отрезке $[0, 1]$.

Очевидно, что $m = 1 = f(0)$ и $M = 2 = f(1)$.

Итак, мы непосредственно проверили, что функция f достигает своих точных граней.

Сужение функции f на интервале $(0, 1)$ не достигает на нем своих точных граней (рис. 3.8 а)).

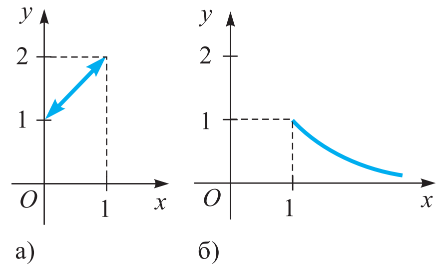


Рис. 3.8

2. Дана функция $f\colon [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Тогда $f([1, +\infty)) = (0, 1]$ и функция f не достигает своей точной нижней грани $m = 0$ на промежутке $[1, +\infty)$ (рис. 3.8 б)).

Замечания. **1.** Если функция $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ возрастает на отрезке $[a, b]$, то $m = f(a)$ и $M = f(b)$, то есть функция f достигает своих точных граней на концах отрезка $[a, b]$. Аналогично, если функция f убывает на отрезке $[a, b]$, то $m = f(b)$ и $M = f(a)$ (условие непрерывности функции f в этом случае не является необходимым).

2. Если функция $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ возрастает на интервале (a, b), то $m = \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$, $M = \lim\limits_{x\to b-0} f(x)$, а если функция f убывает на (a, b), то $m = \lim\limits_{x\to b-0} f(x)$, $M = \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$.

3. В общем возможны случаи: $m = \inf\limits_{x\in E} f = -\infty$, $M = \sup\limits_{x\in E} f = +\infty$.

3.2. Свойство Дарбу

Непрерывные функции, определенные на числовом промежутке, обладают следующим свойством: при переходе от одного значения функции к другому функция проходит все промежуточные значения. Другими словами, если непрерывная функция f принимает два различных значения, то f принимает и все значения, содержащиеся между этими двумя.

Определение. Пусть I – некоторый промежуток. Будем говорить, что функция $f\colon I \to \mathbb{R}$ **обладает свойством Дарбу**[1] на промежутке I, если для любых точек α, β из I, $\alpha < \beta$, и любого числа λ, содержащегося между $f(\alpha)$ и $f(\beta)$, $f(\alpha) \neq f(\beta)$, существует хотя бы одна точка $c_\lambda \in (\alpha, \beta)$ такая, что $f(c_\lambda) = \lambda$.

Жан Гастон Дарбу

[1] Жан Гастон Дарбу (1842–1917) – французский математик.

Геометрически это означает, что любое „промежуточное“ значение λ, расположенное между $f(\alpha)$ и $f(\beta)$ по оси Oy соответствует значению функции хотя бы в одной из „промежуточных“ точек c, расположенных между α и β по оси Ox. На рисунке 3.9 это показано на примере трех точек: c_1, c_2 и c_3.

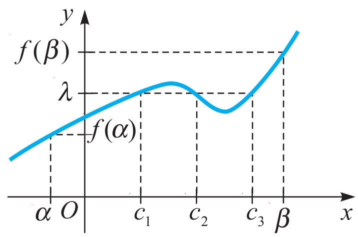


Рис. 3.9

Теорема 5 (первая теорема Больцано–Коши о прохождении функции через нуль). Пусть функция f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает на его концах значения противоположных знаков: $f(a) \cdot f(b) < 0$. Тогда существует хотя бы одна точка $c \in (a, b)$ такая, что $f(c) = 0$.

Доказательство

Не ограничивая общности, предположим, что $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$ (рис. 3.10). Разделим отрезок $[a, b]$ пополам точкой $\frac{a+b}{2}$. Если $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, то теорема доказана и можно считать, что $c = \frac{a+b}{2}$. Если $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$, то на концах одного из отрезков $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$, $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ функция принимает значения противоположных знаков. Обозначив этот отрезок через $[a_1, b_1]$, получим $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$.

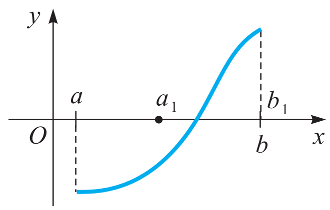


Рис. 3.10

Разделим на две равные части отрезок $[a_1, b_1]$ и опустим тот случай, когда функция f обращается в нуль в середине этого отрезка, так как в этом случае теорема доказана.

Обозначим через $[a_2, b_2]$ ту половину отрезка $[a_1, b_1]$, для которой $f(a_2) < 0$, $f(b_2) > 0$.

Повторяем процесс деления отрезка пополам и предыдущие рассуждения. Если после конечного числа шагов найдется точка, в которой функция f обращается в нуль, то теорема доказана. Предположим, что такой точки нет. В этом случае получим убывающую последовательность вложенных отрезков $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$, удовлетворяющих соотношениям:

$$f(a_n) < 0,\ f(b_n) > 0 \quad \text{и} \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

Последовательности $(a_n)_{n\geq 1}$ и $(b_n)_{n\geq 1}$ монотонны и ограничены (так как $a \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots$, $b \geq b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \geq \ldots$) и $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.

Применив теорему Вейерштрасса (модуль 1, пункт 3.1), получим $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$, $c \in [a, b]$. Перейдя к пределу в неравенствах $f(a_n) < 0$ $f(b_n) > 0$ и учитывая непрерывность функции f в точке c, получим, что $f(c) = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0$ и $f(c) = \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0$. Откуда следует, что $f(c) = 0$. ►

Теорему 5 можно переформулировать следующим образом:

Теорема 5′ (первая теорема Больцано–Коши о прохождении функции через нуль). Если функция f непрерывна на промежутке I и принимает противоположные значения в точках $a, b \in I$, то уравнение $f(x) = 0$ имеет хотя бы одно решение на интервале (a, b).

Теорема 6 (вторая теорема Больцано–Коши о промежуточных значениях). Любая функция, непрерывная на промежутке, обладает свойством Дарбу на этом промежутке.

Доказательство

Пусть $f\colon I \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция, $\alpha, \beta \in I, \alpha < \beta$, λ – число, содержащееся между значениями $f(\alpha)$ и $f(\beta)$, где $f(\alpha) \neq f(\beta)$.

Рассмотрим функцию $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = f(x) - \lambda$. Функция φ непрерывна на I и $\varphi(\alpha) \cdot \varphi(\beta) = (f(\alpha) - \lambda)(f(\beta) - \lambda) < 0$. Согласно теореме 5′ существует хотя бы одна точка $c_\lambda \in (\alpha, \beta) \subset I$ такая, что $\varphi(c_\lambda) = 0$, то есть $f(c_\lambda) = \lambda$. ►

Следствие. Пусть $I \subset \mathbb{R}$, где I – промежуток, и $f\colon I \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция на I. Множество $J = f(I)$ также является промежутком.

Замечания. **1.** Пусть $f\colon I \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция. Если функция f достигает своих точных граней $m = \inf\limits_{x\in I} f(x)$ и $M = \sup\limits_{x\in I} f(x)$, то $f(I) = [m, M]$, а если функцией f ни одна из своих точных граней не достигается, то $f(I) = (m, M)$ (здесь не исключаются случаи, когда $m = -\infty$, $M = +\infty$).

Например, для функции $f\colon (0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x + \dfrac{1}{1-x}$, получим $m = -\infty$ и $M = +\infty$. Значит, $f((0, 1)) = (-\infty, +\infty)$.

2. Если $I = (a, b)$ – интервал и функция $f\colon I \to \mathbb{R}$ непрерывна, то нельзя определенно сказать, какого вида будет промежуток $J = f(I)$. Этот промежуток может быть замкнутым, открытым, полузамкнутым, ограниченным или даже неограниченным. Например, для функции $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}$, получим $f((0, +\infty)) = (0, 1)$, а для функции $f\colon (0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - x^2$, имеем $f((0, 1)) = \left(0, \dfrac{1}{4}\right]$.

3.3. Применение свойств непрерывных функций при решении уравнений и неравенств

Согласно теореме 5′, если функция $f\colon I \to \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a, b] \in I$ и $f(a) \cdot f(b) < 0$, то уравнение $f(x) = 0$ имеет хотя бы одно решение $c \in (a, b)$. Если функция f еще и строго монотонна на отрезке $[a, b]$, то решение c единственное на $[a, b]$.

Пример

Рассмотрим функцию $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x} + 3x$. Покажем, что на отрезке $[-1, 0]$ уравнение $f(x) = 0$ имеет единственное решение.

Решение:

Функция f непрерывна и строго возрастает на отрезке $[-1, 0]$ как сумма двух возрастающих функций. Кроме этого, $f(-1)\cdot f(0)=\left(\frac{1}{e^2}-3\right)\cdot 1<0$. Следовательно, существует единственное число $c\in(-1,\,0)$ такое, что $f(x)=0$.

Если $f\colon I\to\mathbb{R}$ $(I\subseteq\mathbb{R})$ – непрерывная функция на промежутке I и если f не обращается в нуль ни в одной точке $x\in I$ (то есть уравнение $f(x)=0$ не имеет решений на промежутке I), то непременно функция f знакопостоянна на I, то есть $f(x)>0$ или $f(x)<0$ на этом промежутке.

Действительно, в противном случае существовали бы такие точки $x_1,\,x_2$ из I, $x_1<x_2$, что $f(x_1)\cdot f(x_2)<0$, и тогда функция f обратилась бы в нуль в точке $c\in(x_1,\,x_2)$, которая принадлежит промежутку I, что противоречит условию.

В общем, чтобы определить знак функции f на некотором промежутке, необходимо решить неравенство вида $f(x)>0$ (или $f(x)<0$) и указать множество точек, на котором функция f принимает положительные (или отрицательные) значения.

Знак некоторых элементарных функций можно определить, применив *метод интервалов*. Предположим, что *все* нули непрерывной функции $f\colon I\to\mathbb{R}$ – это $x_1<x_2<\ldots<x_n\ldots$, то есть $f(x_k)=0$, $k\in\mathbb{N}^*$ (их может быть бесконечное число). Тогда на каждом из интервалов $(x_1,\,x_2),(x_2,\,x_3),\,\ldots,\,(x_{n-1},\,x_n),\,\ldots$ функция f знакопостоянна, и чтобы определить этот знак, достаточно из каждого интервала выбрать по одной точке и определить знак функции f в этой точке.

Задания с решением

1. Покажем, что любая функция-многочлен нечетной степени имеет хотя бы один нуль на множестве $\mathbb{R}$.

Решение:

Дана функция $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\ldots+a_{2n+1}$, и предположим, что $a_0>0$. Так как $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, то существует x_1, при котором $f(x_1)<0$.

Поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, значит, существует x_2, $x_2>x_1$, при котором $f(x_2)>0$. Таким образом, функция f обращается в нуль между x_1 и x_2, значит, существует хотя бы одна точка $c\in(x_1,\,x_2)$ такая, что $f(c)=0$.

2. Покажем, что функция, заданная формулой $f(x)=x^5+7x^3+7$, имеет единственный нуль на отрезке $[-1,\;0]$.

Решение:

Функция f непрерывна и строго возрастает на отрезке $[-1,0]$, так как является суммой двух строго возрастающих функций (заданных выражениями x^5 и $7x^3+7$) на отрезке $[-1,\;0]$. Поскольку $f(-1)=-1$, $f(0)=1$, то $f(-1)\cdot f(0)<0$. Следовательно, на отрезке $[-1,\;0]$ уравнение $f(x)=0$ имеет единственное решение, так как данная функция строго возрастающая.

3. Покажем, что уравнение $\ln x+x=0$ имеет единственное решение $x_0\in\left(\frac{1}{e},\,1\right)$.

Решение:

Рассмотрим функцию $f\colon\left[\frac{1}{e},\,1\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x+x$. Поскольку функция f непрерывна на отрезке $\left[\frac{1}{e},\,1\right]$, то она обладает свойством Дарбу на этом отрезке. Из того, что $f\left(\frac{1}{e}\right)=\ln\frac{1}{e}+\frac{1}{e}=-1+\frac{1}{e}<0$ и $f(1)=\ln 1+1=1>0$, следует, что существует точка $x_0\in\left(\frac{1}{e},\ 1\right)$ такая, что $f(x_0)=0$. Решение x_0 единственное, поскольку функция $g\colon (0,\ +\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\ln x+x$, строго возрастает на этом отрезке, как сумма двух строго возрастающих функций.

4. На множестве $\mathbb{R}$ решим неравенство $(x^2-9)\ln x>0$.

Решение:

Нулями функции $f\colon (0,\ +\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2-9)\ln x$, являются 1 и 3. Функция f, будучи непрерывной на $(0,\ +\infty)$, знакопостоянна на каждом из интервалов $(0,\ 1)$, $(1,\ 3)$, $(3,\ +\infty)$. Пусть $\xi_1=\frac{1}{2}\in(0,\ 1)$, $\xi_2=2\in(1, 3)$, $\xi_3=4\in(3, +\infty)$. Тогда

$$f(\xi_1)=\left(\frac{1}{4}-9\right)\ln\frac{1}{2}>0,\quad f(\xi_2)=(4-9)\ln 2<0,\quad f(\xi_3)=(16-9)\ln 4>0.$$

Ответ: $S=(0,1)\cup(3,\ +\infty)$.

Упражнения и задачи

Б

1. Пусть функция $f\colon I\to\mathbb{R}$ непрерывна на промежутке I. Докажите, что функции

$$f_+\colon I\to\mathbb{R},\ f_+(x)=\begin{cases}f(x), & \text{если } f(x)>0,\\ 0, & \text{если } f(x)\le 0,\end{cases}\quad \text{и}\quad f_-\colon I\to\mathbb{R},\ f_-(x)=\begin{cases}f(x), & \text{если } f(x)<0,\\ 0, & \text{если } f(x)\ge 0,\end{cases}$$

непрерывны на промежутке I. Постройте графики функций f_+ и f_-, если $I=\mathbb{R}$ и:
а) $f(x)=x$; б) $f(x)=\sin x$; в) $f(x)=1+x^2$; г) $f(x)=-e^x$.

2. Покажите, что если $f\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ ((a,b) – конечный или бесконечный интервал) – непрерывная функция и существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\alpha$, $\lim\limits_{x\to b}f(x)=\beta$, где $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, то функция f ограничена на этом интервале.

3. Покажите, что непрерывная функция $f\colon (0,\ 2)\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-x^2$, ограничена на интервале $(0,\ 2)$, но не достигает своих точных граней на $(0,\ 2)$, а разрывная функция $g\colon (0,2)\to\mathbb{R}$, $g(x)=[x]$, достигает своих точных граней на этом интервале. Постройте графики этих функций.

4. Постройте функцию $f\colon (a,\ b)\to\mathbb{R}$, непрерывную и неограниченную на интервале $(a,\ b)$.

5. Дана функция $f\colon [0,1]\to\mathbb{R}$:

$$1)\ f(x)=\begin{cases}x, & \text{если } 0\le x\le\frac{1}{2}\\ x-\frac{1}{2}, & \text{если } \frac{1}{2}<x\le 1;\end{cases}\qquad 2)\ f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{если } 0\le x\le\frac{1}{2}\\ \frac{x}{3}, & \text{если } \frac{1}{2}<x\le 1.\end{cases}$$

а) Покажите, что функция f разрывна в точке $x=\frac{1}{2}$.

б) Постройте график функции f.

в) Покажите, что функция f достигает своих точных граней и множеством ее значений является отрезок.

6. Докажите, что функция $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=\begin{cases}-1, \text{ если } x<0\\ \pi, \text{ если } x=0\\ 1, \text{ если } x>0;\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}2, \text{ если } x\neq 0\\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}, \text{ если } x=0,\end{cases}$

является разрывной и справа и слева в точке $x=0$. Постройте график функции f.

7. Приведите пример непрерывной функции $f\colon (0,1)\to\mathbb{R}$, для которой множеством ее значений является:

а) отрезок; б) интервал; в) полуинтервал.

8. Докажите, что функция f не обладает свойством Дарбу, если $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=\begin{cases}x, \text{ если } x<0,\\ 1+x, \text{ если } x\ge 0;\end{cases}$ б) $f(x)=[x]-x$; в) $f(x)=\operatorname{sgn} x$.

9. Решите на $\mathbb{R}$ неравенство:

а) $(|x|-3)(\ln x+4)<0$; б) $(x^2+3x-4)(2^x-2)<0$; в) $(x^3+2x^2-4x+1)(\lg x-10)>0$.

10. Определите знак функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=x(x-a)(x-b)(x-c)$, где a, b, c – константы и $0<a<b<c$;

б) $f(x)=(x-1)(x^2+3x-4)(e^{x+4}-1)$.

11. Функция $f\colon [-1,1]\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2}{x}$, непрерывна и обладает свойством $f(-1)\cdot f(1)<0$, и все же уравнение $f(x)=0$ не имеет решений. Как это объяснить?

Упражнения и задачи на повторение

Б

1. Определите значения параметра $\alpha\in\mathbb{R}$, при которых функция $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-2\alpha x+\alpha^2}, \text{ если } x\ge 1\\ \alpha x+3, \text{ если } x<1,\end{cases}$ непрерывна в точке $x_0=1$.

2. Найдите точки разрыва и определите их род, для функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=\begin{cases}2x+3, \text{ если } x\le 1\\ x-1, \text{ если } x>1;\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, \text{ если } x\neq 1\\ 1, \text{ если } x=1;\end{cases}$

в) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}+x^3}{x^{2n}+1}$; г) $f(x)=\begin{cases}e^{x^2}, \text{ если } x\ge 0\\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n, \text{ если } x<0.\end{cases}$

3. Дана функция $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}ae^x, \text{ если } x\le 0\\ \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{b}}{x}, \text{ если } x>0.\end{cases}$

Определите значения a, $b\in\mathbb{R}$, $b>0$, если известно, что f непрерывна на $\mathbb{R}$.

4. Даны непрерывные функции $f, g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и $f(x)=g(x)$, $\forall x\in\mathbb{Q}$.
Докажите, что $f(x)=g(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

5. Дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -1, \text{ если } x < 0 \\ 0, \text{ если } x = 0 \\ 1, \text{ если } x > 0; \end{cases}$ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 2x + 1$.

а) Найдите точки разрыва функций f и g.
б) Определите сложные функции $f \circ g$ и $g \circ f$.
в) Исследуйте на непрерывность функции $f \circ g$ и $g \circ f$.
г) Постройте графики функций f, g, $f \circ g$ и $g \circ f$.

6. Определите, является ли ограниченной функция $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$:
а) $f(x) = \dfrac{x^2 + 5}{2x^2 + 1}$; б) $f(x) = \sin x^2$; в) $f(x) = x + \sin x$; г) $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$.

7. Функция $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$, обладает свойством $f(-2) \cdot f(2) < 0$, и все же уравнение $f(x) = 0$ не имеет решений. Как это объяснить?

8. Покажите, что уравнение $f(x) = 0$ имеет решение на указанном отрезке для функций:
а) $f(x) = -x^3 + 8x + 30$, $\mathbb{R}$; б) $f(x) = x^4 - 3x + 1$, $[0, 1]$; в) $f(x) = (x - 2)\sin \pi x$, $\left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right]$.

9. Решите неравенство:
а) $x^4 - 9x^2 > 0$; б) $(x^2 - 16)\ln x < 0$; в) $(|x| - 1)(\ln x + 2) > 0$.

Проверочная работа

Время выполнения работы: 90 минут

Б

1. Дан отрезок $I = [a, b]$ и функция $f: I \to \mathbb{R}$. Какие из следующих случаев имеют место? ③
а) Функция f непрерывна, ограничена и достигает своих точных граней.
б) Функция f непрерывна и не ограничена.
в) Функция f разрывная и достигает своих точных граней.
г) Функция f разрывная и не достигает своих точных граней.
д) Функция f разрывная, $f(a) \cdot f(b) < 0$, но уравнение $f(x) = 0$, $x \in [a, b]$, не имеет решений.
е) Функция f непрерывна, $f(a) \cdot f(b) > 0$ и уравнение $f(x) = 0$ имеет решение.
Аргументируйте ответ, опираясь на свойства непрерывных функций или на примеры.

2. Исследуйте на непрерывность функцию $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: ③
а) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x^2}{2x}, \text{ если } x < 0 \\ \sin x, \text{ если } x \geq 0; \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, \text{ если } x \in (-\infty, 1) \\ 2^x - 2, \text{ если } x \in [1, 2] \\ x, \text{ если } x \in (2, +\infty). \end{cases}$

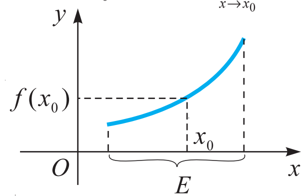
3. Установите, какие из следующих функций f являются ограниченными, если $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: ②
а) $f(x) = \begin{cases} e^{-x^2}, \text{ если } x \neq 0 \\ a, \text{ если } x = 0, \ a \in \mathbb{R}; \end{cases}$ б) $f(x) = x \cdot \sin^2 x$.

4. Найдите параметр $a \in \mathbb{R}$, при котором функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ②
$f(x) = \begin{cases} x^2 + a^2, \text{ если } x \in (-\infty, a] \\ 3x - 1, \text{ если } x \in (a, +\infty), \end{cases}$ непрерывна в любой точке $x \in \mathbb{R}$.

НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

Определение непрерывности

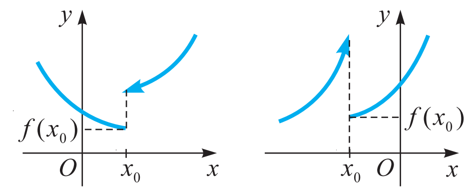
Функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ $(E \subseteq \mathbb{R})$ называется **непрерывной в точке $x_0 \in E$**, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.



Функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ называется **непрерывной на множестве E**, если она непрерывна в любой точке $x \in E$.

Непрерывность слева (справа)

Функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ $(E \subseteq \mathbb{R})$ называется **непрерывной слева/справа** в точке $x_0 \in E$, если существует ее предел слева/справа в точке x_0 и $f(x_0 - 0) = f(x_0)$ $(f(x_0 + 0) = f(x_0))$.



Признаки непрерывности

Функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ $(E \subseteq \mathbb{R})$ непрерывна в точке $x_0 \in E$, если верно одно из ***высказываний***:

1. $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = f(x_0)$.

2. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in E$ из $|x - x_0| < \delta$ следует, что
$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \text{ (Коши).}$$

3. Для любой последовательности $(x_n)_{n \ge 1}$, $x_n \in E$, из того, что $x_n \to x_0$ следует, что $f(x_n) \to f(x_0)$ при $n \to \infty$.

4. Пусть функция f монотонна на промежутке I. Функция f непрерывна на I тогда и только тогда, когда множество ее значений, $\{f(x)\}$, есть промежуток.

Свойства непрерывных функций

1. ***Первая теорема Вейерштрасса об ограниченности***. Любая функция, непрерывная на отрезке, является ограниченной на этом отрезке и достигает своих точных граней на этом отрезке.

2. ***Первая теорема Больцано-Коши о прохождении функции через нуль***. Пусть функция $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f(a) \cdot f(b) < 0$. Тогда существует хотя бы одна точка $c \in (a, b)$ такая, что $f(c) = 0$.

3. ***Следствие теоремы Больцано-Коши о промежуточных значениях***. Множество значений функции, непрерывной на промежутке, также является промежутком.

Классификация точек разрыва

Если функция f не является непрерывной в точке $x_0 \in E$, то x_0 называется **точкой разрыва** этой функции.

Точка разрыва x_0 называется **точкой разрыва первого рода** функции f, если односторонние пределы функции f в точке x_0 существуют и конечны, однако

$f(x_0 - 0) \ne f(x_0 + 0)$ или

$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \ne f(x_0)$.

Разность $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ называется **скачком функции в точке** x_0.

Точка разрыва x_0 называется **точкой разрыва второго рода** функции, если хотя бы один из односторонних пределов $f(x_0 + 0)$, $f(x_0 - 0)$ равен бесконечности или не существует.

Классы непрерывных функций

1. Пусть f и g – непрерывные функции. Тогда αf $(\alpha \in \mathbb{R})$, $f + g$, $f \cdot g$, $\dfrac{f}{g}$ $(g(x) \ne 0)$ – непрерывные функции.

2. Композиция двух непрерывных функций есть непрерывная функция.

3. Любая элементарная функция непрерывна на своей области определения.

Модуль

4 Дифференцируемые функции

Цели

- применение в различных контекстах, в том числе в общении, терминологии, соответствующей понятиям *производная функции* и **дифференциал функции*;
- применение определения производной функции при вычислении производных некоторых элементарных функций; применение полученных формул в различных контекстах;
- применение правил дифференцирования функций и формул производных при решении задач;
- *вычисление дифференциалов некоторых элементарных функций и применение полученных формул в различных контекстах;
- применение свойств дифференцируемых функций при решении задач;
- постижение методов дифференциального исчисления, как качественно новых методов решения различных теоретических и практических проблем.


И. Ньютон

Для решения некоторых математических задач (исследование функции и построение ее графика, нахождение наибольшего и наименьшего значений функции и др.), задач из физики (вычисление скорости и ускорения материальной точки, определение напряжения электрического тока, вычисление линейной плотности массы металлического стержня и др.), задач из экономической области (задачи о стоимости и прибыли), а также задач с применением приближенных методов вычислений и многих других задач, которые приводят к нахождению разности значений функций в двух точках, применяется одно из фундаментальных понятий *математического анализа* – понятие *производная функции*. Принято считать, что это понятие одновременно ввели ученые И. Ньютон[1] и Г.В. Лейбниц[2].


Г. В. Лейбниц

Раздел математики, в котором изучаются производные и их применение в исследовании функций, называется *дифференциальным исчислением*.

[1] Исаак Ньютон (1642–1727) – английский математик, физик и астроном.

[2] Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716) – немецкий математик и философ.

§1 Производная функции

Понятие *производная функции* основывается на понятиях *приращение аргумента* и *приращение функции*.

1.1. Приращение аргумента и приращение функции

Пусть функция $f\colon I \to \mathbb{R}$ определена на интервале $I \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, а x – произвольная точка некоторой окрестности точки x_0.

Определение. Разность $x - x_0$ называется **приращением аргумента** в точке x_0.

Обозначают: $x - x_0 = \Delta x$.

Определение. Разность $f(x) - f(x_0)$ называется **приращением функции f в точке** x_0, соответствующим приращению Δx.

Обозначают: $f(x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$ или $f(x) - f(x_0) = \Delta f$.

Из $x - x_0 = \Delta x$ следует, что $x = x_0 + \Delta x$.

Тогда $f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$.

Задание с решением

Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$. Найдем приращения Δx и Δf, если $x_0 = 1$ и:
а) $x = 1{,}5$; б) $x = 0{,}9$.

Решение:

а) $\Delta x = x - x_0 = 1{,}5 - 1 = 0{,}5$;
$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(1{,}5) - f(1) = 2 \cdot 1{,}5 - 2 \cdot 1 = 1$;

б) $\Delta x = x - x_0 = 0{,}9 - 1 = -0{,}1$;
$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = 2 \cdot 0{,}9 - 2 \cdot 1 = -0{,}2$.

Замечание. Приращения аргумента, а также приращения функции могут быть положительными, отрицательными или равными нулю.

Геометрический смысл приращений Δx и $\Delta f(x_0)$ изображен на рисунке 4.1.

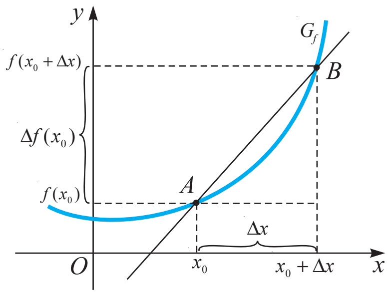


Рис. 4.1

1.2. Задачи, приводящие к понятию производной

Две классические задачи, одна – из геометрии (задача о касательной к кривой на плоскости) и другая – из физики (задача о мгновенной скорости материальной точки) привели к понятию *производная функции*. Эти задачи были предложены и решены Г. В. Лейбницем и И. Ньютоном соответственно.

1.2.1. Касательная к графику функции (к кривой на плоскости)

Пусть I – интервал и $f\colon I \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция.

> *Замечание.* Функция непрерывна на промежутке, если ее график на этом промежутке можно построить, не отрывая карандаш от бумаги.

Графиком $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in I\}$ функции f является кривая, заданная уравнением $y = f(x)$ (рис. 4.2). Пусть $x_0 \in I$, точки $A(x_0, f(x_0)) \in G_f$, $B(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)) \in G_f$ и прямая AB – секущая (графика G_f), образующая с осью Ox угол β. Когда точка B стремится по кривой G_f к точке A, то есть при $\Delta x \to 0$, секущая AB занимает различные положения $(AB_1, AB_2, ..., AT)$.

> Будем говорить, что прямая AT является ***касательной*** к графику функции f в точке $A(x_0, f(x_0))$, если она совпадает с предельным положением (если такое существует) секущей AB при $\Delta x \to 0$ (рис. 4.2).

Касательная к графику функции f в точке $A(x_0, f(x_0))$ задана, если известен ее угловой коэффициент.

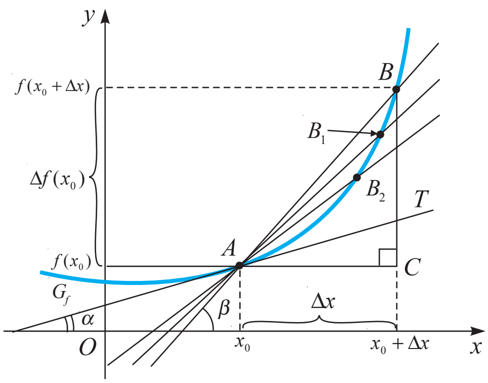


Рис. 4.2

Напомним!

> ***Угловой коэффициент*** m прямой $y = mx + b$ равен тангенсу угла, образованного этой прямой с положительным направлением оси Ox.

Из ΔACB $(\mathrm{m}(\angle C) = 90°)$ (рис. 4.2) находим угловой коэффициент $m(\Delta x)$ секущей AB:

$$m(\Delta x) = \mathrm{tg}\beta(\Delta x) = \frac{BC}{AC} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Переход к пределу в формуле (1) при $\Delta x \to 0$ приводит к исследованию предела:

$$\lim_{\Delta x \to 0} m(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \mathrm{tg}\beta(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Конечное значение этого предела (если предел существует) является угловым коэффициентом касательной к графику функции f в точке $(x_0, f(x_0))$. Следовательно,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \mathrm{tg}\beta(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \mathrm{tg}\alpha = m. \qquad (2)$$

Итак, задача о существовании касательной к графику функции f в заданной точке $A(x_0, f(x_0))$ равносильна задаче существования предела (2).

1.2.2. Мгновенная скорость материальной точки

Пусть материальная точка движется по оси l в положительном направлении, согласно закону $s = s(t)$, где $s(t)$ – абсцисса точки, в которой находится материальная точка в момент времени t. Другими словами, абсцисса выражает *расстояние*, пройденное материальной точкой за время t (рис. 4.3).

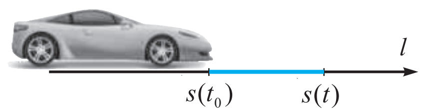


Рис. 4.3

Если движение материальной точки равномерное (скорость – постоянная), то для любых моментов времени t_0, t_1 $(t_1 \neq t_0)$ значение отношения $\dfrac{s(t_1)-s(t_0)}{t_1-t_0}$ постоянно и равно скорости материальной точки.

Если же движение материальной точки не равномерное, то ее скорость уже не постоянна. Пусть t_0 – заданный момент времени. Отношение $\dfrac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$ (3) называется ***средней скоростью*** движения материальной точки за промежуток времени $[t_0,\ t]$, где $t_0 \neq t_1$.

На практике равномерных движений не бывает, но при малых промежутках времени движение почти равномерно. Другими словами, при $t \to t_0$, где $t \neq t_0$, соответствующее значение средней скорости стремится к некоторому определенному значению, которое в физике и называют ***мгновенной скоростью материальной точки в момент времени*** $\boldsymbol{t_0}$.

Итак, определяем мгновенную скорость $v(t_0)$ материальной точки в момент времени t_0 как предел (если таковой существует), к которому стремится отношение (3) при $t \to t_0$, то есть:

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{4}$$

Аналогично, если $v(t)$ – мгновенная скорость материальной точки в любой момент времени t, ***мгновенное ускорение*** $a(t_0)$ ***материальной точки в момент времени*** $\boldsymbol{t_0}$ определяется как предел (если таковой существует), к которому стремится (4) при $t \to t_0$, то есть:

$$a(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}. \tag{5}$$

Эти примеры доказывают значимость предела отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю, то есть предела

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \tag{6}$$

1.3. Понятие производной функции в точке

Определение. Пусть интервал $I \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ и $f\colon I \to \mathbb{R}$. $f\colon I \to \mathbb{R}$ – некоторая функция. Будем говорить, что функция f **имеет производную в точке** $\boldsymbol{x_0}$, если существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

Этот предел называется ***производной функции f в точке*** $\boldsymbol{x_0}$ и обозначается $f'(x_0)$.

Если, кроме этого, предел конечен, то функция f называется ***дифференцируемой в точке*** x_0.

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{или} \quad f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \tag{7}$$

Обозначение $f'(x_0)$ читается: *Эф штрих в точке* x_0.

Замечания. **1.** Если предел (7) существует и бесконечен или не существует, то функция f ***не дифференцируема в точке*** x_0.

2. При исследовании дифференцируемости функции в некоторой точке рассматриваются только те значения функции, которые соответствуют точкам, принадлежащим некоторой окрестности этой точки. Исходя из этого, говорят, что ***дифференцируемость функции***, аналогично пределу функции и *непрерывности функции, является ***локальным свойством этой функции***.

3. В дальнейшем будем рассматривать производную функции на интервале I (если не указывается что-либо другое).

Внимание! **1.** Относительно примеров из физики (формулы (4) и (5)), делаем вывод, что:

а) $v(t_0)=s'(t_0)$ – мгновенная скорость материальной точки в момент времени t_0 равна значению производной от расстояния в t_0;

б) $a(t_0)=v'(t_0)$ – мгновенное ускорение материальной точки в момент времени t_0 равно значению производной от скорости в t_0.

2. Формулы $v(t)=s'(t)$ и $a(t)=v'(t)$ выражают механический (физический) смысл производной: *производная от расстояния (пути)* ***s*** *по времени* ***t*** *есть скорость* ***v****, а производная от скорости* ***v*** *по времени* ***t*** *есть ускорение* ***a*** *материальной точки.*

Определения. • Будем говорить, что функция $f\colon I\to\mathbb{R}$ $(I\subseteq\mathbb{R})$ **дифференцируема на множестве** M $(M\subseteq I)$, если она дифференцируема в любой точке множества M.

• В данном случае функция $f'\colon M\to\mathbb{R}$, которая ставит в соответствие каждой точке $x\in M$ действительное число $f'(x)$, называется **производной функции f на множестве** M.

• Нахождение производной функции f называется **дифференцированием**.

Замечание. Производная функции f обозначается: $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$, $\frac{d}{dx}(f)$, y', f', где $y=f(x)$.

Задание с решением

Покажем, что функция $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ дифференцируема на множестве $\mathbb{R}$, и найдем ее производную, если:

а) $f(x)=2x$; б) $f(x)=x^2$.

Решение:

а) Функция, заданная формулой $f(x)=2x$, дифференцируема в любой точке множества $\mathbb{R}$, поскольку предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{2(x_0+\Delta x)-2x_0}{\Delta x}=2$ существует для любого $x_0\in\mathbb{R}$. Значит, $f'(x)=(2x)'=2$ для любого $x\in\mathbb{R}$.

б) Функция, заданная формулой $f(x)=x^2$, дифференцируема в любой точке множества $\mathbb{R}$, так как предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}=$ $=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{2x_0\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x)=2x_0$ существует для любого $x_0\in\mathbb{R}$. Значит, $(x^2)'=2x$ для любого $x\in\mathbb{R}$.

Исходя из определения производной, сформулируем следующий *алгоритм нахождения производной функции $f\colon I\to\mathbb{R}$ в точке* и *на множестве*:

① Выбираем произвольное приращение Δx аргумента x в точке x_0 так, что $x_0+\Delta x\in I$.

② Находим приращение функции f в точке x_0: $\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

③ Составляем отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

④ Вычисляем предел этого отношения: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$.

⑤ Делаем вывод о дифференцируемости функции f в точке x_0.

⑥ Исследуем функцию f на дифференцируемость на интервале I.

Определение. Пусть $f\colon I\to\mathbb{R}$ – некоторая функция. Множество точек, в которых функция f дифференцируема, называется **областью дифференцируемости функции** f.

Обозначают: $D_{f'}$. Очевидно, что $D_{f'}\subseteq I$.

Замечание. В случаях, когда для функции f не указана ее область определения, будем считать, что речь идет о ее максимальной области определения.

1.4. Дифференцируемость и непрерывность

Теорема 1 (необходимое условие существования производной функции в точке). Если функция дифференцируема в данной точке , то она непрерывна в этой точке.

Доказательство

Пусть $f\colon D\to\mathbb{R}$ и $x_0\in D$, где x_0 – точка, в которой функция f дифференцируема, то есть существует предел (6) и этот предел конечен.

Из соотношения $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\cdot\Delta x$, $\Delta x\neq 0$, $x\in D$, следует, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x=f'(x_0)\cdot 0=0.$

Значит, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$, то есть $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, откуда следует, что функция f непрерывна в точке x_0. ▶

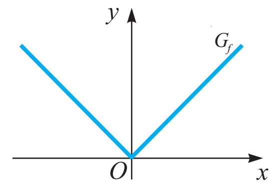


Рис. 4.4

Обратное утверждение неверно. Например, функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, непрерывна в точке $x_0 = 0$, но не дифференцируема в этой точке (рис. 4.4).

Чтобы доказать это утверждение, найдем предел отношения $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{|x|}{x}$ в точке $x_0 = 0$. Вычислим односторонние пределы функции f в точке x_0:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{-x}{x} = -1, \quad \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{x}{x} = 1.$$

Так как $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} \dfrac{|x|}{x} \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} \dfrac{|x|}{x}$, следует, что предел отношения $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ в точке $x_0 = 0$ не существует. Значит, функция f непрерывна в $x_0 = 0$, но не дифференцируема в этой точке.

1.5. Односторонние производные функции

В некоторых случаях целесообразно рассматривать односторонние пределы отношения $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Определение. Пусть $f\colon I \to \mathbb{R}$ (I – интервал) и $x_0 \in I$. Предел $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (если таковой существует), конечный или бесконечный, называется **левой производной функции f в точке x_0** и обозначается $f'_{л}(x_0)$.

Важно знать: $f'_{л}(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. (8)

Определение. Пусть $f\colon I \to \mathbb{R}$ (I – интервал) и $x_0 \in I$. Предел $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (если таковой существует), конечный или бесконечный, называется **правой производной функции f в точке x_0** и обозначается $f'_{п}(x_0)$.

Важно знать: $f'_{п}(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. (9)

Определение. Функция $f\colon I \to \mathbb{R}$ называется **дифференцируемой слева** (соответственно **дифференцируемой справа**) **в точке** $x_0 \in I$, если предел (8) (соответственно предел (9)) существует и конечен.

Итак, функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, дифференцируема слева и справа в точке $x_0 = 0$: $f'_{л}(0) = -1$, $f'_{п}(0) = 1$.

Напомним, что один из критериев существования предела функции в точке – это равенство односторонних пределов этой функции в данной точке.

Подобный критерий есть и для исследования дифференцируемости функции в данной точке.

Теорема 2. Пусть $I \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in I$. Функция $f\colon I \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда она дифференцируема слева и справа в точке x_0 и $f'_{л}(x_0) = f'_{п}(x_0)$. В этом случае $f'_{л}(x_0) = f'_{п}(x_0) = f'(x_0)$.

Доказательство теоремы 2 следует непосредственно из теоремы 2 модуля 2, раздела 1.3.

Замечание. Пусть $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ – некоторая функция. В точке a речь идет только о производной справа, а в точке b – только о производной слева. Не имеет смысла говорить о производной слева в точке a и – справа в точке b.

Примеры

1. Для функции $f(x) = |x|$ имеем $f'_{л}(0) = -1$ и $f'_{п}(0) = 1$. Так как $f'_{л}(0) \neq f'_{п}(0)$, то функция f не дифференцируема в точке $x_0 = 0$.

2. Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{2|x-1|}$, не дифференцируема в точке $x_0 = 1$, так как ее производные слева и справа в этой точке существуют, но бесконечны. Проверьте!

3. Пусть функция $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, \text{ если } 0 \le x < 1, \\ 0, \text{ если } x = 1. \end{cases}$ Существует $f'_{п}(0) = 1$, но не существует $f'_{л}(1)$, поскольку функция f даже не является непрерывной в точке $x = 1$.

Упражнения и задачи

А

1. Найдите приращение аргумента и приращение функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, в точке $x_0 = \frac{1}{2}$, если: а) $x = 2$; б) $x = 0{,}7$; в) $x = -\sqrt{3}$; г) $x = -4{,}2$.

2. Найдите производную $D_{f'}$ функции:

а) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{1}{2}$; б) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 1$;

в) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2$; г) $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

3. Вычислите, используя определение производной, $f'(-1)$, $f'(0)$, $f'\left(\frac{1}{2}\right)$, $f'(10)$, если:

а) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0{,}5x$; б) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 3$.

4. Постройте прямые, проходящие через точку (1, 3) и имеющие угловые коэффициенты: а) –1 и $\sqrt{3}$; б) 1 и $-\sqrt{3}$; в) 0 и $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

В каждом случае определите, какой тип угла образуют эти прямые с положительным направлением оси абсцисс.

Б

5. Исследуйте на дифференцируемость функцию $f\colon D \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = |x - 2|$, в $x_0 = 2$; б) $f(x) = |x^2 - 4|$, в $x_0 = -2$, $x_1 = 2$;

в) $f(x) = \sqrt{x - 1}$, в $x_0 = 1$.

6. Вычислите односторонние производные функции $f\colon D \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = x + |x|,\ x_0 = 0,\ x_1 = -2;$ б) $f(x) = x - \dfrac{1}{x},\ x_0 = -1,\ x_1 = 1;$

в) $f(x) = \sqrt{2x-1},\ x_0 = 0{,}5,\ x_1 = 1;$ г) $f(x) = 1 - \sqrt{x},\ x_0 = -1,\ x_1 = 0.$

7. Исследуйте, в точке $x_0 = 0$, на непрерывность и дифференцируемость функцию $f\colon D \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = |\sin x|;$ б) $f(x) = |\cos x|;$

в) $f(x) = \dfrac{2}{|x+1|};$ г) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \le 0, \\ 2x^2 + x, & \text{если } x > 0. \end{cases}$

8. Найдите:

а) $m \in \mathbb{N}^*$, при котором функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^m \sin\dfrac{1}{x}, & x \ne 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ дифференцируема в $x_0 = 0;$

б) $n \in \mathbb{N}^*$, при котором функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^n \cos\dfrac{1}{x}, & x \ne 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ дифференцируема в $x_0 = 0.$

9. Найдите $m, n \in \mathbb{R}$, при которых функция $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2\ln x, & \text{если } 0 < x \le e, \\ mx + n, & \text{если } x > e, \end{cases}$ дифференцируема в любой точке $x \in (0, +\infty)$.

§2 Геометрический смысл производной

2.1. Уравнение касательной к графику функции

Пусть $f\colon I \to \mathbb{R}$ $(I \subseteq \mathbb{R})$ – дифференцируемая функция в точке $x_0 \in I$ и G_f – ее график (рис. 4.5).

Рассмотрим без доказательств две теоремы.

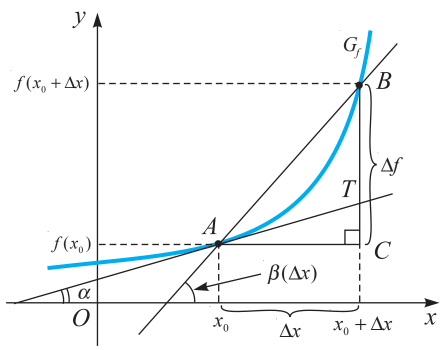


Рис. 4.5

Теорема 3. Если функция f дифференцируема в точке x_0, то к ее графику можно провести (невертикальную) касательную в точке $(x_0, f(x_0))$, причем угловой коэффициент этой касательной равен $f'(x_0)$.

Теорема 4. Если в точке $(x_0, f(x_0))$ графика функции f можно провести невертикальную касательную, то функция f дифференцируема в точке x_0, и угловой коэффициент m этой касательной равен значению производной функции f в точке x_0 $(m = f'(x_0))$.

Геометрический смысл производной функции f, дифференцируемой в точке x_0, следует из теорем 3 и 4: *существование конечной производной функции f в точке x_0 равносильно существованию касательной (невертикальной) в точке $(x_0, f(x_0))$ графика функции f, причем угловой коэффициент этой касательной равен $f'(x_0)$.*

Важно знать: Касательная к графику дифференцируемой в точке x_0 функции f есть прямая, проходящая через точку $(x_0, f(x_0))$, угловой коэффициент m которой равен $f'(x_0)$, то есть $m = f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$.

Запишем теперь уравнение касательной к графику дифференцируемой функции f в точке $(x_0, f(x_0))$. Зная, что уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент $f'(x_0)$, имеет вид: $y = f'(x_0)\cdot x + b$, найдем коэффициент b. Так как касательная проходит через точку $(x_0, f(x_0))$, то $f(x_0) = f'(x_0)\cdot x_0 + b$, откуда $b = f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0$. Таким образом, ***касательная*** к графику дифференцируемой в точке x_0 функции f есть ***прямая***, уравнение которой имеет вид:

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}\,. \qquad (*)$$

Задания с решением

1. Запишем уравнение касательной к графику функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

Решение:

$f'(x) = (x^2)' = 2x$. Тогда $f'(x_0) = 2\cdot 2 = 4$, а $f(x_0) = 2^2 = 4$. Подставив эти значения в $(*)$, получим $y = 4 + 4\cdot(x-2) \Leftrightarrow y = 4x - 4$ – искомое уравнение касательной.

Замечание. Если $f'(x_0) = \infty$ ($f'(x_0) = +\infty$ или $f'(x_0) = -\infty$), то касательная в точке $(x_0, f(x_0))$ графика G_f непрерывной в точке x_0 функции f параллельна оси Oy, то есть уравнение касательной имеет вид: $x = x_0$.

Если $f'(x_0) = +\infty$, то в окрестности точки $A(x_0, f(x_0))$ график G_f имеет форму, указанную на рисунке 4.6:

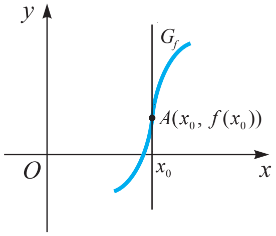


Рис. 4.6

Если $f'(x_0) = -\infty$, то в окрестности точки $A(x_0, f(x_0))$ график G_f имеет форму, указанную на рисунке 4.7:

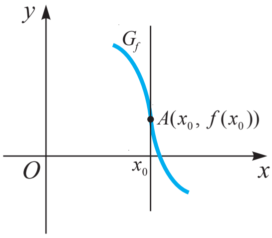


Рис. 4.7

2. Дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Найдем величину угла, образованного касательной к графику G_f в точке с абсциссой x_0 и положительным направлением оси Ox, если: а) $x_0 = 0$; б) $x_0 = \frac{1}{2}$.

Решение:

Поскольку угловой коэффициент касательной есть $m = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$, где α – величина угла, образованного касательной к графику G_f в точке с абсциссой x_0 и положительным направлением оси Ox, получим:

а) $\operatorname{tg}\alpha = f'(0) = 2\cdot 0 = 0$, значит, $\alpha = 0$; б) $\operatorname{tg}\alpha = f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$, значит, $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

2.2. Геометрический смысл односторонних производных функции (дополнительно)

Используя односторонние производные некоторой функции f в точке x_0 и их значения в этой точке, можно точнее определить форму графика функции f в окрестности точки x_0. Правая и левая производные функции в точке x_0, аналогично производной функции, имеют геометрический смысл.

Пусть $f\colon I \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция, $x_0 \in I$ (I – интервал) и точка $A(x_0, f(x_0)) \in G_f$. Рассмотрим следующие общие случаи относительно односторонних производных и производной непрерывной в точке $x_0 \in I$ функции f.

I. $f'_{л}(x_0) = f'_{п}(x_0) = f'(x_0)$ и $f'_{л}(x_0),\ f'_{п}(x_0),\ f'(x_0) \in \mathbb{R}$. В этом случае функция f дифференцируема в точке x_0 и график G_f имеет в точке $A(x_0, f(x_0))$ касательную, уравнение которой $y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$.

II. а) $f'_{л}(x_0) = -\infty,\quad f'_{п}(x_0) = +\infty$. В этом случае график G_f имеет в точке $A(x_0, f(x_0))$ две полукасательные, образующие с осью Ox углы $-\dfrac{\pi}{2}$ (слева) и $\dfrac{\pi}{2}$ (справа), и $f(x) \geq f(x_0),\ \ \forall x \in V(x_0)$ (рис. 4.8 а)).

б) $f'_{л}(x_0) = +\infty,\quad f'_{п}(x_0) = -\infty$. В этом случае график G_f имеет в точке $A(x_0, f(x_0))$ две полукасательные, образующие с осью Ox углы $\dfrac{\pi}{2}$ (слева) и $-\dfrac{\pi}{2}$ (справа), и $f(x) \leq f(x_0),\ \ \forall x \in V(x_0)$ (рис. 4.8 б)).

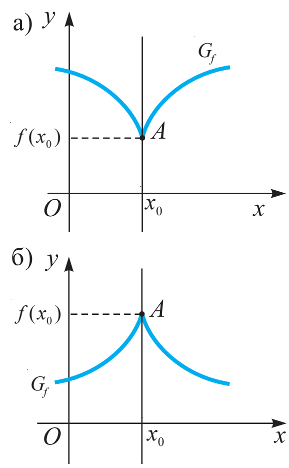


Рис. 4.8

Если односторонние производные $f'_{л}(x_0),\ f'_{п}(x_0)$ бесконечны и $f'_{л}(x_0) \neq f'_{п}(x_0)$, точка $A(x_0, f(x_0))$ называется ***возвратной точкой*** графика G_f (рис. 4.8).

III. а) $f'_{л}(x_0) = f'_{п}(x_0) = +\infty$. В этом случае график G_f имеет в точке $A(x_0, f(x_0))$ касательную, уравнение которой $x = x_0$ (рис. 4.6);

б) $f'_{л}(x_0) = f'_{п}(x_0) = -\infty$. В этом случае график G_f имеет в точке $A(x_0, f(x_0))$ касательную, уравнение которой $x = x_0$ (рис. 4.7).

IV. $f'_{л}(x_0) \neq f'_{п}(x_0)$ и хотя бы одна из этих производных конечная. В этом случае график G_f имеет в точке $A(x_0, f(x_0))$ две полукасательные (рис. 4.9):

а) $\begin{cases} f'_{л}(x_0) \in \mathbb{R} \\ f'_{п}(x_0) = -\infty \end{cases}$ б) $\begin{cases} f'_{л}(x_0) = +\infty \\ f'_{п}(x_0) \in \mathbb{R} \end{cases}$ в) $\begin{cases} f'_{л}(x_0) \in \mathbb{R} \\ f'_{п}(x_0) \in \mathbb{R} \\ f'_{л}(x_0) \neq f'_{п}(x_0) \end{cases}$

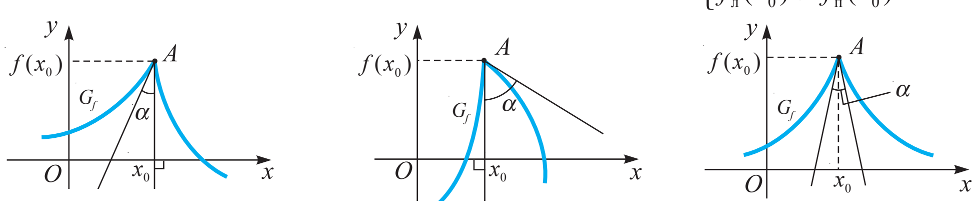


Рис. 4.9

Если $f'_л(x_0) \neq f'_п(x_0)$ и хотя бы одна из этих производных конечная, точка $A(x_0, f(x_0))$ называется ***угловой точкой*** графика G_f (рис. 4.9).

Замечание. Полукасательные, слева и справа, в возвратной точке графика функции f образуют нулевой угол (рис. 4.8), а в угловой точке – угол $\alpha \in (0, \pi)$ (рис. 4.9).

Задание. Исследуйте и изобразите графически остальные возможные случаи для односторонних производных функции f в точке x_0.

Задания с решением

1. Дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{|x-1|}$. Определим, является ли точка с абсциссой $x_0 = 1$ возвратной или угловой точкой графика функции f.

Решение:

Так как $f'_л(1) = \lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{\sqrt{-(x-1)}-0}{x-1} = -\lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{\sqrt{-(x-1)}}{(\sqrt{-(x-1)})^2} = -\lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{1}{\sqrt{-(x-1)}} = -\infty$ и

$f'_п(1) = \lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{\sqrt{x-1}-0}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x-1})^2} = \lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty$, то точка с абсциссой $x_0 = 1$ является возвратной точкой графика G_f.

2. Дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2\sin x, & \text{если } x \le 0, \\ x^3, & \text{если } x > 0. \end{cases}$ Определим, является ли точка с абсциссой $x_0 = 0$ возвратной или угловой точкой графика функции G_f, и запишем уравнение полукасательных к графику G_f в этой точке.

Решение:

$$f'_л(0) = \lim_{x\to -0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to -0} \frac{2\sin x - 0}{x-0} = 2, \quad f'_п(0) = \lim_{x\to +0} \frac{x^3-0}{x-0} = \lim_{x\to +0} x^2 = 0.$$

Учитывая, что $f'_л(0) \neq f'_п(0)$, $f'_л(0)$, $f'_п(0) \in \mathbb{R}$, следует, что точка с абсциссой $x_0 = 0$ является угловой точкой графика G_f.

Исходя из того, что $f'_л(0) = 2$ и $f'_п(0) = 0$ – угловые коэффициенты соответствующих полукасательных, получим (рис. 4.10):

1) $y = f(0) + f'_л(0)(x-0) \Leftrightarrow y = 0 + 2(x-0)$;
значит, уравнение полукасательной слева в точке x_0 есть $y = 2x$, где $x \in (-\infty, 0]$;

2) $y = f(0) + f'_п(0)(x-0) \Leftrightarrow y = 0 + 0\cdot(x-0)$;
значит, уравнение полукасательной справа в точке x_0 есть $y = 0$, где $x \in [0, +\infty)$.

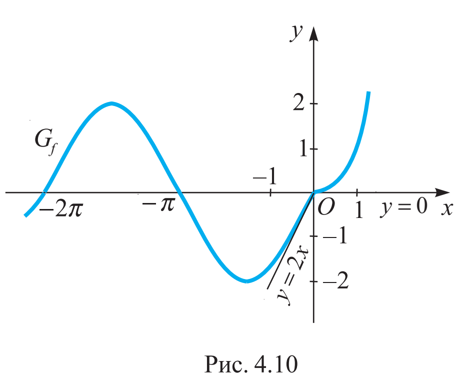
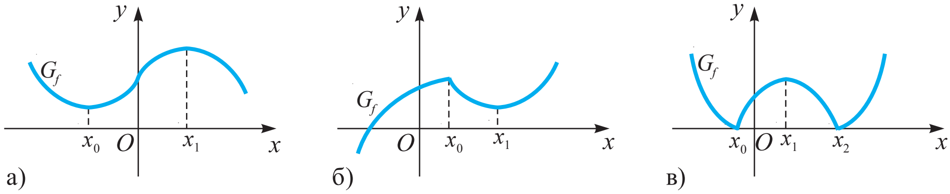


Рис. 4.10

Упражнения и задачи

А

1. Используя геометрический смысл производной функции, определите, дифференцируема ли функция f в точках, указанных на рисунке:



2. Постройте график непрерывной функции, не дифференцируемой в точках $x_0 = 3$ и $x_1 = 5$.

3. Используя определение производной (или соответствующую формулу), запишите уравнение касательной к графику функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = x^3$, в $x_0 = 1$; б) $f(x) = 2x^2 - 1$, в $x_0 = 0$; в) $f(x) = 2 - x^2$, в $x_0 = -2$.

4. Найдите величину угла, образованного касательной к графику функции f в точке с абсциссой x_0 и положительным направлением оси Ox:

а) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$; б) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2$, $x_0 = 1$.

5. Постройте график функции при условии, что касательная к этому графику в точке с абсциссой $x_0 = -1$ задана уравнением: а) $y = 0$; б) $y = 2$.

Б

6. Исследуйте на дифференцируемость функцию f в указанных точках и изобразите графически полученный результат:

а) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 9|$, $x_0 = -3$, $x_1 = 3$;

б) $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = |\lg x - 1|$, $x_0 = 10$.

7. Используя определение производной, напишите уравнение касательной к графику функции:

а) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + 1$, в: 1) $x_0 = -0{,}5$, 2) $x_0 = 2$, 3) $x_0 = -5$;

б) $f\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$, в: 1) $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$, 2) $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$, 3) $x_0 = -\dfrac{\pi}{6}$.

8. а) Найдите для каждой из функций $f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \ge 0, \\ 2x^2 - x, & \text{если } x < 0, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{если } x \ge 0, \\ x^2, & \text{если } x < 0, \end{cases} \quad h(x) = |x^2 - 9|:$$

1) множество точек, на котором функция непрерывна;

2) множество точек, на котором функция дифференцируема.

б) Постройте графики этих функций.

9. Используя определение производной, запишите уравнение касательной к графику функции f в точке с абсциссой x_0 и найдите величину угла, образованного этой касательной и положительным направлением оси Ox:

а) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - x^2$: 1) $x_0 = 0$, 2) $x_0 = 1$;

б) $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{3}{x} + 1$: 1) $x_0 = -3$, 2) $x_0 = 1$.

10. Найдите коэффициенты $b, c \in \mathbb{R}$, если известно, что в точке (–1, –2) парабола $f(x) = x^2 + bx + c$ имеет касательную $y = 2x$.

11. Приведите примеры функций, дифференцируемых на интервале:
а) за исключением одной точки; б) за исключением двух точек.

§3 Производные некоторых элементарных функций

Задание. Дана функция $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{\sqrt{x}} \cdot \lg 5x$. Найдите производную функции f.

Для отыскания производной функции f, а также производных других функций, важно знать формулы нахождения производных элементарных функций.

3.1. Постоянная функция

Теорема 5. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Функция f дифференцируема на множестве $\mathbb{R}$ и $f'(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Доказательство

Пусть x_0 – произвольная точка множества $\mathbb{R}$.

Имеем $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{c - c}{\Delta x} = 0.$

Поскольку точка x_0 была выбрана произвольно, функция f дифференцируема на множестве $\mathbb{R}$ и $f'(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. ▶

Важно знать: $c' = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. (1)

Пример

Для функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2014$, получаем $(2014)' = 0$.

Замечание. Следует различать числа $f'(x_0)$ и $(f(x_0))'$, второе число есть 0, так как производная постоянной функции равна нулю.

3.2. Идентичная функция

Теорема 6. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Функция f дифференцируема на множестве $\mathbb{R}$ и $f'(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Доказательство

Пусть x_0 – произвольная точка множества $\mathbb{R}$.

Имеем $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$

Поскольку точка x_0 была выбрана произвольно, функция f дифференцируема на множестве $\mathbb{R}$ и $f'(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. ▶

Важно знать: $x' = 1$. (2)

3.3. Степенная функция с действительным показателем

Теорема 7. Пусть $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Функция f дифференцируема на интервале $(0, +\infty)$ и $f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$, $\forall x \in (0, +\infty)$.

Важно знать: $(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$, $\forall x \in (0, +\infty)$. (3)

$f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$, $\alpha \geq 1$, $\forall x \in [0, +\infty)$. (3′)

Замечания. **1.** При $\alpha \geq 1$ функция $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{\alpha}$, дифференцируема и в $x_0 = 0$.

2. Функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, дифференцируема на множестве $\mathbb{R}$ и $f'(x) = nx^{n-1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

3. Применив формулу (3), получим:

$$(\sqrt[n]{x})' = (x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} x^{-\left(\frac{n-1}{n}\right)} = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}, \quad \forall x \in (0, +\infty).$$

4. $(\sqrt[2n+1]{x})' = \dfrac{1}{(2n+1)\sqrt[2n+1]{x^{2n}}}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$.

5. Функция, заданная формулой $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, не дифференцируема в точке $x_0 = 0$ (так как ее односторонние производные в точке 0 бесконечны).

Задание с решением

Найдем:

а) $(x^{-\sqrt{2}})'$; б) $(\sqrt{x})'$; в) $(\sqrt[3]{x})'$.

Решение:

а) $(x^{-\sqrt{2}})' = -\sqrt{2} x^{-\sqrt{2}-1}$;

б) $(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \dfrac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $\forall x \in (0, +\infty)$;

в) $(\sqrt[3]{x})' = (x^{\frac{1}{3}})' = \dfrac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} = \dfrac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$, $\forall x \in (0, +\infty)$.

Соотношение $(\sqrt[3]{x})' = \dfrac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$ справедливо и для любого $x \in (-\infty, 0)$.

Важно знать: $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $\forall x \in (0, +\infty)$. (4)

Для функции радикал $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, получим:

$$\boxed{(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}, \quad \forall x \in D \setminus \{0\}}. \qquad (5)$$

3.4. Функция синус

Теорема 8. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$. Функция f дифференцируема на множестве $\mathbb{R}$ и $f'(x) = (\sin x)' = \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Доказательство

Пусть x_0 – произвольная точка множества $\mathbb{R}$. Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\dfrac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x_0 + \dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x_0.$$

Поскольку точка x_0 была выбрана произвольно, функция f дифференцируема на множестве $\mathbb{R}$ и $f'(x) = \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. ►

Важно знать: $(\sin x)' = \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. (6)

3.5. Функция косинус

Теорема 9. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$. Функция косинус дифференцируема на множестве $\mathbb{R}$ и $(\cos x)' = -\sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Важно знать: $(\cos x)' = -\sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. (7)

Задание. Докажите теорему 9.

3.6. Показательная функция

Теорема 10. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$. Функция f дифференцируема на множестве $\mathbb{R}$ и $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Важно знать: $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, $a > 0$, $a \neq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. (8)

Следствие. Используя формулу (8), получим $(e^x)' = e^x \cdot \ln e = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Важно знать: $(e^x)' = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. (8′)

Например: а) $(2^x)' = 2^x \ln 2$; б) $((0{,}3)^x)' = (0{,}3)^x \ln 0{,}3$.

3.7. Логарифмическая функция

Теорема 11. Пусть $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$. Функция f дифференцируема на интервале $(0, +\infty)$ и $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, $\forall x \in (0, +\infty)$.

Важно знать: $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}, \quad \forall x \in (0, +\infty).$ (9)

Задание. Докажите теорему 11.

Теорема 12. Пусть $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$. Функция f дифференцируема на интервале $(0, +\infty)$ и $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $\forall x \in (0, +\infty)$.

Важно знать: $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}, \quad a > 0,\ a \neq 1,\ \forall x \in (0, +\infty).$ (10)

Задание. Докажите теорему 12.

Указание. Примените определение производной, формулу $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ и формулу (9).

Например: а) $(\log_2 x)' = \dfrac{1}{x \ln 2}$; б) $(\lg x)' = \dfrac{1}{x \ln 10}$.

Упражнения и задачи

А

1. Найдите производную функции f и область дифференцируемости $D_{f'}$:

а) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^8$;
б) $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-7}$;
в) $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[4]{x}$;
г) $f\colon \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $f(x) = 3^x$;
д) $f\colon \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$;
е) $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_3 x$;
ж) $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$;
з) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[5]{x}$.

2. Вычислите значение производной функции $f\colon D \to \mathbb{R}$ в точке с абсциссой x_0:

а) $f(x) = \log_7 x$, $x_0 = 7$;
б) $f(x) = \lg x$, $x_0 = \dfrac{1}{10}$;
в) $f(x) = x^2$, $x_0 = 60$;
г) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 49$;
д) $f(x) = 2^x$, $x_0 = 5$;
е) $f(x) = 25$, $x_0 = -64$.

3. Напишите уравнение касательной к графику функции $f\colon D \to \mathbb{R}$ в точке с абсциссой x_0:

а) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 1$;
б) $f(x) = 2^x$, $x_0 = 0$;
в) $f(x) = \log_8 x$, $x_0 = 2$;
г) $f(x) = x^5$, $x_0 = -1$.

Б

4. Найдите производную функции f и область дифференцируемости $D_{f'}$:

а) $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{x}$;
б) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 \cdot \sqrt[5]{x^2}$.

5. Найдите производную функции f и область дифференцируемости $D_{f'}$, если $f\colon D \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = \sqrt[7]{x}$;
б) $f(x) = \sqrt{|x|}$;
в) $f(x) = \log_{0,4}(x^2)$;
г) $f(x) = 2^{|x|}$.

6. Вычислите односторонние производные функции $f\colon D\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=|\cos x|$, в $x_0=\dfrac{\pi}{2}$; б) $f(x)=|2x|$, в $x_0=0$;

в) $f(x)=\begin{cases}3x, & \text{если } x\le 0,\\ -2x, & \text{если } x>0,\end{cases}$ в $x_0=0$.

7. Запишите уравнение касательной к графику функции $f\colon D\to\mathbb{R}$ в точке с абсциссой x_0:

а) $f(x)=7x^2$, $x_0=-3$; б) $f(x)=\sin x$, $x_0=\dfrac{\pi}{3}$;

в) $f(x)=\log_{27}(x^3)$, $x_0=27$; г) $f(x)=2{,}5^x$, $x_0=1$.

8. Дана функция $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}mx+n, & \text{если } x<0,\\ \sin x, & \text{если } x\ge 0.\end{cases}$ Найдите значения действительных параметров m и n, при которых функция f дифференцируема в точке $x_0=0$.

9. Составьте и решите примеры, аналогичные упр. **6**, **7**, **8**.

§4 Техника дифференцирования

4.1. Производная суммы, произведения и частного

Задание. Даны функции $f, g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3$, $g(x)=e^x$, $c\in\mathbb{R}$. Найдите:

а) $(f+g)'$; б) $(c\cdot f)'$; в) $(f-g)'$;

г) $(f\cdot g)'$; д) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'$; е) $((f\circ g))'$.

Выполнение этого задания требует знания правил нахождения производных.

Теорема 13. Если функции $f, g\colon I\to\mathbb{R}$ $(I\subseteq\mathbb{R})$ дифференцируемы в точке $x_0\in I$, то функция $f+g$ дифференцируема в точке x_0 и

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0).$$

Доказательство

Имеем $(f+g)'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(f+g)(x_0+\Delta x)-(f+g)(x_0)}{\Delta x}=$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)+g'(x_0).\ \blacktriangleright$$

Следствие. Если функции f и g дифференцируемы на интервале I, то функция $f+g$ дифференцируема на этом интервале и $\boxed{(f+g)'=f'+g'}$. (1)

Пример

Для функции $h\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=f(x)+g(x)=x^3+e^x$, согласно формуле (1), получим:

$$(x^3+e^x)'=(x^3)'+(e^x)'=3x^2+e^x.$$

Замечание. Методом математической индукции можно доказать, что сумма $f_1+f_2+\ldots+f_n$ дифференцируемых на интервале I функций есть дифференцируемая на этом интервале функция и

$$\left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right)' = \sum_{k=1}^{n} f_k'. \qquad (1')$$

Задание. Выведите формулу $(1')$.

Теорема 14. Если функция $f\colon I\to\mathbb{R}$ $(I\subseteq\mathbb{R})$ дифференцируема в точке $x_0\in I$ и $c\in\mathbb{R}$, то функция $c\cdot f$ дифференцируема в точке x_0 и $(c\cdot f)'(x_0)=c\cdot f'(x_0)$.

Задание. Докажите теорему 14.

Следствия. **1.** Если функция f дифференцируема на интервале I и $c\in\mathbb{R}$, то функция $c\cdot f$ дифференцируема на этом интервале и $\boxed{(c\cdot f)'=c\cdot f'}$. (2)

Пример

Для функции $h\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=\sqrt{3}\cdot e^x$, получим $(\sqrt{3}\cdot e^x)'=\sqrt{3}\cdot(e^x)'=\sqrt{3}e^x$.

2. При $c=-1$ получим $(-f)'=-f'$.

3. Если функции f, g дифференцируемы на интервале I, то функция $f-g$ – дифференцируемая функция на этом интервале и $\boxed{(f-g)'=f'-g'}$. (3)

Пример

Для функции $h\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=x^3-e^x$, получим:

$$(x^3-e^x)'=(x^3)'-(e^x)'=3x^2-e^x.$$

Теорема 15. Если функции $f,g\colon I\to\mathbb{R}$ $(I\subseteq\mathbb{R})$ дифференцируемы в точке $x_0\in I$, то функция $f\cdot g\colon I\to\mathbb{R}$ дифференцируема в точке x_0 и

$$(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0).$$

Доказательство

Пусть $x_0\in I$. Так как функция g дифференцируема в x_0, она непрерывна в x_0, то есть $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$.

Тогда $(f\cdot g)'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)g(x_0+\Delta x)-f(x_0)g(x_0)}{\Delta x}=$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)g(x_0+\Delta x)-f(x_0)g(x_0+\Delta x)+f(x_0)g(x_0+\Delta x)-f(x_0)g(x_0)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\cdot g(x_0+\Delta x)+f(x_0)\cdot\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}\right)=$$

$$=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0).$$ ►

Следствие. Если функции f и g дифференцируемы на интервале I, то функция $f \cdot g$ дифференцируема на этом интервале и

$$\boxed{(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'}. \tag{4}$$

Пример

Для функции $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) \cdot g(x) = x^3 \cdot e^x$, получим:

$$(x^3 \cdot e^x)' = (x^3)' \cdot e^x + x^3 \cdot (e^x)' = 3x^2 e^x + x^3 e^x = x^2 e^x (3 + x).$$

Замечание. Методом математической индукции можно доказать, что произведение $f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n$ n дифференцируемых на интервале I функций есть дифференцируемая на этом интервале функция и

$$(f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n)' = f_1' \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n + f_1 \cdot f_2' \cdot \ldots \cdot f_n + \ldots + f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n'.$$

Теорема 16. Если функции $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ $(I \subseteq \mathbb{R})$ дифференцируемы в точке $x_0 \in I$ и $g(x_0) \neq 0$, то функция $\frac{f}{g}$ дифференцируема в точке x_0 и

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Доказательство

Поскольку функция g непрерывна и $g(x_0) \neq 0$, существует окрестность $V(x_0)$, в которой $g(x) \neq 0$ для любого $x \in V(x_0)$. Пусть Δx такое, что $x_0 + \Delta x \in V(x_0)$. Тогда

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x_0 + \Delta x) - \left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) g(x_0) - f(x_0) g(x_0 + \Delta x)}{g(x_0 + \Delta x) g(x_0) \Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{g(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0)} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \right) =$$

$$= \frac{1}{g^2(x_0)} \cdot (f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)) = \frac{f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

($\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x_0 + \Delta x) = g(x_0)$, так как функция g непрерывна в точке x_0). ►

Следствия. **1.** Если функции f, g дифференцируемы на интервале I и $g(x) \neq 0$ для любого $x \in I$, то функция $\frac{f}{g}$ дифференцируема на этом интервале и

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}}. \tag{5}$$

2. При $f = 1$ по формуле (5) получим: $\boxed{\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}}$. (6)

Задание с решением

Найдем производную функции $h: D \to \mathbb{R},\ h(x) = \frac{x^3}{e^x}$.

Решение:

$$h'(x) = \left(\frac{x^3}{e^x}\right)' = \frac{(x^3)' \cdot e^x - x^3 \cdot (e^x)'}{e^{2x}} = \frac{3x^2 e^x - x^3 \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{x^2 e^x (3-x)}{e^{2x}} = \frac{x^2(3-x)}{e^x}.$$

4.2. Производные функций тангенс и котангенс

Теорема 17. Пусть $f: \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \operatorname{tg} x$. Функция f дифференцируема на множестве $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ и $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x},\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Доказательство

$$f'(x) = (\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x},\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}. \quad ►$$

Важно знать: $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$ (7)

Теорема 18. Пусть $f: \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \operatorname{ctg} x$. Функция f дифференцируема на множестве $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ и $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x},\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Важно знать: $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$ (8)

Задание. Докажите теорему 18.

4.3. Производная сложной функции

Теорема 19. Пусть функции $f: I_1 \to I_2,\ g: I_2 \to \mathbb{R}$, где I_1, I_2 – интервалы. Если функция f дифференцируема в $x_0 \in I_1$, а функция g дифференцируема в $y_0 = f(x_0) \in I_2$, то сложная функция $h = g \circ f: I_1 \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x_0 \in I_1$ и $h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

Запомните формулу дифференцирования сложной функции:

$$\boxed{(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x),\ \forall x \in I}. \quad (9)$$

Следствие. Если функции $f\colon I_1 \to I_2,\ g\colon I_2 \to I_3,\ h\colon I_3 \to \mathbb{R}$ дифференцируемы, то сложная функция $p(x)\colon I_1 \to \mathbb{R},\ p(x) = (h \circ g \circ f)(x)$ дифференцируема в любой точке $x \in I_1$ и

$$\boxed{p'(x) = h'(g(f(x)))\cdot g'(f(x))\cdot f'(x)}\,. \tag{10}$$

Задание с решением

Найдем производные функции:

а) $h\colon D \to \mathbb{R},\ h(x) = 2^{3x}$;

б) $p\colon D \to \mathbb{R},\ p(x) = \log_2 \cos 2x$.

Решение:

а) $(2^{3x})' = 2^{3x} \cdot \ln 2 \cdot (3x)' = \ln 8 \cdot 2^{3x}$.

б) $(\log_2 \cos 2x)' = \log_2'(\cos 2x) \cdot \cos'(2x) \cdot (2x)' = \dfrac{1}{\cos 2x \cdot \ln 2} \cdot (-\sin 2x) \cdot 2 =$
$= -\dfrac{2\sin 2x}{\cos 2x \ln 2} = -\dfrac{2\operatorname{tg} 2x}{\ln 2}$.

4.4. Производная обратной функции

Теорема 20. Пусть $f\colon I \to J\ (I, J \subseteq \mathbb{R})$ – непрерывная и биективная функция. Если функция f дифференцируема в точке $x_0 \in I$ и $f'(x_0) \neq 0$, то обратная функция $f^{-1}\colon J \to I$, где $J = f(I)$, дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$ и $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Замечание. Пусть функция $f\colon I \to J$ строго монотонна и дифференцируема на интервале I, тогда $f'(x) \neq 0,\ \forall x \in I$. Следовательно, обратная функция $f^{-1}\colon J \to I$ дифференцируема на интервале J и

$$\boxed{(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)},\ \forall y \in J,\ \text{где}\ y = f(x)}\,. \tag{11}$$

Задания с решением

1. *Производная функции арксинус*

Дана функция $f\colon \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1],\ f(x) = \sin x$. Найдем $(f^{-1})'$.

Решение:

В любой точке $x_0 \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ имеем $(\sin)'(x_0) = \cos x_0 \neq 0$ и выполняются условия теоремы 20. Итак, функция $f^{-1} = \arcsin$ дифференцируема в любой точке $y_0 \in (-1, 1)$.

Обозначим $y_0 = \sin x_0$. Тогда $\arcsin y_0 = x_0$. По формуле (11) получим:

$$(\arcsin)'(y_0) = \frac{1}{\cos x_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x_0}} = \frac{1}{\sqrt{1-y_0^2}},\ \forall y_0 \in (-1, 1).$$

Возвращаясь к обычным обозначениям, получим формулу:

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \forall x \in (-1, 1)}\,. \tag{12}$$

2. *Производная функции арккосинус*

Дана функция $f\colon [0, \pi] \to [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$. Найдем $(f^{-1})'$.

Решение:

Рассуждая аналогично предыдущему заданию или применив соотношение $\arccos x + \arcsin x = \dfrac{\pi}{2}$, получим формулу:

$$\boxed{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ \forall x \in (-1, 1)}\ . \qquad (13)$$

3. *Производная функции арктангенс*

Дана функция $f\colon \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$. Найдем $(f^{-1})'$.

Решение:

В любой точке $x_0 \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ имеем $(\operatorname{tg})'(x_0) = \dfrac{1}{\cos^2 x_0} \neq 0$ и согласно теореме 20 функция $f^{-1} = \operatorname{arctg}$ дифференцируема в любой точке $y_0 \in \mathbb{R}$, где $y_0 = \operatorname{tg} x_0$. Тогда $(\operatorname{arctg})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 x_0}} = \cos^2 x_0 = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x_0} = \dfrac{1}{1+y_0^2}$.

Возвращаясь к обычным обозначениям, получим формулу:

$$\boxed{(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \ \forall x \in \mathbb{R}}\ . \qquad (14)$$

4. *Производная функции арккотангенс*

Дана функция $f\colon (0, \pi) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$. Найдем $(f^{-1})'$.

Решение:

Рассуждая аналогично предыдущему заданию или применив соотношение $\operatorname{arcctg} x + \operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{2}$, получим формулу:

$$\boxed{(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \ \forall x \in \mathbb{R}}\ . \qquad (15)$$

4.5. Дифференцирование функций вида $f(x) = u(x)^{v(x)}$, где $u(x) > 0$

Рассмотрим функцию $f\colon I \to \mathbb{R}$, $f(x) = u(x)^{v(x)}$, где $u(x) > 0$, $\forall x \in I$, $I \subseteq \mathbb{R}$. В общем случае, эта функция не является ни показательной, ни степенной, тем самым для отыскания ее производной нельзя пользоваться формулами (3), (8) из § 3. В таких случаях применяется основное логарифмическое тождество:

$$f(x) = u(x)^{v(x)} = e^{\ln u(x)^{v(x)}} = e^{v(x)\ln u(x)}.$$

Функция $f\colon D \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{v(x)\ln u(x)}$ – сложная функция. Находим ее производную:

$$f'(x) = (e^{v(x)\ln u(x)})' = e^{v(x)\ln u(x)} \cdot (v(x)\ln u(x))' = u(x)^{v(x)} \cdot (v(x)\ln u(x))' = f(x)\cdot(\ln f(x))'. \qquad (16)$$

Отсюда следует формула для нахождения производной функций вида $f(x) = u(x)^{v(x)}$, где $u(x) > 0$:

$$\boxed{(u^v)' = u^v \cdot \left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u}\right)}\ . \qquad (17)$$

Задание с решением

Найдем производную функции:

а) $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*,\ f(x)=x^x$; б) $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ f(x)=x^{\sqrt{x}}\lg 5x$ (см. задание в начале § 3).

Решение:

а) По формуле (16) имеем $f'(x)=f(x)\cdot(\ln f(x))'$.

Значит, $(x^x)'=x^x\cdot(\ln x^x)'=x^x(x\ln x)'=x^x(\ln x+1)$.

б) $f'(x)=(x^{\sqrt{x}}\lg 5x)'=(x^{\sqrt{x}})'\cdot\lg 5x+x^{\sqrt{x}}\cdot(\lg 5x)'$. Найдем сначала производную функции $g\colon D\to\mathbb{R},\ g(x)=x^{\sqrt{x}}$.

По формулам (17) и $(\ln u^v)'=(v\ln u)'=v'\cdot\ln u+v\cdot\dfrac{u'}{u}$ получим

$(\ln x^{\sqrt{x}})'=\dfrac{1}{x^{\sqrt{x}}}\cdot(x^{\sqrt{x}})'$, или $(x^{\sqrt{x}})'=\dfrac{(2+\ln x)\cdot x^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$. Тогда

$$f'(x)=\frac{(2+\ln x)\cdot x^{\sqrt{x}}\cdot\lg 5x}{2\sqrt{x}}+\frac{x^{\sqrt{x}}}{x\ln 10}=0{,}5(2+\ln x)\cdot x^{\sqrt{x}-0{,}5}\cdot\lg 5x+x^{\sqrt{x}-1}\lg e.$$

4.6. Производные высших порядков

Пусть $f\colon I\to\mathbb{R}$ – дифференцируемая на интервале I функция. Значения $f'(x)$ зависят, в общем, от x, то есть производная функции f является, в свою очередь, функцией от x. Следовательно, можно ставить вопрос о существовании и нахождении производной функции f'.

Задание с решением

Найдем производную от производной функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2e^x$.

Решение:

$f'(x)=(x^2e^x)'=2xe^x+x^2e^x$.

Тогда $(f'(x))'=(2xe^x+x^2e^x)'=2e^x+2xe^x+2xe^x+x^2e^x=e^x(x^2+4x+2)$.

Определение. Пусть $f\colon I\to\mathbb{R}$. Будем говорить, что **функция f дифференцируема дважды в точке $x_0\in I$**, если функция f дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 и функция f' дифференцируема в точке x_0.

В этом случае производная функции f' в x_0 называется ***производной второго порядка*** (или ***второй производной***) ***функции f в точке x_0*** и обозначается $f''(x_0)$.

Итак, $f''(x_0)=(f')'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}$.

Замечание. Если функция f дифференцируема дважды в любой точке интервала I, будем говорить, что функция f дифференцируема дважды на интервале I.

Примеры

1. Для функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-3x^2+5$, имеем: $f'(x)=3x^2-6x$, $f''(x)=6x-6$.

2. Для функции $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=\cos x$, получаем: $g'(x)=-\sin x$, $g''(x)=-\cos x$.

Аналогично определяется ***производная третьего порядка*** (или ***третья производная***) ***функции f в точке x_0***. Обозначают: $f'''(x_0)$.

По аналогии определяется ***производная n-го порядка,*** $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, ***функции f в точке x_0***. Обозначают: $f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0)$. Иногда $f^{(n)}(x)$ обозначают $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$.

Замечания. **1.** Число, обозначающее порядок производной, записывается в скобках, чтобы не путать это число с показателем степени (кроме случаев, когда порядок производной записывается римскими цифрами).

2. Принято считать, что производная нулевого порядка функции f есть сама функция f, то есть $f^{(0)} = f$.

Примеры

1. Для функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, получим: $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{IV}(x) = \sin x$. Методом математической индукции можно доказать формулу: $\boxed{(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right),\ n \in \mathbb{N}.}$

2. Аналогично получаем формулу: $\boxed{(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right),\ n \in \mathbb{N}.}$

3. Для функции $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^x$, имеем: $g'(x) = e^x$, $g''(x) = e^x$, $g'''(x) = e^x$.

Важно знать: $(e^x)^{(n)} = e^x,\ \forall n \in \mathbb{N}.$

Задание с решением

Докажем формулу бинома Ньютона, пользуясь производной функции.

Решение:

Возведя бином $a + x$ в степень n, $n \in \mathbb{N}^*$, получим тождество:

$$(a+x)^n = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n,\ x \in \mathbb{R}, \tag{18}$$

где $A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ – коэффициенты, которые следует найти.

Чтобы найти A_0, подставим $x = 0$ в тождество (18) и получим:

$$A_0 = a^n. \tag{19}$$

Для нахождения A_1 продифференцируем обе части тождества (18) и получим:

$((a+x)^n)' = (A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n)'$, или

$$n(a+x)^{n-1} = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + \ldots + nA_n x^{n-1}. \tag{20}$$

Подставив $x = 0$ в (20), выведем формулу для $n \cdot a^{n-1} = A_1$. Тогда

$$A_1 = \frac{n \cdot a^{n-1}}{1}.$$

Продифференцировав обе части тождества (20) и подставив $x = 0$ в полученные выражения, выведем формулу для A_2 (проверьте!):

$$A_2 = \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}a^{n-2}.$$

Поступая аналогично, найдем остальные коэффициенты: $A_3, A_4, \ldots, A_n$. Продифференцировав k раз $(k\in\mathbb{N}^*,\ k\le n)$ обе части тождества (18) и подставив $x=0$ в полученные выражения, в итоге получим: $n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)a^{n-k}=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k\cdot A_k$. Тогда

$$A_k=\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}a^{n-k}.$$

Известно, что числа $\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}$ называются ***биномиальными коэффициентами***, и обозначаются C_n^k.

Следовательно, $A_k=C_n^k a^{n-k}$, где $C_n^k=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Тогда

$$(a+x)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}x+C_n^2a^{n-2}x^2+\ldots+C_n^ka^{n-k}x^k+\ldots+x^n. \qquad (21)$$

Таким образом, пользуясь производной функции, мы доказали формулу бинома Ньютона (21).

Упражнения и задачи

A

1. Найдите f' функции $f\colon D\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=5x^6$; б) $f(x)=\pi e^x$; в) $f(x)=-0{,}5\log_{\frac{1}{3}}x$;

г) $f(x)=x^3-5x^2$; д) $f(x)=7x^2-3x+2$; е) $f(x)=2\log_5 x+2\,010$.

2. Найдите область определения D_f, производную f' и определите область дифференцируемости $D_{f'}$ функции $f\colon D_f\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=x+\sqrt{x}$; б) $f(x)=\log_3 x+x^5$; в) $f(x)=xe^x$; г) $f(x)=\sqrt{x}\ln x$;

д) $f(x)=\sqrt[3]{x}\log_{\frac{1}{5}}x$; е) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$; ж) $f(x)=\dfrac{x}{x^3+2x}$; з) $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$;

и) $f(x)=\dfrac{e^x}{x-3}$; к) $f(x)=\sqrt{2x^2-x}$; л) $f(x)=-4\log_2\sqrt{2}x$.

3. Вычислите f' в точке x_0, если:

а) $f\colon\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x-1}{x^2},\ x_0=\sqrt{2}$; б) $f\colon(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x}\log_5 2x,\ x_0=0{,}25$.

4. Материальная точка движется согласно закону $s(t)=-\dfrac{1}{3}t^3+3t^2+7t$, где s – расстояние, измеряемое в метрах, и t – время, измеряемое в секундах. Найдите:

а) формулу для вычисления скорости материальной точки;

б) скорость материальной точки при $t=2$ с;

в) через сколько секунд материальная точка остановится.

5. Из одного пункта одновременно отправляются две материальные точки, которые движутся согласно законам $s_1(t)=6t^2+4t$ и $s_2(t)=t^3+3t^2+6t$, где s – расстояние, измеряемое в метрах, и t – время, измеряемое в секундах.

а) Определите моменты времени, когда материальные точки встретятся.

б) Найдите формулы для вычисления скоростей и ускорений этих точек.

в) Найдите скорости и ускорения материальных точек в моменты их встречи.

г) Определите моменты времени, в которых скорости этих точек и соответственно их ускорения равны.

Б

6. Найдите f' функции $f\colon D \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = x^{25} - \sqrt{x} + \cos x$; б) $f(x) = \sin x + \log_{0,3} x - \sqrt[5]{x}$; в) $f(x) = 5\ln x + \sqrt{3x} - \dfrac{5}{x^2}$;

г) $f(x) = \sqrt[6]{2x} + 7e^x - \dfrac{1}{3}x^{-9}$; д) $f(x) = \sqrt{5}\cos x - 7\sin x - 4\ln x$; е) $f(x) = 5\sqrt[4]{x}\cdot\sin x$;

ж) $f(x) = 8x^3\ln x$; з) $f(x) = 6 - 0{,}6x^{-5}\log_3 x$; и) $f(x) = 5\ln(x^2 - 3x)$;

к) $f(x) = \sqrt{2}\log_5^3 \operatorname{tg} x$; л) $f(x) = 6^{3x}\sin^2 4x$; м) $f(x) = \dfrac{\cos(3x^2 - 1)}{\ln^2 x}$.

7. Напишите уравнение касательной к графику функции $f\colon D \to \mathbb{R}$ в точке с абсциссой x_0:

а) $f(x) = \cos^2 2x,\ x_0 = \dfrac{\pi}{3}$; б) $f(x) = \lg^2(3x - 1),\ x_0 = \dfrac{2}{3}$; в) $f(x) = x^{\sqrt{x+2}},\ x_0 = 1$.

8. Дана функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} e^{2x}, & \text{если } x \in (-\infty, 0), \\ ax^2 + bx + c, & \text{если } x \in [0, +\infty). \end{cases}$ Найдите значения действительных параметров a, b и c, при которых функция f дифференцируема в точке $x_0 = 0$.

9. Напишите хотя бы одну функцию $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, производная которой равна:

а) $f'(x) = 2 - \cos x$; б) $f'(x) = -2e^{2x}$; в) $f'(x) = 2\sin 2x$.

10. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $f'(x) = 0$, если:

а) $f(x) = 2\sin^2 x + \sqrt{2}x$; б) $f(x) = \cos 2x - \sqrt{3}x$.

11. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $f'(x) > 0$, если:

а) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x$; б) $f(x) = 3x + \cos(6x - \pi)$.

12. Найдите f'' функции $f\colon D \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 6$; б) $f(x) = 2\sin 3x$; в) $f(x) = 5e^{-2x}$;

г) $f(x) = \sqrt{3 - x^2}$; д) $f(x) = \ln x$; е) $f(x) = \arccos\dfrac{x}{3}$;

ж) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$; з) $f(x) = \dfrac{3^{2x}}{(x-1)^2}$; и) $f(x) = (\sqrt{x})^{x-1}$.

13. Найдите $f''(x) - 5f'(x) + 3f(x)$, если $f\colon \mathbb{R} \to \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

14. Материальная точка движется согласно закону $s(t) = \sqrt{t}$. Докажите, что ускорение материальной точки пропорционально кубу ее скорости.

15. Найдите силу F, действующую на материальную точку массой m, которая движется по закону $s(t) = 4t^3 - t^2$, где m измеряется в килограммах, расстояние s – в метрах и время t – в секундах.

16. Найдите $f^{(5)}(0)$, если $f(x) = e^{2x}\cdot x^3$.

17. Пользуясь производной, найдите сумму $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n$, где $C_n^k,\ k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, – биномиальные коэффициенты.

18. Методом математической индукции докажите формулу Лейбница:
$(f\cdot g)^{(n)} = C_n^0 f^{(n)} g^{(0)} + C_n^1 f^{(n-1)} g^{(1)} + \ldots + C_n^{n-1} f^{(1)} g^{(n-1)} + C_n^n f^{(0)} g^{(n)}$.

§5 Дифференциал функции

Пусть $f\colon I\to\mathbb{R}$ $(I\subseteq\mathbb{R})$ – дифференцируемая функция на интервале I и $x_0\in I$. Тогда, согласно определению производной, имеем

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \tag{1}$$

Из соотношения (1) и определения предела функции в точке следует, что

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha(\Delta x), \tag{2}$$

где $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0.$ Из соотношения (2) получаем, что

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x,\quad \text{или}$$

$$\Delta f(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x. \tag{3}$$

Из (3) следует, что приращение $\Delta f(x_0)$ дифференцируемой функции f в точке x_0 состоит из двух слагаемых: слагаемое $f'(x_0)\cdot\Delta x$, которое пропорционально приращению аргумента, и слагаемое $\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$, где $\alpha(\Delta x)\to 0$ при $\Delta x\to 0$.

Определение. Линейная функция $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(\Delta x)=f'(x_0)\cdot\Delta x$, называется **дифференциалом функции f в точке x_0** и обозначается $\mathrm{d}f(x_0)$.

Следовательно, $\boxed{\mathrm{d}f(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x}$. (4)

Задание с решением

Найдем дифференциал функции $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$.

Решение:

Так как $f'(x_0)=1$, то $\mathrm{d}x=\Delta x$. В силу соотношения (4), $\mathrm{d}f(x_0)=f'(x_0)\cdot\mathrm{d}x$.

Следствие. Если функция f дифференцируема в любой точке интервала I, то:

$$\boxed{\mathrm{d}f(x)=f'(x)\cdot\mathrm{d}x,\quad \forall x\in I}\,. \tag{5}$$

Примеры

1. Для функции $f\colon\mathbb{R}\to[-1,1]$, $f(x)=\sin x$, имеем:

$$\mathrm{d}f(x)=\mathrm{d}(\sin x)=(\sin x)'\mathrm{d}x=\cos x\,\mathrm{d}x.$$

2. Для функции $g\colon(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\log_8 x$, получаем $\mathrm{d}f(x)=\dfrac{1}{x\ln 8}\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}x}{x\ln 8}$.

Геометрический смысл дифференциала функции f, дифференцируемой в точке x_0, отображен на рисунке 4.11. Проводим касательную в точке $A(x_0, f(x_0))$ графика G_f. Имеем $\Delta x=AB$, $\operatorname{tg}\alpha=f'(x_0)=\dfrac{BC}{AB}$ (см. ΔABC, у которого $m(\angle B)=90^\circ$).

Тогда $BC=f'(x_0)\cdot AB$, или $BC=f'(x_0)\Delta x=\mathrm{d}f(x_0)$.

Геометрический смысл дифференциала функции f *в точке* x_0 следующий: $\Delta f(x_0)$ *есть приращение ординаты функции* f в точке $(x_0, f(x_0))$, соответствующее приращению Δx ее аргумента, а $\mathrm{d}f(x_0)$ – приращение *ординаты касательной* в точке $(x_0, f(x_0))$ графика G_f, соответствующее тому же приращению Δx аргумента функции f (рис. 4.11).

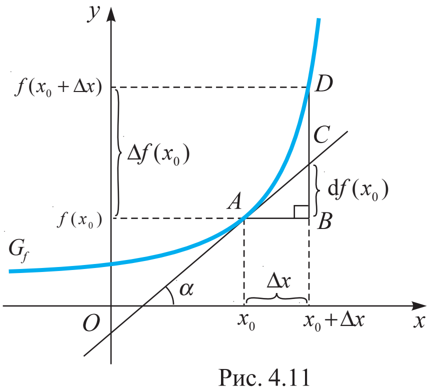


Рис. 4.11

Из формул (3) и (4) следует приближенное соотношение:

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx \mathrm{d}f(x_0), \qquad (6)$$

или $BD \approx BC$.

Из соотношения (6) следует:

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x. \qquad (7)$$

Для достаточно малых (т. е. достаточно близких к нулю) Δx имеем $f(x_0+\Delta x)\approx y$. Иными словами, в окрестности точки A, на достаточно малом участке графика функции f, кривая практически сливается с отрезком касательной в точке A графика G_f.

Формула (7) применяется при вычислении приближенного значения функции в заданной точке.

Задание с решением

Вычислим приближенно значение функции $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^2-x-15$, в точке $x=1{,}1$.

Решение:

$x=1{,}1=1+0{,}1=x_0+\Delta x$. Тогда $x_0=1$, $\Delta x=0{,}1$. Вычислим $f(1)$ и $f'(1)$:
$f(1)=4\cdot 1^2-1-15=-12$; $f'(x)=8x-1$ и $f'(1)=8\cdot 1-1=7$.

Подставив эти значения в (7), получим $f(1{,}1)\approx f(1)+f'(1)\cdot 0{,}1=-12+7\cdot 0{,}1=-11{,}3$. Точное же значение функции f при $x=1{,}1$ равно: $f(1{,}1)=-11{,}26$.

Замечания. Применив формулу (7), можно вывести следующие формулы:

1. $\sqrt{1+\Delta x}\approx 1+\frac{1}{2}\Delta x.$ (8)
2. $(1+\Delta x)^n\approx 1+n\cdot\Delta x,\ n\in\mathbb{N}^*.$ (9)

Задание. Докажите формулы (8) и (9).

Задание с решением

Вычислите приближенно: а) $\sqrt{4{,}008}$; б) $(1{,}003)^{100}$.

Решение:

а) Применив формулу (8), получим:

$$\sqrt{4{,}008}=\sqrt{4(1+0{,}002)}=2\sqrt{1+0{,}002}\approx 2\left(1+\frac{1}{2}\cdot 0{,}002\right)=2\cdot 1{,}001=2{,}002.$$

Пользуясь же калькулятором, получаем: $\sqrt{4{,}008}\approx 2{,}00199$.

б) По формуле (9) имеем: $(1{,}003)^{100}=(1+0{,}003)^{100}\approx 1+100\cdot 0{,}003=1{,}3.$

Пользуясь же калькулятором, получаем: $(1{,}003)^{100}\approx 1{,}3493.$

Формула (7) может быть применена для приближенного вычисления значений любых дифференцируемых в точке x_0 функций, включая значения тригонометрических функций. Отметим, что в математическом анализе величины углов измеряются только в радианах.

Замечание. Формулы (7)–(9) целесообразно применять при относительно малых значениях Δx.

Задание с решением

Вычислим приближенно $\sin 31°$.

Решение:

Пусть $f(x)=\sin x$. Тогда $\sin 31°=\sin(30°+1°)=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}\right)$.

Следовательно, $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}\right)=f\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}\right)$. Пусть $x_0=\frac{\pi}{6}$, а $\Delta x=\frac{\pi}{180}$.

Тогда $f\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}\right)\approx f\left(\frac{\pi}{6}\right)+f'\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot\frac{\pi}{180}$.

Так как $f(x_0)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, $f'(x_0)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, то получим:

$$\sin 31°\approx\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{1}{2}+\frac{\pi\sqrt{3}}{2\cdot 180}\approx 0{,}52.$$

Из определения дифференциала функции следует, что аналогично производным элементарных функций для дифференциалов этих же функций имеем:

$d(c)=0,\ c\in\mathbb{R};$ $\quad d(x^{\alpha})=\alpha x^{\alpha-1}dx,\ \alpha\in\mathbb{R};$ $\quad d(\sqrt{x})=\frac{dx}{2\sqrt{x}};$

$d(e^x)=e^x dx;$ $\quad d(a^x)=a^x\ln a\,dx;$ $\quad d(\ln x)=\frac{dx}{x};$

$d\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{dx}{x^2};$ $\quad d(\log_a x)=\frac{dx}{x\ln a};$ $\quad d(\sin x)=\cos x\,dx;$

$d(\cos x)=-\sin x\,dx;$ $\quad d(\mathrm{tg}\,x)=\frac{dx}{\cos^2 x};$ $\quad d(\mathrm{ctg}\,x)=-\frac{dx}{\sin^2 x};$

$d(\arcsin x)=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$ $\quad d(\arccos x)=-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$

$d(\mathrm{arctg}\,x)=\frac{dx}{1+x^2};$ $\quad d(\mathrm{arcctg}\,x)=-\frac{dx}{1+x^2}.$

Правилам нахождения производных (см. понятийную карту к модулю 4) соответствуют аналогичные правила нахождения дифференциалов.

Примеры

1. $d(e^x\cdot x^3)=e^x\cdot x^3\cdot dx+3x^2\cdot e^x\cdot dx=x^2e^x(x+3)dx.$
2. $d(\sin 3x)=3\cos 3x\,dx.$

Упражнения и задачи

Б

1. Вычислите приближенно, по формуле (6), значения функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = x^3 - 2x$, в $x_1 = 1{,}04$, $x_2 = 0{,}98$; б) $f(x) = x^2 + 5x - 1$, в $x_1 = 25{,}04$, $x_2 = 0{,}98$.

2. Вычислите приближенно, используя формулы (7), (8) и (9):

а) $(1{,}0008)^{200}$; б) $(0{,}996)^7$; в) $\sqrt{36{,}011}$; г) $\sqrt{0{,}998}$; д) $\ln(1{,}05)$.

3. Найдите дифференциал функции $f\colon D \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = x^3 + 2x$; б) $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$; в) $f(x) = \sin(x+1)$; г) $f(x) = 2^{3x}$; д) $f(x) = \cos 2x$.

4. Найдите дифференциал функции $f\colon D \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = x \cdot \log_2 x$; б) $f(x) = x^2 \cdot e^{4x}$;

в) $f(x) = x \cdot \operatorname{ctg}(x+5) - \ln 5x$; г) $f(x) = 3\ln\dfrac{x}{3} + 5$.

5. Найдите дифференциал функции $f\colon D \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$, в $x_0 = -2$; б) $f(x) = \sin x - \cos x$, в $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$;

в) $f(x) = \log_2(x^2 + 3)$, в $x_0 = 1$.

6. Найдите дифференциал функции $f\colon D \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = \sqrt{x} + 5x^4 - x^{-7}$; б) $f(x) = 2 \cdot 3^{-x} - \ln(x^2 - 1) + 7$; в) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x - \sqrt[5]{x^2 - x}$.

7. Найдите дифференциал функции $f\colon D \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = \sin 2x - \cos^3 x + 5$, в $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$; б) $f(x) = \operatorname{arctg} 3x + 5\arccos x$, в $x_0 = 1$;

в) $f(x) = -\sqrt{5} \cdot 7^{x^2} + \arcsin\dfrac{x}{3}$, в $x_0 = 0$; г) $f(x) = x^3 e^{2x}$, в $x_0 = 2$.

8. Применив формулу (7), вычислите приближенно:

а) $\cos 46°$; б) $\lg 11{,}2$; в) $e^{0{,}93}$; г) $\sin\left(\dfrac{\pi}{6} - 0{,}004\right)$; д) $\dfrac{1}{1{,}004^{20}}$.

§6 Основные свойства дифференцируемых функций

Рассмотрим основные свойства дифференцируемых функций. Следующие теоремы являются ***фундаментальными теоремами математического анализа***.

6.1. Теорема Ферма

Вспомним!

Точки локального максимума (локального минимума) функции называются **точками локального экстремума** этой функции.

Теорема 21 (теорема Ферма[1]). Пусть $f\colon I \to \mathbb{R}$ – дифференцируемая функция на интервале I и $x_0 \in I$. Если x_0 – точка локального экстремума функции f, то $f'(x_0) = 0$.

Пьер Ферма

[1] Пьер Ферма (1601–1665) – французский математик.

Доказательство

Предположим, что x_0 – точка локального максимума функции f. Тогда существует окрестность $V(x_0)$ точки x_0 $(V(x_0)\subset I)$ такая, что $f(x)\le f(x_0)$, $\forall x\in V(x_0)$. Для $x\in V(x_0)$, $x<x_0$, имеем $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$, а для $x\in V(x_0)$, $x>x_0$, получим $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$.

Из того, что функция f дифференцируема в точке x_0, следует, что $f'(x_0)=f'_л(x_0)=$ $=f'_п(x_0)$, где $f'_л(x_0)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<0}}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$, $f'_п(x_0)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>0}}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$.

Значит, $f'(x_0)\ge 0$ и $f'(x_0)\le 0$, откуда следует, что $f'(x_0)=0$.

Аналогично доказывается теорема, если x_0 – точка локального минимума функции f. Для этого случая теорема также может быть доказана, подставив в приведенном доказательстве $-f$ вместо f. ►

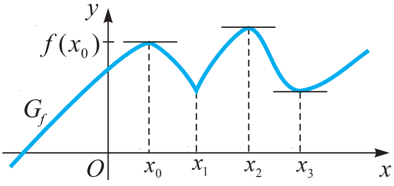


Рис. 4.12

Геометрический смысл. При выполнении условий теоремы Ферма, касательная к графику функции f в точке $(x_0, f(x_0))$ параллельна оси Ox (рис. 4.12).

Замечание. Теорема Ферма выражает лишь *необходимое условие* существования для дифференцируемой функции f локального экстремума в точке x_0. Из того, что производная функции обращается в нуль в точке x_0, не обязательно следует, что в этой точке функция f имеет локальный экстремум.

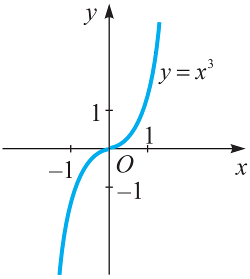


Рис. 4.13

Например, производная функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3$, обращается в нуль в точке $x_0=0$, но $x_0=0$ не является точкой локального экстремума функции f (рис. 4.13).

Этот пример доказывает, что обратное утверждение теоремы Ферма ложное.

6.2. Теорема Ролля

Следующая теорема, полезная в приложениях производной, является следствием теоремы Ферма и свойств непрерывных функций.

Теорема 22 (теорема Ролля[1]). Если функция $f:[a, b]\to\mathbb{R}$

1) непрерывна на отрезке $[a, b]$,
2) дифференцируема на интервале (a, b) и
3) $f(a)=f(b)$,

то существует хотя бы одна точка $c\in(a, b)$ такая, что $f'(c)=0$.


Мишель Ролль

[1] Мишель Ролль (1652–1719) – французский математик.

Доказательство

Так как функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то по второй теореме Вейерштрасса (модуль 3, раздел 3.1), она ограничена и достигает на этом отрезке своих точных верхней и нижней граней.

Пусть $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $m, M \in \mathbb{R}$.

Возможны следующие случаи: $m = M$; $m < M$.

1) Пусть $m = M$. Тогда функция f постоянна на отрезке $[a, b]$.

Следовательно, $f'(c) = 0$ для любого $c \in (a, b)$.

2) Пусть $m < M$. Тогда функция f уже не является постоянной на отрезке $[a, b]$. Так как $f(a) = f(b)$, то хотя бы одно из двух значений, m или M, не достигается на концах отрезка $[a, b]$, то есть существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $f(c) = m$ или $f(c) = M$. Так как c является точкой локального экстремума, то, по теореме Ферма, $f'(c) = 0$. ►

Замечание. Любая функция, обладающая свойствами 1) и 2), называется ***функцией Ролля***.

Геометрический смысл. Если отрезок, заданный точками $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$, параллелен оси Ox, то существует хотя бы одна точка $c \in (a, b)$ такая, что касательная к графику дифференцируемой функции f в точке $(c, f(c))$ параллельна оси Ox (рис. 4.14).

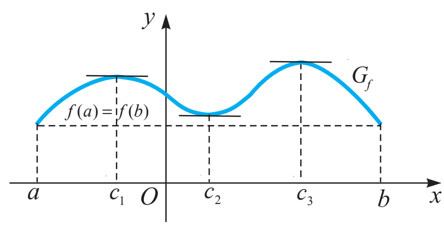


Рис. 4.14

Пример

Функция $f\colon [-1, 0] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 - 2x + 1$, удовлетворяет следующим условиям:

1) непрерывна на отрезке $[-1, 0]$,
2) дифференцируема на интервале $(-1, 0)$,
3) $f(-1) = f(0) = 1$.

Тогда, согласно теореме Ролля, существует точка $c \in (-1, 0)$ такая, что $f'(c) = 0$. Найдем эту точку c.

Имеем $f'(x) = 6x^2 - 2 = 0$, где $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \notin (-1, 0)$, $x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \in (-1, 0)$. Значит, $c = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

***Замечания.* 1.** Точка c из теоремы Ролля не всегда является единственной точкой для заданной функции.

2. Все три условия теоремы Ролля существенны. Невыполнение хотя бы одного из них приводит к ложному выводу.

Задание. Дана функция $f\colon I \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{если } x \in (0, 1], \\ 2, & \text{если } x = 0; \end{cases}$ $I = [0, 1]$; б) $f(x) = 2x$, $I = [0, 1]$;

в) $f(x) = |x|$, $I = [-1, 1]$.

Определите, какие из условий теоремы Ролля не выполняются, и убедитесь в том, что в этом случае заключение теоремы Ролля ложно.

Следствия из теоремы Ролля

1. Между двумя нулями дифференцируемой на интервале функции всегда содержится хотя бы один нуль ее производной (рис.4.15).

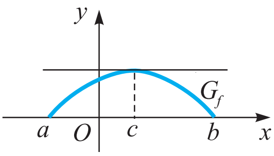


Рис. 4.15

2. Между двумя последовательными нулями производной дифференцируемой на интервале функции содержится не более одного нуля этой функции (рис. 4.16).

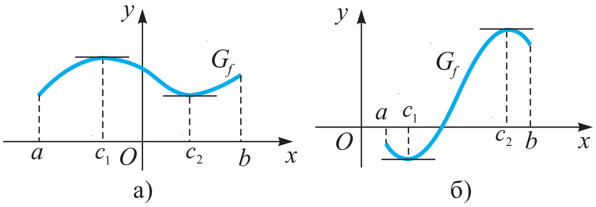
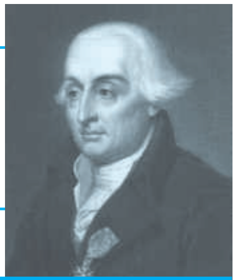


Рис. 4.16

6.3. Теорема Лагранжа



Жозеф Луи Лагранж

Теорема 23 (теорема Лагранжа[1]). Пусть $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b), то существует хотя бы одна точка $c \in (a, b)$ такая, что $f(b) - f(a) = f'(c)\cdot(b-a)$.

Доказательство

Рассмотрим вспомогательную функцию $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = f(x) - mx$, $m \in \mathbb{R}$. Функция F непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b). Найдем постоянную $m \in \mathbb{R}$ такую, что $F(a) = F(b)$, то есть $m = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$. Так как функция F удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, то существует хотя бы одна точка $c \in (a, b)$ такая, что $F'(c) = 0$.

Из соотношений $F'(x) = f'(x) - m$ и $F'(c) = 0$ следует, что $f'(c) = m$.

Следовательно, $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$, или $f(b) - f(a) = f'(c)\cdot(b-a)$ (1). ►

Геометрический смысл. График функции f имеет касательную в любой точке $x \in (a, b)$. Угловой коэффициент прямой, проходящей через точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$, равен $\dfrac{f(b) - f(a)}{b-a} = m_1$, а угловой коэффициент касательной к графику функции f в точке $(c, f(c))$ равен $f'(c) = m_2$. Поскольку $m_1 = m_2$, то эти прямые параллельны.

Таким образом, из теоремы Лагранжа следует, что существует, хотя бы одна точка графика G_f, в которой касательная параллельна секущей AB (рис. 4.17).

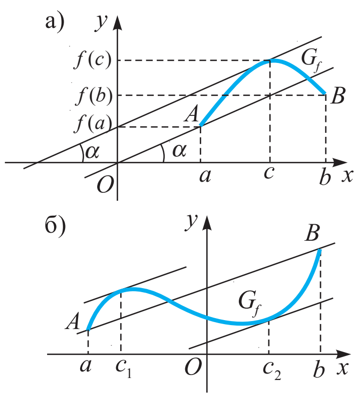


Рис. 4.17

[1] Жозеф Луи Лагранж (1736–1813) – французский математик и механик.

Задание с решением

Применим теорему Лагранжа к функции $f\colon [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 6 - 2x^2, & x \in [0, 1], \\ \dfrac{4}{x}, & x \in (1, 2] \end{cases}$ и найдем точку c.

Решение:

Функция f непрерывна и дифференцируема на каждом из промежутков $[0, 1)$ и $(1, 2]$. Поскольку $f(1-0) = f(1) = f(1+0) = 4$, функция f непрерывна в точке $x_0 = 1$ и, значит, непрерывна на отрезке $[0, 2]$.

Тогда $f'(x) = \begin{cases} -4x, & \text{если } x \in [0, 1), \\ -\dfrac{4}{x^2}, & \text{если } x \in (1, 2]. \end{cases}$

Используя определения односторонних производных, получаем $f'_{\text{л}}(1) = f'_{\text{п}}(1) = -4$. Тогда $f'(1) = -4$. Значит, функция f дифференцируема на $(0, 2)$. Тогда по теореме Лагранжа существует точка $c \in (0, 2)$ такая, что $f(2) - f(0) = f'(c) \cdot (2 - 0)$, то есть $f'(c) = -2$. Учитывая формулы производных функций f на каждом из указанных промежутков, получаем уравнения $-4c = -2$ при $c \in (0, 1)$ и $-\dfrac{4}{c^2} = -2$ при $c \in (1, 2)$, решения которых $c_1 = 0{,}5$ и $c_2 = \sqrt{2}$ соответственно. Итак, получили две точки: c_1 и c_2.

Ответ: $c_1 = 0{,}5$; $c_2 = \sqrt{2}$.

Замечания. **1.** Формула (1) называется ***формулой Лагранжа***, или ***формулой конечных приращений***.

2. Аналогично теореме Ролля, точка c не всегда является единственной для заданной функции.

3. Теорема Лагранжа является обобщением теоремы Ролля.

Действительно, если теорему Лагранжа дополнить еще условием $f(a) = f(b)$, тогда из формулы (1) следует, что $f'(c) = 0$, то есть получаем заключение теоремы Ролля.

4. Следствие из теоремы Лагранжа относительно монотонности функции будет рассмотрено в модуле 5 (теорема 2, § 1, раздел 1.1).

Следствия из теоремы Лагранжа

1. Если функция $f\colon I \to \mathbb{R}$ дифференцируема и $f'(x) = 0$, $\forall x \in I$, то функция f постоянна на интервале I.

2. Если функции $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ дифференцируемы на интервале I и $f' = g'$, то функция $g - f$ постоянна на интервале I.

3. Пусть функция f определена в окрестности V точки x_0, дифференцируема на $V \setminus \{x_0\}$ и непрерывна в точке x_0. Если существует $\lambda = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x_0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, то существует $f'(x_0)$ и $f'(x_0) = \lambda$.

Замечание. Следствие **3** представляет собой достаточное условие дифференцируемости функции f в точке x_0. Однако это условие не является и необходимым.

Например, функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\dfrac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$ непрерывна и дифференцируема в $x_0 = 0$, но $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ не существует.

6.4. Правила Лопиталя

Гийом Лопиталь

Некоторые пределы функций могут быть вычислены при помощи производных. Применение следующих двух теорем, названных ***правилами Лопиталя***[1], дает возможность вычислить пределы вида $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, при условии, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ или, что эти пределы бесконечны.

6.4.1. Правило Лопиталя для неопределенности вида $\frac{0}{0}$

Теорема 24. Пусть I – интервал ($I\subseteq\mathbb{R}$), $x_0\in I$ и $f, g\colon I\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}$ – две функции. Если: 1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$,

2) функции f и g дифференцируемы на множестве $I\setminus\{x_0\}$,

3) $g'(x)\neq 0,\ \forall x\in V(x_0)\cap I$,

4) существует предел (конечный или бесконечный) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$,

то существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ и $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$.

6.4.2. Правило Лопиталя для неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$

Теорема 25. Пусть I – интервал, $x_0\in I$ и $f, g\colon I\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}$ – две функции. Если

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$,

2) функции f и g дифференцируемы на множестве $I\setminus\{x_0\}$,

3) $g'(x)\neq 0,\ \forall x\in V(x_0)\cap I$,

4) существует предел (конечный или бесконечный) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$,

то существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ и $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$.

Замечания. **1.** Теоремы 24 и 25 верны и для односторонних пределов в указанной точке.

2. Правила Лопиталя верны и при $x\to\infty$.

3. Теоремы 24 и 25 представляют собой *достаточные условия* раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

4. Если и $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, и $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ содержат неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ и если $f,\ g,\ f',\ g'$, а также оба указанных предела удовлетворяют условиям соответствующего правила Лопиталя, то $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}$. В этом случае будем говорить, что *было применено дважды последовательно правило Лопиталя*.

[1] Гийом Лопиталь (1661–1704) – французский математик.

Задание с решением

Вычислим: а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x}{e^x}$.

Решение:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin 3x)'}{(2x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\cos 3x}{2}=\dfrac{3}{2}$.

б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x}{e^x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(2x)'}{(e^x)'}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2}{e^x}=0$.

Замечание. При необходимости, если это возможно, правило Лопиталя применяется последовательно три или более раз.

6.4.3. Неопределенности вида $0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 1^\infty,\ \infty^0,\ 0^0$

Неопределенности вида $0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 1^\infty,\ \infty^0,\ 0^0$ можно свести к неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$ при помощи методов, предложенных в модуле 2.

Задания с решением

1. Вычислим: а) $\lim\limits_{x\to +0}(x^2\cdot\ln x)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}-\dfrac{1}{x}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to +0}x^x$; г) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{2x}$.

Решение:

а) Имеем неопределенность вида $0\cdot\infty$. Преобразуем $x^2\cdot\ln x=\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}$.

Тогда $f(x)=\ln x$, $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$, и $f,g\colon(0,\ +\infty)\to\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to +0}\ln x=-\infty$, $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$.

Функции f и g дифференцируемые: $f'(x)=\dfrac{1}{x}\neq 0$ и $g'(x)=-\dfrac{2}{x^3}\neq 0$, $\forall x\in(0,\ +\infty)$.

Тогда $\lim\limits_{x\to +0}(x^2\ln x)=\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}=\lim\limits_{x\to +0}\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)=0$.

Ответ: $\lim\limits_{x\to +0}(x^2\cdot\ln x)=0$.

б) Имеем неопределенность вида $\infty-\infty$. Поскольку $\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-\operatorname{tg} x}{x\operatorname{tg} x}$, получаем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{tg} x}-\frac{1}{x}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\operatorname{tg} x)'}{(x\operatorname{tg} x)'}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\frac{1}{\cos^2 x}\right)}{\operatorname{tg} x+\frac{x}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{\cos^2 x\operatorname{tg} x+x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{\cos x\cdot\sin x+x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{\frac{1}{2}\sin 2x+x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos^2 x-1)'}{\left(\frac{1}{2}\sin 2x+x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cos x\sin x}{\cos 2x+1}=0.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}-\dfrac{1}{x}\right)=0$.

Замечание. В ходе решения примера б) мы дважды применили правило Лопиталя, так как после первого применения мы снова получили неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$.

в) Имеем неопределенность вида 0^0. Пусть $f(x)=x^x$.

Тогда $\ln f(x)=x\cdot\ln x,\quad f(x)=e^{x\ln x}$.

Так как $\lim\limits_{x\to+0}(x\ln x)=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0$, то

$$\lim_{x\to+0}x^x=\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}e^{x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to+0}(x\ln x)}=e^0=1.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to+0}x^x=1$.

г) Имеем неопределенность вида 1^∞.

Пусть $f\colon D\to\mathbb{R},\ f(x)=\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{2x}$, тогда $\ln f(x)=2x\cdot\ln\dfrac{x-1}{x+1}$.

Следовательно, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\frac{x-1}{x+1}}{\frac{1}{2x}}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{2}{x^2-1}}{-\frac{1}{2x^2}}=-4$.

Ответ: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{2x}=e^{-4}$.

Упражнение г) можно решить и применяя формулу $u^v=e^{v\ln u}$.

Замечание. Правила Лопиталя применимы и при вычислении некоторых пределов последовательностей.

2. Вычислим $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$.

Решение:

Рассмотрим функцию $f\colon\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R},\ f(x)=x^{\frac{1}{x}}$, и найдем $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

Имеем неопределенность вида ∞^0.

При логарифмировании $f(x)$ неопределенность принимает вид $\dfrac{\infty}{\infty}$:

$\ln f(x)=\dfrac{1}{x}\ln x$, а $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

Следовательно, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{\ln n}{n}}=e^0=1$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

3. Вычислим $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^2}$.

Решение:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}=0.$$

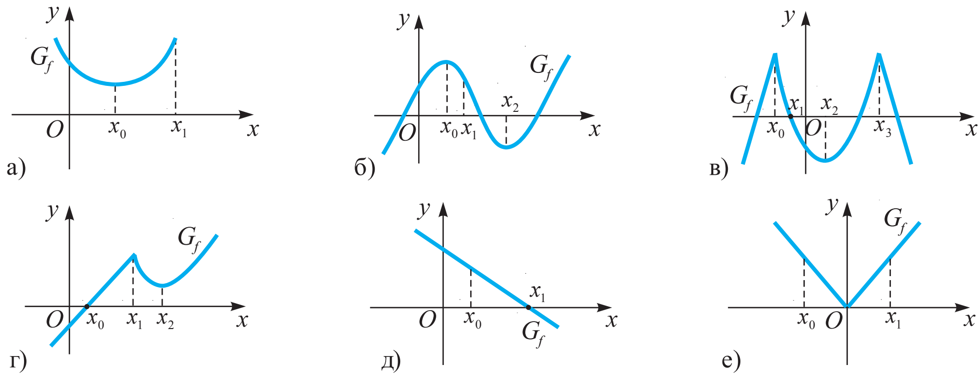
Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^2}=0$.

Замечание. При вычислении пределов функций рекомендуется сочетать применение элементарных (обычных) методов вычисления с правилами Лопиталя.

Упражнения и задачи

А

1. Определите, в каких из указанных точках выполнены условия теоремы Ферма для функции f, заданной графически:



2. Дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = 2x^2 - x + 3$; б) $f(x) = -x^2 + 2x - 3$.

1) Решите уравнение $f'(x) = 0$ и определите, выполняются ли условия теоремы Ферма в точке x_0, где x_0 – решение данного уравнения.

2) Постройте график функции f и представьте геометрически теорему Ферма в точке x_0.

3. Определите, выполняются ли в точке $x_0 = 1$ условия теоремы Ферма для функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = (x-1)^2$; б) $f(x) = (x-1)^3$.

4. Начертите график функции, чтобы в точках $x_0 = -1$, $x_1 = 2$ выполнялись условия теоремы Ферма.

Б

5. Приведите примеры функций, для которых конечное количество точек соответствующего интервала являются точками локального экстремума, но в этих точках не выполняются условия теоремы Ферма.

6. Примените теорему Ролля к функции f и найдите соответствующую точку c:

а) $f: [-1, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)(x-3)$; б) $f: [0, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x-2|$;

в) $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^2 x$; г) $f: [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos^2 x$.

7. Дана функция $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x - 1, \text{ если } x \in [-1, 0), \\ x^2 - bx + d, \text{ если } x \in [0, 1]. \end{cases}$

а) Найдите действительные параметры a, b, d, при которых функция f удовлетворяет условиям теоремы Ролля на отрезке $[-1, 1]$.

б) Примените теорему Ролля к функции f, полученной в п.а), и найдите соответствующую точку c.

8. Дана функция:

а) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$; б) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = (x^2 - 9)(x^2 - 16)$.

Докажите, что производная функции имеет только действительные нули.

9. Докажите, что уравнение $2^x(1+x\ln 2)-20x^9=0$ имеет хотя бы одно решение на интервале (0, 1).

10. Пусть $f\colon [0, 2\pi]\to\mathbb{R},\ f(x)=x\sin x-\cos x-1$. Докажите, что существует хотя бы одна точка $c\in(0, 2\pi)$, при которой $f''(c)=0$.

11. Примените теорему Лагранжа к функции f и найдите соответствующую точку c:

а) $f\colon [-3, 2]\to\mathbb{R},\ f(x)=3x^2-x+2$; б) $f\colon [1, 3]\to\mathbb{R},\ f(x)=x\ln x$;

в) $f\colon [0, 3]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}2x^2, & \text{если } x\in[0, 2],\\ 5x-2, & \text{если } x\in(2, 3];\end{cases}$ г) $f\colon [-1, 4]\to\mathbb{R},\ f(x)=x+e^x$.

12. Приведите пример функции $f\colon [0, 8]\to\mathbb{R}$, удовлетворяющей условиям теоремы Лагранжа, для которой промежуточная точка $c\in(0, 8)$ не единственная.

13. Дана функция $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}2x^3+x, & \text{если } x\le 1,\\ 4\ln x+3x, & \text{если } x>1.\end{cases}$ Найдите $f'(1)$.

14. Используя правила Лопиталя, вычислите предел:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^3-2x}{x^3-2x^2+x}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+1}}{3x^2+3x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{2x^2-x}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(2x-1)}{x^3-x}$;

д) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^n}{e^x},\ n\in\mathbb{N}^*$; е) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x^n},\ n\in\mathbb{N}^*$; ж) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)^{\frac{1}{2x}}$; з) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1+\cos x}{\sin 2x}$.

15. Используя соответствующее правило Лопиталя, вычислите предел последовательности:

а) $\lim\limits_{n\to +\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$; б) $\lim\limits_{n\to +\infty}\dfrac{\ln^3 n}{\sqrt[50]{n}}$; в) $\lim\limits_{n\to +\infty}\dfrac{n^3}{1{,}01^n}$.

16. Составьте и решите упражнения, аналогичные упражнениям **6**, **7**, **11**, **14**.

Упражнения и задачи на повторение

A

В заданиях 1, 2 определите букву, соответствующую верному варианту.

1. Производной функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x^3-x^2+3$, является

A $f'(x)=2x^2-2x$. **B** $f'(x)=6x^2-2x$.

C $f'(x)=6x^2-2x+3$. **D** $f'(x)=3x^2-2x$.

2. Дана функция $f\colon D\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{2x-2}$. Тогда

A $f'(1)=0$. **B** $f'(1)=2$. **C** $f'(1)=\dfrac{1}{2}$. **D** $f'(1)$ не существует.

3. Даны функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2$, и $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=x^3+x^2+1$.

а) Найдите значение истинности высказывания „$D_{f'}\subseteq D_{g'}$”.

б) Запишите уравнение касательной к графику G_f в точке $x_0=1$.

в) Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $f'(x)<g'(x)$.

г) Постройте в одной системе координат графики функций f' и g'.

д) Найдите координаты точек пересечения графиков функций f' и g'.

4. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $f'(x)=0$, где f – функция, заданная формулой:

а) $f(x)=x^3-2x^2$; б) $f(x)=2x\ln x$; в) $f(x)=(x-1)e^x$.

5. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $f'(x) \geq 0$, где f – функция, заданная формулой $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

6. Из одного пункта одновременно отправляются две материальные точки: первая точка с начальной скоростью 8 м/с и ускорением 4 м/с^2, а вторая точка – с равномерным движением со скоростью 16 м/с.

а) Определите моменты времени, когда материальные точки встретятся, если известно, что $x(t) = v_0 t + \dfrac{at^2}{2}$ – уравнение равномерного ускоренного движения, а $x(t) = vt$ – уравнение равномерного движения.

б) Найдите момент времени t, в котором скорость первой точки будет в два раза больше скорости второй точки.

Б

7. Найдите дифференциал функции f, заданной формулой:

а) $f(x) = \cos(\sin x)$; б) $f(x) = \sin(\cos x)$; в) $f(x) = \ln(\ln x)$.

8. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $f'(x) = 0$, где f – функция, заданная формулой:

а) $f(x) = \sin x + \cos x$; б) $f(x) = \sqrt{2}\sin x - \sqrt{2}\cos x$; в) $f(x) = e^{3x} + e^{-3x}$.

9. а) Вычислите односторонние производные функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ в указанных точках:

1) $f(x) = x^2 + x \cdot |x|,\ x_0 = 0$; 2) $f(x) = x + |x - 3|,\ x_0 = 3$; 3) $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0, \end{cases}$ $x_0 = 0$.

б) Постройте график каждой из функций f.

10. Дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^{|x-3|}$.

а) Докажите, что функция f непрерывна в точке $x_0 = 3$, но не дифференцируема в этой точке.

б) Постройте график функции f.

11. Дана функция многочлен $P: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Докажите, что если все корни многочлена P действительны и различные, то P' имеет это же свойство.

12. Исследуйте на непрерывность и дифференцируемость функцию $f: [1, +\infty) \to \mathbb{R}$,
$f(x) = \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}}$.

13. Докажите, что хотя $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - \sin x}{x + \cos x}$ существует, нельзя применить правила Лопиталя для его вычисления.

14. Проверьте, справедлива ли формула Лагранжа для функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x - x^2$, на отрезке $[0, 1]$ и найдите соответствующую точку c.

15. Проверьте, удовлетворяет ли функция $f: D \to \mathbb{R}$ условиям теоремы Ролля на указанном отрезке:

а) $f(x) = \cos^2 x,\ \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$; б) $f(x) = \sin^2 x,\ [0, \pi]$;

в) $f(x) = (x-3)(x-4)(x-5),\ [3, 5]$.

16. Пользуясь правилами Лопиталя, вычислите предел $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(1 + e^{2x})}{\ln(1 + e^{3x})}$.

Проверочная работа

Время выполнения работы: 45 минут

А

1. Даны функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + 1$; $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 3 + x - x^2$. ②

а) Поставьте один из знаков <, =, >, чтобы получить истинное высказывание:

$$„f'(-1) \; \square \; g'(0)”.$$

б) Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $f'(x) \geq g'(x)$.

в) Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $f'(x) + f(x) = g'(x)$.

2. Дана функция $f: D_f \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - \ln 2x$. ②

а) Заполните рамку, чтобы получить истинное высказывание: „$D_f = \square$”.

б) Найдите значение истинности высказывания:

$$„D_f = D_{f'}”.$$

в) Запишите уравнение касательной к графику функции f в точке с абсциссой $x_0 = \frac{1}{2}$.

3. Найдите производную функции $f: D \to \mathbb{R}$: ③

а) $f(x) = x^2 \cdot 5^{3x}$; б) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-5}}{x+5}$.

4. Материальная точка движется прямолинейно согласно закону $s(t) = 3t^2 + 9\ln t + 18$ (s – расстояние, измеряемое в метрах, и t – время, измеряемое в секундах). Определите момент времени t, когда ускорение равно 2 см/с^2. ③

Время выполнения работы: 90 минут

Б

1. Даны функции $f: D_f \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg}\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right)$; $g: D_g \to \mathbb{R}$, $g(x) = 6x + 1$. ①

а) Найдите значение истинности высказывания:

$$„D_{f'} \subset D_{g'}”.$$

б) Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $f'(x) = g'(x)$.

в) Запишите уравнение касательной к графику функции f в точке с абсциссой $x_0 = \pi$.

2. Дана функция $f: D_f \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log^2_{0,2} 6x$. ①

а) Заполните рамку, чтобы получить истинное высказывание: „$D_f = \square$”.

б) Найдите дифференциал функции f. в) Найдите f''.

3. Дана функция $f: D_f \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4\cos^2\left(\dfrac{x}{2} + 5\right) - \sqrt{3}x$. Решите на множестве $\mathbb{R}$: ②

а) уравнение $f'(x) = 0$; б) неравенства $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$.

4. Пользуясь правилами Лопиталя, вычислите предел $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$. ②

5. Дана функция $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + d, & \text{если } x \in [-1, 0], \\ 1 + \ln(x^2 + 1), & \text{если } x \in (0, 1]. \end{cases}$ ②

а) Найдите $a, b, d \in \mathbb{R}$, при которых функция f удовлетворяет условиям теоремы Ролля.

б) Примените терему Ролля к функции f, полученной в п. а).

6. Материальная точка движется прямолинейно согласно закону ②

$s(t) = \dfrac{t^3}{\ln 3} + 6\log_3 t + 20t$ (s – расстояние, измеряемое в сантиметрах, и t – время, измеряемое в секундах). Определите момент времени t, когда ускорение равно 0 см/с^2.

Производная и дифференциал функции

Односторонние производные

$$f'_{л}(x_0)=\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$f'_{п}(x_0)=\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Поизводная функции

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{или} \quad f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Дифференциал функции

$$\mathrm{d}f(x)=f'(x)\mathrm{d}x$$

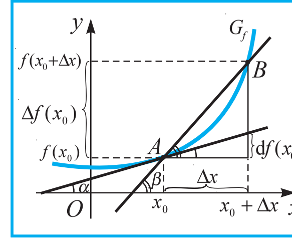
Правила вычисления производных

1. $(f+g)'=f'+g'$
2. $(c\cdot f)'=c\cdot f'$
3. $(f-g)'=f'-g'$
4. $(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$
5. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$
6. Производная сложной функции: $(g\circ f)'(x)=(g(f(x)))'=$ $=g'(f(x))\cdot f'(x)$
7. Производная обратной функции: $(f^{-1})'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$
8. Производная высших порядков: $f''=(f')'$; $f^{(n)}=(f^{(n-1)})'$

Таблица производных и дифференциалов элементарных функций

f	D_f	f'	$D_{f'}$	$\mathrm{d}f$
1. c (постоянная)	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$	0
2. $x^n,\ n\in\mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$n\cdot x^{n-1}$	$\mathbb{R}$	$n\cdot x^{n-1}\mathrm{d}x$
3. $x^\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}^*$	$(0,\ +\infty)$	$\alpha\cdot x^{\alpha-1}$	$(0,\ +\infty)$	$\alpha\cdot x^{\alpha-1}\mathrm{d}x$
4. $\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$-\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x$
5. $\sqrt[2n]{x},\ n\in\mathbb{N}^*$	$[0,\ +\infty)$	$\dfrac{1}{2n\cdot\sqrt[2n]{x^{2n-1}}}$	$(0,\ +\infty)$	$\dfrac{1}{2n\cdot\sqrt[2n]{x^{2n-1}}}\mathrm{d}x$
6. $\sqrt[2n+1]{x},\ n\in\mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{(2n+1)\cdot\sqrt[2n+1]{x^{2n}}}$	$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{(2n+1)\cdot\sqrt[2n+1]{x^{2n}}}\mathrm{d}x$
7. $\sqrt{x}$	$[0,\ +\infty)$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(0,\ +\infty)$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$
8. $a^x,\ a>0,\ a\neq 1$	$\mathbb{R}$	$a^x\cdot\ln a$	$\mathbb{R}$	$a^x\ln a\,\mathrm{d}x$
9.	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$	$e^x\mathrm{d}x$
10. $\ln x$	$(0,\ +\infty)$	$\dfrac{1}{x}$	$(0,\ +\infty)$	$\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$
11. $\log_a x,\ a>0,\ a\neq 1$	$(0,\ +\infty)$	$\dfrac{1}{x\ln a}$	$(0,\ +\infty)$	$\dfrac{1}{x\ln a}\mathrm{d}x$
12. $\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\cos x\,\mathrm{d}x$
13. $\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x\,\mathrm{d}x$
14. $\mathrm{tg}\,x$	$\mathbb{R}\setminus\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\}$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R}\setminus\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\}$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$
15. $\mathrm{ctg}\,x$	$\mathbb{R}\setminus\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\mathbb{R}\setminus\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$
16. $\arcsin x$	$[-1,\ 1]$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,\ 1)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$
17. $\arccos x$	$[-1,\ 1]$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,\ 1)$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$
18. $\mathrm{arctg}\,x$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{x^2+1}$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x$
19. $\mathrm{arcctg}\,x$	$\mathbb{R}$	$-\dfrac{1}{x^2+1}$	$\mathbb{R}$	$-\dfrac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x$

Геометрический смысл производной и дифференциала функции



Правила вычисления дифференциалов

1. $\mathrm{d}(f+g)=\mathrm{d}f+\mathrm{d}g$
2. $\mathrm{d}(c\cdot f)=c\cdot\mathrm{d}f$
3. $\mathrm{d}(f-g)=\mathrm{d}f-\mathrm{d}g$
4. $\mathrm{d}(f\cdot g)=g\cdot\mathrm{d}f+f\cdot\mathrm{d}g$
5. $\mathrm{d}\left(\dfrac{f}{g}\right)=\dfrac{g\cdot\mathrm{d}f-f\cdot\mathrm{d}g}{g^2}$
6. $\mathrm{d}f(g)=f'(g)\mathrm{d}g$

Некоторые приложения производных

1. Уравнение касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0: $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$
2. Применение в приближенных вычислениях
3. Нахождение биномиальных коэффициентов
4. Вычисление некоторых пределов (правила Лопиталя)
5. Исследование функций

Общие свойства дифференцируемых функций

1° Теорема Ферма
2° Теорема Ролля
3° Теорема Лагранжа

Модуль

5 Приложения производной

Цели

- применение производной для нахождения промежутков монотонности и экстремумов функции;
- распознавание и применение в различных контекстах понятий: *критические точки, точки экстремума, экстремумы функции*;
- *нахождение при помощи производной точек перегиба, интервалов выпуклости графика функции;
- *распознавание и определение асимптот графика изученной элементарной функции, или функции, заданной графически;
- *использование понятия *предел функции* при нахождении *асимптот графика функции*;
- применение методов, использующих производную, как качественно новых в исследовании функции, а также при решении теоретических и практических задач;
- приложение производных при решении задач на максимум и минимум из геометрии, физики, экономики.

В данном модуле рассмотрим приложения производных первого и *второго порядков при исследовании поведения функций, а также при решении различных задач из геометрии, физики и других областей, задач, которые в большинстве случаев не могут быть решены элементарными методами.

§1 Роль первой производной в исследовании функций

1.1. Промежутки монотонности функции

При исследовании поведения функции важно знать, при каких условиях функция постоянна или монотонна на заданном промежутке. Ранее было установлено, что производная постоянной функции на заданном промежутке равна нулю. Полезным будет и обратное утверждение.

Теорема 1. Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}$ $(E \subseteq \mathbb{R})$ – дифференцируемая функция. Если производная функции f равна нулю на каком-то интервале $I \subseteq E$, то функция f постоянна на этом интервале.

Доказательство

Пусть $f'(x) = 0,\ \forall x \in I$. Фиксируем на интервале I точку x_0 и пусть $x \in I,\ \ x \neq x_0$. На отрезке $[x_0, x]$ (или $[x, x_0]$) функция f удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа (см. модуль 4, §6, п. 6.3). Согласно этой теореме, существует такая точка c, расположенная между x_0 и x, что $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$. Так как $f'(c) = 0$, то из условия следует, что $f(x) = f(x_0)$. Следовательно, в любой точке $x \in I$ функция f принимает значение $f(x_0)$, то есть функция f постоянна на интервале I. ►

Следствие. Если f и g – дифференцируемые функции и $f'=g'$ на интервале I, то функции f и g отличаются на этом интервале на постоянную: $f(x)=g(x)+C$, $\forall x\in I,\ C\in\mathbb{R}$.

Доказательство

Рассмотрим функцию $\varphi=f-g$. Тогда $\varphi'(x)=f'(x)-g'(x)=0,\ \forall x\in I$. Значит, функция φ постоянна на интервале I и следовательно, $f(x)=g(x)+C,\ \forall x\in I,\ C\in\mathbb{R}$. ►

Задание с решением

Найдем интервалы, на которых функции f и g отличаются на постоянную, и найдем эту постоянную:

а) $f, g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos 2x,\ g(x)=\cos^2 x-\sin^2 x+1$;

б) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\operatorname{arctg} x;\ \ g\colon \mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}\to\mathbb{R},\ g(x)=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}$.

Решение:

а) $f'(x)=-2\sin 2x$ и $g'(x)=-2\cos x\sin x-2\sin x\cos x=-2\sin 2x$. Значит, функция f отличается от функции g на постоянную: $f(x)=g(x)+C$. Так как $f(0)=1$ и $g(0)=2$, то $C=-1$, и тогда $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x,\ \forall x\in\mathbb{R}$

б) На каждом из интервалов $I_1=(-\infty, -1)$, $I_2=(-1, 1)$ и $I_3=(1, +\infty)$, производные функций f и g равны между собой: $f'(x)=g'(x)=\frac{1}{1+x^2}$. Значит, на каждом из этих интервалов данные функции отличаются на постоянную: $f(x)-g(x)=C_1,\ \forall x\in I_1$; $f(x)-g(x)=C_2,\ \forall x\in I_2$; $f(x)-g(x)=C_3,\ \forall x\in I_3$. Для интервала I_2 получим $C_2=0$ (при $x=0$), а для интервалов I_1 и I_3 соответственно имеем $C_1=-\frac{\pi}{2}$ и $C_3=\frac{\pi}{2}$, если, например, x стремится к $-\infty$ и соответственно к $+\infty$.

Таким образом, мы получили: $\operatorname{arctg} x=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}-\frac{\pi}{2},\ \forall x\in(-\infty, -1)$;

$\operatorname{arctg} x=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2},\ \forall x\in(-1, 1)$; $\operatorname{arctg} x=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}+\frac{\pi}{2},\ \forall x\in(1, +\infty)$.

Полученные соотношения могут быть доказаны и элементарными методами, без применения понятия производной.

Замечание. На основании примера б) делаем вывод: из того, что функция f определена на объединении двух (или более) непересекающихся интервалов $I_1, I_2,\ I_1\cap I_2=\varnothing$, и $f'(x)=0,\ \forall x\in I_1\cup I_2$, еще не следует, что она постоянна на множестве $I_1\cup I_2$.

Например, значение производной функции $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}-1, & \text{если } x\in(-\infty, 0),\\ 1, & \text{если } x\in(0, +\infty),\end{cases}$ в любой точке множества $A=(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$, равно нулю, однако функция f не является постоянной на этом множестве.

Теперь установим *важный и эффективный критерий нахождения промежутков монотонности дифференцируемой функции.*

Теорема 2. Пусть функция $f\colon I\to\mathbb{R}$ дифференцируема на интервале I. Функция f возрастает (убывает) на интервале I тогда и только тогда, когда $f'(x)\ge 0$ ($f'(x)\le 0$), $\forall x\in I$.

Доказательство

Необходимость. Предположим, что функция f возрастает на интервале I. Тогда $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0,\ \forall x, x_0\in I,\ x\neq x_0$. Фиксируем $x_0\in I$, затем вычисляем предел этого отношения при $x\to x_0$ и получаем, что $f'(x_0)\geq 0,\ \forall x_0\in I$.

Аналогичные рассуждения проводятся и в случае, когда функция f убывает на интервале I.

Достаточность. Рассмотрим произвольные точки $x_1, x_2\in I,\ x_1<x_2$, и пусть $f'(x)\geq 0$ на интервале I. Применив теорему Лагранжа к функции f на отрезке $[x_1, x_2]$, получим $f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)$, где $c\in(x_1, x_2)$ и $f'(c)\geq 0$. Так как $x_2-x_1>0$, то $f(x_2)-f(x_1)\geq 0$, то есть $f(x_2)\geq f(x_1)$. Значит, функция f возрастает на интервале I.

Аналогично, если $f'(x)\leq 0,\ \forall x\in I$, то функция f убывает на интервале I. ►

Замечания. **1.** Если $f'(x)>0,\ \forall x\in I$, то функция f строго возрастает на интервале I.

2. Если $f'(x)<0,\ \forall x\in I$, то функция f строго убывает на интервале I.

3. Из того, что функция f строго возрастает (строго убывает) на интервале I, не следует, что f' не обращается в нуль ни в одной точке интервала I. Например, функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3$, строго возрастает на множестве $\mathbb{R}$, однако $f'(0)=0$.

Вывод. Дифференцируемая функция строго монотонна на интервалах, на которых ее производная знакопостоянна. Следовательно, чтобы найти промежутки монотонности дифференцируемой функции, надо найти промежутки знакопостоянства ее производной.

Примеры

1. Функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3+2x$, строго возрастает на множестве $\mathbb{R}$, так как $f'(x)=3x^2+2>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

2. Функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-x+1$, строго убывает на интервале $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ и строго возрастает на интервале $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$, поскольку $f'(x)=2x-1<0,\ \forall x\in\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ и $f'(x)>0,\ \forall x\in\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

1.2. Точки экстремума функции

Вспомним!

Определения. Пусть $f: I\to\mathbb{R}\ (I\subseteq\mathbb{R})$ – некоторая функция.

• Точка $x_0\in I$ называется **точкой локального максимума** функции f, если существует такая окрестность $V(x_0)$ точки x_0, что $f(x)\leq f(x_0),\ \forall x\in V(x_0)\cap I$. В этом случае значение $f(x_0)$ называется **локальным максимумом** функции f в точке x_0.

• Точка $x_0\in I$ называется **точкой локального минимума** функции f, если существует такая окрестность $V(x_0)$ точки x_0, что $f(x_0)\leq f(x)$, $\forall x\in V(x_0)\cap I$. В этом случае значение $f(x_0)$ называется **локальным минимумом** функции f в точке x_0.

• Точки локального максимума и локального минимума функции называются **точками локального экстремума** этой функции.

• Значения функции f в точках локального экстремума называются **локальными экстремумами** этой функции.

Определения. Пусть $f\colon I \to \mathbb{R}$ $(I \subseteq \mathbb{R})$ – некоторая функция.

• Точка $x_0 \in I$ называется **точкой глобального максимума** функции f, если $f(x) \le f(x_0)$, $\forall x \in I$, а значение $f(x_0)$ называется **глобальным максимумом** функции f на промежутке I.

• Точка $x_0 \in I$ называется **точкой глобального минимума** функции f, если $f(x_0) \le f(x)$, $\forall x \in I$, а значение $f(x_0)$ называется **глобальным минимумом** функции f на промежутке I.

• Точки глобального максимума и глобального минимума функции называются **точками глобального экстремума** этой функции.

• Значения функции f в точках глобального экстремума называются **глобальными экстремумами** этой функции.

Замечания. **1.** Точка локального максимума (минимума) может не быть точкой глобального максимума (минимума). Точка глобального максимума (минимума) также является и точкой локального максимума (минимума).

2. В некоторых случаях локальный минимум функции может быть больше, чем локальный максимум этой же функции.
Например, у функции $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ (рис. 5.1) в точке x_1 локальный минимум больше, чем ее локальный максимум в точке x_4.

3. Если функция $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то по теореме Вейерштрасса, функция f достигает на этом отрезке своих точных граней, $M = \sup\limits_{x\in[a,\,b]} f(x)$ и $m = \inf\limits_{x\in[a,\,b]} f(x)$, которые являются ее глобальными экстремумами, на отрезке $[a, b]$.

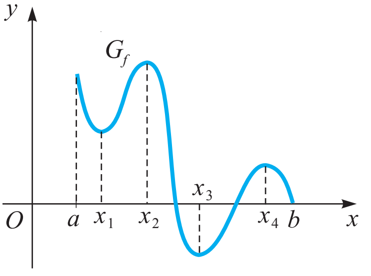


Рис. 5.1

Пусть функция $f\colon I \to \mathbb{R}$ дифференцируема на интервале I. Согласно теореме Ферма, если $x_0 \in I$ – точка локального экстремума функции f, то $f'(x_0) = 0$. Таким образом, из теоремы Ферма следует, что *производная функции обращается в нуль в любой точке локального экстремума на интервале I.*

Выводы. Пусть функция $f\colon I \to \mathbb{R}$ дифференцируема на интервале I и $f'(x_0) = 0$, $x_0 \in I$.

1. Если $f'(x) > 0$, $\forall x \in I$, $x < x_0$, и $f'(x) < 0$, $\forall x \in I$, $x > x_0$, то x_0 – точка локального максимума функции f. Обозначают: $\nearrow f(x_0) \searrow$. Знак $\nearrow$ ($\searrow$) означает, что функция монотонно возрастает (убывает) на соответствующем промежутке.
2. Если $f'(x) < 0$, $\forall x \in I$, $x < x_0$, и $f'(x) > 0$, $\forall x \in I, x > x_0$, то x_0 – точка локального минимума функции f. Обозначают: $\searrow f(x_0) \nearrow$.

3. Если знаки производной функции справа и слева от точки x_0 одинаковы, то x_0 не является точкой локального экстремума данной функции.

Определение. Пусть функция $f\colon I \to \mathbb{R}$ дифференцируема на интервале I. Точки, в которых f' равна нулю, называются **критическими точками** (или **стационарными**) функции f.

Замечание. Выводы 1–3 верны и в случае, когда функция f непрерывна в точке x_0, но не дифференцируема в этой точке. Такие точки также называются ***критическими точками*** (***стационарными***) функции f.

Например, функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, недифференцируема в точке $x_0 = 0$, однако 0 является точкой локального минимума этой функции.

В самом деле, $f'(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x \in (-\infty, 0), \\ 1, & \text{если } x \in (0, +\infty) \end{cases}$ и в точке $x_0 = 0$ производная меняет знак с „–” на „+”.

Промежутки монотонности, точки локального экстремума и локальные экстремумы функции, дифференцируемой на интервале или на объединении интервалов, можно найти по следующему *алгоритму*:

① Вычисляют производную f'.

② Решают уравнение $f'(x) = 0$; решения этого уравнения (нули функции f', а также точки, в которых функция f не дифференцируема) являются предполагаемыми точками локального экстремума функции f.

③ Определяют знак функции f' на интервалах, в которых она не обращается в нуль.

④ Находят промежутки знакопостоянства функции f', которые являются промежутками монотонности функции f.

⑤ Находят точки локального экстремума и локальные экстремумы функции f.

Задания с решением

1. Исследуем на монотонность функцию $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 + 2x^3 + x$.

Решение:

$f'(x) = 5x^4 + 6x^2 + 1$. Заметим, что производная функции f положительна для любого $x \in \mathbb{R}$. Следовательно, функция f строго возрастает на всей своей области определения $\mathbb{R}$.

2. Найдем промежутки монотонности функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 9x^2$.

Решение:

$f'(x) = 3x^2 + 18x = 3x(x+6)$. Критическими точками функции f являются -6 и 0.

Заметим, что:

- $f'(x) > 0$ на интервалах $(-\infty, -6)$, $(0, +\infty)$, значит, по замечанию 1 (п. 1.1), функция f строго возрастает на интервалах $(-\infty, -6]$, $[0, +\infty)$.
- $f'(x) < 0$ на интервале $(-6, 0)$, значит, функция f строго убывает на интервале $[-6, 0]$.

Результаты данного исследования можно представить в так называемой ***таблице поведения функции***. *В первой строке* этой таблицы указываются область определения функции и точки, в которых ее производная обращается в нуль или не существует. *Во второй строке* указываются знаки производной функции на промежутках, где она не обращается в нуль. *В последней строке* указываются возрастание ($\nearrow$), убывание ($\searrow$) функции, а также ее локальные экстремумы.

Составим таблицу поведения функции f:

x	$-\infty$		-6		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	108	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Итак, -6 – точка локального максимума функции f и $f(-6)=108$ – ее локальный максимум, а 0 – точка локального минимума функции f и $f(0)=0$ – ее локальный минимум.

3. Дана функция $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x$. Найдем промежутки монотонности, точки локального экстремума и локальные экстремумы функции f.

Решение:

$f'(x)=e^x-1=0 \Leftrightarrow x=0$. Производная функции не обращается в нуль на интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$. $f'(x)<0$ на интервале $(-\infty, 0)$ и $f'(x)>0$ на интервале $(0, +\infty)$. Значит, на интервале $(-\infty, 0]$ функция f строго убывает, а на интервале $[0, +\infty)$ функция f строго возрастает. Точка $x_0=0$ является точкой локального минимума функции f и $f(0)=e^0=1$ – ее локальный минимум.

Составим таблицу поведения функции f:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	1	$\nearrow$	

4. Исследуем на монотонность функцию $f\colon (0, +\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x-x$.

Решение:

$f'(x)=\dfrac{1}{x}-1=0 \Leftrightarrow x=1$. Производная функции f не обращается в нуль на интервалах $(0, 1)$ и $(1, +\infty)$, причем $f'(x)>0$, $\forall x\in(0,1)$, и $f'(x)<0$, $\forall x\in(1, +\infty)$.

В таблице приведена информация о поведении функции f:

x	0		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	-1	$\searrow$	

На интервале $(0, 1]$ функция f строго возрастает, а на интервале $[1, +\infty)$ – строго убывает. Значит, 1 – точка локального максимума функции f и $f(1)=-1$ – ее локальный максимум.

Замечание. Зная таблицу поведения функции, можно записать неравенство вида $f_1(x)\ge f_2(x)$, $x\in E$. Для этого необходимо исследовать поведение функции и знак функции $f\colon E\to\mathbb{R}$, $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$.

Задание с решением

Покажем, что для любого $x>-1$ верно неравенство $\ln(1+x)\le x$.

Решение:

Рассмотрим функцию f, заданную разностью выражений записанных по обе стороны неравенства: $f\colon (-1, +\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(1+x)-x$. Исследуем поведение этой функции, применив производную. Имеем $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1=\dfrac{-x}{1+x}$.

Составим таблицу поведения функции f:

x	-1		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	0	$\searrow$	

Так как максимума функция достигает в точке 0, то функция отрицательна на интервале $(-1, +\infty)$, то есть $\ln(1+x)-x \le 0$.

Таким образом, $\ln(1+x) \le x$ и равенство имеет место только при $x=0$.

1.3. Нахождение глобальных экстремумов

Пусть функция $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ дифференцируема на интервале (a, b) и непрерывна на отрезке $[a, b]$. По теореме Вейерштрасса, функция f достигает на отрезке $[a, b]$ своих точных граней, то есть существуют точки $x_1, x_2 \in [a, b]$ такие, что $f(x_1) = \inf\limits_{x\in[a, b]} f(x) = m$, $f(x_2) = \sup\limits_{x\in[a, b]} f(x) = M$. Если точка x_1 (x_2) расположена внутри отрезка $[a, b]$, то по теореме Ферма в этой точке функция f имеет локальный минимум (максимум) и значит, $f'(x_1)=0$ $(f'(x_2)=0)$. Однако точные грани m и M могут быть достигнуты функцией f и на концах отрезка $[a, b]$.

Например, функция $f\colon \left[0, \dfrac{3\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x)=\cos x$, достигает своего наибольшего значения, $M=1$, в точке 0.

Глобальные экстремумы непрерывной на отрезке функции $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, дифференцируемой на интервале (a, b), могут быть найдены по следующему *алгоритму*:

① Находят значения функции f на концах отрезка $[a, b]$, $f(a)$ и $f(b)$.

② Находят критические точки функции f, то есть находят решения уравнения $f'(x)=0$, $x \in (a, b)$.

③ Вычисляют значения функции f в найденных критических точках и сравнивают их с ее значениями на концах отрезка: наименьшее (наибольшее) из этих значений является глобальным минимумом (максимумом) функции f на отрезке $[a, b]$.

Задание с решением

Найдем на указанном отрезке локальные экстремумы и глобальные экстремумы функции $f\colon I \to \mathbb{R}$:

а) $f(x)=x^3+2x-10$, $I=[-1, 5]$; б) $f(x)=x^2-4x+6$, $I=[-3, 10]$.

Решение:

а) $f'(x)=3x^2+2>0$, $\forall x \in [-1, 5]$. Значит, функция f строго возрастает на отрезке $[-1, 5]$. При этом , $m=f(-1)=-13$, $M=f(5)=5^3+2\cdot 5-10=125$.

б) $f'(x)=2x-4$, $\forall x \in [-3, 10]$. Решаем уравнение $f'(x)=0$ и находим критические точки функции f: $2x-4=0 \Leftrightarrow x=2$. При $x_0=2$ функция f имеет локальный минимум, причем $f(2)=2$.

Тогда, $m=\min[f(-3), f(2), f(10)]=\min[27, 2, 66]=2$,

$M=\max[f(-3), f(2), f(10)]=\max[27, 2, 66]=66$ являются глобальными экстремумами функции f.

Замечание. Если дифференцируемая функция f определена на интервале $I=(a, b)$, конечном или бесконечном, то в предыдущем алгоритме значения $f(a)$ и $f(b)$ заменяют на $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$ соответственно. Вычисляют нижнюю и верхнюю грани $m=\inf\limits_{x\in I} f(x)$ и $M=\sup\limits_{x\in I} f(x)$, которые, вообще говоря, не достигаются функцией f.

Задание с решением

Найдем нижнюю и верхнюю грани функции:

а) $f\colon (-\infty, 0)\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x-x$; б) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+3}$.

Решение:

а) $f'(x)=e^x-1<0,\ \forall x\in(-\infty, 0)$. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

Следовательно, $m=\inf\limits_{x\in(-\infty,\,0)} f(x)=1$, $M=\sup\limits_{x\in(-\infty,\,0)} f(x)=+\infty$, и эти значения не достигаются функцией f.

б) $f'(x)=\dfrac{3-x^2-2x}{x^2+3}=0 \Leftrightarrow x=-3$ или $x=1$.

$f(-3)=-\dfrac{1}{6}$, $f(1)=\dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Значит, $m=\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=\min\left\{-\dfrac{1}{6},\ 0,\ \dfrac{1}{2}\right\}=-\dfrac{1}{6}$, $M=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=\max\left\{-\dfrac{1}{6},\ 0,\ \dfrac{1}{2}\right\}=\dfrac{1}{2}$, и эти значения достигаются функцией f.

Упражнения и задачи

А

1. Найдите промежутки монотонности, точки локального экстремума, локальные экстремумы и составьте таблицу поведения функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=x^3-3x$; б) $f(x)=x^4-3$; в) $f(x)=x^4-4x$;
г) $f(x)=x^3-12x$; д) $f(x)=(x-1)^3(2x+3)^2$; е) $f(x)=2+x-x^2$.

2. Найдите точки локального экстремума и локальные экстремумы функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=x^4-8x^2+12$; б) $f(x)=x^4-4x^3+6x^2-4x+5$; в) $f(x)=(x^3-10)(x+5)^2$;
г) $f(x)=x^3-6x$; д) $f(x)=(x-1)^2(x+2)$; е) $f(x)=2x^3+2x-5$.

3. Найдите на указанном промежутке глобальные экстремумы функции $f\colon I\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=x^3-6x^2+9,\ I=[-1, 2]$; б) $f(x)=x^3-x,\ I=[0, 5]$.

Б

4. Используя производную, покажите, что функции f и g отличаются друг от друга на постоянную, и найдите эту постоянную:

а) $f, g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin 2x,\ g(x)=1+2\sin x\cos x$;
б) $f, g\colon (-\infty, 1)\to\mathbb{R},\ f(x)=\operatorname{arctg} x,\ g(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{1-x}$;
в) $f, g\colon (-1, 1)\to\mathbb{R},\ f(x)=\arcsin x,\ g(x)=-\arccos x$.

5. Найдите промежутки монотонности, точки локального экстремума, локальные экстремумы и составьте таблицу поведения функции $f\colon D\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=x^5-5x^4+5x^3-1$; б) $f(x)=x^2\ln x$; в) $f(x)=e^{\frac{1}{(x-3)}}$;
г) $f(x)=\operatorname{arctg} x-\ln x$; д) $f(x)=\dfrac{x^3}{3-x^2}$; е) $f(x)=(x+1)\sqrt{x^2-1}$.

6. При каких значениях действительного параметра a функция $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ возрастает на множестве $\mathbb{R}$:

а) $f(x)=ax-\ln(1+x^2)$; б) $f(x)=\operatorname{arctg} ax+x$; в) $f(x)=ax-\sin x$?

7. Найдите точки локального экстремума и локальные экстремумы функции $f\colon D\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=\dfrac{(2-x)^3}{(3-x)^2}$; б) $f(x)=\sin^3 x+\cos^3 x$; в) $f(x)=x-2\operatorname{arctg} x$;

г) $f(x)=(x-1)e^{3x}$; д) $f(x)=x^4e^{-x^2}$; е) $f(x)=\dfrac{\ln^2 x}{x}$;

ж) $f(x)=|x-1|\sqrt[3]{x+2}$; з) $f(x)=\begin{cases} x, \text{ если } x\le 0\\ x\ln x, \text{ если } x>0;\end{cases}$ и) $f(x)=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$.

8. Найдите на указанном промежутке локальные экстремумы и глобальные экстремумы функции $f\colon I\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=x^4-8x^2+3$, $I=[-1,2]$; б) $f(x)=\sin x+\cos^2 x$, $I=[0,\pi]$;

в) $f(x)=x-2\ln x$, $I=(0,e]$.

9. Докажите неравенство:

а) $(1+x)^\alpha\ge 1+\alpha x$, $\forall x\ge -1$, $\forall\alpha>1$; б) $\ln(1+x)^2<x$, $\forall x>0$.

§2 Роль второй производной в исследовании функций. Асимптоты

Как уже было установлено, за поведение дифференцируемой функции „отвечает“ производная этой функции, а точнее нули и знаки производной. Однако тот факт, что функция f, например, строго возрастает на промежутке I, не является достаточным для того, чтобы установить вид ее графика. Например, функция $f(x)=\sqrt{x}$, определенная на промежутке $[0,+\infty)$, строго возрастает на этом промежутке, однако этой информации недостаточно для того, чтобы определить, имеет ли график функции f вид, указанный цветной кривой или черной кривой (рис. 5.2).

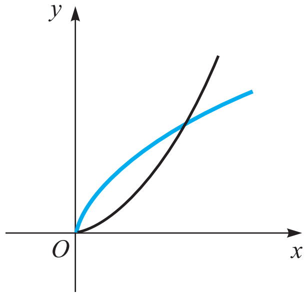


Рис. 5.2

Вид графика функции может быть определен при помощи второй производной.

2.1. Выпуклость графика функции

Пусть функция $f\colon I\to\mathbb{R}$ $(I\subseteq\mathbb{R})$ дифференцируема на интервале I. Предположим, что график расположен выше (рис. 5.3 а)) или ниже (рис. 5.3 б)) касательной, проведенной в любой точке этого графика.

В случае а) говорят, что график функции обращен *выпуклостью вниз*, а в случае б) – *выпуклостью вверх*.

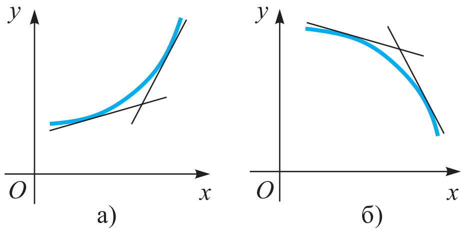


Рис. 5.3

Сформулируем строгое определение выпуклости вниз (выпуклости вверх) и покажем, что вторая производная, если она существует, дает точную информацию на этот счет.

Пусть функция $f\colon I \to \mathbb{R}$ дифференцируема на интервале I и $x_0 \in I$. Уравнение касательной к графику функции f в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ имеет вид:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Рассмотрим функцию $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$F(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
Графиком функции F является касательная M_0T (рис. 5.4).

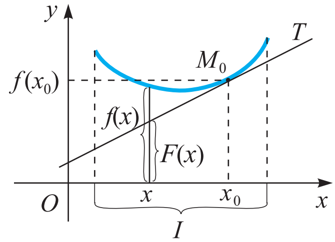


Рис. 5.4

Говорят, что ***график функции f расположен выше касательной*** M_0T, если

$$F(x) \le f(x) \quad \forall x \in I. \tag{1}$$

Говорят, что ***график функции f расположен ниже касательной*** M_0T, если

$$F(x) \ge f(x) \quad \forall x \in I. \tag{2}$$

Если неравенство (1) (неравенство (2)) строгое для любого $x \in I \setminus \{x_0\}$, говорят, что ***график функции f расположен строго выше*** (***строго ниже***) ***касательной*** M_0T.

Определения. • Функция $f\colon I \to \mathbb{R}$ $(I \subseteq \mathbb{R})$ называется **выпуклой вниз** (**строго выпуклой вниз**) на интервале I, если график функции f расположен выше (строго выше) любой своей касательной.

• Функция $f\colon I \to \mathbb{R}$ $(I \subseteq \mathbb{R})$ называется **выпуклой вверх** (**строго выпуклой вверх**) на интервале I, если график функции f расположен ниже (строго ниже) любой своей касательной.

• Говорят, что графиком функции f является кривая, обращенная **выпуклостью вниз** (**строго выпуклостью вниз**) или **выпуклостью вверх** (**строго выпуклостью вверх**) на некотором интервале, если функция f обладает соответствующим свойством на этом интервале.

***Замечания.* 1.** Определение выпуклости вниз графика функции может быть сформулировано и так: для любой хорды AB, абсциссы которой принадлежат интервалу I, дуга AB расположена под этой хордой (рис. 5.5).

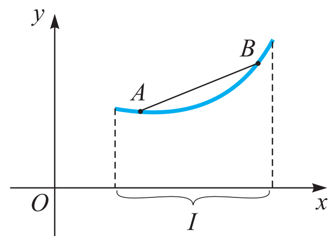


Рис. 5.5

2. Функция f выпукла вверх на интервале I тогда и только тогда, когда функция $-f$ выпукла вниз на I.

3. Говорят, что график выпуклой вниз функции „держит воду“ (рис. 5.6 а)), а график выпуклой вверх функции „не держит воду“ (рис. 5.6 б)).

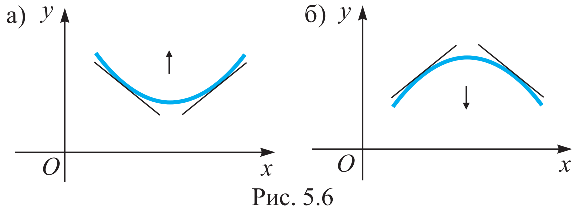


Рис. 5.6

Исследование выпуклости вверх/вниз на основании определения довольно сложно даже для элементарных функций. Для любой дважды дифференцируемой функции нахождение интервалов выпуклости вверх/вниз сводится к изучению интервалов знакопостоянства второй производной.

Теорема 3. Если функция $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ дважды дифференцируема на интервале (a, b) и $f''(x) \geq 0$ для любого $x \in (a, b)$, то функция f выпукла вниз на этом интервале.

Заменив f на $-f$ и применив замечание 2, получим следующее

Следствие. Пусть функция $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ дважды дифференцируема на интервале (a, b). Если $f''(x) \leq 0$ для любого $x \in (a, b)$, то функция f выпукла вверх на (a, b).

Замечание. Если $f''(x) > 0$ $(f''(x) < 0)$, $\forall x \in (a, b)$, то функция f строго выпукла вверх (строго выпукла вниз) на интервале (a, b).

Задание с решением

Найдем промежутки выпуклости функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$; б) $f(x) = x^3$.

Решение:

а) Функция f удовлетворяет условиям теоремы 3 и $f''(x) = 2a$. Следовательно, функция f строго выпукла вниз на множестве $\mathbb{R}$, если $a > 0$, и строго выпукла вверх на множестве $\mathbb{R}$, если $a < 0$.

б) $f''(x) = 6x$. Значит, функция f строго выпукла вверх на интервале $(-\infty, 0)$ и строго выпукла вниз на интервале $(0, +\infty)$.

2.2. Исследование графика функции на выпуклость. Точки перегиба

Пусть функция $f: I \to \mathbb{R}$ дифференцируема на интервале I и $x_0 \in I$ – критическая точка функции f, то есть $f'(x_0) = 0$. Ранее мы установили, что если функция f' имеет разные знаки слева и справа от точки x_0, то x_0 – точка локального экстремума функции f. Однако бывают случаи, когда сложно установить знак производной слева и справа от критических точек. Тогда применяют следующий *достаточный признак для экстремумов*, исключающий необходимость нахождения интервалов знакопостоянства функции f', при условии, что функция f дважды дифференцируема на интервале I.

Теорема 4. Если $x_0 \in (a, b)$ – критическая точка дважды дифференцируемой функции $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ на интервале (a, b) и если $f''(x_0) > 0$ $(f''(x_0) < 0)$, то x_0 является точкой локального минимума (локального максимума) функции f.

Задание с решением

Найдем точки локального экстремума и локальные экстремумы функции, заданной выражением $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$.

Решение:

Найдем призводные первого и второго порядков: $f'(x) = 3x^2 + 12x + 9$ и $f''(x) = 6x + 12$.

Функция f' обращается в нуль в точках $x_1 = -3$ и $x_2 = -1$. Так как $f''(-3) = -6 < 0$ и $f''(-1) = 6 > 0$, то по теореме 4 следует, что $x_1 = -3$ – точка локального максимума функции f и $f(-3) = 0$ – ее локальный максимум, а $x_2 = -1$ – точка локального минимума функции f и $f(-1) = -4$ – локальный минимум.

Если функция f дважды дифференцируема в окрестности точки x_0, в которой $f''(x_0) = 0$, и если слева от точки x_0 и справа от нее функция f'' имеет разные знаки, то функция f меняет свою выпуклость в этой точке. Например, если $f''(x) > 0$ для $x < x_0$ и $f''(x) < 0$ для $x > x_0$ (x принадлежит некоторой окрестности точки x_0), то функция f выпукла вниз слева от x_0 и выпукла вверх справа от x_0.

Определение. Пусть функция $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ дифференцируема на интервале (a, b). Точка $x_0 \in (a, b)$ называется **точкой перегиба функции** f, если существует окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ такая, что функция f выпукла вниз на интервале $(x_0 - \delta, x_0)$ и выпукла вверх на интервале $(x_0, x_0 + \delta)$, или наоборот (рис. 5.7).

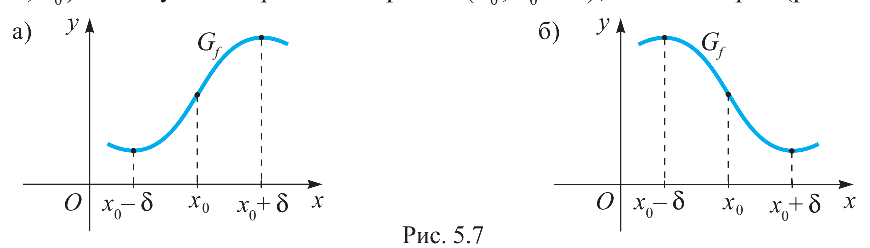


Рис. 5.7

Замечание. Если x_0 – точка перегиба функции f, то $M_0(x_0, f(x_0))$ называется **точкой перегиба графика** этой функции.

Теорема 5. Пусть функция $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ дважды дифференцируема в окрестности $V(x_0)$ точки $x_0 \in (a,b)$ и $f''(x_0) = 0$. Если $f''(x) < 0, \forall x \in V, \ x < x_0$, и $f''(x) > 0, \ \forall x \in V, \ x > x_0$, или наоборот (если $f''(x) > 0, \ \forall x \in V, \ x < x_0$, и $f''(x) < 0, \ \forall x \in V, \ x > x_0$), то x_0 является точкой перегиба функции f.

Заметим, что из условия $f''(x_0) = 0$ не следует, что x_0 является точкой перегиба функции f, так же как из условия $f'(x_0) = 0$ не следует, что x_0 – точка локального экстремума функции f.

Промежутки выпуклости и точки перегиба дважды дифференцируемой на интервале функции f могут быть найдены по следующему *алгоритму*:

① Определяют f'', а затем находят решения уравнения $f''(x) = 0$, которые могут быть точками перегиба функции f).

② Находят интервалы знакопостоянства функции f'', которые являются интервалами выпуклости функции f.

③ Определяют точки перегиба функции f.

Замечание. Если функция f'' в точке x_0 не существует или бесконечна, то эта точка также является возможной точкой перегиба функции f.

Задание с решением

Найдем локальные экстремумы, точки перегиба и интервалы выпуклости функции:

а) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ f(x) = x^3 - 3x^2 - 4;$

б) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ f(x) = (x^2 + 4x + 6)e^{-x};$

в) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ f(x) = x\,|\,x\,|.$

Решение:

а) Так как $f'(x) = 3x(x-2)$, то функция f имеет две критические точки: $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$. Зная, что $f''(x) = 6(x-1)$, получим: $f''(0) = -6 < 0$, $f''(2) = 6 > 0$. Значит, $x_1 = 0$ – точка локального максимума, а $x_2 = 2$ – точка локального минимума функции f. Интервалы знакопостоянства функции f'' указаны в таблице поведения функции f:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f''		–	0	+	
f		$\frown$		$\smile$	

Итак, функция f выпукла вверх на $(-\infty,\ 1)$ и выпукла вниз на $(1,\ +\infty)$, а 1 – точка перегиба.

б) $f'(x) = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ и $f''(x) = x^2 e^{-x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Уравнение $f'(x) = 0$ не имеет решений на множестве $\mathbb{R}$. Поскольку функция f' непрерывна на множестве $\mathbb{R}$ и $f'(0) = -2$, то $f'(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Значит, функция f строго убывает на множестве $\mathbb{R}$. Уравнение $f''(x) = 0$ имеет решение $x_1 = 0$. Точка 0 не является точкой перегиба функции f, так как $f''(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Значит, на множестве $\mathbb{R}$ график функции f обращен выпуклостью вниз.

в) $f'(x) = 2\,|\,x\,|$, $f'(x) > 0$, $\forall x \neq 0$, значит функция f строго возрастает. $f''(x) = -2$ при $x < 0$, $f''(x) = 2$ при $x > 0$ и f'' не существует в точке $x = 0$. Таким образом, функция f выпукла вверх на интервале $(-\infty,\ 0)$ и выпукла вниз на интервале $(0,\ +\infty)$, а точка $x = 0$ – точка перегиба.

2.3. Асимптоты

Пусть функция f определена на множестве E, которое является интервалом или объединением (конечным или бесконечным) интервалов. Если множество E неограничено или функция f неограничена, то ее графиком является неограниченное множество точек плоскости (то есть, не существует ни одного прямоугольника, который бы содержал полностью этот график). В этом случае говорят, что график функции f имеет *неограниченные ветви*.

Если одна из неограниченных ветвей графика функции f безгранично приближается к заданной прямой, то говорят, что эта прямая является *асимптотой графика функции* f. График функции может иметь *горизонтальные, наклонные, вертикальные* асимптоты.

2.3.1. Горизонтальные асимптоты

Рассмотрим функцию $f\colon E \to \mathbb{R}$, где множество E содержит интервал вида $(a,\ +\infty)$ или $+\infty$ является предельной точкой множества E. В этом случае, ветви графика функции f стремятся к бесконечности. Пусть l $(l \in \mathbb{R})$ – число, и рассмотрим прямую $y = l$ (параллельную оси Ox). Для любого числа $x \in (a,\ +\infty)$, обозначим через P (через Q соответственно) точку с абсциссой x, принадлежащую прямой $y = l$ (на графике функции f соответственно) (рис. 5.8).

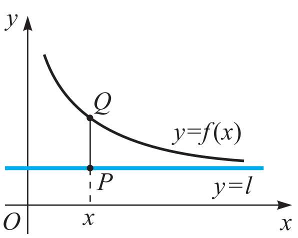


Рис. 5.8

Определение. Прямая $y=l$ называется **горизонтальной асимптотой** графика функции f (функции f) при $x\to+\infty$, если длина отрезка $PQ=|f(x)-l|$ стремится к нулю при $x\to+\infty$, то есть $\lim\limits_{x\to+\infty}|f(x)-l|=0$.

Это условие эквивалентно тому, что предел $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ существует и равен $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$.

Аналогичное определение может быть сформулировано и для горизонтальной асимптоты графика функции f при $x\to-\infty$, если множество E содержит интервал вида $(-\infty,\ a)$ или $-\infty$ является предельной точкой множества E (рис. 5.9).

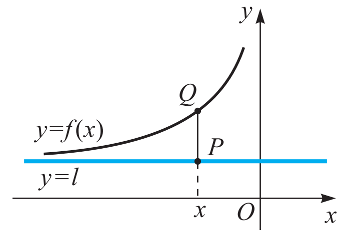


Рис. 5.9

Если предел $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ $(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x))$ не существует или равен бесконечности, то график функции f не имеет горизонтальной асимптоты при $x\to+\infty$ (при $x\to-\infty$ соответственно).

Задание с решением

Определим горизонтальные асимптоты графика функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$; б) $f(x)=2^x$; в) $f(x)=e^{x^2}$; г*) $f(x)=x\sin x$.

Решение:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}=1$. Следовательно, прямая $y=1$ является горизонтальной асимптотой графика функции f при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$.

б) $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=0$. Значит, прямая $y=0$ (ось Ox) является горизонтальной асимптотой графика функции f при $x\to-\infty$. Так как $\lim\limits_{x\to+\infty}2^x=+\infty$, то график функции f не имеет горизонтальной асимптоты при $x\to+\infty$.

в) Так как $\lim\limits_{x\to\infty}e^{x^2}=+\infty$, то график функции f не имеет горизонтальных асимптот.

г*) График функции f не имеет горизонтальной асимптоты ни при $x\to+\infty$, ни при $x\to-\infty$, так как не существуют пределы $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin x$, $\lim\limits_{x\to-\infty}x\sin x$.

2.3.2. Наклонные асимптоты

Даны функция $f\colon E\to\mathbb{R}$, где множеству E принадлежит интервал вида $(a,\ +\infty)$ (или $+\infty$ является предельной точкой множества E), и прямая $y=mx+n$, $m\neq0$. Для любого $x\in(a,\ +\infty)$ обозначим через P (через Q соответственно) точку с абсциссой x, принадлежащую прямой $y=mx+n$, $m\neq0$ (графику функции f соответственно) (рис. 5.10).

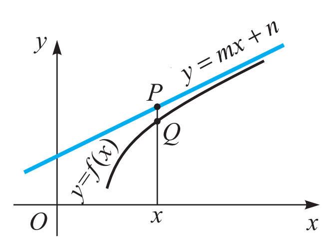


Рис. 5.10

Определение. Прямая $y=mx+n$, $m\neq0$, называется **наклонной асимптотой** графика функции f (функции f) при $x\to+\infty$, если длина отрезка $PQ=|f(x)-(mx+n)|$ стремится к нулю при $x\to+\infty$, то есть $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(mx+n))=0$.

Теорема 6. Прямая $y = mx + n$, $m \neq 0$, является наклонной асимптотой графика функции $f\colon E \to \mathbb{R}$ при $x \to +\infty$ тогда и только тогда, когда $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ $(m \neq 0)$ и $n = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - mx)$.

Пусть множеству E принадлежит интервал вида $(-\infty, a)$ или $-\infty$ является предельной точкой множества E. Аналогично определяется понятие *наклонная асимптота графика функции f при* $x \to -\infty$ и доказывается теорема 6 для такого вида асимптот.

Задание с решением

Найдем наклонные асимптоты графика функции:

а) $f\colon \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$; б) $f\colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{|x-1|}$;

в) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$.

Решение:

а) $m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x(x+1)} = 1$ и $n = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - mx) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1} - x\right) =$ $= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+1-x^2-x}{x-1} = -1$. Значит, прямая $y = x - 1$ является наклонной асимптотой графика функции f при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$.

б) $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = 1$ и $n = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{|x-1|} - x\right) =$ $= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} = 1$. Следовательно, прямая $y = x + 1$ является наклонной асимптотой графика функции f при $x \to +\infty$. Аналогично получим, что прямая $y = -x - 1$ является наклонной асимптотой графика функции f при $x \to -\infty$.

в) График функции f не имеет наклонной асимптоты ни при $x \to +\infty$, ни при $x \to -\infty$, потому что $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ и $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$, а также не существуют пределы $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} \sin x$.

2.3.3. Вертикальные асимптоты

Примеры

1. Рассмотрим функцию $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ (рис. 5.11). Заметим, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ и, следовательно, прямая $y = 0$ является горизонтальной асимптотой графика функции f. При чтении графика функции f заметим, что при x, стремящемся к нулю, точка $M\left(x, \frac{1}{x}\right)$, $x > 0$, принадлежащая графику, приближается к оси Oy. В этом случае говорят, что ось Oy, то есть, прямая $x = 0$ является *вертикальной асимптотой* графика функции f.

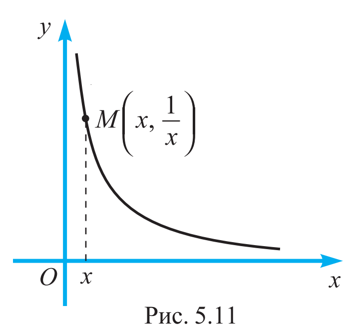


Рис. 5.11

2. Пусть дана функция $f\colon (0,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x(1-x)}$ (рис. 5.12).

Имеем $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x(1-x)}=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$.

Прямые $x=0$ и $x=1$ являются вертикальными асимптотами графика функции f.

Сформулируем строгое определение *вертикальной асимптоты*.

Пусть $f\colon E\to\mathbb{R}$ – некоторая функция и a – предельная точка множества E.

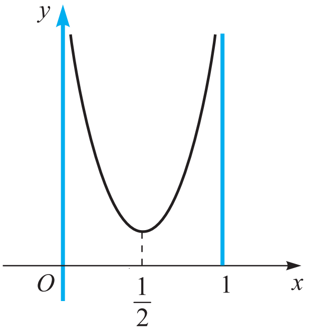


Рис. 5.12

Определения. • Если предел слева $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ равен $+\infty$ или $-\infty$, будем говорить, что прямая $x=a$ является **левой вертикальной асимптотой** графика функции f (функции f).

• Если предел справа $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ равен $+\infty$ или $-\infty$, будем говорить, что прямая $x=a$ является **правой вертикальной асимптотой** графика функции f.

• Прямая $x=a$ есть **вертикальная асимптота** графика функции f, если она является левой вертикальной асимптотой, правой вертикальной асимптотой или левой и правой вертикальной асимптотой.

Если прямая $x=a$ является левой вертикальной асимптотой графика функции f, то длина отрезка PQ стремится к нулю при $x\to a-0$, а ордината точки Q стремится к $-\infty$ (рис. 5.13 а)) или к $+\infty$ (рис. 5.13 б)).

Подобную геометрическую интерпретацию получим и для правой вертикальной асимптоты графика функции f. (Проиллюстрируйте!)

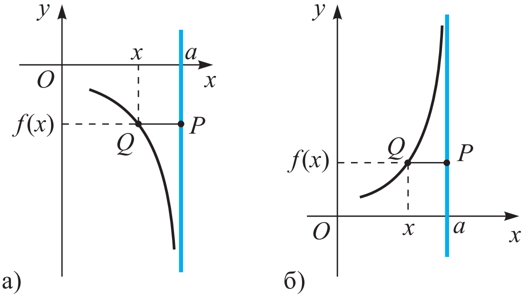


Рис. 5.13

Замечание. Из определения делаем вывод, что вертикальные асимптоты графика функции $f\colon E\to\mathbb{R}$ отыскивают среди прямых $x=x_i$, где x_i – точки разрыва второго рода и/или конечные предельные точки множества E, которые не принадлежат E.

В частности, если $E=(a,b)$ и функция f непрерывна на (a,b), то прямая $x=a$ $(x=b)$ является вертикальной асимптотой графика функции f тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ (соответственно $\lim\limits_{x\to b} f(x)=\infty$).

Задание с решением

Найдем вертикальные асимптоты графика функции:

а) $f\colon (-1,\ 1) \to \mathbb{R},\ \ f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$; б) $f\colon \left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R},\ \ f(x) = \operatorname{tg} x$.

Решение:

а) Так как функция f непрерывна на интервале $(-1,\ 1)$, вертикальными асимптотами графика функции f могут быть прямые $x=1$ и $x=-1$.

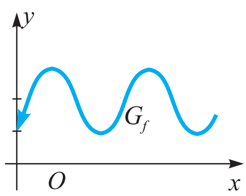
Вычислим: $l_л(1) = \lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{1}{x^2-1} = -\infty$, $l_п(-1) = \lim\limits_{x\to -1+0} \dfrac{1}{x^2-1} = -\infty$. Следовательно, прямые $x=1$ и $x=-1$ являются вертикальными асимптотами графика функции f.

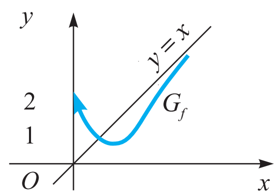
б) Мы установили (модуль 2), что $l_л\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x = +\infty$ и $l_п\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} x = -\infty$. Значит, прямые $x = \dfrac{\pi}{2}$ и $x = -\dfrac{\pi}{2}$ являются вертикальными асимптотами графика функции f.

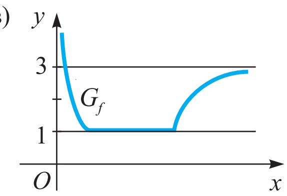
Упражнения и задачи

Б

1. Найдите асимптоты (горизонтальные, наклонные, вертикальные) графика функции $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$:

а)


б)


в)


2. Найдите асимптоты (горизонтальные, наклонные, вертикальные) графика функции:

а) $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R},\ \ f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x}}$; б) $f\colon (-2,\ 2) \to \mathbb{R},\ \ f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-4}$;

в) $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R},\ \ f(x) = \dfrac{1}{e^x-1}$; г) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$.

3. Найдите интервалы выпуклости функции $f\colon D \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = x^3 + 9x^2 - x + 1$; б) $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$; в) $f(x) = \sin x$;

г) $f(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$; д) $f(x) = x + \sqrt[3]{x}$;

е) $f(x) = x^2 \ln x$; ж) $f(x) = x\sin(\ln x)$.

4. Найдите точки перегиба функции $f\colon D \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x$; б) $f(x) = \sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x+1}$;

в) $f(x) = \dfrac{a^3}{a^2+x^2}\ \ (a>0)$; г) $f(x) = x + \sin x$;

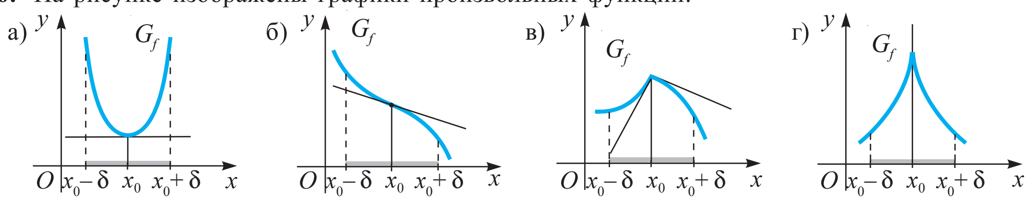
д) $f(x) = x + x^{\frac{5}{3}}$; е) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$; ж) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$.

5. Найдите асимптоты (горизонтальные, наклонные, вертикальные) графика функции $f\colon D \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{|x|}}$; б) $f(x) = x^2 + \sin x$; в) $f(x) = e^{\frac{1}{|x|}}$;

г) $f(x) = \dfrac{x^4 + 2}{x(x-1)(x+1)}$; д) $f(x) = \dfrac{x-9}{|x|+2}$; е) $f(x) = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$.

6. На рисунке изображены графики произвольных функций:



Для каждой из этих функций перечертите и заполните следующую таблицу:

x	$x_0 - \delta$	x_0	$x_0 + \delta$
f'			
f''			
f			

7. Приведите пример функции, вертикальными асимптотами графика которой являются прямые $x_k = k,\ k \in \mathbb{Z}$.

§3 Построение графиков функций

Изобразить графически функцию $f\colon E \to \mathbb{R}$ означает построить ее график $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}$ в прямоугольной системе координат xOy. Чтобы построить график функции, необходимо поэтапно исследовать поведение функции, выявить некоторые элементы, характеризующие функцию.

I. Область определения функции. Если область определения функции f не указана, то *подразумевается*, что таковой является максимальная область определения, образованная из множества $D \subseteq \mathbb{R}$, для которой $f(x),\ x \in D$, имеет смысл. В задачах из физики, геометрии, экономики и т. д. могут быть дополнительные ограничения, относящиеся к области определения (исследования).

После того как была найдена область определения функции f, находят точки пересечения графика функции f с осями координат: с осью Ox $(y = 0)$ – это точки $(x_1, 0), (x_2, 0), \ldots,$ $x_1, x_2, \ldots$ – решения уравнения $f(x) = 0$ (если таковые существуют); с осью Oy $(x = 0)$ – это точка $(0, f(0))$, если $0 \in D$.

II. Знак функции и возможные симметрии графика. Если $f \geq 0$ $(f \leq 0)$, то график функции f расположен выше (ниже) оси Ox.

Если f – четная (нечетная) функция, то ее график симметричен относительно оси Oy (относительно начала координат), и в этом случае область исследования D может быть сужена до множества $D \cap [0, +\infty)$.

Если f – периодическая функция, то достаточно исследовать функцию на промежутке, длина которого равна основному периоду функции, а затем график функции продолжить параллельными переносами на множестве D.

III. Пределы на концах промежутков, непрерывность функции, асимптоты. Если множество D не ограничено, то вычисляют (если существует) предел функции f при $x \to +\infty$ (или/и при $x \to -\infty$), находят (если существуют) горизонтальные, наклонные асимптоты графика функции f.

Если D – объединение промежутков, то вычисляют односторонние пределы функции f на концах каждого из этих промежутков. Одновременно находят возможные вертикальные асимптоты. Также определяют точки множества D, в которых функция f непрерывна, а в точках разрыва вычисляют односторонние пределы.

IV. Первая производная. Находят производную f'. Определяют множество $D_{f'}$, на котором функция дифференцируема. Решив уравнение $f'(x) = 0$, находят критические точки функции f. Решения этого уравнения, а также и точки, в которых функция f не дифференцируема или ее производная равна бесконечности, являются возможными точками локального экстремума этой функции. Они делят множество D на конечное (или бесконечное) число промежутков. Определяют знак функции f' на каждом из полученных промежутков. Таким образом, устанавливаются промежутки монотонности, точки локального экстремума и локальные экстремумы функции f.

Если функция f дважды дифференцируема, то для более точного построения ее графика исследуют вторую производную.

V. Вторая производная. Находят вторую производную f'', а затем решают уравнение $f''(x) = 0$. Решения этого уравнения, а также точки, в которых вторая производная не существует или бесконечна, являются возможными точками перегиба функции f. Находят интервалы знакопостоянства второй производной и знак функции f'' на этих интервалах (которые являются интервалами выпуклости функции f) и выявляют ее точки перегиба.

VI. Таблица поведения[1] функции f включает в себя результаты, полученные на этапах I–V.

В первой строке записывают данные, относящиеся к области определения функции f, и замечательные значения аргумента x (нули первой и второй производных, а также точки, в которых функции f' и f'' не существуют или бесконечны).

Во второй строке записывают данные, относящиеся к первой производной, полученные на этапе IV. В каждом столбце нуля производной ставят 0. Записывают знак производной на полученных интервалах.

В третьей строке записывают данные относительно второй производной, полученные на этапе V. В столбце каждого нуля второй производной ставят 0. Записывают знак второй производной на полученных интервалах.

В последней строке монотонность функции f обозначают стрелочками „$\nearrow$”, „$\searrow$”, а соответствующие символы „$\smile$”, „$\frown$” указывают на выпуклость вниз, соответственно на выпуклость вверх функции; буквы $\overline{m}$, $\overline{M}$ или i обозначают соответственно точку локального минимума, локального максимума или точку перегиба.

VII. Построение графика[1]***.*** В прямоугольной системе координат xOy строят асимптоты графика функции f (если таковые существуют) и замечательные точки

[1] Сведения, относящиеся к периодичности, выпуклости функции, ее точкам перегиба и ко второй производной функции, предназначены только для реального профиля.

$(x, f(x))$ из таблицы поведения функции f. Замечательные точки графика функции f соединяются кривой линией, при этом учитываются четность, периодичность, монотонность, наличие асимптот и выпуклость функции f.

Замечание. Этап V может быть опущен в случае затруднений при вычислениях.

Далее, придерживаясь этапов I–V, построим графики некоторых функций.

Задания с решением

1. Построим график функции $f\colon D \to \mathbb{R}$:

а) $f(x)=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x$;

б) $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$; в) $f(x)=\frac{\sin x}{2+\cos x}$.

Решение:

а) I. Областью определения функции f является множество $\mathbb{R}$.

При $x=0$ имеем $f(0)=0$. $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^3}{3}-2x^2+3x=0 \Leftrightarrow x(x^2-6x+9)=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x\in\{0, 3\}$. Следовательно, график функции f проходит через начало координат и пересекает ось Ox в точке $x_0=3$.

II. Функция f не является ни четной, ни нечетной, так как $f(-x)=-\frac{x^3}{3}-2x^2-3x$ и $f(-x)\neq f(x)$, $f(-x)\neq -f(x)$. Так как $f(x)=\frac{1}{3}(x^3-6x^2+9x)=\frac{1}{3}x(x-3)^2$, то $f(x)\geq 0$ при $x\geq 0$ и $f(x)\leq 0$ при $x\leq 0$.

III. Функция f непрерывна на множестве $\mathbb{R}$, значит, вертикальных асимптот нет.

Вычислим пределы на концах интервала $(-\infty, +\infty)$. Имеем:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{3}x(x-3)^2=-\infty \text{ и } \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3}x(x-3)^2=+\infty.$$

Значит, у графика функции f нет ни наклонных, ни горизонтальных асимптот.

IV. $f'(x)=x^2-4x+3$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow x\in\{1, 3\}$. Точки $x_1=1$ и $x_2=3$ являются критическими точками.

V. Не будем находить вторую производную, так как это задание рассматривается для гуманитарного профиля.

VI. Информация о поведении функции f приведена в таблице:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	$\overline{M}$	$\searrow$	$\underline{m}$	$\nearrow$	

Вычислим: $\overline{M}=f(1)=\frac{1}{3}-2+3=\frac{4}{3}$,

$\underline{m}=f(3)=9-18+9=0.$

VII. График функции f изображен на рисунке 5.14.

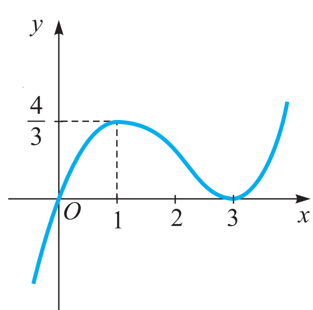


Рис. 5.14

б) I. Максимальной областью определения функции f является множество $\mathbb{R}$. График функции f пересекает координатные оси только в начале координат.

II. Функция f не является периодической; f – нечетная, так как $f(-x)=-f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Значит, достаточно сузить область определения ($\mathbb{R}$) до множества $\mathbb{R}_+=[0,\ +\infty)$.

III. Функция f непрерывна на множестве $\mathbb{R}$. Пределы функции f на концах интервала $(-\infty,\ +\infty)$ равны $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{1+x^2}=0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{1+x^2}=0$. Следовательно, прямая $y=0$ является горизонтальной асимптотой графика функции f при $x\to-\infty$ и при $x\to+\infty$.

IV. $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Уравнение $f'(x)=0$ имеет решения $x_1=-1$ и $x_2=1$ (критические точки функции f). При $x>0$ подходит только $x_2=1$.

Очевидно, что $f(1)=0{,}5$.

V. $f''(x)=\dfrac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$. Решением уравнения $f''(x)=0$ при $x>0$ является $x_3=\sqrt{3}$.

VI. Составим таблицу поведения функции f при $x\ge 0$:

x	0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
f''	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
f	i	$\nearrow$	$\overline{M}$	$\searrow$	i	$\searrow$	

В таблице $\overline{M}=f(1)=\dfrac{1}{2}$ – локальный максимум, а $x_3=\sqrt{3}$ – точка перегиба. Точка $x_2=0$ также является точкой перегиба.

VII. Построим график функции f на множестве $\mathbb{R}_+$ (рис. 5.15). Так как f – нечетная функция, построим относительно начала прямоугольной системы координат xOy график, симметричный графику, построенному на множестве $\mathbb{R}_+$, и получим график функции f на множестве $\mathbb{R}$.

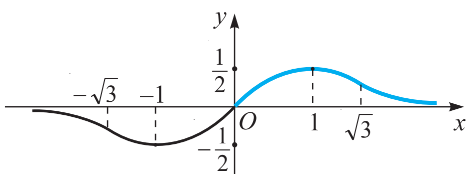


Рис. 5.15

в) I. $D=\mathbb{R}$. Для $x=0$ получим $f(0)=0$. $f(x)=0\Leftrightarrow \sin x=0\Leftrightarrow x\in\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$.

График функции f пересекает ось Oy в начале координат, а ось Ox – в точках $x_k=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

II. Функция f – нечетная, периодическая с основным периодом 2π. Значит, исследуем функцию f на отрезке $[0,2\pi]$, а при построении ее графика учтем его симметричность относительно начала координат и периодичность функции f.

III. Функция f – непрерывна, асимптот у нее нет.

IV. Найдем $f'(x)=\dfrac{1+2\cos x}{(2+\cos x)^2}$. Уравнение $f'(x)=0$ ре $[0,2\pi]$ имеет два решения: $x_1=\dfrac{2\pi}{3}$ и $x_2=\dfrac{4\pi}{3}$.

V. Вторую производную не будем вычислять, ввиду сложности вычислений.

VI. Составим таблицу поведения функции f (на отрезке $[0, 2\pi]$):

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$		2π
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	$\overline{M}$	$\searrow$	$\overline{m}$	$\nearrow$	

Вычислим: $\overline{M} = f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

$$\overline{m} = f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

VII. Построим график функции f на отрезке $[0, 2\pi]$, а затем параллельными переносами продолжим его на множестве $\mathbb{R}$ периодично с периодом 2π. Часть графика функции f изображена на рисунке 5.16.

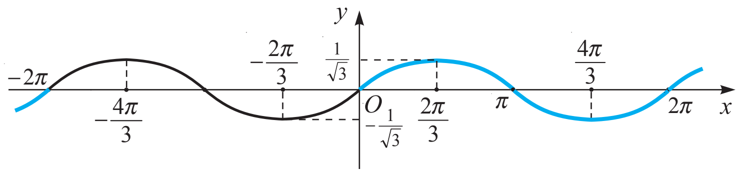


Рис. 5.16

2. Дана функция $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x^2+1}{x(x+a)}$, где $a \in \mathbb{R}$. Построим график функции f, если известно, что он проходит через точку $(1, 1)$.

Решение:

I. Так как точка $(1, 1) \in G_f$, то получим: $f(1) = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{1(1+a)} = 1 \Leftrightarrow a = 2.$

Значит, $f(x) = \frac{2x^2+1}{x(x+2)}$ и множество $D = (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, +\infty)$ является ее максимальной областью определения.

График функции f не пересекает оси координат.

II. Функция f не является периодической; f не является ни четной, ни нечетной; $f(x) \geq 0$ тогда и только тогда, когда $x(x+2) > 0$ $(x \in D)$, то есть $x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$, и $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 0)$.

III. Функция f непрерывна на множестве D. Вычислим ее пределы на концах интервала $(-2, 0)$:

$$l_{л}(-2) = \lim_{x \to -2-0} \frac{2x^2+1}{x(x+2)} = +\infty, \quad l_{п}(-2) = \lim_{x \to -2+0} \frac{2x^2+1}{x(x+2)} = -\infty,$$

$$l_{л}(0) = \lim_{x \to -0} \frac{2x^2+1}{x(x+2)} = -\infty, \quad l_{п}(0) = \lim_{x \to +0} \frac{2x^2+1}{x(x+2)} = +\infty.$$

Следовательно, прямые $x = -2$ и $x = 0$ являются левыми и правыми вертикальными асимптотами графика функции f.

Так как $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+1}{x(x+2)} = 2$, то прямая $y = 2$ является горизонтальной асимптотой графика функции f при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$.

IV. $f'(x) = \dfrac{4x^2-2x-2}{x^2(x+2)^2}$, $\forall x \in D$ и $f'(x) = 0$, если $x_1 = -\dfrac{1}{2}$, $x_2 = 1$.

V. Вторую производную не будем вычислять, ввиду сложности вычислений.

VI. Составим таблицу поведения функции f:

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
f'		$+$	$+ \mid +$	$+$	0	$-$	$- \mid -$	$-$	0	$+$	$+$
f		$\nearrow$	$\mid$	$\nearrow$	$\overline{M}$	$\searrow$	$\mid$	$\searrow$	$\overline{m}$	$\nearrow$	

Вычислим: $\overline{m} = f(1) = 1$ и

$\overline{M} = f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -2.$

VII. График функции f изображен на рисунке 5.17.

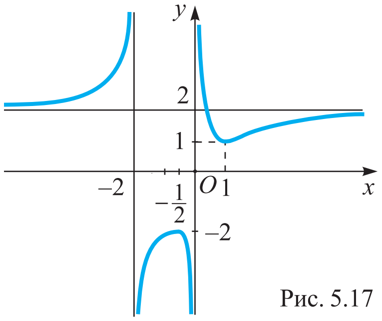


Рис. 5.17

Упражнения и задачи

А

1. Постройте график функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = -2x^2 + x + 1$; б) $f(x) = x^2 + 3x - 4$;

в) $f(x) = x^3 - 3x + 2$; г) $f(x) = x^2(x-1)^2$.

Б

2. Постройте график функции $f: D \to \mathbb{R}$. (Исследования функции с использованием второй производной можно опустить, если соответствующие вычисления громоздки.)

а) $f(x) = x \ln x$; б) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$; в) $f(x) = x + \sqrt{1-x^2}$;

г) $f(x) = e^{-x^2}$; д) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$; е) $f(x) = \dfrac{|1-x^2|}{x}$;

ж) $f(x) = (x-3)\sqrt{x}$; з) $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$.

3. Зная, что сумма длин катетов прямоугольного треугольника равна a:

а) выразите площадь этого треугольника в виде функции от длины катета;

б) постройте график полученной функции;

в) найдите наибольшую площадь этого треугольника (наибольшее значение полученной функции).

§4 Применение производных в физике, геометрии, экономике. Задачи на максимум и минимум

В данном параграфе рассмотрим применение теоретических результатов, полученных ранее при нахождении точек экстремума некоторых функций. В то же время приведем примеры эффективного применения методов математического анализа при решении задач по физике, геометрии, экономике и т.д., в которых необходимо найти оптимальную величину некоторой технической, экономической системы, обеспечивающую максимальную эффективность, максимальную мощность, и позволяющую оптимизировать потребление энергии на длительное время с минимальными расходами. Решение такого рода задач выполняется определенным процессом, называемым **оптимизацией**, который состоит в выборе и применении наиболее подходящих (наилучших) решений из числа возможных, в распределении величин, соответствующих наибольшему или наименьшему значению функции. Заметим, что такие задачи не всегда могут быть решены алгебраическими методами или методами элементарной геометрии.

Для нахождения наибольшего или наименьшего значения какой-либо величины выразим значения этой величины (если это возможно) через некоторую функцию, а затем исследуем поведение полученной функции.

Задачи с решением

1. Из прямоугольного листа жести размером 50×80 см надо изготовить открытую коробку в виде прямоугольного параллелепипеда, вырезав квадратные уголки и загнув их. Найдем высоту коробки, при которой ее объем будет максимален.

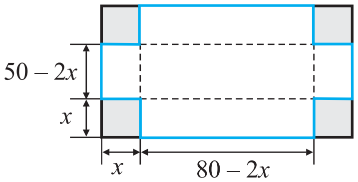


Рис. 5.18

Решение:

Обозначив через x длину стороны вырезанного квадрата, получим объем $\mathscr{V}(x)$ коробки: $\mathscr{V}(x) = x(50-2x)(80-2x) = 4x^3 - 260x^2 + 4\,000x$,

где значения x могут меняться в пределах отрезка $\left[0, \frac{50}{2}\right] = [0, 25]$. Таким образом, задача сводится к нахождению наибольшего значения функции $\mathscr{V}: [0, 25] \to \mathbb{R}$, $\mathscr{V}(x) = 4x^3 - 260x^2 + 4\,000x$.

Найдем экстремумы функции $\mathscr{V}$. Имеем $\mathscr{V}'(x) = 12x^2 - 520x + 4\,000$. Уравнение $\mathscr{V}'(x) = 0$ на отрезке $[0, 25]$ имеет единственное решение: $x_0 = \dfrac{130 - \sqrt{4\,900}}{6} = 10$.

Так как $\mathscr{V}(0) = \mathscr{V}(25) = 0$, то в точке x_0 функция $\mathscr{V}$ достигает наибольшего значения.

Ответ: Объем коробки максимален, если ее высота будет равна 10 см.

2. Из всех прямоугольников, периметр которых равен $2a$, найдем прямоугольник, площадь которого максимальна.

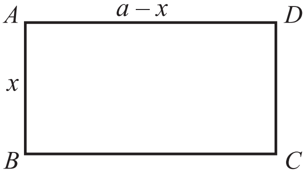


Рис. 5.19

Решение:

Обозначим через x длину стороны AB прямоугольника $ABCD$, $AD > AB$ (рис. 5.19).

Тогда $AD=\dfrac{2a-2x}{2}=a-x.$

Площадь прямоугольника $ABCD$ равна $\mathscr{A}(x)=x(a-x)=-x^2+ax.$

Рассмотрим функцию $\mathscr{A}\colon [0, a]\to\mathbb{R},\ \mathscr{A}(x)=-x^2+ax.$

Тогда $\mathscr{A}'(x)=-2x+a.$ $\mathscr{A}'(x)=0\Leftrightarrow -2x+a=0\Leftrightarrow x=\dfrac{a}{2}.$

Составим таблицу поведения функции $\mathscr{A}\colon [0, a]\to\mathbb{R}$:

x	0		$\frac{a}{2}$		a
$\mathscr{A}'(x)$		$+$	0	$-$	
$\mathscr{A}(x)$		$\nearrow$	$\frac{a^2}{4}$	$\searrow$	

Прямоугольник $ABCD$ достигает максимальной площади $\mathscr{A}\left(\dfrac{a}{2}\right)=\dfrac{a^2}{4}$ если он будет квадратом со стороной $\dfrac{a}{2}$.

Ответ: $\mathscr{A}_{\max}=\dfrac{a^2}{4}$ квадратных единиц.

Следствие. Если сумма двух положительных чисел известна, то их произведение будет максимальным при условии, что эти числа равны.

Аналогично можно доказать, что сумма двух положительных чисел, произведение которых постоянно, будет минимальной, если эти числа равны.

3. Определим координаты точки графика функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+3,$ удаленной на минимальное расстояние от точки $M\,(10, 5)$ (рис. 5.20).

Решение:

Любая точка A графика функции f имеет абсциссу x и ординату $x^2+3,\ x\in\mathbb{R}.$ Обозначим через $\varphi(x)$ расстояние между точками M и A.

Тогда

$$\varphi(x)=\sqrt{(x-10)^2+(x^2+3-5)^2}=\sqrt{x^4-3x^2-20x+104}.$$

Решение задачи сводится к нахождению минимума функции $\varphi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \varphi(x)=\sqrt{x^4-3x^2-20x+104}.$

Имеем: $\varphi'(x)=\dfrac{2x^3-3x-10}{\sqrt{x^4-3x^2-20x+104}}=0\Leftrightarrow x=2.$

Точка $x_0=2$ является точкой локального минимума функции φ, так как $\varphi'<0$, если $x<2$, и $\varphi'>0$, если $x>2$. Тогда $f(2)=2^2+3=7$. Значит, координаты точки A равны 2 и 7.

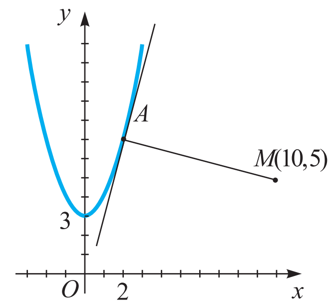


Рис. 5.20

Ответ: Искомая точка A имеет координаты 2 и 7.

4. Земельный участок прямоугольной формы надо оградить, зная, что с одной стороны он уже огражден. Стоимость одного метра ограды, параллельной уже построенной ограде, равна 100 леям, а стоимость оставшейся ограды составляет 150 леев за метр. Найдем максимальную площадь, которую можно оградить, если мы располагаем суммой в 18 000 леев.

Решение:

Пусть x и y – измерения участка, тогда, по условию задачи, получим:

$$100\cdot x+2\cdot 150\cdot y=18\,000\Leftrightarrow x+3y=180\Leftrightarrow y=60-\frac{x}{3}.$$

Площадь участка равна $\mathscr{A}(x)=x\cdot y=x\left(60-\frac{x}{3}\right)$. $\mathscr{A}'(x)=60-\frac{2}{3}x$.

Для $\mathscr{A}'(x)=0$ получим $60-\frac{2}{3}x=0\Leftrightarrow x=90$.

Так как $\mathscr{A}''(x)=-\frac{2}{3}<0$, то в точке $x=90$ функция $\mathscr{A}(x)$ имеет максимум.

Значит, максимальная площадь, которую можно оградить, равна

$$\mathscr{A}_{\max}=90\cdot\left(60-\frac{90}{3}\right)=2\,700\ (\text{м}^2).$$

Ответ: $2\,700$ м^2.

5. Определите наиболее экономичный маршрут для строительства железнодорожного пути между населенными пунктами A и B, зная, что часть пути, длиной d, должна быть построена параллельно и близко к шоссейной дороге.

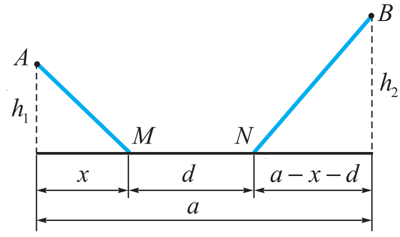


Рис. 5.21

Решение:

Пусть h_1, h_2 – расстояния между пунктами A, соответственно B, и шоссейной дорогой, a – расстояние между проекциями точек A и B на направление дороги (рис. 5.21).

Очевидно, что стоимость железнодорожного пути прямо пропорциональна длине пути $L(x)$. Исходя из рисунка, получим:

$$L(x)=AM+MN+NB=\sqrt{x^2+h_1^2}+d+\sqrt{h_2^2+(a-x-d)^2}.$$

Имеем $L'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+h_1^2}}-\dfrac{a-x-d}{\sqrt{h_2^2+(a-x-d)^2}}$.

Решениями уравнения $L'(x)=0$ являются $x_1=\dfrac{(a-d)h_1}{h_1+h_2}$, $x_2=\dfrac{(a-d)h_1}{h_1-h_2}$.

В точке $x_1=\dfrac{(a-d)h_1}{h_1+h_2}$, функция $L(x)$ имеет минимум, так как $L''(x_1)>0$.

Следовательно, $L_{\min}=L(x_1)=\sqrt{(a-d)^2+(h_1+h_2)^2}+d$.

6. Рыночный спрос на товар задан функцией $p(x)=780-2x-0{,}1x^2$, где x – количество товара, а p – цена (в леях). Средние затраты на производство товара выражены функцией $\overline{C}(x)=\dfrac{1000}{x}+500+2x$. (Функция спроса и функция средних затрат определяются на основе статистических данных.)

Найдем цену, при которой доход (валовой) будет максимален, и величину этого дохода.

Решение:

Валовой доход выражается формулой $B(x)=p(x)\cdot x-\overline{C}(x)\cdot x=$

$$=(780-2x-0{,}1x^2)x-\left(\frac{1000}{x}+500+2x\right)x=280x-4x^2-0{,}1x^3-1000.$$

Первая производная равна $B'(x)=280-8x-0{,}3\cdot x^2$.

Приравняв производную к нулю $B'(x)=0$, получим уравнение $0{,}3x^2+8x-280=0$, которое имеет решения $x_1=20,\ x_2=-\dfrac{28}{0{,}6}$ (x_2 не удовлетворяет условию задачи). Так как $B''(20)<0$, то $x=20$ – точка максимума. Значит, максимальный доход $B(20)=280\cdot 20-4\cdot 20^2-0{,}1\cdot 20^3-1\,000=\ =2\,200$ (леев) и соответствующая цена $p(20)=780-2\cdot 20-0{,}1\cdot 20^2=700$ (леев).

Ответ: 2 200 леев; 700 леев.

7. Грузовик должен проехать 100 км со средней скоростью v км/ч (при условии, что $40\le v\le 70$), израсходовав при этом $\left(8+\dfrac{v^2}{300}\right)$ литров бензина в час. Найдем оптимальную скорость (при которой затраты наименьшие), если известно, что водителю платят по 30 леев/ч, а литр бензина стоит 12 леев.

Решение:

Весь путь был пройден за $\dfrac{100}{v}$ часов, и за это время было израсходовано $\left(8+\dfrac{v^2}{300}\right)\cdot\dfrac{100}{v}=\dfrac{v^2+2\,400}{3v}$ литров бензина. В этих условиях общие затраты пробега равны

$$c(v)=30\cdot\frac{100}{v}+12\cdot\frac{v^2+2\,400}{3v}=\frac{4v^2+13\,600}{v}\ \text{(леев)}.$$

Оптимальная скорость – это скорость, при которой общие затраты минимальны. Решив уравнение $c'(v)=\dfrac{4v^2-13\,600}{v^2}=0$, получим, что $v_0=\sqrt{3\,400}\approx 58{,}31$ (км/ч). Следовательно, для этого значения скорости общие затраты минимальны.

Ответ: $v_{\text{оптим}}\approx 58{,}31$ (км/ч).

8. Работник должен переместить деталь из бронзы по железной горизонтальной поверхности, с силой $\vec{Q}$. Масса детали равна 100 кг, а коэффициент трения бронзы по железу равен $\mu=0{,}2$. Определим величину угла α, образованного направлением силы и горизонтальной поверхностью, чтобы для этого перемещения приложить минимальную силу $\vec{Q}$.

Решение:

Из рисунка 5.22 видно, что динамическое равновесие силы трения $\vec{F}$, силы тяги $\vec{Q}$, силы тяжести $\vec{G}$ и силы реакции опоры $\vec{N}$ имеет место, если:

$$\begin{cases} Q\cos\alpha-F=0,\\ N+Q\sin\alpha-G=0.\end{cases}$$

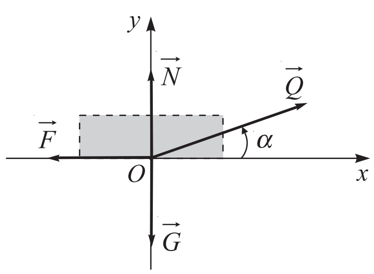


Рис. 5.22

Из этой системы, подставив формулу силы трения $F=\mu N$, определим функцию $Q(\alpha)$, минимум которой надо найти:

$$Q(\alpha)=\frac{\mu G}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}.$$

Таким образом, задача сводится к нахождению наименьших значений функции $Q\colon \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R},\ Q(\alpha) = \frac{\mu G}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}$.

Найдем экстремумы функции Q. Имеем $Q'(\alpha) = -\frac{\mu G(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)}{(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)^2}$. Решение уравнения $Q'(\alpha) = 0$ равно $\alpha = \operatorname{arctg}\mu$. При этом значении α функция $Q(\alpha)$ имеет один минимум:

$$Q_{\min} = Q(\operatorname{arctg}\mu) = \frac{\mu G}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

Подставляя данные задачи, получим:

$$\operatorname{tg}\alpha \approx 0{,}2; \quad \alpha \approx 11°20' \text{ и } Q = \frac{0{,}2\cdot 100}{\sqrt{1+0{,}2^2}} \approx 19{,}6 \text{ кг}.$$

Ответ: $\approx 11°20'$.

9. Над круглой поверхностью радиуса a висит лампа. На какую высоту следует подвесить эту лампу, чтобы освещенность поверхности была максимальна, зная, что сила света I по вертикальному направлению постоянна, а освещенность[1] E задана формулой $E = \frac{I\cdot\cos\alpha}{r^2}$, где α – угол падения лучей на эту поверхность.

Решение:

Обозначим через x расстояние от источника света до поверхности. Исходя из рисунка 5.23, получим:

$$r^2 = a^2 + x^2 \text{ и } \cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

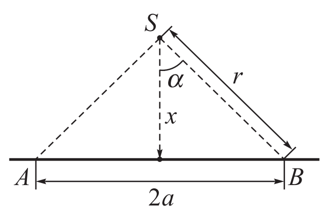


Рис. 5.23

Значит, функция, максимум которой надо найти, имеет вид $E = E(x) = \frac{I\cdot x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$, $x \in (0, +\infty)$.

Приравняв производную к нулю, получим:

$$E'(x) = I\,\frac{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}} - 3x^2(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}{(a^2+x^2)^3} = 0.$$

Находим решение этого уравнения $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$. При этом значении функция $E(x)$ имеет один максимум: $E_{\max} = \frac{2I}{3\sqrt{3}a^2}$.

Ответ: $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

10. Чему должно равняться сопротивление внешней цепи, если источник тока, электрическое напряжение которого $\varepsilon = 10$ V, и внутреннее сопротивление $r = 20\,\Omega$, расходует максимальную силу тока? Чему равно числовое значение этой силы?

[1] Единицей измерения освещенности является люкс (лк).

Решение:

Обозначим через x сопротивление внешней цепи и через P силу электрического тока. Тогда, согласно формуле силы тока, получим: $P = I^2 x$, где I – электрическое напряжение, которое можно найти по закону Ома: $I = \dfrac{\varepsilon}{x+r}$.

Итак, мы получили функцию $P(x) = \dfrac{\varepsilon^2 \cdot x}{(x+r)^2}$, $x \in (0, +\infty)$, производная которой

$$P'(x) = \varepsilon^2 \frac{(x+r)^2 - 2x(x+r)}{(x+r)^4} = \varepsilon^2 \frac{r-x}{(x+r)^3}$$

обращается в нуль в точке $x = r$. В этой точке функция $P(x)$ имеет один максимум. Подставив данные задачи, получим $P_{\max} = P(r) = \dfrac{\varepsilon^2}{4r} = \dfrac{5}{4}$ W.

Ответ: $x = r$, $P_{\max} = \dfrac{5}{4}$ W.

Упражнения и задачи

А

1. Материальная точка движется по оси согласно закону $s(t) = 12t - t^3$ (где s – расстояние, выраженное в метрах, а t – время, выраженное в секундах).

а) Какова начальная скорость материальной точки?

б) Через какое время, после начала движения, материальная точка остановится? Чему равно расстояние, пройденное за это время?

2. Гальванический элемент с электродвижущей силой E и с внутренним сопротивлением r вырабатывает ток силой I во внешнюю цепь с сопротивлением R. Сила тока выражается формулой $I = \dfrac{E}{r+R}$, а мощность гальванического элемента – формулой $P(R) = RI^2 = \dfrac{RE^2}{(r+R)^2}$. При каком значении R мощность P будет максимальна?

3. В треугольник со стороной a и высотой h, проведенной к этой стороне, вписан прямоугольник таким образом, что одна из его сторон содержится стороной a треугольника. Найдите максимальную площадь прямоугольника.

4. Цена товара составляет 225 леев. Затраты на производство товара выражены функцией $C(x) = 95x + x^2$, где x – количество произведенного товара. Определите максимальный доход.

Б

5. Материальная точка движется по оси согласно закону $s(t) = at^3 + bt + c$. Найдите скорость и ускорение материальной точки в момент времени t.

6. Материальная точка движется по оси согласно закону $s(t) = t^3 - 6t^2 + 2$. Найдите:

а) момент времени, в который ускорение материальной точки равно нулю;

б) минимальное значение скорости материальной точки.

7. Затраты на производство товара выражены функцией $C(x) = 5 + 36x$, а спрос – функцией $p(x) = -x^2 + 18x + 3$, $9 < x < 13$. Определите количество товара x, при котором доход будет максимален, и найдите сумму этого дохода.

Упражнения и задачи на повторение

А

1. Определите промежутки монотонности функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

а) $f(x)=x^3+6x^2$; б) $f(x)=x^3-\frac{x}{3}$; в) $f(x)=(x+1)^2$; г) $f(x)=x^2+x+1$.

2. Определите промежутки монотонности, точки локального экстремума, локальные экстремумы и составьте таблицу поведения функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

а) $f(x)=x^2+2x$; б) $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2$; в) $f(x)=(x-1)^2(x+2)^2$;

г) $f(x)=(x+1)^3(x-2)^2$; д) $f(x)=3+x-x^2$; е) $f(x)=x^4-4x+2$.

3. Найдите точки локального экстремума, локальные экстремумы функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

а) $f(x)=x^2+2x+1$; б) $f(x)=x^4-\frac{9}{2}x^2+8$; в) $f(x)=x^3-12x+4$;

г) $f(x)=x^3+x-4$; д) $f(x)=\frac{1}{5}x^5+x^3-4x+1$; е) $f(x)=x^2(x+1)^3$.

4. На указанном промежутке определите глобальные экстремумы функции $f: I \to \mathbb{R}$:

а) $f(x)=x^3-6x^2+2,\ I=[0;1]$; б) $f(x)=x^3-x+2,\ I=[0;2]$.

5. Постройте график функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

а) $f(x)=x^3-4x^2+1$; б) $f(x)=x^2+2x+2$.

6. Пусть $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x)=x^3+ax^2-2$. Постройте график функции f, зная, что:

а) график функции проходит через точку $(1, 1)$;

б) в точке $x=1$ функция f имеет локальный экстремум.

7. Цена товара составляет 240 леев. Затраты на производство товара выражены функцией $C(x)=3x^2+6x+120$, где x – количество произведенного товара. Определите максимальный доход (валовой).

Указание: Валовой доход $B(x)$ выражается формулой $B(x)=240x-C(x)$.

Б

8. Покажите, что:

а) $\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}=\begin{cases}2\operatorname{arctg}x, & \text{если } x\in[0,+\infty)\\ -2\operatorname{arctg}x, & \text{если } x\in(-\infty, 0];\end{cases}$

б) $\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}=\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{4},\ x\in(-\infty, 1)$;

в) $2\operatorname{arctg}x-\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=0,\ x\in(-1;1)$.

9. Найдите промежутки монотонности, локальные и глобальные экстремумы функции:

а) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x)=|x+1|$; б) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x)=\frac{x}{1+x^2}$;

в) $f: (0,+\infty) \to \mathbb{R},\ f(x)=x^2\ln x$.

10. Определите, при каких значениях $m\in\mathbb{R}$, функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x)=mx-\ln(1+x^2)$ убывает на $\mathbb{R}$.

11. Покажите, что для любых $m \in \mathbb{R}$, функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + mx)e^{-x}$ имеет один локальный максимум и один локальный минимум.

12. Пусть функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям:

а) f дифференцируема на $\mathbb{R}$; б) существует $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}^*$; в) существует $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$.

Покажите, что $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.

Указание. Примените правило Лопиталя для вычисления предела $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x f(x)}{e^x}$.

13. Дана функция $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{mx^2 - 1}{x - 1}$, $m \in \mathbb{R}$.

Определите, при каких значениях m:

а) функция строго возрастает на каждом из интервалов $(-\infty, 1)$; $(1, +\infty)$;

б) функция строго убывает на каждом из интервалов, указанных в пункте а);

в) функция имеет точки экстремума;

г) график функции не имеет асимптот.

14. Определите промежутки выпуклости функции:

а) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 3x^2$;

б) $f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$;

в) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$;

г) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + |x|$.

15. Найдите точки перегиба функции:

а) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 2$;

б) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{если } x \neq 0 \\ 1, & \text{если } x = 0; \end{cases}$

в) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 4x$;

г) $f: (-\infty, -1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$;

д) $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = |\ln x - 1|$;

е) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 4x|$.

16. Найдите асимптоты графика функции $f: D \to \mathbb{R}$, где D – максимальная область определения функции:

а) $f(x) = \dfrac{x}{x - 1}$;

б) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$;

в) $f(x) = \dfrac{x^2}{2x - 1}$;

г) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x - 1}$;

д) $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$;

е) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$.

17. Найдите действительные числа a, b, зная, что прямая $y = 2x + 3$ является асимптотой при $x \to +\infty$ для функции $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{4x^2 + ax + 1}{bx + 1}$.

18. Постройте график функции $f: D \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$;

б) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$;

в) $f(x) = \dfrac{x^2}{3x - 2}$;

г) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x - 2}$;

д) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$;

е) $f(x) = \ln(x^2 - 4)$.

19. Затраты (в леях) на производство товара выражены функцией $C(x) = 1 + 76x$, а спрос – функцией $p(x) = -x^2 + 42x - 80$, $2 \leq x \leq 40$. Определите количество товара x, при котором будет максимальный доход, а также сумму этого дохода.

Проверочная работа

Время выполнения работы: 45 минут

А

1. Найдите промежутки монотонности, точки локального экстремума, локальные экстремумы и заполните таблицу поведения функции $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x$. ④

2. Постройте график функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x - 2$. ③

3. Цена товара составляет 160 леев. Затраты на производство товара выражены функцией $C(x) = 3x^2 + 34x + 450$, где x – количество произведенного товара. Определите максимальный доход (валовой). ③
Указание. Валовой доход выражается формулой $B(x) = 160 \cdot x - C(x)$.

Время выполнения работы: 45 минут

Б

1. Найдите промежутки монотонности, точки экстремума, экстремумы и составьте таблицу поведения функции $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 e^{-x^2}$. ④

2. Найдите на отрезке $I = [-1, 2]$ глобальные экстремумы функции $f: D \to \mathbb{R}$, ②
$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{если } -1 \le x \le 0 \\ 2\ln x, & \text{если } 0 < x \le 2. \end{cases}$$

3. Постройте график функции $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$. ②

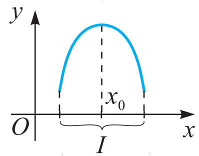
4. Зная функцию спроса $p(x) = 800 - 0{,}5x$ и функцию предложения $p_1(x) = 700 + 2x$ (x – количество продукции), определите величину налога на такую продукцию, чтобы налогообложение доходов было максимальным. ②
Указание. Налогообложение доходов на единицу продукции x выражается формулой $V(x) = (p(x) - p_1(x))x$.

Приложения производной

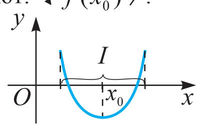
Роль первой производной в исследовании функции

Пусть $f\colon I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, – функция, дифференцируемая на I.

1. Если $f'(x)=0$, $\forall x \in I$, то функция $f(x)$ является постоянной на интервале I.
2. Функция f является **возрастающей** (**убывающей**) на интервале I тогда и только тогда, когда $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$), $\forall x \in I$.
3. Если $f'(x)>0$, $\forall x \in I$, $x<x_0$, и $f'(x)<0$, $\forall x \in I$, $x>x_0$, то x_0 – **точка локального максимума** функции f.
   Обозначают: $\nearrow f(x_0) \searrow$.



4. Если $f'(x)<0$, $\forall x \in I$, $x<x_0$, и $f'(x)>0$, $\forall x \in I$, $x>x_0$, то x_0 – **точка локального минимума** функции f.
   Обозначают: $\searrow f(x_0) \nearrow$.

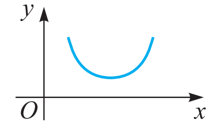


5. Точки локального максимума и локального минимума функции называются **точками локального экстремума** этой функции.
6. Решения уравнения $f'(x)=0$ являются возможными точками локального экстремума функции f.

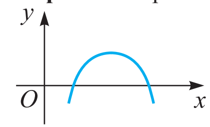
Роль второй производной в исследовании функции

Пусть $f\colon I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, – дважды дифференцируемая функция на интервале I.

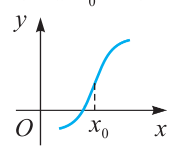
1. Если $f''(x) \geq 0$, $\forall x \in I$, то функция f **выпукла вниз** на интервале I.

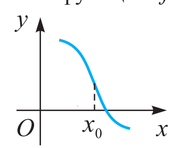


2. Если $f''(x) \leq 0$, $\forall x \in I$, то функция f **выпукла вверх** на интервале I.



3. Пусть $f''(x_0)=0$ и $V(x_0)$ – окрестность точки $x_0 \in I$.
   Если $f''(x)<0$, $\forall x \in V(x_0)$, $x<x_0$, и $f''(x)>0$, $\forall x \in V(x_0)$, $x>x_0$, или наоборот ($f''(x)>0$, $\forall x \in V(x_0)$, $x<x_0$, и $f''(x)<0$, $\forall x \in V(x_0)$, $x>x_0$), то точка x_0 – точка **перегиба** функции f.



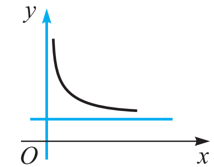


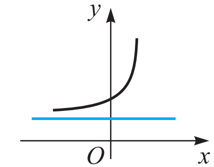
4. Решения уравнения $f''(x)=0$ являются возможными точками перегиба функции f.

Задачи на максимум и минимум

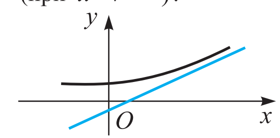
Асимптоты

1. Если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ ($\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l$), то прямая $y=l$ является **горизонтальной асимптотой** графика функции f при $x\to+\infty$ (при $x\to-\infty$).

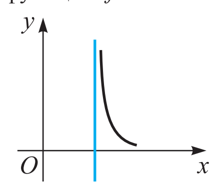


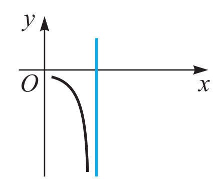


2. Если существуют и являются конечными пределы $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ $(m\neq 0)$ и $n=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-mx)$, то прямая $y=mx+n$, $m\neq 0$, является **наклонной асимптотой** графика функции f при $x\to+\infty$ (при $x\to-\infty$).



3. Если предел $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ ($\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$) равен $+\infty$ или $-\infty$, то прямая $x=a$ является **левой (правой) вертикальной асимптотой** графика функции f.





Модуль

6 Комплексные числа

Цели

- применение комплексных и действительных чисел, заданных в различных формах, использование соответствующей терминологии в разных контекстах;
- применение операций над комплексными и действительными числами, их общих свойств при решении примеров и задач;
- применение некоторых алгоритмов, характерных для вычислений с комплексными числами, для решения уравнений (второй степени, *биквадратных, *двучленных, *трехчленных, *возвратных) на множестве **C**;
- *геометрическое изображение комплексных чисел, их модуля; применение этих представлений при решении задач;
- *вычисление корней n-й степени, $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$, из комплексного числа, заданного в тригонометрической или в алгебраической форме.

§1 Операции над комплексными числами, заданными в алгебраической форме

Известно, что уравнение второй степени $ax^2+bx+c=0,\ a,b,c\in\mathbb{R},\ a\neq 0,$ имеет действительные решения тогда и только тогда, когда его дискриминант неотрицательный. Если его дискриминант отрицательный (например, дискриминанты уравнений $3x^2-x+4=0,\ x^2+1=0$), то уравнение не имеет действительных решений, так как в $\mathbb{R}$ не существует корней второй степени из отрицательного числа. Чтобы существовали решения для всех уравнений такого вида, в XVI веке математики использовали выражения вида $\sqrt{-a},\ a\in\mathbb{R}_+^*$. В XVIII веке Л. Эйлер вводит обозначение $\sqrt{-1}=\mathrm{i}$ (i от латинского слова „imaginarius”). Таким образом, множество действительных чисел расширяется до множества чисел вида $a+b\mathrm{i},\ a,b\in\mathbb{R}$, названных К. Ф. Гауссом[1] в XIX веке *комплексными числами*.

Карл Фридрих Гаусс

Определение. **Комплексным числом** называется выражение вида $a+b\mathrm{i}$, где $a,b\in\mathbb{R}$, а i – это символ, обладающий свойством $\mathrm{i}^2=-1$.

[1] Карл Фридрих Гаусс (1777–1855) – немецкий математик, физик и астроном.

Множество комплексных чисел обозначим через **C**.
Таким образом, $\mathbf{C}=\{a+bi \mid a, b\in\mathbb{R},\ i^2=-1\}$. Следовательно, $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbf{C}$.

Если $z=a+bi$, то говорят, что комплексное число z записано в ***алгебраической форме*** (можно использовать и форму $z=a+ib$). Число a называется ***действительной частью*** числа $z=a+bi$ и обозначается Rez, а b – ***мнимой частью*** z и обозначается Imz.

Комплексные числа $z_1=a+bi$ и $z_2=c+di$ считаются ***равными***, если $a=c$ и $b=d$. Число вида $a+0i$ отождествляется с действительным числом a. Следовательно, множество действительных чисел является подмножеством множества комплексных чисел. Число вида $0+bi$, $b\neq 0$, называется ***чисто мнимым*** и обозначается bi. Комплексное число $i=0+1i$ называется ***мнимой единицей***, однако она не выражает результат измерения величин. Это число является решением на множестве **C** уравнения $x^2+1=0$ (неразрешимого на множестве $\mathbb{R}$).

Задание с решением

Найдем такие действительные числа x, y, что $2+3i+(x+yi)=5+7i$.

Решение:

$2+3i+(x+yi)=5+7i \Leftrightarrow (2+x)+(3+y)i=5+7i.$

Приравнивая действительные и соответственно мнимые части, получаем:

$$\begin{cases}2+x=5\\3+y=7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3,\\y=4.\end{cases}$$

Определим ***операции сложения, вычитания и умножения*** комплексных чисел следующим образом:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i;$$
$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i;$$
$$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Сложение (вычитание) выполняется, складывая (вычитая) между собой соответственно действительные и мнимые части этих чисел. Вычитание является обратной к сложению операцией.

Примеры

1. $(2+3i)+(-3+7i)=[2+(-3)]+(3+7)i=-1+10i;$

2. $(2+3i)\cdot(-3+7i)=[2\cdot(-3)-3\cdot 7]+[2\cdot 7+3(-3)]i=-27+5i.$

Замечание. Операции сложения, вычитания, умножения комплексных чисел выполняются аналогично операциям над многочленами от переменного i, считая $i^2=-1$.

Определение. Комплексное число $\bar{z}=\overline{a+bi}=a-bi$ называется **сопряженным** числу $z=a+bi$.

Произведение $z\cdot\bar{z}$, $z\in\mathbf{C}$, имеет особое значение, так как оно является неотрицательным действительным числом: $z\cdot\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+abi-abi-b^2i^2=a^2+b^2$.

Свойства операций сложения и умножения комплексных чисел (они те же, что и для действительных чисел):

1° $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ – коммутативность сложения;

2° $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ – ассоциативность сложения;

3° $0 = 0 + 0 \cdot \mathrm{i}$ – нейтральный элемент относительно сложения;

4° $-z = -a - b\mathrm{i}$ – число, противоположное числу $z = a + b\mathrm{i}$;

5° $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ – коммутативность умножения;

6° $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$ – ассоциативность умножения;

7° $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$ – дистрибутивность умножения относительно сложения;

8° $1 = 1 + 0 \cdot \mathrm{i}$ – нейтральный элемент относительно умножения;

9° $\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}\mathrm{i}$ – число, обратное числу $z = a + b\mathrm{i}$, $z \neq 0$.

Выражение для z^{-1} может быть получено следующим образом:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a + b\mathrm{i}} = \frac{a - b\mathrm{i}}{(a + b\mathrm{i})(a - b\mathrm{i})} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}\mathrm{i}.$$

Деление комплексных чисел может быть определено как операция, обратная к умножению: $z_1 : z_2 = z_1 \cdot z_2^{-1}$, $z_2 \neq 0$, однако, чтобы избежать громоздких вычислений, проще поступить следующим образом:

если $z_1 = a + b\mathrm{i}$, $z_2 = c + d\mathrm{i}$, $z_2 \neq 0$, то $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + b\mathrm{i}}{c + d\mathrm{i}} = \frac{(a + b\mathrm{i})\overline{(c + d\mathrm{i})}}{(c + d\mathrm{i})\overline{(c + d\mathrm{i})}} =$

$$= \frac{(a + b\mathrm{i})(c - d\mathrm{i})}{(c + d\mathrm{i})(c - d\mathrm{i})} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)\mathrm{i}}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\mathrm{i}.$$

Примеры

1. $\frac{7 + 3\mathrm{i}}{5 - \mathrm{i}} = \frac{(7 + 3\mathrm{i})(5 + \mathrm{i})}{(5 - \mathrm{i})(5 + \mathrm{i})} = \frac{35 + 7\mathrm{i} + 15\mathrm{i} + 3\mathrm{i}^2}{25 + 1} = \frac{35 - 3 + 22\mathrm{i}}{26} = \frac{16}{13} + \frac{11}{13}\mathrm{i}.$

2. $(1 + \mathrm{i})^{-1} = \frac{1}{1 + \mathrm{i}} = \frac{1 - \mathrm{i}}{(1 + \mathrm{i})(1 - \mathrm{i})} = \frac{1 - \mathrm{i}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}.$

Определение. Модулем комплексного числа $z = a + b\mathrm{i}$ называется неотрицательное действительное число $\sqrt{a^2 + b^2}$, обозначенное $|a + b\mathrm{i}|$ или $|z|$. Следовательно, $|a + b\mathrm{i}| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Примеры

Если $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, $z_2 = \mathrm{i}$, то $|z_1| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$, $|z_2| = |\mathrm{i}| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$.

Теорема 1. Для любых комплексных чисел z, z_1, z_2 верны свойства:

1° $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2$; **2°** $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$; **3°** $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$, $z_2 \neq 0$ (значит, и $\overline{z}_2 \neq 0$);

4° $z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R}$; **5°** $z + \overline{z} \in \mathbb{R}$; **6°** $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$; **7°** $\overline{\overline{z}} = z$.

Доказательство

Эти свойства легко получить, если записать числа в алгебраической форме. Например:

2° Пусть $z_1 = a_1 + b_1\mathrm{i},\ z_2 = a_2 + b_2\mathrm{i}$, тогда $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(a_1 + b_1\mathrm{i})(a_2 + b_2\mathrm{i})} =$

$= \overline{(a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)\mathrm{i}} = a_1a_2 - b_1b_2 - (a_1b_2 + b_1a_2)\mathrm{i} = (a_1 - b_1\mathrm{i})(a_2 - b_2\mathrm{i}) = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$

3° Обозначим $t = \dfrac{z_1}{z_2}$. Тогда $t \cdot z_2 = z_1$, следовательно, $\bar{t} \cdot \bar{z}_2 = \bar{z}_1$, или $\bar{t} = \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$. ►

Задание. Покажите, что при заданных $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ уравнения $z_1 \cdot u = z_2$ $(z_1 \neq 0)$ и $z_1 + t = z_2$ имеют единственные решения.

Замечание. Учитывая, что операции над комплексными числами обладают теми же свойствами, что и соответствующие операции над действительными числами, можно применить известные формулы сокращенного умножения, понятие степени с целым показателем ненулевого комплексного числа z: $z^0 = 1$, $z^k = \underbrace{z \cdot \ldots \cdot z}_{k\ \text{раз}}$, $z^{-k} = (z^{-1})^k$, $k \in \mathbb{N}^*$; а также ее свойства: $z^n \cdot z^m = z^{n+m}$, $(z^n)^m = z^{n \cdot m}$, $z \neq 0$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

Например: $\mathrm{i}^2 = -1,\ \mathrm{i}^3 = -\mathrm{i},\ \mathrm{i}^4 = 1,\ \mathrm{i}^5 = \mathrm{i}^4 \cdot \mathrm{i} = 1 \cdot \mathrm{i} = \mathrm{i}.$

Можно также применить формулы $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ нахождения решений уравнений второй степени: $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$.

Заметим, что любое квадратное уравнение имеет решения на множестве $\mathbf{C}$, так как для любого комплексного числа z существует такое комплексное число u, что $u^2 = z$ (что будет показано ниже).

Задания с решением

1. Вычислим: $A = (2 + 3\mathrm{i})^3 - \dfrac{7 + 3\mathrm{i}}{5 - \mathrm{i}}$.

Решение:

Применив формулу куба суммы и результат из предыдущего примера, получим:

$$A = 8 + 3 \cdot 4 \cdot 3\mathrm{i} + 3 \cdot 2 \cdot (3\mathrm{i})^2 + (3\mathrm{i})^3 - \left(\frac{16}{13} + \frac{11}{13}\mathrm{i}\right) = 8 + 36\mathrm{i} + 54\mathrm{i}^2 + 27\mathrm{i}^3 - \frac{16}{13} - \frac{11}{13}\mathrm{i} =$$

$$= 8 - 54 - \frac{16}{13} + \left(36 - 27 - \frac{11}{13}\right)\mathrm{i} = -\frac{614}{13} + \frac{106}{13}\mathrm{i}.$$

2. Вычислим:

а) i^{73}; б) i^{24k+3}, $k \in \mathbb{N}$; в) $(7 - 3\mathrm{i})^{-1}$; г*) $(2 + \mathrm{i})^7$.

Решение:

а) $\mathrm{i}^{73} = \mathrm{i}^{72+1} = (\mathrm{i}^4)^{18} \cdot \mathrm{i} = 1^{18} \cdot \mathrm{i} = \mathrm{i}.$

б) $\mathrm{i}^{24k+3} = (\mathrm{i}^4)^{6k} \cdot \mathrm{i}^3 = 1^{6k} \cdot (-\mathrm{i}) = -\mathrm{i}.$

в) $(7 - 3\mathrm{i})^{-1} = \dfrac{1}{7 - 3\mathrm{i}} = \dfrac{7 + 3\mathrm{i}}{(7 - 3\mathrm{i})(7 + 3\mathrm{i})} = \dfrac{7 + 3\mathrm{i}}{49 + 9} = \dfrac{7}{58} + \dfrac{3}{58}\mathrm{i}.$

г) Применив формулу бинома Ньютона, получим:

$(2+i)^7 = 2^7 + 7\cdot 2^6\cdot i + 21\cdot 2^5\cdot i^2 + 35\cdot 2^4\cdot i^3 + 35\cdot 2^3\cdot i^4 + 21\cdot 2^2\cdot i^5 + 7\cdot 2\cdot i^6 + i^7 =$

$=128+448i-672-560i+280+84i-14-i=-278-29i.$

3. Решим на множестве **C** уравнение:

а) $(2+i)z-(3+6i)z=5+2i$; б) $z^2-2z+3=0$.

Решение:

а) Используя свойства операций над комплексными числами, получаем:

$(2+i-3-6i)z=5+2i \Leftrightarrow (-1-5i)z=5+2i \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z=\frac{5+2i}{-1-5i}=\frac{(5+2i)(-1+5i)}{(-1-5i)(-1+5i)}=\frac{-15+23i}{1+25}=-\frac{15}{26}+\frac{23}{26}i.$$

Ответ: $S=\left\{-\frac{15}{26}+\frac{23}{26}i\right\}$.

б) $\Delta=4-12=-8=(i\sqrt{8})^2=(2\sqrt{2}i)^2$.

Таким образом, решениями являются: $z_1=\frac{2+2\sqrt{2}i}{2}=1+i\sqrt{2}$, $z_2=\frac{2-2\sqrt{2}i}{2}=1-i\sqrt{2}$.

Ответ: $S=\{1-i\sqrt{2}, 1+i\sqrt{2}\}$.

Упражнения и задачи

А

1. Вычислите:

а) $(-2+3i)+(1-i)$; б) $4+3i-(-2+5i)$; в) $(\sqrt{3}-i)+(\sqrt{2}-i\sqrt{3})$;

г) $(1-3i)(2-4i)$; д) $(\sqrt{3}-i)(\sqrt{2}-i\sqrt{3})$; е) $(2+i):(3+4i)$;

ж) $(3-i)^{-1}$; з) $\frac{2+4i}{1-i}+22-23i$; и) $(1-i)(1+i)^2$;

к) $\frac{(1-i)^3}{(1+i)^5}$; л) $\frac{(1-i)^3}{(1+i)^7}$; м) $\frac{(1-2i)^2-(1+i)^3}{(3-2i)^3-(2-i)^2}$.

2. Вычислите:

а) i^3; б) i^4; в) i^{24}; г) i^{131}; д) i^{2010}.

3. Найдите все действительные числа x и y такие, что:

а) $(1+3i)x+(2-5i)y=7+i$; б) $\overline{(2+5i)}x-(1+i)y=i$;

в) $i\cdot x+i((i+1)x-(3-i)y)=3+2i$; г) $7i\cdot x+(\sqrt{3}-i)\overline{(x-iy)}=4-3i$.

4. Решите на множестве **C** уравнение:

а) $2z^2-3z+3=0$; б) $\overline{z}^2-\overline{z}+1=0$; в) $z^2+z+4=0$;

г) $\sqrt{2}z^2-z+1=-2z$; д) $2z^2+z-2=3z-7$; е) $\frac{2-z}{3+z}=\frac{-4z+1}{5-z}$;

ж) $(3-z)(-4+z)=(2+z)z+7$; з) $z^2-2z+2=0$; и) $z+2=\frac{-3-z}{z+1}$.

5. Вычислите:

а) $(2+i)^3+(2-i)^3$; б) $(3-i)^3-(3+i)^3$; в*) $(1-2i)^5-(1+2i)^5$; г*) $(1-2i)^6$.

6. Решите на множестве **C** уравнение:

а) $(1-i)z=3+i$; б) $3z\cdot i+(5-2i)z=3z+2-i$;

в) $\dfrac{z}{2+i}-7+i=z(1+i)$; *г) $|z|-iz=1-2i$.

7*. Решите систему уравнений $(z_1, z_2 \in \mathbf{C})$:

а) $\begin{cases}2z_1-(3+3i)z_2=3-i,\\(1-i)z_1-3iz_2=-i;\end{cases}$ б) $\begin{cases}2z_1-(2+i)z_2=-i,\\(4+2i)z_1-5z_2=-1-2i.\end{cases}$

8. Найдите все комплексные числа z, удовлетворяющие условиям:

а) $\operatorname{Re} z=1,\ |z|=\sqrt{2}$; б) $\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z=2,\ |\bar{z}|=1$; в) $\operatorname{Im} z=3,\ |z-i|=2$.

Б

9. Вычислите:

а) $(3+2i)(-2+3i)^{-1}\cdot(-i)+1$; б) $(\overline{2+i})(5+i)^{-1}-(7+5i)^2\cdot(3-i)^{-1}$;

в) $\dfrac{(\sqrt{3}-i)^4}{1+i\sqrt{3}}$; г) $\dfrac{1+(1+i)^5}{-1+(1-i)^5}$.

10. Решите на множестве **C** уравнение:

а) $z^4-z^2-2=0$; б) $z^4+z^2-12=0$; в) $z^4+12z^2+35=0$.

11. Выполните действия:

а) $(z-1-i)(z-1+i)(z+1+i)(z+1-i)$;

б) $(z-i)(z+i)(z-1)(z+1)$;

в) $(b\varepsilon^2+a\varepsilon)(a\varepsilon^2+b\varepsilon)$, если $\varepsilon=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{i\sqrt{3}}{2}$;

г) $(a+b\varepsilon+c\varepsilon^2)(a+b\varepsilon^2+c\varepsilon)$, если $\varepsilon=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{i\sqrt{3}}{2}$.

12. Докажите равенство:

а) $(1+i)^{8n}=2^{4n},\ n\in\mathbb{Z}$; б) $(1+i)^{4n}=(-1)^n\cdot 2^{2n},\ n\in\mathbb{Z}$.

13. Покажите, что следующие числа являются действительными:

а) $\dfrac{1}{i}(z-\bar{z})$; б) $\dfrac{z-1}{i(z+1)}$, если $z\cdot\bar{z}=1$; в) $(3+2i)^{4n}+(2+3i)^{4n}$.

14. Найдите комплексное число z, удовлетворяющее условиям $|z+i|=|z+1|=|z+iz|$.

15. Пусть $z=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\alpha-(\alpha+1)i}$. Найдите все числа $\alpha\in\mathbb{R}$ такие, что $z\in\mathbb{R}$.

16. Докажите, что $\operatorname{Im} z=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$, $\operatorname{Re} z=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$, $\forall z\in\mathbf{C}$.

§2 Геометрическое изображение комплексных чисел. Тригонометрическая форма комплексных чисел

Геометрическое изображение комплексных чисел, предложенное К. Гауссом в начале XIX века, дало возможность их применения в различных областях.

В заданной ортогональной системе координат каждому числу $z = x + \mathrm{i}y$ ставится в соответствие точка $M(x, y)$ и обратно (точка M называется ***образом*** z) (рис. 6.1). Таким образом, устанавливается биективное соответствие между множеством комплексных чисел $\mathbf{C}$ и множеством точек плоскости, что позволяет отождествить комплексное число $z = x + \mathrm{i}y$ с точкой $M(x, y)$. В силу этого иногда будем говорить „точка $z = x + \mathrm{i}y$“ вместо „комплексное число z“, а соответствующую плоскость назовем ***комплексной плоскостью***. Кроме того, заметим, что множество действительных чисел изображается точками оси Ox, которую назовем ***действительной осью***, а множество чисто мнимых чисел – точками оси Oy, которую назовем ***мнимой осью***.

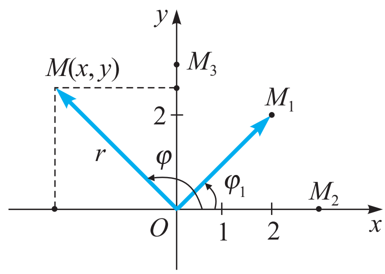


Рис. 6.1

Пример

Числа $z_1 = 2 + 2\mathrm{i}$, $z_2 = 3$, $z_3 = 3\mathrm{i}$ изображаются соответственно точками $M_1(2, 2)$, $M_2(3, 0)$ и $M_3(0, 3)$ (рис. 6.1).

Комплексные числа можно также изображать с помощью векторов. Комплексное число $z = x + \mathrm{i}y$ отождествляется с вектором $\overrightarrow{OM}$, где $O(0,0)$, а $M(x, y)$ – образ числа z (рис. 6.1). Очевидно, что $|z| = |\overrightarrow{OM}|$. Это дает возможность изображать сумму чисел $t_1 = a + b\mathrm{i}$, $t_2 = c + d\mathrm{i}$ (соответствующих точкам $A_1(a, b)$, $A_2(c, d)$) как сумму векторов $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, так как координаты точки A_3, где $\overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$, равны $a + c$ и $b + d$ (рис. 6.2).

Разность $t_1 - t_2$ отождествляется с вектором $\overrightarrow{OA_4}$, где $\overrightarrow{OA_4} = \overrightarrow{A_2A_1} = \overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA_2}$ (рис. 6.2).

Следовательно, $|t_1 - t_2| = A_2A_1$, а это означает, что *расстояние между точками* A_1 *и* A_2 *равно модулю разности* $t_1 - t_2$.

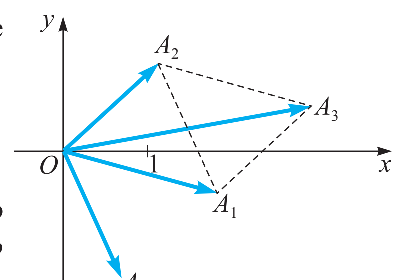


Рис. 6.2

Свойства модуля комплексного числа приводятся в следующей теореме:

Теорема 2. Для любых $z, z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ верны свойства:

1° $|z| = |\bar{z}| = |-z|$; **2°** $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$; **3°** $\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 + z_2|$;

4° $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$; **5°** $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \ne 0$; **6°** $\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 - z_2|$.

Доказательство

Свойство **1°** получается из определений сопряженного числа и модуля. Свойства **2°**, **3°**, **6°** следуют из соотношения между сторонами треугольника, в качестве которых можно взять $|z_1|$, $|z_2|$, $|z_1+z_2|$, или, если векторы коллинеарны, из правил сложения таких векторов. Свойства **4°**, **5°** докажем позже в этом параграфе. ►

В отличие от сложения и вычитания комплексных чисел, операции умножения и деления не могут быть так просто истолкованы в виде действий над соответствующими векторами. Ниже изложим представление комплексных чисел в тригонометрической форме, которая упрощает выполнение умножения, деления, возведения в степень комплексных чисел.

Напомним, что модулем комплексного числа $z=x+\mathrm{i}y$ является

$$|x+\mathrm{i}y|=\sqrt{x^2+y^2}=r.$$

Аргументом комплексного числа $z=x+\mathrm{i}y$, $z\neq 0$, называется величина угла, образованного вектором $\overrightarrow{OM}$, где $O(0,0)$, а $M(x,y)$ – образ числа z, с положительной полуосью Ox. Комплексному числу z, $z\neq 0$, соответствует бесконечное множество аргументов, которые отличаются между собой величиной $2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. Отметим, что *аргумент числа 0 не определен*. Существует единственный аргумент φ заданного числа $z=x+\mathrm{i}y$, удовлетворяющий условию $-\pi<\varphi\leq\pi$. Он называется ***главным аргументом*** и обозначается $\mathbf{arg}\, z$. Произвольный аргумент числа z обозначается $\mathrm{Arg}\, z$ и, следовательно, можно записать: $\mathrm{Arg}\, z=\arg z+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Замечание. В некоторых учебниках обозначают $\mathrm{Arg}\, z=\{\arg z+2\pi k \mid k\in\mathbb{Z}\}$, а условие $\arg z\in(-\pi,\ \pi]$ заменяется условием $\arg z\in[0,\ 2\pi)$.

Пример

Модуль числа $z_1=2+2\mathrm{i}$ равен $|z_1|=|OM_1|=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$, $\arg z_1=\frac{\pi}{4}$, а значениями $\mathrm{Arg}\, z_1$ являются $-\frac{7\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{4}$ или любое число вида $\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Очевидно, что для числа $z=a+b\mathrm{i}$, $b\neq 0$, имеем $\arg\bar{z}=-\arg z$. Главный аргумент числа $z=a+b\mathrm{i}$, $z\neq 0$, можно получить с помощью функции arccos:

$$\arg z=\begin{cases}\arccos\frac{a}{r}, & \text{если } b\geq 0\\ -\arccos\frac{a}{r}, & \text{если } b<0,\ r=\sqrt{a^2+b^2}.\end{cases}\tag{1}$$

Примеры

1. $\arg(2-2\mathrm{i})=-\arccos\frac{2}{2\sqrt{2}}=-\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\pi}{4}$;

2. $\arg(-2+3\mathrm{i})=\arccos\frac{-2}{\sqrt{13}}$.

Пусть $z = x + \mathrm{i}y$, $z \neq 0$, некоторое комплексное число, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ – его модуль, φ – некоторый его аргумент. Используя определения функций sin и cos произвольного аргумента, получим соотношения: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Тогда

$$z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi).$$

Запись $r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ называется ***тригонометрической формой*** числа z.

Так как аргумент комплексного числа определяется неоднозначно, для комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, имеем:

$$r_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1) = r_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2) \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2, \\ \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \qquad (2)$$

Задание с решением

Запишем в тригонометрической форме числа:

а) $z_1 = 1 + \mathrm{i}$; б) $z_2 = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $z_3 = -1$; г) $z_4 = 2 - 3\mathrm{i}$.

Решение:

а) Вычислим модуль и один из аргументов z_1:

$|z_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, а $\arg z_1 = \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$.

Таким образом, верно равенство $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$, правая часть которого и есть тригонометрическая форма числа z_1.

б) Аналогично, $|z_2| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$, а согласно (1) получим $\arg z_2 = \pi + \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$.

Следовательно, $-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}$.

в) Для z_3 получим: $|z_3| = 1$, $\arg z_3 = \arccos(-1) = \pi$, значит, $-1 = \cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi$.

г) Для $z_4 = 2 - 3\mathrm{i}$ имеем: $|z_4| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$, $\arg z_4 = -\arccos\frac{2}{\sqrt{13}}$.

Итак, $2 - 3\mathrm{i} = \sqrt{13}\left[\cos\left(-\arccos\frac{2}{\sqrt{13}}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\arccos\frac{2}{\sqrt{13}}\right)\right]$.

Замечание. Тригонометрическими формами рассмотренных чисел z_1, z_2, z_3 (с другими аргументами) также являются:

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{9\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{9\pi}{4}\right), z_2 = \cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right), z_3 = \cos(-\pi) + \mathrm{i}\sin(-\pi),$$

но при использовании тригонометрической формы, как правило, указывается главный аргумент.

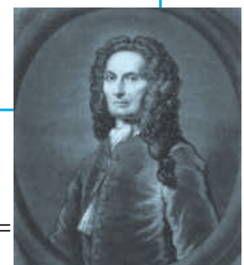
В теореме 3 приводятся формулы для вычисления произведения, частного, степени с целым показателем комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме.

Теорема 3. Если $z_1, z_2, z \in \mathbf{C}^*$, $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)$, $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, то:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)); \qquad (3)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 - \varphi_2)); \qquad (4)$$

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi), \quad n \in \mathbb{Z} \text{ (формула Муавра)[1]}. \qquad (5)$$


Абрахам де Муавр

Доказательство

Для доказательства формулы (3) имеем:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \mathrm{i}^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 \cdot r_2[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + \mathrm{i}(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)] =$$
$$= r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Аналогично получается формула (4) (для частного чисел.

Формулу (5) докажем сначала для $n \in \mathbb{N}$ методом математической индукции.

1. Очевидно, что она верна для $n = 0$, $n = 1$.

2. Из предположения, что она верна для $n = k$, то есть, что $(r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi))^k = r^k \cdot (\cos k\varphi + \mathrm{i}\sin k\varphi)$, для $n = k+1$ получаем:

$$z^{k+1} = z^k \cdot z = (r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi))^k \cdot r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) = r^k(\cos k\varphi + \mathrm{i}\sin k\varphi) \cdot r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) =$$
$$= r^{k+1}(\cos(k\varphi + \varphi) + \mathrm{i}\sin(k\varphi + \varphi)) = r^{k+1}(\cos(k+1)\varphi + \mathrm{i}\sin(k+1)\varphi).$$

3. На основании принципа математической индукции получаем, что формула (5) верна для любого натурального n.

Для $n = -k$, $k \in \mathbb{N}^*$, формула (5) проверяется следующим образом:

$$z^n = z^{-k} = \frac{1}{z^k} = \frac{1(\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0)}{r^k(\cos k\varphi + \mathrm{i}\sin k\varphi)} = r^{-k}(\cos(0 - k\varphi) + \mathrm{i}\sin(0 - k\varphi)) =$$
$$= r^{-k}(\cos(-k\varphi) + \mathrm{i}\sin(-k\varphi)) = r^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi). \ ◄$$

***Замечания.* 1.** Из равенств (3), (4) следуют соответственно свойства **4°** и **5°** модуля произведения и частного двух комплексных чисел, приведенные в теореме 2.

2. Из соотношений (3)–(5) следует соответственно: аргумент произведения равен сумме аргументов множителей; аргумент частного равен разности между аргументом делимого и аргументом делителя; аргумент степени z^n равен произведению показателя степени n на аргумент основания z. Подчеркнем, что равенство здесь понимается с точностью до слагаемого, кратного 2π.

Задания с решением

1. Вычислим $A = \dfrac{2(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i}\sqrt{3})}{(-\sqrt{3}+\mathrm{i})^{30}}$.

[1] Абрахам де Муавр (1667–1754) – английский математик французского происхождения.

Решение:

Для выполнения умножения и деления удобно преобразовать все числа в тригонометрическую форму:

$$1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right),\quad 1-\mathrm{i}\sqrt{3}=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right),$$

$$-\sqrt{3}+\mathrm{i}=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right).$$

Используя формулы (3) – (5), получаем:

$$A=\frac{4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]}{\left[2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right)\right]^{30}}=\frac{4\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]}{2^{30}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\cdot 30\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{6}\cdot 30\right)\right]}=$$

$$=\frac{2^{-\frac{55}{2}}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]}{\cos 25\pi+\mathrm{i}\sin 25\pi}=-2^{-\frac{55}{2}}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]=2^{-\frac{55}{2}}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{12}\right).$$

2. Покажем, что:

$$\cos 5x=\cos^5 x-10\cos^3 x\sin^2 x+5\cos x\sin^4 x;$$
$$\sin 5x=5\cos^4 x\sin x-10\cos^2 x\sin^3 x+\sin^5 x.$$

Решение:

$$\cos 5x+\mathrm{i}\sin 5x=(\cos x+\mathrm{i}\sin x)^5=\cos^5 x+5\cos^4 x\cdot\mathrm{i}\cdot\sin x+10\cos^3 x\cdot\mathrm{i}^2\cdot\sin^2 x+$$
$$+10\cos^2 x\cdot\mathrm{i}^3\cdot\sin^3 x+5\cos x\cdot\mathrm{i}^4\cdot\sin^4 x+\mathrm{i}^5\sin^5 x=$$
$$=\cos^5 x-10\cos^3 x\sin^2 x+5\cos x\sin^4 x+\mathrm{i}(5\cos^4 x\sin x-10\cos^2 x\sin^3 x+\sin^5 x).$$

Приравнивая действительные и соответственно мнимые части, получаем требуемые равенства.

Известно, что корень n-й степени из действительного числа a есть такое число b (если оно существует), что $b^n=a$. Это понятие обобщается для комплексных чисел.

> **Определение.** Комплексное число u называется **корнем** n-ой степени, $n\in\mathbb{N}^*$, $n\geq 2$, из комплексного числа z, если $u^n=z$.

Примеры

Корнями третьей степени из числа 1 являются 1, $-\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$, так как $1^3=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^3=\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^3=1$, а корнями второй степени из 1 являются ± 1.

Если комплексное число z задано в тригонометрической форме, то с помощью следующей теоремы относительно легко можно найти все корни n-й степени из z.

Замечание. Если n пробегает все значения из $\{k, k+1, \ldots, m\}$, $k, m\in\mathbb{Z}$, $k<m$, то обозначим $n=\overline{k, m}$.

Теорема 4. Существует n различных корней n-й степени, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, из произвольного ненулевого комплексного числа z. Именно, если $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, то множество всех корней n-й степени из z равно:

$$\left\{\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\middle|\, k = \overline{0, n-1}\right\}. \tag{6}$$

Доказательство

Пусть $u = \rho(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi)$ – некоторый корень n-й степени из z, причем ρ и ψ нужно найти.

Согласно формуле Муавра имеем $\rho^n(\cos n\psi + \mathrm{i}\sin n\psi) = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, а из (2) получаем $\rho^n = r$ и $n\psi = \varphi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Из первого соотношения имеем $\rho = \sqrt[n]{r}$ (напомним, что $r \in \mathbb{R}_+^*$, поэтому $\sqrt[n]{r}$ – единственное положительное значение корня n-й степени из r), а из второго получаем $\psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n} = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$. Для $k = \overline{0, n-1}$ получаем n различных значений для u:

$$u_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right],$$

так как эти числа изображаются на комплексной плоскости вершинами правильного n-угольника (если $n \geq 3$), вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{|z|}$ с центром в начале координат (проверьте!). Для других целых значений k имеем $k = n \cdot q + t$, $0 \leq t \leq n-1$, и, ввиду периодичности тригонометрических функций, получаем:

$$u_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi q + 2\pi\frac{t}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi q + 2\pi\frac{t}{n}\right)\right] = u_t, \quad t = \overline{0, n-1}.$$

Следовательно, каждое u_k, $k \in \mathbb{Z}$, равно некоторому u_t, где $0 \leq t \leq n-1$. Таким образом, получаем в точности n различных корней n-й степени из числа z, $z \neq 0$. ►

Замечание. Аргументы чисел в (6) не обязательно являются их главными аргументами.

Задания с решением

1. Используя теорему 4, вычислим все корни второй степени из числа –4.

Решение:

Запишем число –4 в тригонометрической форме: $-4 = 4\cdot(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi)$. Из (6) получаем $u_0 = 2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2\mathrm{i}$, $u_1 = 2\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi+2\pi}{2}\right) = -2\mathrm{i}$.

Итак, корнями второй степени из числа –4 являются только числа $\pm 2\mathrm{i}$.

2. Вычислим и изобразим на комплексной плоскости корни 3-й степени из числа 2i.

Решение:

Так как $2\mathrm{i}=2\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$, из (6) получаем:

$$u_0=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right),$$

$$u_1=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}\right)=\sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right),$$

$$u_2=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}\right)=-\sqrt[3]{2}\cdot\mathrm{i}.$$

Эти числа геометрически изображаются вершинами правильного треугольника (рис. 6.3, а)).

3. Найдем корни n-й степени из числа 1.

Решение:

Для корней n-й степени из числа 1 имеем:

$$\varepsilon_k=\cos\frac{2\pi k}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi k}{n},\quad k=\overline{0,\,n-1}.$$

На рисунках 6.3 б), в) соответственно изображены корни четвертой степени из числа 1: $\{\pm1,\pm\mathrm{i}\}$ и корни шестой степени из числа 1:

$$\left\{\pm1,\ \frac{1}{2}\pm\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\pm\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

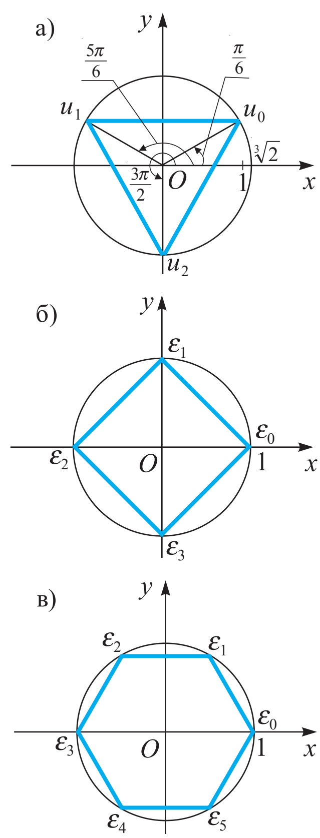


Рис. 6.3

Корни второй степени $\alpha_1,\ \alpha_2$ из ненулевого комплексного числа $a+b\mathrm{i}$ (это противоположные числа) могут быть вычислены без использования его тригонометрической формы:

1) для $b\neq0$, $\alpha_{1,\,2}=\pm\left(\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}\,b\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right)$;

2) для $b=0$, $\alpha_{1,\,2}=\begin{cases}\pm\sqrt{a}, & \text{если } a\geq0,\\ \pm\mathrm{i}\sqrt{|a|}, & \text{если } a<0,\end{cases}$

где $\mathrm{sgn}\,b=\begin{cases}1, & \text{если } b>0,\\ 0, & \text{если } b=0,\\ -1, & \text{если } b<0.\end{cases}$

Задания с решением

1. Вычислим корни второй степени из числа $40-42i$.

Решение:

Так как $b=-42<0$, получаем $\alpha_{1,2}=\pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{40^2+42^2}+40)}-i\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{40^2+42^2}-40)}\right)$.

Итак, $\{-7+3i,\ 7-3i\}$ есть множество корней второй степени из числа $40-42i$.

2. Решим на множестве **C** уравнение $z^2-3z+3-i=0$.

Решение:

Воспользуемся известными формулами нахождения решений уравнения второй степени. Дискриминант равен $-3+4i$, а корнями второй степени из комплексного числа $-3+4i$ являются $1+2i$ и $-1-2i$.

Значит, уравнение имеет решения $z_1=\frac{3+(1+2i)}{2}$, $z_2=\frac{3-(1+2i)}{2}$.

Ответ: $S=\{2+i, 1-i\}$.

Упражнения и задачи

Б

1. На комплексной плоскости укажите образы чисел:
$-1,\ i,\ 1-i,\ -5i,\ 3,\ -3+i,\ -1-2i,\ 1-i\sqrt{2},\ \sqrt{2}-i.$

2. Вычислите все корни второй степени из числа:
а) $-2i$; б) $-5-12i$; в) $48+14i$;
г) $2-2\sqrt{3}i$; д) $1-2i\sqrt{6}$; е) $-1+2i\sqrt{6}$.

3. Решите на множестве **C** уравнение:
а) $z^2+4z+4-2i=0$; б) $i\cdot z^2-(4+i)z+6+12i=0$;
в) $z^2+(3-2i)z-1-3i=0$; г) $(1+i)z^2+(2+i)z-7-i=0$;
д) $(2+i)z^2-(5-i)z+2-2i=0$; е) $z^2-(48+14i)=0$.

4. Пусть $\alpha+\beta i$ и $-\alpha-\beta i$ – корни второй степени из числа z. Найдите корни второй степени из числа $-z$.

5. Представьте в тригонометрической форме число:
а) -5; б) $-3i$; в) $1-i\sqrt{3}$;
г) $2-2i$; д) $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; е) $-4\left(\cos\frac{\pi}{5}-i\sin\frac{\pi}{5}\right)$;
ж) $3+4i$; з) $\sin\varphi-i\cos\varphi$; и) $\left(\frac{1}{i-1}\right)^{100}$.

6. Вычислите:
а) $\dfrac{\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)\left(\cos\frac{\pi}{24}+i\sin\frac{\pi}{24}\right)}{\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}}$; б) $(1+i\sqrt{3})^3\cdot\overline{(1+i)^7}$; в) $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^{20}$.

7. Вычислите корни:

а) третьей степени из числа i;
б) третьей степени из числа –27;
в) четвертой степени из числа $2-2\mathrm{i}\sqrt{3}$;
г) четвертой степени из числа –1;
д) шестой степени из числа $\dfrac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}$.

8. Найдите комплексные числа z, удовлетворяющие условиям:

а) $\operatorname{Im} z \geq 1,\ |z| \leq 1$;
б) $\operatorname{Re}(\mathrm{i}z)=1,\ |z+\mathrm{i}|=2$.

§3 Приложения комплексных чисел

3.1. Решение уравнений вида $mz^k+p=0,\ m\in \mathbf{C}^*,\ p\in \mathbf{C},\ k\in \mathbb{N}^*$

Определение. Уравнения вида $mz^k+p=0$, где $m\in \mathbf{C}^*$, $p\in \mathbf{C}$, $k\in \mathbb{N}^*$, называются **двучленными уравнениями**.

Двучленное уравнение $mz^k+p=0$ равносильно уравнению $z^k=-\dfrac{p}{m}$, и потому для его решения надо лишь найти все значения корня степени k, $k\geq 2$, из числа $-\dfrac{p}{m}$.

Задание с решением

Решим на множестве **C** уравнение $2z^5=1+\mathrm{i}\sqrt{3}$.

Решение:

$2z^5=1+\mathrm{i}\sqrt{3} \Leftrightarrow z^5=\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Для вычисления корней пятой степени запишем число $\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ в тригонометрической форме.

Имеем $r=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$ и $\arg\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)=\arccos\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{3}$.

Главным аргументом является $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$, поэтому $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}$.

Применив (6) из § 2, получим:

$$z_0=\cos\frac{\frac{\pi}{3}}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{\frac{\pi}{3}}{5}=\cos\frac{\pi}{15}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{15};\quad z_1=\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi}{5}=\cos\frac{7\pi}{15}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{15};$$

$$z_2=\cos\frac{13\pi}{15}+\mathrm{i}\sin\frac{13\pi}{15};\quad z_3=\cos\left(-\frac{11\pi}{15}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{11\pi}{15}\right);\quad z_4=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right).$$

Ответ: $$S=\left\{\cos\frac{\pi}{15}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{15},\ \cos\frac{7\pi}{15}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{15},\ \cos\frac{13\pi}{15}+\mathrm{i}\sin\frac{13\pi}{15},\right.$$
$$\left.\cos\left(-\frac{11\pi}{15}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{11\pi}{15}\right),\ \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}.$$

3.2. Решение уравнений вида $mz^{2k}+pz^k+q=0,\ m\in\mathbf{C}^*,\ p,q\in\mathbf{C},\ k\in\mathbb{N}^*$

Определение. Уравнения вида $mz^{2k}+pz^k+q=0$, где $m\in\mathbf{C}^*$, $p,q\in\mathbf{C}$, $k\in\mathbb{N}^*$, называются **трехчленными уравнениями**.

Подстановкой $z^k=u$ трехчленное уравнение приводится к системе $\begin{cases} mu^2+pu+q=0,\\ z^k=u.\end{cases}$

Задание с решением

Решим на множестве **C** уравнение $6z^{12}-z^6-1=0$.

Решение:

Обозначив $z^6=u$, получим уравнение $6u^2-u-1=0$, имеющее решения: $u_1=\frac{1}{2}$, $u_2=-\frac{1}{3}$. Для нахождения z решим два уравнения: $z^6=\frac{1}{2}$ и $z^6=-\frac{1}{3}$. Запишем числа $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{3}$ в тригонометрической форме: $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(\cos 0+\mathrm{i}\sin 0)$, $-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)$.
Используя формулу (6) из § 2, получим:

$$z\in\left\{\sqrt[6]{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{2\pi k}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi k}{6}\right)\middle|\, k=\overline{0,5}\right\} \text{ или } z\in\left\{\sqrt[6]{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi+2\pi k}{6}\right)\middle|\, k=\overline{0,5}\right\}.$$

Ответ: $S=\left\{-\sqrt[6]{\frac{1}{2}},\ \sqrt[6]{\frac{1}{2}},\ \sqrt[6]{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \sqrt[6]{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \sqrt[6]{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\right.$

$\left.\sqrt[6]{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ -\mathrm{i}\sqrt[6]{\frac{1}{3}},\ \mathrm{i}\sqrt[6]{\frac{1}{3}},\ \sqrt[6]{\frac{1}{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2}\right),\ \sqrt[6]{\frac{1}{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}\right),\ \sqrt[6]{\frac{1}{3}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2}\right),\ \sqrt[6]{\frac{1}{3}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}\right)\right\}.$

3.3. Решение возвратных уравнений

Рассмотрим уравнения вида $ax^3+bx^2+bx+a=0$, $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$, $a\neq 0$, являющиеся ***возвратными уравнениями*** степени 3, 4 соответственно.

Пример

Уравнение $x^4-3x^3+4x^2-3x+1=0$ является возвратным уравнением степени 4.

При решении таких уравнений можно использовать следующие *свойства*:

1° Решением уравнения $ax^3+bx^2+bx+a=0$ является число $x_0=-1$.

2° Подстановкой $y=x+\frac{1}{x}$ уравнение $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$ сводится к системе, состоящей из одного уравнения второй степени относительно y и совокупности двух уравнений второй степени относительно x.

Задание с решением

Решим на множестве **C** уравнение $x^4-3x^3+4x^2-3x+1=0$.

Решение:

Так как $x=0$ не является решением, то разделив на x^2, получим равносильное уравнение: $x^2-3x-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}+4=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+4=0.$

Если обозначим $y=x+\dfrac{1}{x}$, то $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=y^2-2$ и получим уравнение $y^2-3y+2=0$, имеющее решения $y_1=1$, $y_2=2$. Возвращаясь к неизвестному x, получим: $\left[\begin{array}{l} x+\dfrac{1}{x}=1, \\ x+\dfrac{1}{x}=2. \end{array}\right.$ Таким образом, получим следующую совокупность уравнений II степени: $\left[\begin{array}{l} x^2-x+1=0, \\ x^2-2x+1=0. \end{array}\right.$ Итак, решениями исходного уравнения являются $x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=\dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$, $x_4=\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $S=\left\{1,\ \dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right\}$.

3.4. Приложения комплексных чисел в геометрии

Комплексные числа находят применение в тех областях, в которых рассматриваются векторные величины. В этом случае операции над векторами, выполненные в геометрической форме, заменяются соответствующими операциями над комплексными числами, заданными в алгебраической или тригонометрической формах, которые удобнее выполнять.

Для удобства в дальнейшем обозначим числа, соответствующие точкам M, M_0, M_1, M_2, ..., через $z=x+\mathrm{i}y$, $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$, $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$, $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$, ...

а) Уравнением окружности с центром в точке M_0 радиуса r является $|z-z_0|=r$, или $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$.

Действительно, $M\in\mathscr{C}(M_0,r)$ в том и только в том случае, когда $|\overrightarrow{MM_0}|=r$, то есть $|z-z_0|=r$.

б) Круг с центром в точке M_0 радиуса r задается неравенством $|z-z_0|\le r$.

в) Кольцо, заключенное между окружностями $\mathscr{C}(M_0,r_1)$ и $\mathscr{C}(M_0,r_2)$, $r_1<r_2$, задается неравенством $r_1<|z-z_0|<r_2$ (рис. 6.4).

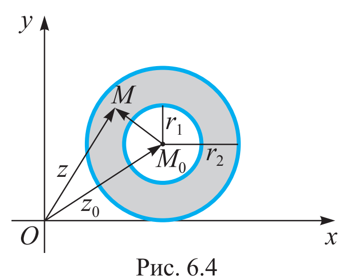


Рис. 6.4

г) Величину угла $M_1M_2M_3$ можно найти из формулы $\mathrm{m}(\angle M_1M_2M_3)=\arg\dfrac{z_3-z_2}{z_1-z_2}+2\pi k$, для некоторого $k\in\mathbb{Z}$.

Формула получается из свойства

$$\arg\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2}=\arg(z_3-z_2)-\arg(z_1-z_2)+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$$

(рис. 6.5).

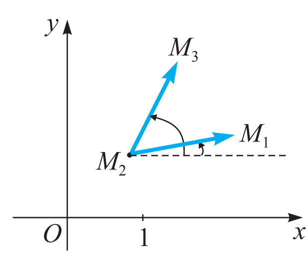


Рис. 6.5

Задания с решением

1. Напишем уравнение окружности радиуса 3 с центром в точке $M_0(1, -2)$.

Решение:

Точка M_0 является образом числа $z_0 = 1 - 2\mathrm{i}$, следовательно, $M \in \mathscr{C}(M_0, 3)$ в том и только в том случае, когда $|z - (1 - 2\mathrm{i})| = 3$, где $M(x, y)$, $z = x + \mathrm{i}y$. Используя формулу модуля комплексного числа, получим:

$\sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} = 3 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9, \quad x, y \in \mathbb{R}.$

2. Изобразим в прямоугольной системе координат xOy геометрическое место точек $M(x, y)$, соответствующих комплексным числам $z = x + \mathrm{i}y$, удовлетворяющим условию $|z - 1 + \mathrm{i}| \le 3$.

Решение:

$|z - 1 + \mathrm{i}| \le 3 \Leftrightarrow |x + \mathrm{i}y - 1 + \mathrm{i}| \le 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |(x-1) + (y+1)\cdot \mathrm{i}| \le 3 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 \le 9 = 3^2.$

Получается круг с центром $A(1, -1)$ радиуса 3 (рис. 6.6).

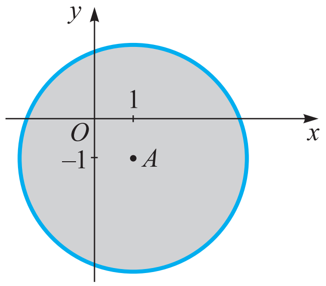


Рис. 6.6

Упражнения и задачи

Б

1. Решите на множестве **C** уравнение:

а) $(1-\mathrm{i})z^6 = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$; б) $(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})z^5 = 1 + \mathrm{i}$; в) $z^6 - 7z^3 + 6 = 0$;
г) $z^8 + z^4 - 2 = 0$; д) $z^{10} + z^5 - 6 = 0$.

2. Решите на множестве **C** уравнение $\left(\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right)^3 + \left(\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right)^2 + \left(\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right) + 1 = 0.$

3. Покажите, что уравнение $(z+\mathrm{i})^n + (z-\mathrm{i})^n = 0$ имеет только действительные решения.

4. Решите на множестве **C** уравнение $(z+1)^6 = (z-1)^6$.

5. Решите на множестве **C** возвратное уравнение:

а) $x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 5x + 1 = 0$; б) $x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0$; в) $x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0$.

Упражнения и задачи на повторение

А

1. Вычислите:

а) $(2 - 3\mathrm{i}) + (-1 + \mathrm{i})$; б) $(4 - 3\mathrm{i}) - (2 - 5\mathrm{i})$; в) $(1 + 3\mathrm{i}) \cdot (2 + 4\mathrm{i})$;
г) $(2 - \mathrm{i}) : (3 - 4\mathrm{i})$; д) $(-\mathrm{i})^3$; е) $(-\mathrm{i})^4$; ж) i^{13}.

2. Покажите, что число является действительным:

а) $(1-\mathrm{i})^{24}$; б) $\left(\dfrac{1}{1-\mathrm{i}} - \dfrac{1}{1+\mathrm{i}}\right)^2$; в) $\dfrac{1}{1+2\mathrm{i}} + \dfrac{1}{1-2\mathrm{i}}$; г) $(\sqrt{3} + \mathrm{i})^6$.

3. Решите на множестве **C** уравнение:
а) $z^2=-9$; б) $z\bar{z}+2(z-\bar{z})=20+8\mathrm{i}$.

4. Вычислите модуль числа $z=\dfrac{8+\mathrm{i}}{7-4\mathrm{i}}$.

5. Пусть $z_1=\sqrt{3}-\mathrm{i}$, $z_2=-2+2\mathrm{i}\sqrt{3}$. Вычислите: а) $\bar{z}_1\cdot z_2$; б) $(z_1:\bar{z}_2)^2$.

6. Вычислите:
а) $(1+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})+\dfrac{5}{1+2\mathrm{i}}$; б) $\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}-(1-\mathrm{i})^{12}$;
в) $\dfrac{(1+2\mathrm{i})^3-(1-2\mathrm{i})^3}{(2-\mathrm{i})^2-(2+\mathrm{i})^2}$; г) $\dfrac{5+\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})}$.

7. Найдите $z=x+\mathrm{i}y$, если $2z=|z|+2\mathrm{i}$.

Б

8. Вычислите $z^4+\dfrac{1}{z^4}$, если известно, что $z^2+z+1=0$.

9. Найдите действительную часть числа $(\sqrt{3}+\mathrm{i})^6$.

10. Решите на множестве **C** уравнение:
а) $z^2-3|z|+3=0$; б) $|z|-2z+2\mathrm{i}=0$; в) $\begin{cases}|z|=|z-2\mathrm{i}|,\\ |z-\mathrm{i}|=|z-1|;\end{cases}$
г) $z^2+|z|=0$; д) $(2+\mathrm{i})z^2-(5-\mathrm{i})z+(2-2\mathrm{i})=0$.

11. Запишите в тригонометрической форме число:
а) $\cos\dfrac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\dfrac{-\pi}{6}$; б) $\sin\alpha-\mathrm{i}\cos\alpha,\ \alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

12. Найдите корни третьей степени из числа:
а) $-2+2\mathrm{i}\sqrt{3}$; б) $-\dfrac{3}{8}(\sqrt{3}+\mathrm{i})$.

13. Вычислите:
а) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^{12}$; б) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^{12}+\left(\dfrac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^{12}$; в) $\dfrac{(1-\mathrm{i}\sqrt{3})^{15}}{(1+\mathrm{i})^2}$.

14. Найдите n, $n\in\mathbb{N}$, для которых верно равенство $(1+\mathrm{i})^n=(1-\mathrm{i})^n$.

15. Пусть заданы комплексные числа $z_0=1+\mathrm{i}$, $z_1=2+\mathrm{i}$, $z_2=2+3\mathrm{i}$, $z_3=3+\mathrm{i}$ и M_0, M_1, M_2, M_3 – их соответствующие образы.
а) Вычислите $|z_1-z_0|$, $|z_2-z_0|$, $|z_3-z_0|$.
б) Выясните, какие из точек M_1, M_2, M_3 принадлежат кругу радиуса 2 с центром в точке M_0.

16*. Покажите, что верно тождество $(x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z})$:
а) $\sin x+\sin 3x+\ldots+\sin(2n-1)x=\dfrac{\sin^2 nx}{\sin x}$;
б) $\cos x+\cos 3x+\ldots+\cos(2n-1)x=\dfrac{\sin 2nx}{2\sin x}$.

17*. Покажите, что для $n\in\mathbb{N}^*$ верно равенство:
а) $1-C_n^2+C_n^4-C_n^6+\ldots=2^{\frac{n}{2}}\cdot\cos\dfrac{n\pi}{4}$; б) $C_n^1-C_n^3+C_n^5-\ldots=2^{\frac{n}{2}}\cdot\sin\dfrac{n\pi}{4}$.

Проверочная работа

А

Время выполнения работы: 45 минут

1. Вычислите: а) $(2-3\mathrm{i})-\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\mathrm{i}\right)$; б) $(5-2\mathrm{i})\left(\frac{1}{3}-\frac{7}{2}\mathrm{i}\right)$; в) $\frac{2-3\mathrm{i}}{7+\mathrm{i}}$. ②

2. Решите на множестве **C** уравнение $(3+2\mathrm{i})z+5z=4$. ①

3. Найдите действительные числа x и y такие, что $(2+3\mathrm{i})x+(5y-2\mathrm{i})(3-\mathrm{i})=3x-4\mathrm{i}$. ②

4. Решите на множестве **C** уравнение $7z^2-2z+1=0$. ②

5. Пусть $z=-1-\mathrm{i}$. ③

а) Вычислите z^2.

б) *Определите букву, соответствующую верному ответу.*

Число z является решением уравнения

A $x^2+(2+\mathrm{i})x-3\mathrm{i}$. **B** $x^2+4x+1=0$.

C $x^2+(2+2\mathrm{i})x+2\mathrm{i}=0$. **D** $x^2+1=0$.

Б

Время выполнения работы: 90 минут

1. Вычислите: ①

а) $(1-2\mathrm{i})^2-\left(\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)$; б) $(5-\mathrm{i})^3-(\overline{2-3\mathrm{i}})(7-\mathrm{i})$; в) $\frac{3-\mathrm{i}}{2\mathrm{i}-7}$.

2. Решите на множестве **C** уравнение $2z^2+\sqrt{7}\,z+7=0$. ①

3. Найдите действительные числа x и y такие, что ①

$$(x+2\mathrm{i})(2+y\mathrm{i})-x(\sqrt{2}-3\mathrm{i})=-x(1+\sqrt{2})+8x\mathrm{i}.$$

4. В прямоугольной системе координат xOy изобразите множество всех точек $M(x, y)$, соответствующих комплексным числам $z=x+\mathrm{i}y$, удовлетворяющим условию $1\le|z-2\mathrm{i}|\le 3$. ①

5. Найдите $z=x+\mathrm{i}y$, если $1-z-z\bar{z}=\mathrm{i}$. ①

6. Вычислите $\frac{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^{12}}{(-2+2\mathrm{i})^5}$. ②

7. Решите на множестве **C** уравнение $2z^3=3\mathrm{i}$. ①

8. Решите на множестве **C** × **C** систему уравнений $\begin{cases}(1+\mathrm{i})z_1+(1-\mathrm{i})z_2=1+\mathrm{i},\\(1-\mathrm{i})z_1+(1+\mathrm{i})z_2=1+3\mathrm{i}.\end{cases}$ ②

Комплексные числа

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbf{C}$

C

Алгебраическая форма

$z = a + bi, \ a, b \in \mathbb{R}$

$i^2 = -1$

Операции

$a + bi + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$

$\dfrac{a + bi}{c + di} = \dfrac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2}$

Свойства

$\overline{z} = a - bi$

Для любых $z, z_1, z_2 \in \mathbf{C}$:

1° $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2$

2° $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$

3° $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}, \quad z_2 \neq 0$

(значит, и $\overline{z}_2 \neq 0$)

4° $z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R}$

5° $z + \overline{z} \in \mathbb{R}$

6° $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

7° $\overline{\overline{z}} = z$

Модуль

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Свойства

1° $|z| = |\overline{z}| = |-z|$

2° $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

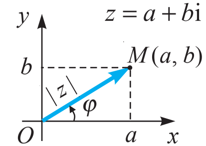
3° $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2|$

4° $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

5° $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}, \quad z_2 \neq 0$

6° $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2|$

Геометрическое изображение



$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{r} \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{r} \end{cases}$

φ – аргумент числа z,

$\arg z \in (-\pi, \pi]$

Тригонометрическая форма

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,

$r \in \mathbb{R}_+^*, \ \varphi \in \mathbb{R}, \ \varphi = \arg z$.

Операции

$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$

$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$

$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \ n \in \mathbb{Z}$

Корни *n*-й степени, $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, из числа z

$\alpha_k \in \left\{\sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \ k = \overline{0, n-1}\right\}$

Корни второй степени из числа $z = a + bi$

1) Для $b \neq 0$,

$\alpha_{1,2} = \pm\left(\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + i\,\mathrm{sgn}\, b\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}\right);$

2) для $b = 0, \ \alpha_{1,2} = \begin{cases} \pm\sqrt{a}, & \text{если } a \geq 0, \\ \pm i\sqrt{|a|}, & \text{если } a < 0, \end{cases}$

где $\mathrm{sgn}\, b = \begin{cases} 1, & \text{если } b > 0, \\ 0, & \text{если } b = 0, \\ -1, & \text{если } b < 0. \end{cases}$

Приложения

Двучленные уравнения

$mz^k + p = 0 \Leftrightarrow z$ – корень k-й степени из $-\dfrac{p}{m}$

Трехчленные уравнения

$mz^{2k} + pz^k + q = 0, \ m \in \mathbf{C}^*$,

$p, q \in \mathbf{C} \Leftrightarrow \begin{cases} mu^2 + pu + q = 0 \\ z^k = u \end{cases}$

В геометрии

Возвратные уравнения

Модуль

7 Элементы высшей алгебры

Цели

- распознавание видов матриц, применение терминологии, соответствующей понятию матрицы;
- применение операций над матрицами (в том числе вычисление обратной матрицы), их свойств в различных контекстах, *в том числе для решения матричных уравнений;
- распознавание в различных ситуациях определителей второго, третьего порядков, их вычисление разными способами; *применение свойств определителей для вычисления определителей порядков больше, чем три;
- распознавание и решение систем линейных уравнений, в том числе однородных, методом Крамера, методом Гаусса, *матричным методом.

§1 Матрицы

1.1. Общие понятия

Два предприятия производят мороженое. Для этого они используют 4 основных компонента: молоко, сливки, сахар и какао. Первое предприятие ежедневно использует: 890 л молока, 400 кг сливок, 250 кг сахара, 90 кг какао. Второе предприятие ежедневно использует: 1500 л молока, 700 кг сливок, 400 кг сахара и 160 кг какао. Транспортное предприятие заключило контракт на доставку данных продуктов указанным предприятиям. Для удобства эти данные записали в следующую таблицу:

$$\begin{pmatrix} 890 & 400 & 250 & 90 \\ 1500 & 700 & 400 & 160 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Таблицы такого вида (названные матрицами) применяются в математике, экономике и в других областях.

Определение. Матрицей размера $m \times n$ $(m, n \in \mathbb{N}^*)$ называется таблица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

содержащая $m \cdot n$ элементов, расположенных в m строках и n столбцах.

Матрицу обозначают: $A = (a_{ij}),\ i = \overline{1, m},\ \ j = \overline{1, n}$.

Элементы $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ составляют i-ю **строку**, а элементы $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}$ – j-й **столбец** матрицы (2). Следовательно, первый индекс (i) элемента a_{ij} (читается а-и-йот (жи); например, a_{12} читается а-один-два, но никак не а-двенадцать) указывает номер строки, а второй индекс (j) – номер столбца, где расположен этот элемент.

Например, размер матрицы (1) равен (2×4), $a_{21}=1500$, $a_{22}=700$.

Задание. Напишите: а) все элементы матрицы (1); б) строки и столбцы матрицы (1).

Множество матриц размера $m\times n$ с элементами из множества $\mathbf{C}$ (соответственно из множеств $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$) обозначают через $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{C})$ (соответственно $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{Q})$, $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{Z})$). В дальнейшем будем рассматривать матрицы с комплексными элементами, если не будут оговорены другие условия.

Существуют различные виды матриц.

Для $m=n$ матрица (2) имеет вид $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ и называется ***квадратной матрицей порядка n***. В этом случае множества $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{C})$, $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, ... соответственно обозначаются $\mathcal{M}_{n}(\mathbf{C})$, $\mathcal{M}_{n}(\mathbb{R})$, ... В квадратной матрице элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ образуют ***главную диагональ***, а элементы $a_{1n}, a_{2\,n-1}, \dots, a_{n-1\,2}, a_{n1}$ – ее ***второстепенную диагональ***. Квадратная матрица, у которой все элементы, расположенные выше (соответственно ниже) главной диагонали, равны нулю, называется ***нижнетреугольной*** (соответственно ***верхнетреугольной***) ***матрицей***.

Для $n=1$ матрица (2) принимает вид $A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ и называется ***вектор-столбцом***, а для $m=1$ получаем $A=(a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n})$ и она называется ***вектор-строкой***. Квадратная матрица порядка n вида $I_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{4} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ называется ***единичной матрицей*** и обозначается также через I.

Если все элементы матрицы (2) равны 0, то A называется ***нулевой матрицей*** и обозначается $O_{m\times n}$ или O, если известен ее вид.

Примеры

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица порядка 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I_3$$

Единичная матрица порядка 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Верхнетреугольная матрица порядка 4

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O_{3\times 2}$$

Нулевая матрица размера 3×2

Если известно, что $A\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{C})$, то матрицу A обозначим $A=(a_{ij})$.

Определение. Две матрицы $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{C})$ называются **равными**, если $a_{ij}=b_{ij}$, $i=\overline{1, m}$, $j=\overline{1, n}$.

1.2. Операции над матрицами

❑ *Сложение матриц, умножение матриц на число, транспонирование матриц*

Определение. Пусть $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})\in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{C})$. **Суммой** матриц A и B называется матрица $D=(d_{ij})\in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{C})$, где $d_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$.

Обозначают: $D=A+B$.

Пример

Суммой матриц $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} -1 & -7 & 5 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ является матрица

$$D=\begin{pmatrix} 2-1 & 1-7 & 3+5 \\ -1+2 & 0-3 & -4+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -6 & 8 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Определение. **Произведением** матрицы $A=(a_{ij})\in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{C})$ на число $\alpha\in\mathbf{C}$ называется матрица $B=(b_{ij})\in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{C})$, где $b_{ij}=\alpha\cdot a_{ij}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$.

Обозначают: $B=\alpha A$.

Замечания. **1.** Матрица $(-1)A$ обозначается через $-A$, так как $A+(-1)A=(-1)A+A=O$. Матрица $-A$ называется ***противоположной матрице A***. Сумму $B+(-A)$ обозначают через $B-A$.

2. Сложение матриц определяется только для матриц одинаковых размеров, однако любую матрицу можно умножить на число.

Пример

Для матриц из предыдущего примера имеем:

$$2A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ -2 & 0 & -8 \end{pmatrix},\quad \mathrm{i}B=\begin{pmatrix} -\mathrm{i} & -7\mathrm{i} & 5\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} & -3\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}.$$

Задание с решением

Вычислим $2X-\mathrm{i}Y+3I_3$, если $X=\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} 0 & 1-\mathrm{i} & 0 \\ 3 & \mathrm{i} & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение:

$$2X-\mathrm{i}Y+3I_3=\begin{pmatrix} 2\mathrm{i} & 0 & -2 \\ 6 & 2 & 0 \\ 4 & -2\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -1-\mathrm{i} & 0 \\ -3\mathrm{i} & 1 & -\mathrm{i} \\ 0 & -2\mathrm{i} & -4\mathrm{i} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 3+2\mathrm{i} & -1-\mathrm{i} & -2 \\ 6-3\mathrm{i} & 6 & -\mathrm{i} \\ 4 & -4\mathrm{i} & 3-4\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Определение. **Транспонированной** к матрице $A=(a_{ij})\in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{C})$ называется матрица $B=(b_{ij})\in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbf{C})$, для которой $b_{ij}=a_{ji}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$.

Если A матрица размера $m\times n$, то транспонированная к ней матрица имеет размер $n\times m$ и обозначается ${}^tA$; ее столбцы (строки) совпадают с соответствующими строками (столбцами) матрицы A.

Примеры

1. Если $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 0\end{pmatrix}$, то ${}^tA=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

2. Пусть $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 3\\ 1 & 4 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$. Возможно ли вычислить $3\cdot{}^tA-5B$?

Так как размеры матриц ${}^tA$ и B (следовательно, $3\cdot{}^tA$ и $5B$) различны, то невозможно вычислить „матрицу“ $3\cdot{}^tA-5B$.

В теореме 1 приведены свойства определенных выше операций над матрицами.

Теорема 1. Для любых матриц $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, $D=(d_{ij})\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{C})$ и любых чисел $\alpha,\beta\in\mathbf{C}$ справедливы равенства:

1° $A+B=B+A$ (сложение коммутативно);

2° $A+(B+D)=(A+B)+D$ (сложение ассоциативно);

3° $A+O=O+A=A$ (O является нейтральным элементом относительно сложения);

4° $A+(-A)=-A+A=O$ (любая матрица имеет противоположную);

5° $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$;

6° $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$;

7° $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$;

8° $1\cdot A=A$;

9° ${}^t(\alpha A)=\alpha\,{}^tA$;

10° ${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB$;

11° ${}^t({}^tA)=A$.

Доказательство

Для доказательства используются определение равенства матриц и свойства операций над комплексными числами. Докажем, например, свойство **2°**.

Матрица $F=A+(B+D)$ того же размера, что и $F'=(A+B)+D$. Элемент f_{ij} матрицы F имеет вид $f_{ij}=a_{ij}+(b_{ij}+d_{ij})$, а соответствующий ему элемент f'_{ij} матрицы F' имеет вид: $f'_{ij}=(a_{ij}+b_{ij})+d_{ij}$. Так как сложение комплексных чисел ассоциативно, то $f_{ij}=f'_{ij}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$. Следовательно, матрицы F и F' равны. ▶

Задание. Докажите остальные свойства.

Свойства операций над матрицами позволяют решить ***матричные уравнения***, т. е. уравнения, в которых неизвестным является матрица.

Задание с решением

Найдем матрицу X, если $2\cdot{}^tA+3X-4I=O$, где $A=\begin{pmatrix}2 & \mathrm{i} & 0\\ 1 & 0 & 3\mathrm{i}\\ -2 & 3 & -\mathrm{i}\end{pmatrix}$.

Решение:

Свойства 2°–4° дают право переносить известные слагаемые в правую часть, поменяв их знак.

Поэтому

$$3X=-2\cdot {}^{t}A+4I_3=-2\cdot\begin{pmatrix}2&1&-2\\ \mathrm{i}&0&3\\ 0&3\mathrm{i}&-\mathrm{i}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&-2&4\\-2\mathrm{i}&0&-6\\0&-6\mathrm{i}&2\mathrm{i}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&-2&4\\-2\mathrm{i}&4&-6\\0&-6\mathrm{i}&4+2\mathrm{i}\end{pmatrix}.\ \text{Отсюда}\ \ X=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0&-2&4\\-2\mathrm{i}&4&-6\\0&-6\mathrm{i}&4+2\mathrm{i}\end{pmatrix}.$$

Умножение матриц

Проиллюстрируем операцию умножения матриц на следующем примере.

Малое предприятие производит игрушки: кукол (к) и медвежат (м).

Объем продаж (тыс. штук) в первом квартале года указан в матрице:

$$A=\begin{array}{cc} \text{к} & \text{м} \\ \end{array}$$
$$A=\begin{pmatrix}5&3\\6&7\\4&8\end{pmatrix}\begin{array}{l}\text{янв.}\\ \text{февр.}\\ \text{март.}\end{array}$$

Цена (в леях) каждой игрушки указана в матрице $B=\begin{pmatrix}50\\90\end{pmatrix}\begin{array}{l}\text{к}\\ \text{м}\end{array}$.

Месячный доход, получаемый предприятием, равен:

$v_{11}=5\cdot 50+3\cdot 90=520$ (в январе),

$v_{21}=6\cdot 50+7\cdot 90=930$ (в феврале),

$v_{31}=4\cdot 50+8\cdot 90=920$ (в марте).

Можно заметить, что v_{11} (соответственно v_{21}, v_{31}) получается путем сложения произведений элементов первой (соответственно второй, третьей) строки матрицы A на соответствующие элементы вектора-столбца B.

Матрица $V=\begin{pmatrix}v_{11}\\v_{12}\\v_{13}\end{pmatrix}$ представляет собой произведение матрицы A на матрицу B.

Определение. Пусть $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{C})$, $B=(b_{ij})\in\mathcal{M}_{n\times k}(\mathbf{C})$. **Произведением матрицы** A на матрицу B (в этом порядке) называется матрица $D=(d_{sp})\in\mathcal{M}_{m\times k}(\mathbf{C})$, элементы которой d_{sp} вычисляются следующим образом:

$$d_{sp}=a_{s1}b_{1p}+a_{s2}b_{2p}+\ldots+a_{sn}b_{np}=\sum_{i=1}^{n}a_{si}b_{ip},\quad s=\overline{1,m},\quad p=\overline{1,k}.$$

Обозначают: $D=A\cdot B$ или $D=AB$.

Другими словами, элемент d_{sp} произведения AB равен сумме произведений элементов строки s матрицы A на соответствующие элементы столбца p матрицы B (кратко говорят также, что элемент d_{sp} равен произведению элементов строки s матрицы A на элементы столбца p матрицы B).

Внимание. Произведение AB определено лишь в случае, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. Число строк (столбцов) матрицы AB равно числу строк (столбцов) матрицы A (B).

Пример

Вычислим $D = A \cdot B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

По определению имеем

$$D = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) + 0\cdot 0 & 1\cdot 0 + 2\cdot 3 + 0\cdot 2 & 1\cdot(-2) + 2\cdot 1 + 0\cdot 0 \\ -2\cdot 1 + 0\cdot(-1) + (-3)\cdot 0 & (-2)\cdot 0 + 0\cdot 3 + (-3)\cdot 2 & (-2)\cdot(-2) + 0\cdot 1 + (-3)\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 0 \\ -2 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Замечание. В отличие от умножения чисел, умножение матриц не коммутативно. В предыдущем примере произведение AB определено, а BA не определено. Но и в случае, когда оба выражения AB и BA имеют смысл, эти произведения не обязательно равны.

Например: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$.

Свойства умножения матриц приведены в следующей теореме.

Теорема 2. Если для матриц A, B, D имеет смысл выражение из одной части равенства, то имеет смысл и выражение из другой части равенства и верно соответствующее равенство:

1° $A(BD) = (AB)D$ (умножение ассоциативно);

2° $A(B + D) = AB + AD$, $(A + B)D = AD + BD$ (умножение дистрибутивно относительно сложения);

3° ${}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA$;

4° $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$, $I_n, A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ (I_n – нейтральный элемент относительно умножения в $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$);

5° $A \cdot O = O$, $O \cdot A = O$.

Доказательство

Эти свойства можно доказать, используя определения равенства матриц и действий над матрицами.

Докажем, например, свойство **1°**.

Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{C})$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbf{C})$, $D = (d_{ij}) \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbf{C})$ – произвольные матрицы, для которых определено произведение $(AB)D$. Сначала заметим, что имеет смысл и произведение $A(BD)$: матрица BD содержит n строк и q столбцов, следовательно, определено произведение $A(BD)$ и в результате получим матрицу размера $m \times q$, то есть того же размера, что и матрица $(AB)D$. Чтобы получить равенство соответствующих элементов, обозначим: $U = AB = (u_{ij})$, $V = BD = (v_{ij})$, $S = (AB)D = (s_{ij})$, $T = A(BD) = (t_{ij})$.

Имеем:

$$u_{il}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kl},\ \ v_{kj}=\sum_{l=1}^{p}b_{kl}d_{lj},\ \ s_{ij}=\sum_{l=1}^{p}u_{il}d_{lj}=\sum_{l=1}^{p}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kl}d_{lj},\ \ t_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}v_{kj}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p}a_{ik}b_{kl}d_{lj},$$

то есть $s_{ij}=t_{ij}$ для $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,q}$, и, в итоге, $A(BD)=(AB)D$. При доказательстве были использованы и свойства операций над комплексными числами. ►

Задание. Докажите остальные свойства.

На множестве $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ определены все введенные выше операции, поэтому, в частности, можно вычислить степени с натуральными показателями произвольной матрицы. Если $n\in\mathbb{N}^*$ и $A\in\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, то $A^n=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{n}$. Легко проверить равенства $A^s\cdot A^t=A^{s+t}$, $(A^s)^t=A^{st}$, $s,t\in\mathbb{N}^*$.

Задания с решением

1. Вычислим $f(A)=A^3-2A^2+3I_2$ для $A=\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\end{pmatrix}$.

Решение:

$$A^2=\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-2\\2&-1\end{pmatrix},\qquad A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}3&-2\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-3\\3&-2\end{pmatrix}.$$

Итак, $f(A)=\begin{pmatrix}4&-3\\3&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6&4\\-4&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&3\end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix}2&-3\\4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-3\\4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-3\\4&5\end{pmatrix}$.

3. Вычислим A^n, если $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Решение:

Воспользуемся методом математической индукции.

Чтобы найти формулу для A^n, вычислим A^2, A^3:

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix},\qquad A^3=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}.$$

Можно предположить, что $A^n=\begin{pmatrix}1&0\\n&1\end{pmatrix}$.

1. Для $n=1$ эта формула верна.

2. Предположим, что $A^k=\begin{pmatrix}1&0\\k&0\end{pmatrix}$, $k\in\mathbb{N}^*$, и вычислим A^{k+1}. Используя предположение, получим: $A^{k+1}=A^k\cdot A=\begin{pmatrix}1&0\\k&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\k+1&1\end{pmatrix}$.

3. На основе метода математической индукции заключаем, что формула $A^n=\begin{pmatrix}1&0\\n&1\end{pmatrix}$ справедлива для $n\in\mathbb{N}^*$.

1.3. Элементарные преобразования матриц. Ступенчатая матрица

Рассматриваемые ниже понятия будут использованы для решения произвольных систем линейных уравнений.

Определение. Говорят, что ненулевая матрица имеет **ступенчатый вид** (**является ступенчатой**), если первый (слева) ненулевой элемент в каждой строке, начиная со второй, расположен правее первого ненулевого элемента из предыдущей строки.
Первые (слева) ненулевые элементы (если существуют) называются **ведущими**.

Примеры

1. Матрица $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ является ступенчатой матрицей. Ведущими элементами являются $a_{11} = 1,\ a_{23} = 3.$

2. Матрица $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ не является ступенчатой.

Замечания. **1.** Если ступенчатая матрица имеет нулевые строки, то они стоят в конце.
2. Квадратная ступенчатая матрица является верхнетреугольной матрицей.

Задание. Покажите, что в ступенчатой матрице:
а) если a_{ij} является ведущим элементом, то $i \le j$;
б) $a_{ij} = 0$, для любых $i > j$.

Для приведения матрицы к ступенчатому виду применим к ее строкам преобразования, подобные тем, которые применяются к уравнениям системы уравнений, чтобы получить систему, равносильную первоначальной.

Определение. **Элементарными преобразованиями строк** матрицы называются следующие преобразования:
1) перестановка двух строк;
2) умножение всех элементов строки на одно и то же ненулевое число;
3) прибавление к элементам некоторой строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и то же число.

Матрицы одинакового размера A и B называются ***эквивалентными***, если одна получается из другой путем применения конечного числа элементарных преобразований строк.

Обозначают: $A \sim B$.

Пример

Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. К ее строкам применим следующие преобразования (обозначенные стрелками):

а) переставим вторую и третью строки

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

б) умножим элементы первой строки на i

$$\begin{array}{c} \mathrm{i} \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathrm{i} & -\mathrm{i} & 0 & 2\mathrm{i} \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix};$$

в) к элементам первой строки прибавим соответствующие элементы третьей строки, умноженные на 2

$$\begin{array}{c} \\ \\ 2 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

г) к элементам первой строки, умноженным на 3, прибавим соответствующие элементы третьей строки, умноженные на 2

$$\begin{array}{c} 3 \\ \\ 2 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 6 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 3. Для любой ненулевой матрицы A существует, по крайней мере, одна такая конечная последовательность элементарных преобразований строк матрицы, что их последовательное выполнение приводит матрицу A к ступенчатому виду.

Пример

Матрицу A из предыдущего примера можно привести к ступенчатому виду следующим образом:

$$\begin{array}{c} 1 \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{array}{c} -2 \\ \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{array}{c} \\ -2 \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{pmatrix}.$$

Замечания. **1.** Существует больше, чем одна последовательность элементарных преобразований строк, с помощью которых из матрицы A получается ступенчатая матрица.

2. Ступенчатая матрица, полученная из A, определена неоднозначно.

1.4. Обратимые матрицы

Известно, что для любого ненулевого числа a существует число a^{-1} такое, что $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = \frac{1}{a} \cdot a = 1$. Ставя задачу найти такую матрицу B, что для заданной матрицы A верно $A \cdot B = B \cdot A = I$, вводится следующее понятие:

Определение. Квадратная матрица A называется **обратимой**, если существует такая квадратная матрица B, что $AB = BA = I$.
Матрица B называется **обратной матрицей** к матрице A и обозначается A^{-1}.

Очевидно, что B и I того же размера, что и A. Из соотношений $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ следует, что A^{-1} также обратима и что обратная ей матрица равна A, т. е. $(A^{-1})^{-1} = A$.

Примеры

Обратными к матрицам $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ являются соответственно

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ и $B^{-1} = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -12 & 8 & 5 \\ 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}$, так как $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и

$B^{-1} \cdot B = B \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Свойства обратимых матриц

1° Матрица, обратная к обратимой матрице, единственна.

Доказательство

Предположим обратное. Пусть B и C – обратные матрицы для A, т. е. $CA = AC = I$ и $BA = AB = I$. Из этих равенств получаем: $B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$. ►

2° Если матрицы $A_1, A_2, ..., A_k \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ обратимы, то матрица $A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_k$ обратима и $(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdot A_{k-1}^{-1} \cdot ... \cdot A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}$.

Доказательство

Имеем:

$$(A_1 \cdot ... \cdot A_k) \cdot (A_k^{-1} \cdot A_{k-1}^{-1} \cdot ... \cdot A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}) = A_1(A_2 \cdot ... \cdot (A_{k-1} \cdot (A_k \cdot A_k^{-1})A_{k-1}^{-1}) \cdot ... \cdot A_2^{-1})A_1^{-1} =$$
$$= A_1(A_2 \cdot ... \cdot (A_{k-1} \cdot A_{k-1}^{-1}) \cdot ... \cdot A_2^{-1})A_1^{-1} = ... = A_1 A_1^{-1} = I_n.$$

Аналогично получаем $(A_k^{-1} \cdot ... \cdot A_1^{-1}) \cdot (A_1 \cdot ... \cdot A_k) = I_n$.

Следовательно, $A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_k$ обратима и $(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdot A_{k-1}^{-1} \cdot ... \cdot A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}$. ►

Элементарные преобразования строк матрицы можно использовать для нахождения обратной матрицы.

Чтобы вычислить матрицу, обратную к матрице $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, можно применить следующий *алгоритм*:

- строим матрицу с n строками и $2n$ столбцами $B = (A \mid I_n)$, записывая справа от A единичную матрицу I_n;
- к матрице B применяем элементарные преобразования строк так, чтобы вместо A получилась единичная матрица I_n.

Матрица, которая получилась на месте I_n, будет A^{-1}.

Замечание. Когда на месте матрицы A получается ступенчатая матрица, у которой на главной диагонали все элементы отличны от нуля, то A обратима. Если в результате применения элементарных преобразований к $B=(A\,|\,I)$ на месте матрицы A получится ступенчатая матрица, содержащая хотя бы один нулевой элемент на главной диагонали, то A не обратима.

Задания с решением

1. Найдем обратную к матрице $A=\begin{pmatrix}2&-1&1\\3&0&-1\\0&2&4\end{pmatrix}$.

Решение:

$$(A\,|\,I_3)=\begin{array}{r}-3\\2\\ \end{array}\left(\begin{array}{rrr|rrr}2&-1&1&1&0&0\\3&0&-1&0&1&0\\0&2&4&0&0&1\end{array}\right)\sim\begin{array}{r}\\2\\-3\end{array}\left(\begin{array}{rrr|rrr}2&-1&1&1&0&0\\0&3&-5&-3&2&0\\0&2&4&0&0&1\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\begin{array}{r}22\\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{rrr|rrr}2&-1&1&1&0&0\\0&3&-5&-3&2&0\\0&0&-22&-6&4&-3\end{array}\right)\begin{array}{l}\\22\\-5\end{array}\sim\left(\begin{array}{rrr|rrr}44&-22&0&16&4&-3\\0&66&0&-36&24&15\\0&0&-22&-6&4&-3\end{array}\right)\begin{array}{l}3\\ \\ \end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{rrr|rrr}132&0&0&12&36&6\\0&66&0&-36&24&15\\0&0&-22&-6&4&-3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{rrr|rrr}1&0&0&\frac{12}{132}&\frac{36}{132}&\frac{6}{132}\\0&1&0&-\frac{36}{66}&\frac{24}{66}&\frac{15}{66}\\0&0&1&\frac{6}{22}&-\frac{4}{22}&\frac{3}{22}\end{array}\right)=(I_3\,|\,A^{-1}).$$

Следовательно, $A^{-1}=\dfrac{1}{22}\begin{pmatrix}2&6&1\\-12&8&5\\6&-4&3\end{pmatrix}$.

Задание. Выполните проверку, вычислив $A\cdot A^{-1}$ и $A^{-1}\cdot A$.

2. Выясним, обратима ли матрица $A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\2&-3&-1\\3&-5&1\end{pmatrix}$.

Решение:

$$(A\,|\,I_3)=\begin{array}{r}-2\\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{rrr|rrr}1&-2&2&1&0&0\\2&-3&-1&0&1&0\\3&-5&1&0&0&1\end{array}\right)\begin{array}{l}-3\\ \\ \end{array}\sim\begin{array}{r}\\-1\\ \end{array}\left(\begin{array}{rrr|rrr}1&-2&2&1&0&0\\0&1&-5&-2&1&0\\0&1&-5&-3&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{rrr|rrr}1&-2&2&1&0&0\\0&1&-5&-2&1&0\\0&0&0&-1&-1&1\end{array}\right).$$

Так как на месте матрицы A получилась ступенчатая матрица, содержащая нулевой элемент на главной диагонали, то A не обратима.

Упражнения и задачи

A

1. Вычислите:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 5 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \\ -2 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 1 & 2-\mathrm{i} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 3\mathrm{i} \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 3 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 2+\mathrm{i} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -\mathrm{i} & 3 \end{pmatrix}$; д) $3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$; е) $2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ \mathrm{i} & 0 & 7 \\ 2 & -\mathrm{i} & 3 \end{pmatrix}$; ж) $2\mathrm{i}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ \mathrm{i} & 2 & \mathrm{i}-1 \\ 5 & \mathrm{i} & -3 \end{pmatrix}$;

з) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; и) $\begin{pmatrix} 7\mathrm{i} & 3 \\ -1 & 8\mathrm{i} \end{pmatrix}-\mathrm{i}\cdot\begin{pmatrix} 2 & \mathrm{i} \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; к) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ \mathrm{i} & 0 & 2 \\ 1 & -2 & \mathrm{i} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Найдите числа x, y, z, u, если $x\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} y & z & 6 \\ 1 & u & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 7 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Вычислите AB, BA (в случае, когда существует соответствующее произведение):

а) $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 7 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 6 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$;

г) $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; д) $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; е) $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Вычислите:

а) $\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^2$; д) $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}^2$; е) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^3$; ж) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^4$.

Какой вывод можно сделать на основе результатов пунктов а) и б)?

5. Вычислите разность A^2-B^2 (в случае, когда существует), где A, B из задания **3**.

6. Найдите такую матрицу X, что $3X+A=2B$, где A, B из задания **3**.

7. Приведите матрицу к ступенчатому виду:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 5 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & -5 & -6 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 25 & 32 & 19 & 46 \end{pmatrix}$.

8. Пять строек C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 получают кирпич от трех поставщиков A, B, C. Цены (сотни леев) на перевозку одного поддона с 1000 кирпичами от каждого поставщика до каждой стройки приведены в матрице T:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 \end{array} \\ T = & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 6 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \end{array}$$

Начиная со следующего месяца цены возрастут на 10%. Используя операцию умножения матрицы на число, найдите новые цены.

9. Число поддонов с кирпичами, перевезенных от поставщиков на стройки (см. задачу **8**) за первые три месяца текущего года, приведены в матрицах M_1, M_2, M_3:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 10 & 8 & 5 \\ 10 & 8 & 4 & 0 & 6 \\ 3 & 3 & 4 & 10 & 7 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдите число поддонов с кирпичами, перевезенных от каждого поставщика на каждую стройку за первый квартал года.

Б

10. Вычислите:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} & 2 \\ 3 & 0 & 2-\mathrm{i} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3\mathrm{i} \\ -2+\mathrm{i} & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$;

г) $3\cdot\begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} & 3 & -1 \\ 0 & \mathrm{i} & 3+\mathrm{i} \end{pmatrix}$; д) $\mathrm{i}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3\mathrm{i} & \mathrm{i} & 4+\mathrm{i} \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$;

ж*) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$; з) $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}^k$, $k \in \mathbb{N}^*$; и) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}^3$, $k \in \mathbb{N}^*$;

к) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 18 & 8 \\ -3 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$; л) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 4 \\ 8 & -7 & -6 & 5 \\ -3 & 4 & 2 & -6 \\ 4 & 3 & -7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 5 \\ 3 & -5 & 4 & 6 \\ 1 & -2 & 2 & -7 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

11. Вычислите $f(A)$, если:

а) $f(X) = X^3 - 2X + I_3$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $f(X) = X^3 - 3X + 2I_3$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

12*. Покажите, что для любых $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ равенство $AB - BA = I$ неверно.

13. Предприятие намерено приобрести три вида машин T_1, T_2, T_3 у трех поставщиков F_1, F_2, F_3. Число машин, предлагаемых каждым поставщиком, дано в следующей матрице:

$$M=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} T_1 & T_2 & T_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{array}.$$

В зависимости от выбранного варианта комплектации машин (2 варианта V_1 и V_2) предприятие может их приобрести у каждого поставщика по следующим ценам (д. ед.):

$$P=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} V_1 & V_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5{,}1 & 4{,}1 \\ 5{,}2 & 4{,}0 \\ 5{,}0 & 3{,}8 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{array}.$$

Найдите суммы, которые заплатит предприятие каждому поставщику (в обоих вариантах).

14. Найдите число ненулевых строк ступенчатой матрицы, полученной из матрицы (для матриц а), б) рассмотрите все случаи в зависимости от значений параметра $\alpha\in\mathbb{R}$):

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & \alpha & 1 \\ 0 & 4 & 8 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 2 \\ 8 & -2 & 6 & 7 \\ 2 & -1 & \alpha & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 37 & 259 & 481 & 407 \\ 25 & 175 & 325 & 275 \\ 19 & 133 & 247 & 209 \end{pmatrix}$.

15. Выясните, обратима ли матрица, и в соответствующих случаях найдите обратную к ней матрицу:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 5 & 20 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

е) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 7 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; и) $\begin{pmatrix} 0 & 1+\mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 1-2\mathrm{i} \\ 1 & 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$;

к) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; л) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 8 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -4 & -3 \\ 3 & 8 & -1 & -6 \end{pmatrix}$; м*) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1}_{n} \end{pmatrix}$.

16. Найдите все матрицы $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, при которых $AX=XA$, где $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

17. Решите матричное уравнение $X^2=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

§2 Определители

С помощью систем линейных уравнений (то есть уравнений вида $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = c,\ c,\ a_i \in \mathbf{C},\ i = \overline{1,\ n})$ можно решать различные задачи. Например, ученик купил тетради и карандаши, всего 22 предмета, заплатив 20 леев. Сколько тетрадей и сколько карандашей он купил, если одна тетрадь стоит 1,5 лея, а один карандаш – 0,5 лея? Обозначим через x число приобретенных тетрадей, а через y – число купленных карандашей. Из условия задачи получим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными: $\begin{cases} x + y = 22, \\ 1{,}5x + 0{,}5y = 20. \end{cases}$ Применив один из известных способов решения (метод подстановки, метод алгебраического сложения и др.), получим $x = 9,\ \ y = 13.$

В общем случае рассматриваются системы линейных уравнений, содержащие больше двух уравнений, неизвестных, и для их решения эти методы мало эффективны. В дальнейшем изложим другие методы решения, которые основываются на понятиях матрицы, определителя матрицы.

Замечание. В этом параграфе слово „матрица“ будет обозначать „квадратная матрица“.

2.1. Определители второго (третьего) порядка. Системы двух (трех) линейных уравнений с двумя (тремя) неизвестными

Произвольная система двух линейных уравнений с двумя неизвестными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \quad a_{ij},\ b_i \in \mathbf{C},\ \ i, j = \overline{1,\ 2}. \tag{1}$$

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ называется ***матрицей системы*** (1).

Предположив, что в каждом уравнении, по крайней мере, один из коэффициентов при неизвестных ненулевой, применим для решения метод алгебраического сложения. Получим систему:

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1. \end{cases} \tag{2}$$

Очевидно, что любое решение системы (1) является решением и для (2).

Пусть $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0,$ тогда получим

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{3}$$

Определение. Число $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ называется **определителем матрицы** (говорят также **детерминант матрицы**) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, или **определителем второго порядка**.

Также обозначают: $\det A$, $|\,A\,|$ или $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. Следовательно, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \Delta.$

Выражение Δ называется ***главным определителем*** системы (1).

Заметим, что числители отношений в (3) также могут быть записаны в виде определителей, а именно: $b_1a_{22}-b_2a_{12}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=\Delta_1$, $a_{11}b_2-a_{21}b_1=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=\Delta_2$, и они называются ***второстепенными определителями*** системы (1).

Отметим, что Δ_1 (или Δ_2) получается из $|A|$ заменой первого (соответственно второго) столбца на столбец $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ свободных членов системы (1).

Пример

Определителем матрицы $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ является число $|A|=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=3\cdot 2-4\cdot 1=2$.

Полученный результат (3) сформулируем в виде следующей теоремы:

Теорема 4 (правило Крамера[1]). Если главный определитель Δ системы (1) отличен от нуля, то система имеет единственное решение: $x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}$.


Габриэль Крамер

Доказательство

Из выполненных выше преобразований следует единственность решения: если $x_1=c_1$, $x_2=c_2$ является решением системы (1), то оно совпадает со значениями для x_1, x_2 из (3). То, что эти значения из (3) являются решениями, проверяется подстановкой в (1). ►

Задание с решением

Методом Крамера решите на множестве $\mathbb{R}$ систему уравнений $\begin{cases} 2x_1-4x_2=3, \\ 3x_1+2x_2=1. \end{cases}$

Решение:

Так как $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=4+12=16\neq 0$, можно применить правило Крамера и получим

$\Delta_1=\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=10$; $\Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-7$. Значит, $x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=\dfrac{5}{8}$, $x_2=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=-\dfrac{7}{16}$.

Ответ: $S=\left\{\left(\dfrac{5}{8}, -\dfrac{7}{16}\right)\right\}$.

Используя метод алгебраического сложения для решения системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными, которая в общем виде записывается:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \quad a_{ij},\ b_i\in \mathbf{C},\ i,j=\overline{1,3}, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases} \tag{4}$$

можно получить уравнения: $\Delta\cdot x_1=\Delta_1$, $\Delta\cdot x_2=\Delta_2$, $\Delta\cdot x_3=\Delta_3$, (5)

[1] Габриэль Крамер (1704–1752) – швейцарский математик.

где $\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$,

$\Delta_1 = b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - a_{13}a_{22}b_3 - a_{12}b_2a_{33} - b_1a_{23}a_{32}$,

$\Delta_2 = a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 - a_{13}b_2a_{31} - a_{11}a_{23}b_3 - b_1a_{21}a_{33}$,

$\Delta_3 = a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - b_1a_{22}a_{31} - a_{11}b_2a_{32} - a_{12}a_{21}b_3$.

Определение. Определителем матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, или **определителем третьего порядка**, называется число

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33},$$

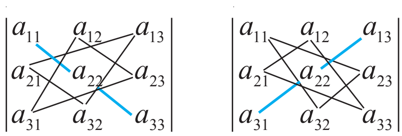
Также обозначают: $\det A$, $|A|$ или $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Пример

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2)\cdot(-4)+1\cdot3\cdot(-3)+0\cdot4\cdot(-1)-(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)-2\cdot3\cdot4-1\cdot0\cdot(-4)=-11.$$

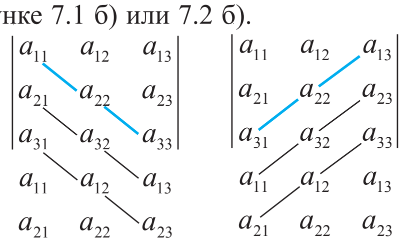
Замечания. **1.** Определитель третьего порядка представляет собой сумму шести членов, каждый из которых равен произведению трех элементов, расположенных по одному в каждой строке и каждом столбце матрицы A (определителя).

2. Для запоминания алгоритма вычисления определителя третьего порядка можно воспользоваться ***правилом треугольников*** (рис. 7.1) или ***правилом Саррюса*** (рис. 7.2): знак плюс ставится перед произведениями элементов, соединенных линией или расположенных в вершинах треугольников на рисунке 7.1 а) или 7.2 а), знак минус ставится перед произведениями элементов, соединенных линией или расположенных в вершинах треугольников на рисунке 7.1 б) или 7.2 б).



а) б)

Рис. 7.1



а) б)

Рис. 7.2

Возвращаемся к решению системы (4). Выражение Δ называется ***главным определителем*** этой системы (определителем матрицы A системы). Заметим, что свободные члены $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ в уравнениях (5) также являются определителями третьего порядка (проверьте!):

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Отметим, что Δ_i $(i=\overline{1,3})$ (названный ***второстепенным определителем***) есть определитель матрицы, полученной из матрицы A системы (4) заменой столбца i на столбец свободных членов системы (4).

Используя равенства (5), получим следующую теорему, аналогичную теореме 4.

Теорема 5 (правило Крамера). Если главный определитель Δ системы (4) отличен от нуля, то система имеет единственное решение:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Задание с решением

Выясним, можно ли применить правило Крамера, и решим систему:

$$\begin{cases}2x_1-\ \ x_2+x_3=\ \ 3,\\ \qquad\ 3x_2-x_3=-1,\\ 4x_1+\ \ x_2-x_3=\ \ 3.\end{cases}$$

Решение:

Так как $\Delta=\begin{vmatrix}2&-1&1\\0&3&-1\\4&1&-1\end{vmatrix}=-6+4-12+2=-12$ и он отличен от нуля, то можно применить правило Крамера. Вычислим второстепенные определители:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}3&-1&1\\-1&3&-1\\3&1&-1\end{vmatrix}=-12;\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}2&3&1\\0&-1&-1\\4&3&-1\end{vmatrix}=0;\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}2&-1&3\\0&3&-1\\4&1&3\end{vmatrix}=-12.$$

Получим решение: $x_1=\dfrac{-12}{-12}=1,\ \ x_2=\dfrac{0}{-12}=0,\ \ x_3=\dfrac{-12}{-12}=1.$

Ответ: $S=\{(1,\,0,\,1)\}$.

Замечание. Решение систем такого вида, для которых их главный определитель равен нулю, рассмотрим в § 3.

2.2. Определители порядка *n*

Метод Крамера решения систем 2 (3) уравнений с 2 (3) неизвестными обобщим для систем n линейных уравнений с n неизвестными $(n\in\mathbb{N},\ n\geq 2)$. Он основывается на понятии определителя порядка n.

Сначала, для удобства, введем в рассмотрение определитель первого порядка, $\mathbf{det}\,(a_{11})=a_{11}$, и изложим другой алгоритм для вычисления определителей третьего порядка (названный ***разложением определителя по строке/столбцу***). Для этого сгруппируем члены определителя, выделив элементы первой строки:

$$|A|=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})+a_{12}(a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}).$$

Этот результат запишем в следующей форме:

$$|A|=a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}.$$

Определители второго порядка из этого выражения называются ***дополнительными минорами*** соответствующих элементов a_{1j}, записанных перед ними: это определители матриц, полученных из первоначальной матрицы удалением строки 1 и столбца j. Дополнительный минор элемента a_{ij} обозначается через $\overline{M}_j^i$. Используя эти обозначения, для определителя матрицы A получим выражение:

$$|A| = a_{11}(-1)^{1+1}\overline{M}_1^1 + a_{12}(-1)^{1+2}\overline{M}_2^1 + a_{13}(-1)^{1+3}\overline{M}_3^1,$$

которое называется ***разложением определителя по первой строке***. Аналогично получаются разложения определителя третьего порядка по любой строке или любому столбцу. Например, легко проверяется равенство:

$$|A| = a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{23}(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33}(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{13}(-1)^4\overline{M}_3^1 + a_{23}(-1)^5\overline{M}_3^2 + a_{33}(-1)^6\overline{M}_3^3,$$

которое представляет собой ***разложение определителя по третьему столбцу***.

Аналогично получаются разложения определителя по любой другой строке/столбцу.

Задание. Напишите разложение определителя третьего порядка по другим строкам, столбцам.

Задание с решением

Вычислим $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}$, разложив его по некоторому столбцу.

Решение:

Разложим определитель по первому столбцу (нулевой элемент упрощает вычисления):

$$\Delta = 2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2) + 0 + 4\cdot(-2) = -12.$$

Понятие определителя квадратной матрицы порядка n (сокращенно – определитель порядка n), $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, введем индуктивно, предположив, что известно понятие определителя любого порядка, не превосходящего $n-1$, и понятие дополнительного минора элемента a_{ij} матрицы $A = (a_{ij})$, $i, j = \overline{1, n}$. Это определитель матрицы, полученной из A удалением строки i и столбца j; он обозначается через $\overline{M}_j^i$.

Определение. **Определителем квадратной матрицы** $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, $n \geq 2$, или **определителем порядка** n, называется число

$$\Delta = a_{11}(-1)^{1+1}\overline{M}_1^1 + a_{12}(-1)^{1+2}\overline{M}_2^1 + \ldots + a_{1n}(-1)^{1+n}\overline{M}_n^1 = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\overline{M}_j^1. \qquad (6)$$

Также обозначают: $|A|$, $\det A$ или $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Следующее понятие очень полезно для вычисления определителей, а также для решения других задач.

Определение. **Алгебраическим дополнением** элемента a_{ij} матрицы $A=(a_{ij})\in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, $n\geq 2$, (определителя $|A|$) называется число $A_{ij}=(-1)^{i+j}\overline{M}^{\,i}_{j}$.

Например, дополнительным минором элемента a_{23} определителя $|A|$ из предыдущего примера является $\overline{M}^{\,2}_{3}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 4 & 1\end{vmatrix}=6$, а его алгебраическое дополнение есть число $A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot 6=-6$.

Используя это понятие, придадим формуле (6) вид:

$$\Delta = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\ldots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}\cdot A_{1j}. \qquad (7)$$

Т. е. определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов первой строки на соответствующие алгебраические дополнения.

Формулы (6), (7) (для $n=3$ они совпадают с полученной ранее формулой разложения определителя третьего порядка по первой строке) называются ***разложением определителя по первой строке***.

Задание с решением

Вычислим определитель $\begin{vmatrix}3 & 1 & 2 & -3\\ -1 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 3 & 0\end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix}3 & 1 & 2 & -3\\ -1 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 3 & 0\end{vmatrix}=3\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0 & 1 & -2\\ 0 & 4 & 5\\ 0 & 3 & 0\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-1 & 1 & -2\\ 0 & 4 & 5\\ 0 & 3 & 0\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}+$$

$$+(-3)\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 3\end{vmatrix}=3\cdot 0+(-1)\cdot(+15)+2\cdot 0+(-3)\cdot(-1)\cdot 0=-15.$$

Если в формулах (6), (7) можно было бы заменить элементы первой строки элементами другой строки (как и для определителя третьего порядка), то предыдущий определитель можно было бы вычислить проще: разложив его по четвертой строке, пришлось бы вычислить только один дополнительный минор, так как остальные умножаются на нули. Следующая теорема показывает, что такое разложение возможно.

Теорема 6. Пусть $A=(a_{ij})\in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, $n\geq 2$. Для любых $i=\overline{1,n}$ справедливо равенство:

$$\Delta=|A|=a_{i1}(-1)^{i+1}\overline{M}^{\,i}_{1}+a_{i2}(-1)^{i+2}\overline{M}^{\,i}_{2}+\ldots+a_{in}(-1)^{i+n}\overline{M}^{\,i}_{n}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}. \qquad (8)$$

Эта формула называется ***разложением определителя по строке*** i.

Задание с решением

Вычислим определитель $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$.

Решение:

Применим теорему 6, разложив определитель по 4-й строке (так как она содержит больше нулевых элементов).

$$|A| = 0\cdot(-1)^{4+1}\overline{M}_1^4 + 0\cdot(-1)^{4+2}\overline{M}_2^4 + 3\cdot(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{4+4}\overline{M}_4^4 = (-3)\cdot 5 = -15.$$

Идея разложения определителя по строке, содержащей большее число нулей, наводит на мысль о разложении определителя по столбцу. Следующая теорема подтверждает эту возможность.

Теорема 7. Пусть $A=(a_{ij})\in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, $n\ge 2$. Для любых $j=\overline{1,n}$ справедлива формула:

$$\Delta = |A| = a_{1j}(-1)^{1+j}\overline{M}_j^1 + a_{2j}(-1)^{2+j}\overline{M}_j^2 + \ldots + a_{nj}(-1)^{n+j}\overline{M}_j^n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}.$$

Эта формула называется ***разложением определителя по столбцу*** j.

Задание с решением

Разложим определитель из предыдущего задания по второму столбцу.

Решение:

$$|A| = 1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{2+2}\overline{M}_2^2 + 0\cdot(-1)^{3+2}\overline{M}_2^3 + 0\cdot(-1)^{4+2}\overline{M}_2^4 = -1\cdot 15 = -15.$$

2.3. Свойства определителей

Для вычисления определителей порядка больше, чем 3, согласно определению, в общем случае приходится вычислять большое количество определителей третьего порядка. Например: 4 определителя для определителя четвертого порядка, 20 определителей для определителя пятого порядка. По этой и по другим причинам докажем ряд свойств определителей, позволяющих упростить их вычисление и применение.

1° Определитель матрицы A равен определителю транспонированной матрицы ${}^tA$.

Это свойство можно доказать, вычислив $|A|$, $|{}^tA|$ для $n=2$, $n=3$ или используя математическую индукцию для $n>3$ (определитель $|A|$ нужно разложить по первой строке, а $|{}^tA|$ – по первому столбцу).

Замечание. Из этого свойства следует, что любое свойство, справедливое для строк определителя, будет верным и для столбцов. Поэтому следующие свойства будут сформулированы только для строк, хотя они верны и для столбцов.

2° Если матрица B получается из матрицы A перестановкой двух строк, то $|B| = -|A|$.

Доказательство

Применим метод математической индукции: для $k = 2$ свойство проверяется непосредственно, а переход от $k-1$ к k, $k \geq 3$, осуществляется разложением определителя по строке, отличной от тех, которые переставляются. ►

Пример

Переставляя строки 2 и 4 матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, получим матрицу

$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Имеем: $|A| = 3 \cdot (-1)^{4+3} \overline{M}_3^4 = -15$, $|B| = 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$

$= -(-15) = 15$. Deci, $|B| = -|A|$.

3° Если матрица A содержит две одинаковые строки, то ее определитель равен нулю.

Доказательство

Действительно, переставляя эти две строки, получим матрицу B, для которой, ввиду свойства 2°, $|B| = -|A|$. На самом деле $B = A$, так как переставили две одинаковые строки. Следовательно, $|A| = |B| = -|A|$, то есть $2|A| = 0$ и поэтому $|A| = 0$. ►

4° Сумма произведений элементов некоторой строки матрицы на соответствующие алгебраические дополнения элементов любой другой строки равна 0:

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \ldots + a_{in}A_{kn} = 0 \quad (i \neq k).$$

Доказательство

Рассмотрим следующий определитель: $\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{k1} & \ldots & a_{kn} \\ a_{i1} & \ldots & a_{in} \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow \text{строка } k \\ \leftarrow \text{строка } i \\ \\ \end{matrix}$.

Выражение из левой части равенства представляет собой разложение по строке k этого определителя.

Так как этот определитель содержит две одинаковые строки, то он равен нулю. ►

5° Если все элементы некоторой строки матрицы A умножить на число α, то получится матрица A', определитель которой равен произведению α на определитель матрицы A.

Также говорят: общий множитель элементов некоторой строки можно вынести перед знаком определителя.

Доказательство

Элементы a'_{ij} строки i матрицы A' имеют вид: $a'_{ij}=\alpha\cdot a_{ij}$. Разложив определитель $|A'|$ по строке i, получим: $|A'|=\sum\limits_{j=1}^{n}(\alpha\cdot a_{ij})\cdot A_{ij}=\alpha\cdot\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot A_{ij}=\alpha\cdot|A|$. ►

Пример

$$\begin{vmatrix}2\mathrm{i} & 3\mathrm{i}\\ 5 & 8\end{vmatrix}=16\mathrm{i}-15\mathrm{i}=\mathrm{i},\ \begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 8\end{vmatrix}=1,\ \text{значит,}\ \begin{vmatrix}2\mathrm{i} & 3\mathrm{i}\\ 5 & 8\end{vmatrix}=\mathrm{i}\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 8\end{vmatrix}.$$

6° Если все элементы некоторой строки матрицы равны нулю, то определитель этой матрицы равен нулю.

Это свойство получается из свойства 5° для $\alpha=0$.

Аналогично свойству 5° доказывается свойство 7°.

7° Если матрица содержит две пропорциональные строки, то ее определитель равен нулю. Строки i и s некоторой матрицы A называются ***пропорциональными***, если $a_{ij}=\beta\cdot a_{sj}$, $j=\overline{1,n}$.

Пример

$$\begin{vmatrix}2 & \mathrm{i} & -3\\ 4 & 2\mathrm{i} & -6\\ 7 & \pi & \mathrm{i}\sqrt{3}\end{vmatrix}=0,\ \text{так как строки 1 и 2 пропорциональны.}$$

8° Если к элементам некоторой строки матрицы A прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число α, то получится матрица, определитель которой равен определителю матрицы A.

Доказательство

Пусть к элементам строки k матрицы A прибавили соответствующие элементы строки s, умноженные на число α. Элементы k–й строки полученной матрицы B имеют вид: $a_{kj}+\alpha a_{sj}$. Разложив определитель $|A'|$ по строке k, получим

$$|A'|=\sum_{j=1}^{n}(a_{kj}+\alpha\cdot a_{sj})A_{kj}=\sum_{j=1}^{n}a_{kj}A_{kj}+\alpha\cdot\sum_{j=1}^{n}a_{sj}A_{kj}=|A|+\alpha\cdot 0=|A|.$$ ►

Пример

Если к элементам второй строки матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & -6\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix}$ прибавим соответствующие элементы третьей строки, умноженные на – 2, получим матрицу $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix}$.

Таким образом, $|A|=|B|=0$.

9° Пусть элементы строки i матрицы A имеют вид $a_{ij}=a'_{ij}+a''_{ij}$, $j=\overline{1,n}$. Если через A' (соответственно A'') обозначим матрицу, полученную из A заменой элементов строки i на a'_{ij} (соответственно на a''_{ij}), $j=\overline{1,n}$, то $|A|=|A'|+|A''|$.

Доказательство

Разложив определитель $|A|$ по строке i, получим:

$$|A|=\sum_{j=1}^{n}(a'_{ij}+a''_{ij})\cdot(-1)^{i+j}\overline{M}_j^i=\sum_{j=1}^{n}a'_{ij}(-1)^{i+j}\overline{M}_j^i+\sum_{j=1}^{n}a''_{ij}(-1)^{i+j}\overline{M}_j^i=|A'|+|A''|,$$

так как дополнительные миноры элементов $a'_{ij}+a''_{ij}$, a'_{ij}, a''_{ij} матриц A, A' и соответственно A'' совпадают. ►

2.4. Вычисление определителей

❶ Один из способов вычисления определителя – это применение его определения (разложение по строке (столбцу)).

❷ Эффективным способом вычисления определителя порядка n является его сведение к вычислению одного определителя порядка $n-1$. Используются свойства определителей, в особенности свойство 8°, для выполнения преобразований, в результате которых одна строка или столбец будет содержать не более одного ненулевого элемента.

Во избежание громоздких вычислений рекомендуется сложить (вычесть) некоторые строки (столбцы), чтобы один из элементов соответствующей строки (столбца) равнялся 1 или –1.

Задание с решением

Вычислим $\Delta=\begin{vmatrix}1-\mathrm{i} & 2 & 3\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 2+\mathrm{i} & 0\\ 0 & 5 & -2+\mathrm{i}\end{vmatrix}$.

Решение:

К первой строке прибавим вторую: $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 4+\mathrm{i} & 3\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 2+\mathrm{i} & 0\\ 0 & 5 & -2+\mathrm{i}\end{vmatrix}$. Теперь проще получить нуль вместо i: ко второй строке прибавим первую, умноженную на –i.

Тогда: $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 4+\mathrm{i} & 3\mathrm{i}\\ 0 & 3-3\mathrm{i} & 3\\ 0 & 5 & -2+\mathrm{i}\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3-3\mathrm{i} & 3\\ 5 & -2+\mathrm{i}\end{vmatrix}=(3-3\mathrm{i})(-2+\mathrm{i})-15=-18+9\mathrm{i}.$

❸ Другой способ вычисления определителей заключается в их приведении к треугольному виду (все элементы, расположенные выше (ниже) главной или второстепенной диагонали, равны нулю).

Для вычисления определителей треугольного вида применяются формулы:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0\\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & 0\\ \hdashline a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & \dots & a_{n-1\,n-1} & 0\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n\,n-1} & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\dots a_{nn}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\,n-1} & 1_{1n}\\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2\,n-1} & a_{2n}\\ \hdashline 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn}\end{vmatrix};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2\,n-1} & 0 \\ \hdashline a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & \dots & & \\ a_{n1} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot a_{1n}a_{2\,n-1}\dots a_{n1} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ \hdashline a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n\,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Их легко получить, если разложить Δ_1 (соответственно Δ_2) и остальные определители, полученные в дальнейшем, по строке (столбцу), содержащей лишь один ненулевой элемент.

Например:

$$\Delta_1 = (-1)^2 a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \hdashline a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \dots & 0 \\ \hdashline a_{n3} & a_{n4} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \dots = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

Примеры

1. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_{13}a_{22}a_{31} \cdot (-1)^{\frac{3(3-1)}{2}} = -a_{13}a_{22}a_{31}.$

2. Определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ (соответствующая матрица) не имеет треугольной формы, однако, используя свойства определителей, его можно преобразовать и привести к такому виду:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 6 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 8 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 8 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 8(-1)^{\frac{4\cdot 3}{2}} \cdot (-1)(-3) = 24.$$

Некоторые определители произвольного порядка n можно вычислить также способом приведения к треугольному виду.

Задание с решением

Вычислим определитель порядка n: $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \hdashline 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$

Решение:

К первой строке прибавим все остальные строки, затем вынесем общий множитель $(n-1)$ и, наконец, к каждой второй, третьей, …, n-й строке прибавим полученную первую строку, умноженную на –1:

$$\Delta=\begin{vmatrix} n-1 & n-1 & \dots & n-1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \hdotsfor{4} \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}=(n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \hdotsfor{4} \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} -1 \\ \\ \\ \end{matrix}=(n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}=(n-1)\cdot(-1)^{n-1}.$$

Теорема 8 (определитель произведения матриц). Если $A, B\in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, то $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$.

Пример

Если $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, то $AB=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Имеем $|A|=1$, $|B|=-2$, $|AB|=-2$.

2.5. Обратимые матрицы (продолжение)

Используя определители и алгебраические дополнения элементов квадратной матрицы, приведем еще один критерий обратимости матрицы и другой метод вычисления обратной матрицы (см. п. 1.4, § 1).

Теорема 9. Квадратная матрица обратима в том и только в том случае, когда ее определитель отличен от нуля.

Доказательство

Необходимость следует из теоремы 8. Так как матрица A обратима, то $I=A\cdot A^{-1}$, и, значит, $1=|I|=|A|\cdot|A^{-1}|$, откуда следует, что $|A|\neq 0$ и (очень важно!) $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}=|A|^{-1}$.

В процессе доказательства *достаточности* получается формула для вычисления обратной матрицы. Именно, покажем, что

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \hdotsfor{4} \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Действительно, на основе свойства 4° и формулы разложения определителя по строке (столбцу) для $n\geq 2$ получаем:

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \hdotsfor{4} \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} A_{i1}a_{i1} & \sum\limits_{i=n}^{n} A_{i1}a_{i2} & \ldots & \sum A_{i1}a_{in} \\ \sum\limits_{i=n}^{n} A_{i2}a_{i1} & \sum\limits_{i=n}^{n} A_{i2}a_{i2} & \ldots & \sum\limits_{i=n}^{n} A_{i2}a_{in} \\ \hdashline \sum\limits_{i=1}^{n} A_{in}a_{i1} & \sum\limits_{i=n}^{n} A_{in}a_{i2} & \ldots & \sum\limits_{i=n}^{n} A_{in}a_{in} \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} |A| & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & |A| & \ldots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \ldots & |A| \end{pmatrix} = \frac{|A|}{|A|} I = I.$$

Аналогично доказывается, что $A \cdot A^{-1} = I_n$.

Для $n=1$, из условия $|A| = |a_{11}| \neq 0$ получаем $A^{-1} = \left(\dfrac{1}{a_{11}}\right)$, следовательно, $AA^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$. ▶

Задание с решением

Найдем матрицу, обратную $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение:

Вычислим определитель матрицы: $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 6 + 4 + 12 = 22.$

Обратная матрица существует, так как $|A| \neq 0$. Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -12; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3.$$

Согласно формуле (9), получим: $A^{-1} = \dfrac{1}{22}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -12 & 8 & 5 \\ 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

Применяя обратную матрицу, можно решить различные матричные уравнения. Если матрицы A и B имеют одинаковое число строк, то уравнение $AX = B$, где A – квадратная матрица, для которой $\det A \neq 0$, можно решить следующим образом. Умножив слева обе части уравнения на A^{-1}, получим последовательно матричные равенства: $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$, $(A^{-1}A)X = A^{-1}B$, $I \cdot X = A^{-1}B$, $X = A^{-1}B$.

Например, для матрицы A из предыдущего примера и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ получаем

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -12 & 8 & 5 \\ 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 14 & -5 \\ 4 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Задание. а) Покажите, что решением уравнения $XA = B,\ |A| \neq 0,$ является матрица $X = B \cdot A^{-1}$.

б) Покажите, что решением уравнения $AXB = C,\ A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}),\ |A| \cdot |B| \neq 0,$ является матрица $X = A^{-1}CB^{-1}$.

Задания с решением

1. Для производства 1 т конфет „Маска“ необходимо 0,2 т какао продуктов и 0,5 т сахара, а для производства 1 т конфет „Грильяж“ используется 0,14 т какао продуктов и 0,6 т сахара (не считая другие компоненты). Найдем, сколько получается конфет каждого вида, если израсходовано 0,15 т какао продуктов и 0,5 т сахара.

Решение:

Обозначим через x_1 и x_2 количество (в тоннах) полученных конфет „Маска“ и „Грильяж“ соответственно. Составим систему уравнений: $\begin{cases} 0{,}2x_1 + 0{,}14x_2 = 0{,}15 \\ 0{,}5x_1 + 0{,}6x_2 = 0{,}5 \end{cases}$ или, в матричной форме, $AX = B$, где $A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}14 \\ 0{,}5 & 0{,}6 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0{,}15 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$.

Вычислим: $A^{-1} = \dfrac{1}{0{,}05}\begin{pmatrix} 0{,}6 & -0{,}14 \\ -0{,}5 & 0{,}2 \end{pmatrix}$.

Умножив слева равенство $AX = B$ на A^{-1}, получим

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{0{,}05}\begin{pmatrix} 0{,}6 & -0{,}14 \\ -0{,}5 & 0{,}2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}15 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \frac{1}{0{,}05}\begin{pmatrix} 0{,}02 \\ 0{,}025 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, было произведено 0,4 т конфет „Маска“ и 0,5 т конфет „Грильяж“.

2. Площадь треугольника $M_1M_2M_3$, где $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$, может быть вычислена по формуле: $\mathcal{A}_{M_1M_2M_3} = \left| \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right|$. В частности, точки M_1, M_2, M_3 коллинеарны, если соответствующий определитель равен нулю.

Даны точки $M_1(2, 3)$, $M_2(3, 0)$, $M_3(2, 2)$. Вычислим площадь треугольника $M_1M_2M_3$ или покажем, что соответствующие точки коллинеарны.

Решение:

Определитель $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ равен –1, следовательно, данные точки не коллинеарны.

Площадь $\Delta M_1M_2M_3$ равна $\dfrac{1}{2} \cdot |-1| = \dfrac{1}{2}$ (кв. ед.).

Упражнения и задачи

А

1. Вычислите определитель:

а) $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} a & 2 \\ 2a & 3 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 5\mathrm{i} & 2 \\ \mathrm{i} & -3 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 2-\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 3 & 5-\mathrm{i} \end{vmatrix}$;

е) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 8 & 1 & 9 \\ 4 & 6 & 3 \end{vmatrix}$; ж) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$; з) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -7 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$; и) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$; к) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix}$.

2. Методом Крамера решите на множестве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x_1-3x_2=4, \\ x_1+2x_2=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1+8x_2=1, \\ 7x_1+11x_2=3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 4x_1-2x_2=5, \\ x_1+3x_2=2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 5x_1+3x_2=3, \\ x_1-x_2=6; \end{cases}$

д) $\begin{cases} ax_1+bx_2=c, \\ -bx_1+ax_2=d, \end{cases}$ $a\cdot b\neq 0,\ a\neq b;$ е) $\begin{cases} 2x_1-x_3=1, \\ 2x_1+4x_2-x_3=1, \\ -x_1+8x_2+3x_3=2; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=2, \\ -2x_1+x_2+x_3=3, \\ x_1+x_2+x_3=6; \end{cases}$

з) $\begin{cases} 3x_1-x_2=5, \\ -2x_1+x_2+x_3=0, \\ 2x_1-x_2+4x_3=15; \end{cases}$ и) $\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3=4, \\ 3x_1+x_2-3x_3=7, \\ x_1+x_2-2x_3=3; \end{cases}$ к) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1, \\ x_1+2x_2+2x_3=2, \\ 2x_1+3x_2+3x_3=3. \end{cases}$

Б

3. Вычислите определитель:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

4. Применяя свойства определителей, докажите равенство:

а) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x+b_1y+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x+b_2y+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x+b_3y+c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix}=(1-x^2)\cdot\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

5. Если поменять знаки всех элементов определителя на противоположные, то как изменится значение определителя порядка: а) 3; б) n?

6. Как изменится значение определителя матрицы $A\in\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, если каждый ее элемент заменить на сопряженный ему?

7. Как изменится значение определителя порядка n, если каждый его элемент умножить на одно и то же ненулевое число α?

8. Покажите, что определитель $\begin{vmatrix} z_1 & \overline{z}_1 & c_1 \\ z_2 & \overline{z}_2 & c_2 \\ z_3 & \overline{z}_3 & c_3 \end{vmatrix}$, где $c_i\in\mathbb{R}$, $z_i\in\mathbf{C}$, является чисто мнимым числом или равен нулю.

9. Решите на множестве **C** × **C** систему уравнений:

а) $\begin{cases}(3-\mathrm{i})x+(4+2\mathrm{i})y=2+6\mathrm{i},\\(4+2\mathrm{i})x-(2+3\mathrm{i})y=5+4\mathrm{i};\end{cases}$ б) $\begin{cases}(2+\mathrm{i})x+(2-\mathrm{i})y=6,\\(3+2\mathrm{i})x+(3-2\mathrm{i})y=8;\end{cases}$ в) $\begin{cases}x+\mathrm{i}y-2z=10,\\x-y+2\mathrm{i}z=20,\\\mathrm{i}x+3\mathrm{i}y-(1+\mathrm{i})z=30.\end{cases}$

10. Вычислите площадь треугольника $M_1M_2M_3$ или покажите, что точки M_1, M_2, M_3 коллинеарны:

а) $M_1(2, 1)$, $M_2(3, 4)$, $M_3(1, 6)$; б) $M_1(0, 0)$, $M_2(2, 1)$, $M_3(4, 2)$;

в) $M_1(-2, 4)$, $M_2(0, -3)$, $M_3(1, 7)$; г) $M_1(5, 4)$, $M_2(11, 0)$, $M_3(0, 3)$.

11. Используя свойства определителей, вычислите:

а) $\begin{vmatrix}a & 1 & a^2\\ b & 1 & b^2\\ c & 1 & c^2\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}x & a & a\\ a & x & a\\ a & a & x\end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix}a^2 & b^2 & c^2\\ c & b & a\\ b & c & a\end{vmatrix}$.

12. Используя алгебраические дополнения элементов, найдите обратную к матрице:

а) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 1\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -2 & -6\end{pmatrix}$.

13. Решите матричные уравнения $AX = B$, $YA = B$, где A из **12** а) и B из **12** б).

14. Решите на множестве ℝ уравнение:

а) $\begin{vmatrix}x-2 & 1 & -1\\ x & -3 & 1\\ 2 & -5 & x+1\end{vmatrix}=0$; б) $\begin{vmatrix}a-x & a & a\\ a & a-x & a\\ a & a & a-x\end{vmatrix}=0$.

15. Вычислите определитель, записав результат в виде произведения:

а) $\begin{vmatrix}a^2 & b^2 & c^2\\ bc & ac & ab\\ b^2+c^2 & a^2+c^2 & a^2+b^2\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\\ bc & ca & ab\end{vmatrix}$.

§3 Системы линейных уравнений

3.1. Основные понятия

В этом параграфе найдем условия, при которых произвольная система линейных уравнений имеет решения, а также изложим некоторые методы нахождения множества решений такой системы.

Произвольная система m линейных уравнений с n неизвестными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad a_{ij},\ b_i \in \mathbf{C},\ i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n}. \tag{1}$$

Числа a_{ij}, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, называются коэффициентами при неизвестных, а $b_1, b_2, \ldots, b_m$ – ***свободными членами*** системы.

Коэффициенты при неизвестных и свободные члены образуют две матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \hdotsfor{5} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$ названные соответственно ***матрицей системы*** и ***расширенной матрицей системы***.

Определение. Упорядоченная система n комплексных чисел $(c_1, \ldots, c_n)$ называется **решением** системы (1), если подставив вместо x_i соответственно c_i, $i = \overline{1, n}$, каждое уравнение системы (1) обращается в истинное высказывание, то есть

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot c_j = b_i, \quad i = \overline{1, m}.$$

Замечание. Для удобства решение системы с n неизвестными иногда запишем (считая порядок $x_1, \ldots, x_n$ установленным) в виде вектор-столбца $X_0 = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ из $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbf{C})$, подразумевая, что подставляем $x_1 = c_1, \ldots, x_n = c_n$.

Система линейных уравнений называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение, и ***несовместной*** в противном случае. Совместная система называется ***определенной***, если она имеет единственное решение, и ***неопределенной***, если она имеет более одного решения.

Примеры

Рассмотрим системы уравнений $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 = -1; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3, \\ 4x_1 - 8x_2 = 12; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3, \\ x_1 - 2x_2 = 4. \end{cases}$

Первая система совместна и определена, так как ее главный определитель ненулевой, и, по правилу Крамера, она имеет единственное решение. Вторая система совместна и неопределенна: ее решениями являются, например, $x_1 = 1,\ x_2 = -1;\ x_1 = -3,\ x_2 = -3.$ Последняя система несовместна, так как выражения из левых частей уравнения совпадают, а свободные члены – нет.

Решить систему линейных уравнений означает:

а) выяснить, совместна ли она;

б) при положительном ответе найти множество ее решений.

В общем случае будем считать, что систему уравнений решаем на множестве **C**.

В матричном виде система (1) записывается:

$$AX = B, \tag{2}$$

где $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{C})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbf{C})$.

Рассмотрим еще одну систему линейных уравнений:

$$A_1 X = B_1, \tag{3}$$

причем матрицы A_1, B_1 одинаковых размеров с A, B соответственно.

Определение. Системы (2) и (3) называются **равносильными**, если их множества решений равны (в частности, если обе не имеют решений).

Пример

Системы $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$ и $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$ имеют общее решение $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, однако они не равносильны, так как $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ является решением второй системы, но не является решением первой системы.

Лемма. Если $A, A_1 \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{C})$, $B, B_1 \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbf{C})$ и существует обратимая матрица $U \in \mathcal{M}_m(\mathbf{C})$ такая, что $UA = A_1$, $UB = B_1$, то системы (2) и (3) равносильны.

Доказательство

Пусть система (2) совместна, $X_0 \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbf{C})$ – произвольное решение (2), то есть верно равенство $AX_0 = B$. Умножая это равенство слева на U, получим $UAX_0 = UB$, или $A_1X_0 = B_1$. Следовательно, любое решение системы (2) является решением для (3). Аналогично получаем, что любое решение системы (3) является решением для (2), так как $A = U^{-1}A_1$, $B = U^{-1}B_1$. Следовательно, системы (2) и (3) равносильны. ►

3.2. Методы решения систем *n* линейных уравнений с *n* неизвестными

❑ *Матричный метод*

Если в системе (1) $m = n$, то получаем следующую ***систему***:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{4}$$

В матричной форме она записывается

$$AX = B, \tag{5}$$

где $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ – квадратная матрица системы, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbf{C})$.

Теорема 10. Если матрица A системы (4) обратима, то система имеет единственное решение

$$X_0 = A^{-1}B. \qquad (6)$$

Доказательство

Умножив слева равенство (5) на A^{-1}, последовательно получим: $A^{-1}(AX) = A^{-1} \cdot B$, $(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B$, $I \cdot X = A^{-1} \cdot B$, $X = A^{-1} \cdot B$. Согласно лемме из п. 3.1, системы (5) и $X = A^{-1} \cdot B$ равносильны: в роли U из леммы выступает обратимая матрица A^{-1}. ►

Задание с решением

Решим на множестве $\mathbf{C} \times \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ систему уравнений: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

Решение:

Матрицей системы является $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Составим матрицу $(A \mid I)$ и выполним элементарные преобразования строк с тем, чтобы вместо матрицы A получить (если возможно) матрицу I:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Элементы главной диагонали ступенчатой матрицы, полученной из A, отличны от нуля, поэтому (на основе леммы 2 из § 1 об обратимости ступенчатой квадратной матрицы) A обратима. Продолжим преобразования до тех пор, пока получим нули выше главной диагонали: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$. Следовательно, $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Согласно (6) решением является $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, т. е. $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1$.

Ответ: $S = \{(1, 0, 1)\}$.

❑ ***Правило Крамера*** (полученное в § 2 для $n = 2,\ n = 3$) – другой метод решения систем (4). Используя свойство 4° из пункта 2.3, формулу (7) из пункта 2.2 и формулу (9) для A^{-1} из пункта 2.5, с помощью (6) получим формулы для вычисления значений неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Именно: $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot B=\dfrac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\dots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\dots&A_{n2}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\A_{1n}&A_{2n}&\dots&A_{nn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=\dfrac{1}{|A|}\begin{pmatrix}\sum\limits_{i=1}^{n}A_{i1}b_i\\\sum\limits_{i=1}^{n}A_{i2}b_i\\\dots\\\sum\limits_{i=1}^{n}A_{in}b_i\end{pmatrix}$, откуда:

$$x_j=\frac{1}{|A|}\sum_{i=1}^{n}A_{ij}b_i=\frac{1}{|A|}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}\phantom{a_{11}}&\phantom{a_{12}}&&j&&\phantom{a_{1n}}\end{array}\\\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&b_1&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&b_2&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&b_n&\dots&a_{nn}\end{vmatrix}\end{array}=\frac{\Delta_j}{\Delta},\quad j=\overline{1,n},$$

где Δ_j – определитель матрицы, полученной из A заменой столбца j столбцом свободных членов системы (4). Определитель $\Delta=|A|$ называется ***главным***, а $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ – ***второстепенными определителями системы*** (4). Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 11 (правило Крамера). Если определитель Δ матрицы системы (4) отличен от нуля, то система совместно определена и ее решением является:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\ \dots,\ x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Пример

Применив теорему 11 к системе уравнений из предыдущего примера, получим $\Delta=-3,\ \Delta_1=-3,\ \Delta_2=0,\ \Delta_3=-3$, т. е. $x_1=1,\ x_2=0,\ x_3=1$.

3.3. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

В отличие от рассмотренных выше методов, ***метод Гаусса*** (названный и ***методом последовательного исключения неизвестных***), изложенный далее, можно применить к произвольной системе линейных уравнений (1). Для решения применим следующие преобразования, в результате которых получаем равносильные системы:

- перестановка двух уравнений;
- умножение обеих частей уравнения на одно и то же ненулевое число;
- прибавление к обеим частям некоторого уравнения соответствующих частей другого уравнения, умноженных на одно и то же число.

Очевидно, выполнение этих преобразований над уравнениями системы равносильно выполнению соответствующих элементарных преобразований строк расширенной матрицы $\overline{A}$ системы (см. пункт 1.3).

Следующие примеры помогут глубже вникнуть в суть метода Гаусса; они представляют два типа систем, получаемых в результате применения этого метода.

1. Решим на множестве **C** систему линейных уравнений $\begin{cases}2x_1-x_2+x_3=3,\\\qquad x_2-x_3=-1,\\\qquad\quad 2x_3=1.\end{cases}$

Такая система называется ***треугольной***, так как ее матрица является верхнетреугольной с ненулевыми элементами на главной диагонали.

Такие системы легко решить: из последнего уравнения вычисляем значение последнего неизвестного и подставляем во все остальные уравнения, из предпоследнего полученного уравнения вычисляем значение предпоследнего неизвестного и т. д., пока не вычислим значение первого неизвестного из первого уравнения. Итак, система имеет единственное решение.

В данном примере из последнего уравнения получаем $x_3 = \frac{1}{2}$; подставляем значение x_3 в первые два уравнения и из второго уравнения получим $x_2 = -\frac{1}{2}$; в итоге, подставляя значение x_2 в первое уравнение, получим $x_1 = 1$. Следовательно, система имеет единственное решение: $x_1 = 1,\ x_2 = -\frac{1}{2},\ x_3 = \frac{1}{2}$.

Ответ: $S = \left\{\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$.

2. Решим на множестве **C** систему уравнений $\begin{cases} 2x_1 - \ \ x_2 + x_3 = 1, \\ \qquad\ \ 3x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

Заметим, что система не содержит уравнения вида $0 = b,\ b \neq 0,$ число неизвестных больше, чем число уравнений, и матрица системы имеет ступенчатый вид. Говорят, что такая система ***трапециевидная***, или имеет ступенчатый вид (другими словами, система линейных уравнений имеет ступенчатый вид (трапециевидная), если его матрица является ступенчатой, число *r* ненулевых строк матрицы системы равно числу ненулевых строк расширенной матрицы и *r* меньше числа неизвестных системы). Неизвестные, коэффициенты которых являются ведущими элементами в ступенчатой матрице, считают, как правило, ***главными неизвестными***, а остальные – ***второстепенными***, или ***свободными***.

В рассматриваемом примере главными неизвестными будем считать x_1 и x_2, а x_3 – свободным.

Первоначальная трапециевидная система приводится к треугольному виду по отношению к $x_1,\ x_2$ следующим образом:

В левых частях всех уравнений оставляем слагаемые, содержащие главные неизвестные, а остальные слагаемые переносим в правые части, поменяв при этом знаки:

$$\begin{cases} 2x_1 - \ \ x_2 = 1 - x_3, \\ \qquad\ \ 3x_2 = 1 + x_3. \end{cases}$$

Переменной x_3 придаем произвольное значение $\alpha,\ \alpha \in \mathbf{C},$ и, решив систему, получим так называемое *общее решение* системы: $x_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\alpha,\ x_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\alpha,\ x_3 = \alpha,\ \alpha \in \mathbf{C}.$ Очевидно, что для каждого значения α однозначно определяются значения для главных неизвестных. Например, для $\alpha = 0$ получаем решение системы $x_1 = \frac{2}{3},\ x_2 = \frac{1}{3},\ x_3 = 0,$ называемое *частным решением* системы.

Для $\alpha = -1$ получаем $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = -1$ – другое частное решение системы.

Параметру α, следовательно, и свободному неизвестному x_3, можно придать бесконечное множество значений из **C**, поэтому первоначальная система неопределенна.

***Замечания.* 1.** Главные неизвестные определяются неоднозначно: важно, чтобы относительно главных неизвестных получилась треугольная система. Например, в предыдущей системе главными неизвестными могут быть и $x_1,\ x_3$.

2. Системы треугольного и системы ступенчатого видов совместны: треугольная система имеет единственное решение, а трапециевидная система имеет бесконечное множество решений.

Совместность систем линейных уравнений определяется следующей теоремой.

Теорема 12. Пусть $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{C})$, $B \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbf{C})$ и $\overline{A} = (A \mid B)$. Система линейных уравнений $AX = B$ совместна в том и только в том случае, если ступенчатые матрицы A_1, $\overline{A_1}$, полученные из A и $\overline{A}$ соответственно, имеют одинаковое число ненулевых строк.

Доказательство

Необходимость. Предположив, что система $AX = B$ совместна, приведем ее к ступенчатому виду.

Пусть $\overline{A_1} = \begin{pmatrix} a'_{11} & \dots & a'_{1p} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ \hdashline 0 & \dots & a'_{rp} & \dots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b'_{r+1} \\ \hdashline 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b'_m \end{pmatrix}$ – ступенчатая матрица, полученная из расширенной матрицы с помощью элементарных преобразований строк, $a'_{rp} \neq 0$.

Так как система $AX = B$ совместна, то ввиду равносильности совместной будет и система с расширенной матрицей $\overline{A_1}$. Следовательно, $b_i = 0$ для любых $i = \overline{r+1, m}$, т. е. число ненулевых строк матрицы A_1 равно числу ненулевых строк матрицы $\overline{A_1}$.

Достаточность. Если число r ненулевых строк матрицы A_1 равно числу ненулевых строк матрицы $\overline{A_1}$, то матрица $\overline{A_1}$ имеет вид $\begin{pmatrix} a'_{11} & \dots & a'_{1p} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ \hdashline 0 & \dots & a'_{rp} & \dots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $a'_{rp} \neq 0$.

Система уравнений с расширенной матрицей $\overline{A_1}$ равносильна системе $AX = B$ и имеет треугольный вид (в случае $r = n$) или ступенчатый вид (в случае $r < n$), поэтому является совместной системой. ▶

Задания с решением

1. Установим совместность системы $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + \ \ x_3 - 4x_4 = 1, \\ \qquad\ \ x_2 - \ \ x_3 + 2x_4 = 2, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 1. \end{cases}$

Решение:

Составляем расширенную матрицу $\overline{A}$ системы и приводим ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & 6 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ступенчатая матрица $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, полученная из матрицы системы, а также матрица $\overline{A_1}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & -4 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, полученная из расширенной матрицы, имеют по 2 ненулевые строки. Следовательно, первоначальная система совместна.

2. Если бы в предыдущем примере в третьем уравнении свободный член был бы равен 5, например, то вместо последней матрицы получилось бы: $\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 1 & -4 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4\end{array}\right)$.

В таком случае ступенчатые матрицы, полученные из матрицы системы и ее расширенной матрицы, имели бы 2 и соответственно 3 ненулевые строки. Следовательно, система несовместна.

Идея приведения расширенной матрицы системы к ступенчатому виду, использованная при доказательстве теоремы 12, составляет основу ***метода Гаусса*** решения систем линейных уравнений. Заметим, что этот способ удобно запрограммировать на компьютере. Он состоит в следующем:

1. Составляем расширенную матрицу $\overline{A}=(A \mid B)$ системы (1).
2. Элементарными преобразованиями строк приводим эту матрицу к ступенчатому виду: $\overline{A_1}=(A_1 \mid B_1)$, где A_1 – ступенчатая матрица, полученная из A.
3. Если число ненулевых строк матрицы A_1 не равно числу ненулевых строк матрицы $\overline{A_1}$, то система несовместна.
4. Если число ненулевых строк матрицы A_1 равно r и равно числу ненулевых строк матрицы $\overline{A_1}$, то система совместна. Рассмотрим два возможных случая.

4.1. Число r, оговоренное в п. 4, равно числу неизвестных. В данном случае ступенчатая матрица A_1 является верхнетреугольной матрицей и все элементы ее главной диагонали отличны от нуля. Соответствующая система является треугольной, поэтому она имеет единственное решение.

4.2. Число r, оговоренное в п. 4, меньше числа n неизвестных. В таком случае матрица A_1 содержит больше столбцов, чем ненулевых строк. Составляем систему уравнений, которая имеет расширенную матрицу $\overline{A_1}$ (эта ступенчатая система равносильна системе (1)). Далее определяем главные неизвестные (их число равно r), свободные неизвестные, которые обозначим $x_p=\alpha,\ x_q=\beta, \ldots,$ где $\alpha, \beta, \ldots$ – параметры из **C**. В левых частях всех уравнений оставляем слагаемые, содержащие главные неизвестные, а остальные слагаемые переносим в правые части с противоположными знаками. Так как $r<n,$ то среди слагаемых из правых частей будет фигурировать хотя бы один параметр. После этих преобразований получится треугольная система r уравнений с r неизвестными (главными). Для каждой системы значений параметров однозначно определяются значения главных неизвестных. Полученная система значений для $x_1, \ldots, x_n$ является ***частным решением*** системы. Таким образом, получим бесконечно много решений, так как параметры могут принимать бесконечное множество значений.

Замечание. Чтобы задать бесконечное множество решений, полученное в случае 4.2., поступим следующим образом. Из приведенной системы $A_1X = B_1$ выражаем главные неизвестные x_k, x_l, ... через параметры α, β, ... Полученная система соотношений:

$$\begin{cases} x_k = f_k(\alpha, \beta, ...) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_l = f_l(\alpha, \beta, ...) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_p = \alpha \\ x_q = \beta \\ \dots\dots \end{cases} \qquad (7)$$

называется ***общим решением*** системы (1), и задает множество всех решений этой системы в том смысле, что любое решение системы получается из (7) для некоторых значений параметров.

Задания с решением

1. Решим на множестве $\mathbf{C}\times\mathbf{C}\times\mathbf{C}$ систему уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 10, \\ x_1 - x_2 + 7x_3 = 8. \end{cases}$

Если система неопределенна, найдем также одно ее частное решение.

Решение:

Составим расширенную матрицу $\overline{A}$ системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{array}{c} -1\;-2 \\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 10 \\ 1 & -1 & 7 & 8 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ -1 \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 6 \\ 0 & -3 & 9 & 6 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ \frac{1}{3} \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отметим, что число ненулевых строк ступенчатых матриц A_1, $\overline{A}_1$, полученных из матрицы системы и ее расширенной матрицы соответственно, равны, поэтому система совместна. Так как это число меньше числа неизвестных, то система неопределенна. Для нахождения общего решения составляем систему, соответствующую ступенчатой матрице $\overline{A}_1$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2, \\ \qquad -x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$$

Главными неизвестными можно выбрать x_1 и x_2, тогда свободным неизвестным будет x_3. Обозначив свободное неизвестное через α, $\alpha \in \mathbf{C}$, получим систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 + 2\alpha, \\ \qquad -x_2 = 2 - 3\alpha. \end{cases}$$

Решив эту систему относительно x_1, x_2, найдем общее решение:
$x_1 = 6 - 4\alpha$, $x_2 = -2 + 3\alpha$, $x_3 = \alpha$.

Частное решение получим, если возьмем, например, $\alpha = 0$, откуда найдем $x_1 = 6$, $x_2 = -2$, то есть решением будет $x_1 = 6$, $x_2 = -2$, $x_3 = 0$.

Ответ: $S = \{(6 - 4\alpha,\ -2 + 3\alpha,\ \alpha) \mid \alpha \in \mathbf{C}\}$;
частное решение: $x_1 = 6$, $x_2 = -2$, $x_3 = 0$.

2. Решим на множестве $\mathbf{C}\times\mathbf{C}\times\mathbf{C}$ систему уравнений $\begin{cases} x_1+\alpha x_2-x_3=1, \\ 2x_1-x_2+3x_3=\alpha, \\ x_1+x_2=0, \end{cases}$ рассмотрев все возможные случаи (в зависимости от значений параметра $\alpha\in\mathbf{C}$).

Решение:

Составим расширенную матрицу и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{array}{c}\\ \\ -1\;\;-2\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & \alpha \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & \alpha \\ 0 & -1+\alpha & -1 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{c}\\ 1-\alpha \\ -3\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & \alpha \\ 0 & 0 & 6-3\alpha & -3+\alpha-\alpha^2 \end{array}\right).$$

1) Если $6-3\alpha\neq 0,$ то есть $\alpha\neq 2,$ то система совместно определена (так как имеет треугольный вид) и ее решением является:

$$x_1=\frac{3+\alpha}{6-3\alpha},\quad x_2=\frac{3+\alpha}{-6+3\alpha},\quad x_3=\frac{\alpha^2-\alpha+3}{-6+3\alpha}.$$

2) Если $6-3\alpha=0,$ то есть $\alpha=2,$ то полученная система $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=1 \\ 2x_1-x_2+3x_3=2 \\ x_1+x_2=0 \end{cases}$ несовместна, так как ступенчатая матрица A_1, полученная из матрицы системы, имеет 2 ненулевые строки, а $\overline{A_1}$ содержит 3 ненулевые строки: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right).$

3. Решим на множестве $\mathbf{C}$ систему уравнений $\begin{cases} x_1+2\mathrm{i}x_2-x_3+(1+\mathrm{i})x_4=3+2\mathrm{i}, \\ 2x_1+x_2+(-2+\mathrm{i})x_3+2\mathrm{i}x_4=4+5\mathrm{i}, \\ x_1+2\mathrm{i}x_2+(-1+\mathrm{i})x_3+(2+\mathrm{i})x_4=3. \end{cases}$

Решение:

Напишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{array}{c}-2\\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2\mathrm{i} & -1 & 1+\mathrm{i} & 3+2\mathrm{i} \\ 2 & 1 & -2+\mathrm{i} & 2\mathrm{i} & 4+5\mathrm{i} \\ 1 & 2\mathrm{i} & -1+\mathrm{i} & 2+\mathrm{i} & 3 \end{array}\right)\begin{array}{c}-1\\ \\ \\ \end{array}\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2\mathrm{i} & -1 & 1+\mathrm{i} & 3+2\mathrm{i} \\ 0 & 1-4\mathrm{i} & \mathrm{i} & -2 & -2+\mathrm{i} \\ 0 & 0 & \mathrm{i} & 1 & -2\mathrm{i} \end{array}\right).$$

Получим систему ступенчатого вида: $\begin{cases} x_1+2\mathrm{i}\,x_2-x_3+(1+\mathrm{i})x_4=3+2\mathrm{i}, \\ (1-4\mathrm{i})x_2+\mathrm{i}x_3-2x_4=-2+\mathrm{i}, \\ \mathrm{i}x_3+x_4=-2\mathrm{i}. \end{cases}$

В качестве главных неизвестных возьмем $x_1,\ x_2,\ x_4,$ а свободным неизвестным – x_3 и решим систему $\begin{cases} x_1+2\mathrm{i}x_2+(1+\mathrm{i})x_4=3+2\mathrm{i}+x_3 \\ (1-4\mathrm{i})x_2-2x_4=-2+\mathrm{i}-\mathrm{i}x_3 \\ x_4=-2\mathrm{i}-\mathrm{i}x_3 \end{cases}$ относительно $x_1,\ x_2,\ x_4.$

Обозначив $x_3=\alpha,$ получим общее решение $x_1=\dfrac{1}{17}(-5+48\mathrm{i}-(6+7\mathrm{i})\alpha),$ $x_2=\dfrac{1}{17}(10-11\mathrm{i}+(12-3\mathrm{i})\alpha),\ x_3=\alpha,\ x_4=-2\mathrm{i}-\mathrm{i}\alpha.$

Ответ: $S=\left\{\left(\dfrac{1}{17}(-5+48\mathrm{i}-(6+7\mathrm{i})\alpha),\ \dfrac{1}{17}(10-11\mathrm{i}+(12-3\mathrm{i})\alpha),\ \alpha,\ -2\mathrm{i}-\alpha\mathrm{i}\right)\middle|\ \alpha\in\mathbf{C}\right\}.$

Замечание. Выражения из правых частей общего решения определены неоднозначно, так как они зависят от выполненных элементарных преобразований, от выбора главных неизвестных. Однако во всех общих решениях в выражениях из правых частей фигурирует одинаковое число $(n-r)$ свободных неизвестных (параметров), где n – число неизвестных, r – число ненулевых строк в ступенчатой матрице.

Например, если в задании **1** объявить главными неизвестными x_1, x_3, то, обозначив $x_2=\alpha$, получим систему $\begin{cases} x_1-2x_3=2-2\alpha \\ \quad 3x_3=2+\alpha, \end{cases}$ откуда получаем следующее общее решение $x_1=\frac{1}{3}(10-4\alpha),\ x_2=\alpha,\ x_3=\frac{1}{3}(2+\alpha),\ \alpha\in\mathbf{C}$.

3.4. Системы однородных линейных уравнений

Система (1) линейных уравнений называется ***однородной***, если свободные члены всех уравнений равны нулю, то есть уравнения однородны. В общем виде система m однородных уравнений с n неизвестными записывается:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n=0. \end{cases} \tag{8}$$

Замечание. Расширенная матрица однородной системы отличается от матрицы системы нулевым столбцом (последним), поэтому ступенчатые матрицы, полученные из этих матриц, будут содержать одинаковое число ненулевых строк.

Применив имеющиеся результаты, получим следующие *утверждения*:

1. Любая однородная система линейных уравнений совместна; она имеет по крайней мере нулевое решение: $x_1=0,\ x_2=0,\ \ldots,\ x_n=0$.

2. Если число ненулевых строк ступенчатой матрицы, полученной из матрицы системы (8), равно числу неизвестных, то система совместна и определена, и ее единственным решением является: $x_1=0,\ x_2=0,\ \ldots,\ x_n=0$.

3. Если число ненулевых строк ступенчатой матрицы, полученной из матрицы системы (8), меньше числа неизвестных, то система неопределенна. В частности, это имеет место, если число уравнений в (8) меньше числа неизвестных или когда $m=n$ и определитель матрицы системы равен нулю.

Задание с решением

Решим на множестве $\mathbf{C}\times\mathbf{C}\times\mathbf{C}$ систему уравнений $\begin{cases} 3x_1+5x_2+6x_3=0, \\ 3x_1+8x_2+24x_3=0, \\ 4x_1+5x_2-2x_3=0. \end{cases}$

Решение:

Для решения системы приведем матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\begin{array}{r} -4 \\ \\ 3 \end{array}\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 3 & 8 & 24 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{array}{l} -1 \\ \\ \\ \end{array} \sim \begin{array}{r} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} \end{array}\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 18 \\ 0 & -5 & -30 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Система, соответствующая ступенчатой матрице, имеет вид $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0, \\ \qquad\quad x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$

Главными неизвестными удобно считать x_1 и x_2. Обозначим свободное неизвестное $x_3 = \alpha$ и решим систему $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = -6\alpha \\ \qquad\quad x_2 = -6\alpha \end{cases}$ относительно x_1, x_2. Получим общее решение $x_1 = 8\alpha,\ x_2 = -6\alpha,\ x_3 = \alpha,\ \alpha \in \mathbf{C}$.

Ответ: $S = \{(8\alpha,\ -6\alpha,\ \alpha) \mid \alpha \in \mathbf{C}\}$.

Упражнения и задачи

А

1. Выясните, какие из следующих систем чисел являются решением системы линейных уравнений $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 2 \\ x + 2y + z = -1 \end{cases}$ (неизвестные упорядочиваем (x, y, z)):

а) (0, 0, 0); б) (1, 1, 1); в) (0, –1, 1); г) (3, 1, 0).

2. Выясните, можно ли применить правило Крамера, и решите на множестве **C** систему уравнений:

а) $\begin{cases} -x + 8y + 3z = 2, \\ 2x + 4y - z = 1, \\ 2x - z = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 4y + 9z = 16, \\ 2x + 2y + 2z = 2, \\ x + 2y + 3z = 4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + 4z = -7, \\ -2x + y + 3z = -7, \\ x + 2y - 2z = 7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x + 4y + 6z = -2, \\ 2x + y + z = 2, \\ x + 3y + z = 5. \end{cases}$

3. Методом Гаусса решите на множестве **C** систему уравнений:

а) $\begin{cases} -x + 4y - 7z = 5, \\ x - y - 2z = -2, \\ 2y - 6z = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 2y - z = 0, \\ 2x + y = 0, \\ -x - y + 2z = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + y = 0, \\ x + 2z = 4, \\ 2x + y + z = 2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} -x + y + 3z = 1, \\ x + 2y + 2z = 3, \\ 7x + y - 6z = 5; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x + y = 1, \\ x + y + z = 4, \\ y + z = -3; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x - y + z = 0, \\ 2y - z = 1. \end{cases}$

4. а) Олег заплатил за 3 бутерброда и 2 кофе 21,5 лея, а его друг заплатил за 2 бутерброда и один кофе 13 леев. Найдите цены одного бутерброда и одной чашки кофе, составив систему линейных уравнений.

б) В другой раз Олег заплатил 20 леев за 2 булочки, чашку чая и 2 пирожные, а его друг заплатил 22 лея за одну булочку, чашку чая и 3 пирожные. Составьте систему линейных уравнений, соответствующую этой ситуации. Можно ли в этом случае найти цены купленных продуктов? Почему?

Б

5. Методом Крамера решите на множестве **C** систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x_1 + (1 + \mathrm{i})x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + \mathrm{i}x_2 + 2x_3 = \mathrm{i}, \\ x_2 + (2 - \mathrm{i})x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4. \end{cases}$

6. Установите, совместна ли система уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 6x_3 = 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 = -6; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x_1 - \lambda x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_3 = \lambda, \\ x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

7. Решите на множестве **C** совместные системы из задания **6**.

8. Решите на множестве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ однородную систему уравнений (для систем в), г) в зависимости от значений $\lambda\in\mathbb{R}$):

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x_1 - \lambda x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_3 = 0, \\ x_2 + 2x_3 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + \lambda x_3 = 0, \\ x_1 - \lambda x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

Упражнения и задачи на повторение

A

1. Вычислите:

а) $3A - 2\mathrm{i}B$; б) $\mathrm{i}A + 2B$,

где $A = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & -1 \\ 0 & 2 & 3\mathrm{i} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 & 0 \\ 1 & \mathrm{i} & \mathrm{i}+1 \end{pmatrix}$.

2. Найдите произведения:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -2\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{i} & -3\mathrm{i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 6 \\ 5 & 2 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 5 & -1 & 6 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 8 & 9 & 7 \\ -4 & -5 & -3 \end{pmatrix}$.

3. Найдите значения параметров $x, y\in\mathbb{R}$, для которых верны равенства:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2x-3y \\ -7x+6y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y-x-11 \\ 19 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} y+3x & -1 \\ 3 & y-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+1 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

4. Вычислите $A^2 - 5A + 7I_2$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Преобразуйте матрицу и приведите к ступенчатому виду. Найдите число ее ненулевых строк:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 6 & -4 \\ 5 & 2 & -7 & 5 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} \mathrm{i} & -1 & 0 \\ 1 & \mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}$.

6. Найдите размер матрицы X, удовлетворяющей равенству $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = (3 \quad 4)$.

7. Вычислите определитель матрицы A:

а) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3\mathrm{i} & -2\mathrm{i} \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -3 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 6 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 5 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$;

д) $A = \begin{pmatrix} a+b & b-a & b \\ b+c & c-b & c \\ c+d & a-c & a \end{pmatrix}$; е) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2\mathrm{i} \\ 2 & 1 & 3\mathrm{i} \\ 4 & 5 & -2\mathrm{i} \end{pmatrix}$; ж) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; з) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

8. Методом Гаусса или методом Крамера решите на множестве **C** систему уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4, \\ 3x_1 - x_2 = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + (1-\mathrm{i})x_2 = 1, \\ 2x_1 - \mathrm{i}x_2 = \mathrm{i}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x_2 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ 4x_1 + 8x_2 - 11x_3 = 17, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 1; \end{cases}$ д) $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x_1 - 4x_2 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 = 4, \\ 7x_1 + 10x_2 = 12; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 + 3x_3 = 10; \end{cases}$ з) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 12, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -10. \end{cases}$

9. В коллекции ученика 8 насекомых: пауки и жучки. У пауков по 8 ножек, а у жучков по 6. Найдите, сколько пауков и сколько жучков в коллекции, если все насекомые имеют 54 ножки?

10. Площадь прямоугольного треугольника 30 см^2, а его гипотенуза равна 13 см. Найдите длины катетов этого треугольника.

11. Найдите значения параметра $\alpha \in \mathbf{C}$, для которых система имеет только нулевое решение:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + \alpha x_3 = 0, \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + \alpha x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

Б

12. Пусть $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{7} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$. Найдите одно значение $\lambda \in \mathbb{R}$, для которого $\lambda \cdot A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{N})$.

13. Найдите значения параметров $x, y, u, v \in \mathbb{R}$, для которых верны равенства:

а) $\begin{pmatrix} x+1 & x+y \\ 0 & x-2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -x-1 \\ 0 & 9-2x \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -x & y \\ u+1 & v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y & x \\ 3v & 1-2u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$.

14. Пусть A – квадратная матрица порядка 3, элементы которой $a_{ij} \in \{0, 1\}$. Найдите наибольшее значение $\det A$.

15. Найдите $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

16. Пусть A – квадратная матрица порядка 3, элементы которой $a_{ij} \in \{-1, 1\}$.
а) Покажите, что $\det A$ – четное число.
б) Найдите наибольшее и наименьшее значение, которое может принимать $\det A$.

17. Приведите матрицу к ступенчатому виду и найдите число ее ненулевых строк:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & -3 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \\ 5 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

18. Вычислите произведения AB, BA (если существуют):

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -6 & -3 & 3 \\ -5 & -2 & 2 \\ -13 & -7 & 4 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 3 & 1+\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$.

19. Найдите значения параметра $\alpha \in \mathbb{R}$, для которых матрица $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}$ обратима, и найдите обратную к ней матрицу.

20. Найдите матрицу X, удовлетворяющую равенству $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

21. Вычислите определитель матрицы A:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

22. Можно показать, что объем параллелепипеда $A_1A_2A_3A_4A_1'A_2'A_3'A_4'$, где $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_4(x_3, y_3, z_3)$, $A_1'(x_4, y_4, z_4)$, вычисляется по формуле:

$$\mathscr{V} = \operatorname{mod} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}.$$

Вычислите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$, $\overrightarrow{A_1A_1'}$, если $A_1(1, 1, 1)$, $A_2(1, 2, 2)$, $A_4(0, 4, 2)$, $A_1'(5, 6, 8)$.

23. Решите на **C** уравнение:

а) $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & x \\ x & 0 & 1 & 1 \\ 1 & x & 0 & 1 \\ 1 & 1 & x & 0 \end{vmatrix} = 0$.

24. Найдите матрицу X, $X \neq I_3$, перестановочную с $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

25. Исследуйте совместность системы $\begin{cases} x_1 + \alpha x_2 = 4 - \alpha \\ \alpha x_1 + 4x_2 = 4, \ \alpha \in \mathbf{C}, \end{cases}$ в зависимости от значений параметра $\alpha \in \mathbb{R}$.

26. Вычислите матрицы, обратные к матрицам A из задания **7** (если таковые существуют).

27. Вычислите матрицы, обратные к матрицам A из задания **21** (если таковые существуют).

28. Методом Гаусса или методом Крамера решите на множестве **C** систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 10; \end{cases}$
б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 4, \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 7; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -7, \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 - 5x_4 = -8, \\ x_2 - x_3 - x_4 = -1; \end{cases}$
г) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \alpha x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + \alpha x_3 = 1; \end{cases}$
е) $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1, \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9, \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = \lambda. \end{cases}$

29. Исследуйте совместность (в зависимости от $\lambda \in \mathbf{C}$) и решите однородную систему:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$
б) $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0; \end{cases}$
в) $\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ \lambda x_1 - 2x_2 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

30. В двух сосудах содержится раствор одной и той же кислоты, но различной концентрации: в первом сосуде 75 л, а во втором – 50 л раствора. Если перемешать эти растворы, то получится раствор, содержащий 42% кислоты. Если перемешать одинаковые объемы этих растворов, то получится раствор, содержащий 50% кислоты. Сколько кислоты содержится в каждом сосуде?

31. Расстояние между двумя городами равно 30 км. Два велосипедиста выезжают из этих городов навстречу друг другу. Если первый отправится на 2 часа раньше второго, то они встретятся через 2,5 часа после того, как выехал второй. Если второй велосипедист отправится на 2 часа раньше первого, то они встретятся через 3 часа после того, как выехал первый. Какова скорость каждого велосипедиста?

32. Трое вкладчиков открыли депозиты с годовой процентной ставкой в 4%, 5% и 6% соответственно. Через год сумма их прибыли (процентов) составила 530 д. ед. Второй вкладчик получил на 70 д. ед. больше, чем первый. Если бы весь их капитал поместили с годовой процентной ставкой в 5%, то годовой прирост составил бы 500 д. ед. Найдите величину вклада каждого вкладчика.

Проверочная работа

А

Время выполнения работы: 45 минут

1. Вычислите: ②

а) $2\cdot\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & -2 & 4\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

2. С помощью элементарных преобразований строк приведите матрицу ②

$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2 & -3\\ 3 & 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$ к ступенчатому виду.

3. Методом Крамера решите на множестве $\mathbf{C}\times\mathbf{C}\times\mathbf{C}$ систему линейных уравнений $\begin{cases}2x_1-x_2=3,\\ x_1+x_2-3x_3=0,\\ -x_1+5x_3=-1.\end{cases}$ ③

4. Решите на множестве $\mathbf{C}\times\mathbf{C}\times\mathbf{C}$ систему линейных уравнений $\begin{cases}x_1+9x_2-6x_3=0,\\ -x_1+3x_2-2x_3=0,\\ x_1+3x_2-2x_3=0.\end{cases}$ ③

Если она совместна и неопределенна, найдите общее и одно частное решение.

Б

Время выполнения работы: 90 минут

В задании 3 укажите букву, соответствующую верному варианту.

1. Вычислите: ①

а) $\mathrm{i}\cdot\begin{pmatrix}3\mathrm{i} & 2-\mathrm{i} & 7+2\mathrm{i}\\ 3-\mathrm{i} & 0 & 1-\mathrm{i}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & \mathrm{i}-1 & 7-\mathrm{i}\\ \mathrm{i}-1 & 2 & 3+\mathrm{i}\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}2 & 3\\ 6 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2-\mathrm{i} & \mathrm{i}-1\\ 3\mathrm{i} & 2+\mathrm{i}\end{pmatrix}$.

2. Найдите ступенчатую матрицу, эквивалентную матрице $A=\begin{pmatrix}2 & 3\mathrm{i} & 0 & 2 & -\mathrm{i}\\ -4 & \mathrm{i} & 1 & 5 & 2\mathrm{i}\\ 3 & 5\mathrm{i} & 2 & 7 & 0\end{pmatrix}$. ①

3. Определитель матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & -2\\ 1 & 3 & -2\end{pmatrix}$ равен **A** 1. **B** 0. **C** –4. **D** 6. ①

4. Найдите обратную к матрице A из задания **3**. ①

5. Решите матричное уравнение $XA=B$, если $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$, а матрица A из задания **3**. ②

6. Методом Крамера или матричным способом решите на множестве **C** систему линейных уравнений $\begin{cases}2x_1+x_2=1,\\ 3x_1+2x_2=0,\\ x_1+2x_2-3x_3-2x_4=2,\\ 4x_1-2x_2+x_3+x_4=-1.\end{cases}$ ②

7. Решите на множестве **C** систему линейных уравнений $AX=O$, где A из задания **2**. ②

Матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}=(a_{ij}),\ i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}$$

Квадратные матрицы

$m=n$

Единичная матрица

$$I_n=\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Транспонированная к матрице A

${}^tA$

Вектор-строка
Вектор-столбец
Диагональная матрица
Нулевая матрица
Нижнетреугольная, верхнетреугольная матрицы

Операции

$(a_{ij})+(b_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})$

$\alpha(a_{ij})=(\alpha a_{ij})$

$(a_{ij})(b_{jk})=(d_{ik}),\ i=\overline{1,m},$

$j=\overline{1,n},\ k=\overline{1,p},\ d_{ik}=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}$

${}^t(a_{ij})=(a_{ji}),\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$

Ступенчатая матрица

элементарное преобразование строк

Обратимая матрица

$AA^{-1}=A^{-1}A=I_n$, A^{-1} – матрица, обратная к A

Определители

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=|A|=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+$$

$$+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\overline{M}_j^i=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\overline{M}_j^i,$$

$\overline{M}_j^i$ – определитель матрицы, полученной из квадратной матрицы A удалением строки i и столбца j

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n-1} & 0 \\ a_{n1} & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}\cdot a_{2n-1}\cdot\ldots\cdot a_{n1}$$

Правило треугольников
Правило Саррюса
Разложение определителя по строке (столбцу)

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & \dots & A_{n2} \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},\ |A|\neq 0$$

$A_{ij}=(-1)^{i+j}\overline{M}_j^i$

Системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

A – матрица системы, $\overline{A}$ – расширенная матрица

$$\overline{A}=(A\,|\,B),\ B=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$AX=B$

Совместная система

Число ненулевых строк ступенчатых матриц A_1, $\overline{A}_1$ равно.

Несовместная система

Неопределенная система

Ступенчатая матрица $\overline{A}_1$ имеет меньше, чем n ненулевых строк.

Определенная система

Ступенчатая матрица $\overline{A}_1$ имеет n ненулевых строк.

Метод Гаусса
Частное решение
Общее решение

$$\begin{cases} x_k=f_k(\alpha,\beta,\ldots) \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_l=f_l(\alpha,\beta,\ldots) \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_p=\alpha \\ x_q=\beta \\ \dots\dots \end{cases}$$

Правило Крамера

Для $m=n$ и $\Delta=|A|\neq 0$,

$x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta},\ \ldots,\ x_n=\dfrac{\Delta_n}{\Delta}$

Модуль **8**

Параллельность прямых и плоскостей

Цели

- распознавание и применение аксиом, определений и теорем геометрии в пространстве в различных контекстах;
- распознавание и построение пересекающихся, скрещивающихся, параллельных прямых;
- распознавание взаимного расположения двух прямых в пространстве, прямой и плоскости, плоскостей;
- построение прямых, которые пересекают плоскость, пересекающихся и непересекающихся плоскостей;
- использование признаков параллельности прямых, параллельности прямой и плоскости, параллельности двух плоскостей в различных контекстах.

§1 Аксиомы геометрии в пространстве

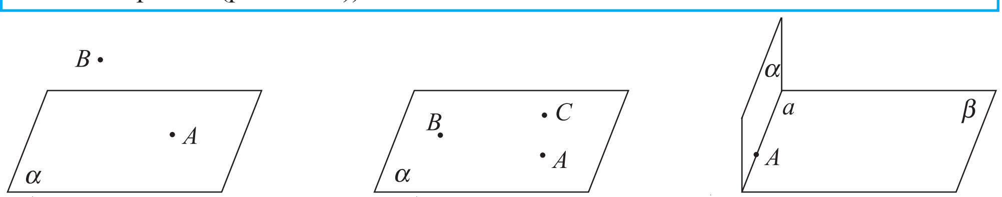
В стереометрии, как и в планиметрии, геометрические понятия и свойства фигур устанавливаются определениями, аксиомами и теоремами. В стереометрии, к известным уже основным понятиям *точка*, *прямая*, *расстояние*, *величина угла* добавляется понятие *плоскости*. В этой связи необходимо расширить систему аксиом геометрии на плоскости.

Дополним группу аксиом планиметрии тремя аксиомами, которые выражают основные свойства точек, прямых и плоскостей в пространстве:

ПР$_1$ Для любой плоскости существуют точки, которые принадлежат ей, и точки, не принадлежащие ей (рис. 8.1 а)).

ПР$_2$ Через любые три неколлинеарные точки проходит плоскость, и притом только одна (рис. 8.1 б)).

ПР$_3$ Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой (рис. 8.1 в)).



$A\in\alpha,\ B\notin\alpha$ — а)

$A, B, C\in\alpha$ — б)

$(A\in\alpha,\ A\in\beta,\ \alpha\neq\beta)\Rightarrow$
$\Rightarrow\alpha\cap\beta=a$ — в)

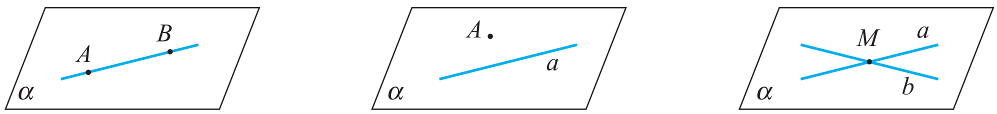
Рис. 8.1

На основании этих аксиом можно доказать следующие теоремы:

Теорема 1. Если две различные точки прямой принадлежат одной плоскости, то любая точка прямой также принадлежит этой плоскости (рис. 8.2 а)).

Теорема 2. Через прямую и точку, не принадлежащую ей, проходит плоскость, и притом только одна (рис. 8.2 б)).

Теорема 3. Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна (рис. 8.2 в)).



$A, B \in \alpha \Rightarrow AB \subset \alpha$

а)

$A \notin a \Rightarrow$ точка A и прямая a определяют плоскость α

б)

$a \cap b = M \Rightarrow$ прямые a и b определяют плоскость α

в)

Рис. 8.2

Плоскость обозначают строчными буквами греческого алфавита: α, β, γ, ... Плоскость, которая проходит через прямую d и точку A, обозначается (A, d) или (d, A). Плоскость, проходящая через три неколлинеарные точки A, B, C, обозначается (ABC).

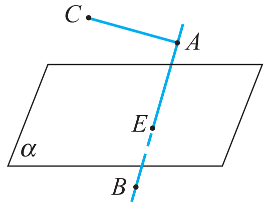
Точки, принадлежащие одной плоскости, называются ***компланарными***, в противном случае – ***некомпланарными***.

Теорема 4 (теорема о разбиении пространства). Всякая плоскость α разбивает множество точек пространства, не принадлежащих этой плоскости, на два непустых непересекающихся подмножества точек так, что для любых точек A, B из разных множеств отрезок AB пересекает плоскость α, а для любых точек C, A из одного множества отрезок CA не пересекает плоскость α (рис. 8.3).

Определения. • Каждое подмножество из теоремы 4 называется **открытым полупространством,** заданным плоскостью α, которая называется **границей полупространства**.

• Объединение открытого полупространства со своей границей называется **замкнутым полупространством**.

Обозначают: $(\alpha A$ – открытое полупространство с границей полупространства α и содержащее точку A; $[\alpha A$ – замкнутое полупространство с границей α и содержащее точку A (рис. 8.3).



$C \in [\alpha A,\ \ [CA] \cap \alpha = \varnothing,\ \ B \notin [\alpha A,\ \ [AB] \cap \alpha = E$

Рис. 8.3

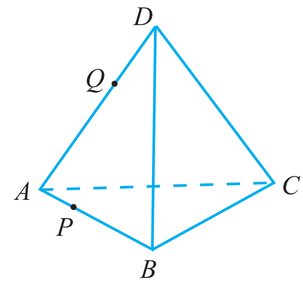
Задачи

А

1. Возможно ли, чтобы только три вершины параллелограмма лежали в одной плоскости?

2. Центр и две точки окружности принадлежат одной плоскости. Определите, истинно ли высказывание: „Любая точка окружности также принадлежит этой плоскости".

3. Пусть $DABC$ – тетраэдр, $P \in (AB)$, $Q \in (AD)$. По данной фигуре постройте прямые пересечения плоскостей:
а) ABD и CPQ;
б) CPQ и ABC;
в) CPQ и ADC.



4. Длина каждого ребра тетраэдра $ABCD$ равна a. Найдите площадь сечения APQ, где P – середина ребра BD, а Q – середина ребра DC.

5. Даны три прямые, которые имеют общую точку и не лежат в одной плоскости. Сколько плоскостей проходят через эти прямые?

6. Даны четыре прямые, которые имеют общую точку, причем любые три из них не лежат в одной плоскости. Найдите число плоскостей, определяемых этими прямыми.

7. Даны четыре некомпланарные точки. Найдите:
а) число прямых, определяемых этими точками;
б) число плоскостей, определяемых этими точками.

8. Даны пять точек, любые четыре из них некомпланарные. Найдите:
а) число прямых, проходящих через эти точки;
б) число плоскостей, проходящих через эти точки.

9. Может ли прямая и плоскость иметь ровно:
а) две общие точки; б) 2014 общих точек; в) одну общую точку?

10. Сколько общих точек может иметь плоскость и:
а) отрезок; б) полупрямая; в) окружность?

11. Три различные точки прямоугольника принадлежат одной плоскости. Содержится ли прямоугольник в этой плоскости?

Б

12. Прямые a и b параллельны. Докажите, что если прямая a пересекает плоскость α $(a \not\subset \alpha)$, то и прямая b пересекает эту плоскость.

13. Прямые AB и CD не лежат в одной плоскости. Докажите, что существует единственная плоскость, содержащая прямую AB, которая параллельна прямой CD.

14. Три прямые d_1, d_2 и d_3 попарно пересекаются в различных точках. Докажите, что эти прямые лежат в одной плоскости.

15. Точка A не принадлежит плоскости, заданной тремя неколлинеарными точками B, C, D. Докажите, что прямые AD и CB не пересекаются.

16. Точки A, B, C, D принадлежат плоскости α и плоскости β. Докажите, что эти точки коллинеарны, если известно, что плоскости α и β различны.

17. Докажите, что любые три точки из четырех заданных, которые не лежат в одной и той же плоскости, неколлинеарны.

18. Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой a, точки A, B принадлежат плоскости α и разделены прямой a. Докажите, что плоскость β разделяет точки A и B.

19. Пусть плоскости α и β различны. Докажите, что существует хотя бы одна прямая, не лежащая ни в одной из этих двух плоскостей.

20. Прямые AB и CD не лежат в одной плоскости. Докажите, что прямые AC и BD также не лежат в одной плоскости.

§2 Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Пусть a и b – прямые в пространстве. Возможны следующие случаи взаимного расположения этих двух прямых в пространстве:

а) прямые a и b имеют две различные общие точки (в этом случае они совпадают, потому что через две различные точки проходит прямая, и притом только одна);

б) прямые a и b имеют только одну общую точку (в этом случае прямые принадлежат одной плоскости и называются ***пересекающимися***) (рис. 8.4);

в) прямые a и b принадлежат одной и той же плоскости и не имеют общих точек (рис. 8.5);

г) прямые a и b не лежат в одной плоскости. Такие прямые называются ***скрещивающимися***, или ***некомпланарными*** (рис. 8.6).

В случаях а), б), в), прямые a, b называются ***компланарными*** (рис. 8.4, 8.5).

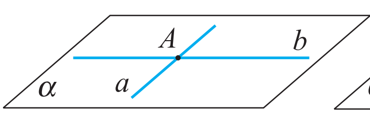


Рис. 8.4

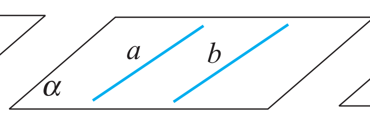


Рис. 8.5

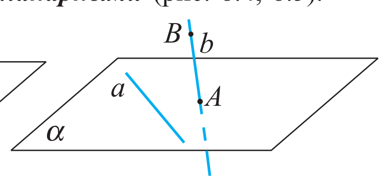


Рис. 8.6

Существование скрещивающихся прямых можно доказать следующим образом:

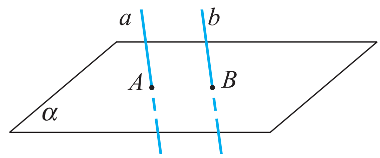
В пространстве существует плоскость α и точка B, не лежащая в этой плоскости. В плоскости α существует прямая a и точка A, не лежащая на этой прямой (рис. 8.6). Точки A и B различны и задают прямую b такую, что a и b – скрещивающиеся прямые.

Определение. Две прямые в пространстве называются **параллельными**, если они лежат в одной и той же плоскости и не имеют общих точек или совпадают (рис. 8.5).

Замечание. Если в пространстве две различные прямые не имеют общих точек, это еще не означает, что они параллельны (рис. 8.6). Чтобы доказать, что две различные прямые параллельны в пространстве, необходимо проверить, принадлежат ли они одной и той же плоскости и не имеют ли они общих точек.

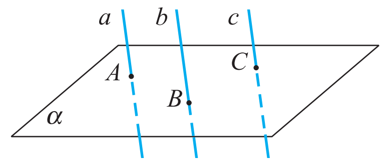
Теорема 5. Если одна из двух различных параллельных прямых пересекает плоскость, то и другая прямая пересекает эту же плоскость (рис. 8.7).

Теорема 6. Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны (рис. 8.8).



$(a \parallel b, a \cap \alpha = A) \Rightarrow b \cap \alpha \neq \varnothing$

Рис. 8.7



$(a \parallel b, a \parallel c) \Rightarrow b \parallel c$

Рис. 8.8

Задание. Докажите теоремы 5 и 6.

Задания с решением

1. Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Докажем, что середины отрезков AD, DC, CB и BA являются вершинами параллелограмма.

Решение:

Пусть M, N, P и Q – середины отрезков AD, DC, CB и BA соответственно. Тогда $[MQ]$ – средняя линия треугольника ABD, откуда следует, что $[MQ] \parallel [DB]$, а $[NP]$ – средняя линия треугольника BDC. Следовательно, $[NP] \parallel [DB]$. По теореме 6 $[MQ] \parallel [NP]$. По аналогии доказываем, что $[MN] \parallel [QP]$. Значит, противолежащие стороны четырехугольника $MNPQ$ попарно параллельны, то есть он является параллелограммом.

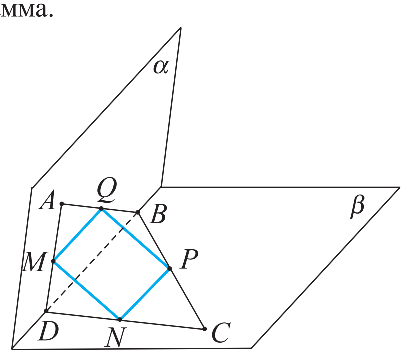


Рис. 8.9

2. Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Точка $E \in (AB)$, а точка $F \in (DC)$. Покажем, что:

а) точки E и F различны;

б) прямые EF и AD, EF и BC, EF и AC, EF и BD – скрещивающиеся.

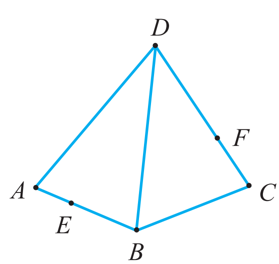


Рис. 8.10

Решение:

а) Из предположения, что точки E и F совпадают, следовало бы, что прямые AB и CD пересекаются в точке E, а это означало бы, что точки A, B, C, D были бы компланарными, что противоречит условию задачи.

б) Пусть прямые EF и AD лежат в одной плоскости. Тогда точки A, E, F, D компланарны и так как $B \in (AE$, $C \in (DF$, следует, что точки A, B, C и D лежат в одной и той же плоскости, а это противоречит условию задачи.

Аналогично доказываются и оставшиеся случаи.

Задачи

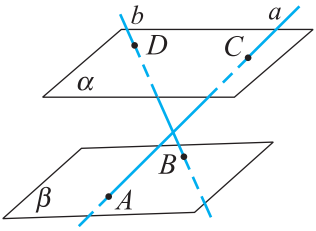
А

1. Прямая d пересекает различные прямые d_1 и d_2. Следует ли отсюда, что прямые d, d_1 и d_2 компланарны?

2. Прямые a и b параллельны, а прямая c пересекает прямую b. Определите взаимное расположение прямых a и c.

3. Прямая a пересекает плоскость α, а прямая b параллельна прямой a. Пересекает ли прямая b плоскость α?

4. Через вершины параллелограмма проведены четыре параллельные прямые, которые не расположены в плоскости параллелограмма. Докажите, что точки пересечения любой плоскости с этими четырьмя прямыми являются вершинами параллелограмма.



5. На рисунке изображены параллельные плоскости α и β. Прямые a и b пересекают эти плоскости так, что прямые AB и DC не параллельны. Выясните взаимное расположение прямых a и b.

Б

6. Пусть одна из двух параллельных прямых параллельна плоскости. Докажите, что и вторая прямая параллельна этой плоскости.

7. Пусть прямая параллельна двум пересекающимся плоскостям. Докажите, что эта прямая параллельна прямой, по которой пересекаются эти плоскости.

8. Прямые a и b параллельны, а прямые c и b скрещивающиеся. Каковы возможные взаимные расположения прямых c и a?

9. Точка A не принадлежит прямой d. Через точку A проведены все прямые некомпланарные с прямой d. Какую фигуру образуют эти прямые?

10. Прямые d_1 и d_2 некомпланарны, а прямая d параллельна прямой d_1. Каково взаимное расположение прямых d и d_2?

11. Плоскости α и β пересекаются по прямой d. Точка $A \in \alpha$ и $A \notin d$, точка $B \in \beta$ и $B \notin d$. Каково взаимное расположение прямых d и AB?

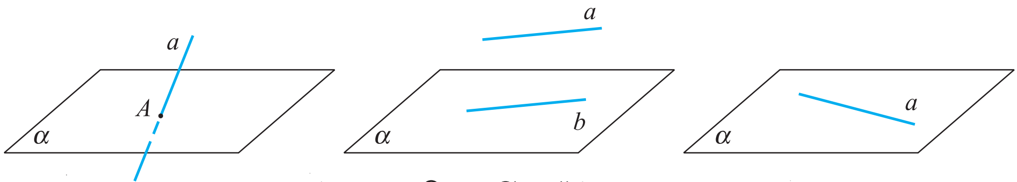
§ 3 Прямые и плоскости

Возможны следующие случаи взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве:

а) прямая имеет единственную общую точку с плоскостью (в этом случае плоскость и прямая ***пересекаются***) (рис. 8.11 а));

б) прямая и плоскость не имеют общих точек (рис. 8.11 б));

в) прямая принадлежит плоскости (рис. 8.11 в)).



$a \cap \alpha = A$ $\qquad$ $b \subset \alpha,\ a \cap \alpha = \varnothing,\ a \parallel b$ $\qquad$ $a \subset \alpha$

а) $\qquad$ б) $\qquad$ в)

Рис. 8.11

Определение. Прямая называется **параллельной** плоскости, если она не имеет общих точек с плоскостью или принадлежит этой плоскости.

На рисунках 8.11 б), в), прямая a параллельна плоскости α.

Теорема 7 (признак параллельности прямой и плоскости). Прямая параллельна плоскости тогда и только тогда, когда она параллельна какой-либо прямой, принадлежащей этой плоскости.

Доказательство

Необходимость. Пусть прямая a ($a \not\subset \beta$) параллельна плоскости β. Возьмем в плоскости β точку A и через нее и прямую a проведем плоскость α (рис. 8.12). Плоскости α и β пересекаются по прямой b. Прямые a и b лежат в плоскости α и параллельны, потому что в противном случае точка их пересечения принадлежала бы и плоскости β, а это противоречит тому, что $a \parallel \beta$.

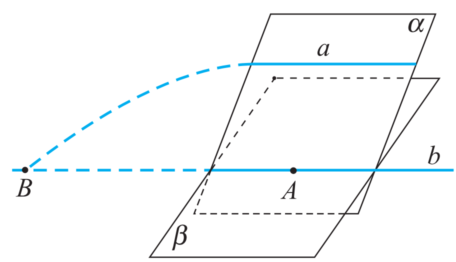
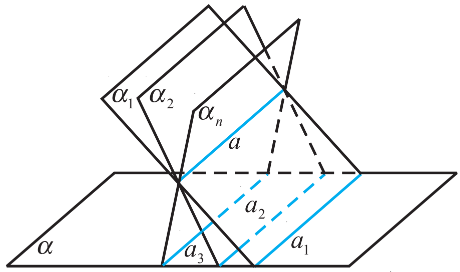


Рис. 8.12

Достаточность. Пусть прямая a ($a \not\subset \beta$) параллельна прямой b, принадлежащей плоскости β. Тогда прямая a параллельна также и плоскости β. В самом деле, если бы прямая a и плоскость β имели бы общую точку B, то эта точка принадлежала бы линии пересечения плоскостей β и α (α – плоскость, заданная параллельными прямыми a и b) (рис. 8.12), то есть принадлежала бы и прямой b, но это противоречило бы условию, что $a \parallel b$.

Случай $a \subset \beta$ очевиден. ▶

Теорема 8. Если прямая параллельна плоскости, то пересечением этой плоскости с любой другой плоскостью, проходящей через данную прямую, является прямая, параллельная данной прямой (рис. 8.13).



$$(a \parallel \alpha,\ \ a \not\subset \alpha_i,\ \ \alpha_i \nparallel \alpha) \Rightarrow \alpha_i \cap \alpha = a_i \parallel a \qquad (i = \overline{1, n},\ n \in \mathbb{N}^*)$$

Рис. 8.13

Задание. Докажите теорему 8.

Теорема 8′ (теорема „крыши“).
Пусть прямые d_1 и d_2 параллельны. Если плоскость, содержащая прямую d_1, пересекает плоскость, содержащую прямую d_2, по прямой d, то $d \parallel d_1$ и $d \parallel d_2$ (рис. 8.14).

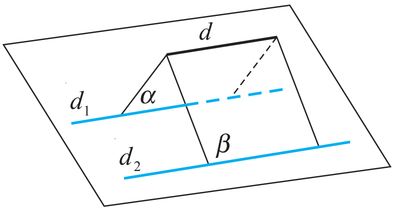


Рис. 8.14

Задания с решением

1. Пусть точка E не лежит в плоскости параллелограмма $ABCD$, а точка F является серединой отрезка AE. Покажем, что прямая FC пересекает плоскость BED в центре тяжести G треугольника BED (рис. 8.15).

Решение:

Рассмотрим плоскость EAC. Точка F и середина O диагонали AC параллелограмма $ABCD$ принадлежат этой плоскости. Следовательно, в этой же плоскости лежит и точка G пересечения медиан CF и EO треугольника EAC. Так как отрезок EO является медианой и треугольника BED, получаем, что $(FC) \cap (BED) = G$.

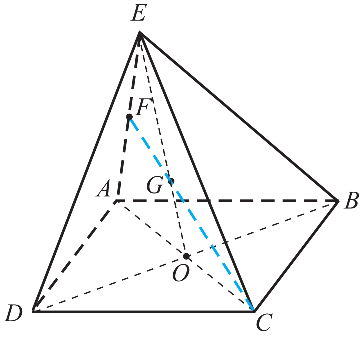


Рис. 8.15

2. Даны некомпланарные точки A, B, C, D. Точки E, F и G являются внутренними точками отрезков AD, DC и BC соответственно такими, что $\dfrac{DE}{EA} \neq \dfrac{DF}{FC}$ (рис. 8.16 a)). Построим пересечения плоскости EFG с плоскостями ADC, DBC, ABC и ABD.

Решение:

Очевидно, что плоскость EFG пересекает плоскость ADC по прямой EF, а плоскость DBC – по прямой FG (рис. 8.16 б)).

Обозначим через H точку пересечения прямых EF и AC, существование которой следует из условия $\dfrac{DE}{EA} \neq \dfrac{DF}{FC}$. Так как точка H принадлежит плоскости EFG и плоскости ABC, то эти плоскости пересекаются по прямой HG. Пусть $HG \cap AB = L$. Тогда плоскости EFG и ADB пересекаются по прямой EL.

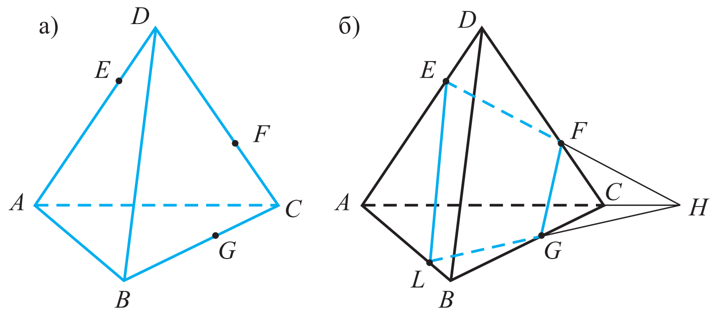


Рис. 8.16

3. Даны пересекающиеся прямые d_1 и d_2, α – плоскость, определяемая этими прямыми. Прямая d пересекает плоскость α в точке D, которая не принадлежит прямым d_1 и d_2 (рис. 8.17). Найдем множество прямых, которые пересекают все три прямые d, d_1 и d_2.

Решение:

Пусть O – точка пересечения прямых d_1 и d_2. Любая прямая, проходящая через точку O и через какую-либо точку A прямой d, удовлетворяет условиям задачи. Также и любая прямая, лежащая в плоскости α, проходящая через точку D и пересекающая обе прямые d_1 и d_2, удовлетворяет условиям задачи. Других прямых, которые пересекали бы три прямые d, d_1 и d_2, не существует.

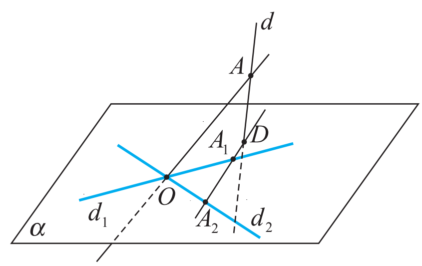


Рис. 8.17

4. Скрещивающиеся прямые a и b пересекают плоскость α в точках A и B соответственно. Через каждую точку M прямой a проведена прямая, параллельная прямой b. Обозначим точку пересечения построенной прямой с плоскостью α через M' (рис. 8.18). Покажем, что при перемещении точки M по прямой a точка M' перемещается по прямой, лежащей в плоскости α и проходящей через точку A.

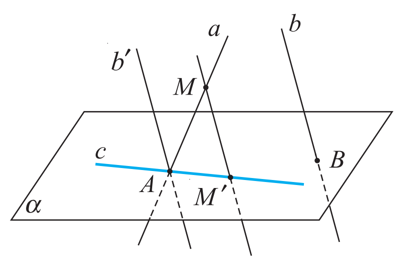


Рис. 8.18

Решение:

Пусть b' – прямая, проходящая через точку A и параллельная прямой b (она существует и является единственной). Прямые a и b' различны и пересекаются в точке A. Значит, они определяют плоскость. Пусть эта плоскость пересекает плоскость α по прямой c. Прямая c есть искомая прямая.

Задачи

А

1. Точка M является серединой ребра BD, а точка N – серединой ребра AD тетраэдра $ABCD$. Прямая d является пересечением плоскости ABC с плоскостью MNC. Каково взаимное расположение прямых d и MN?

2. Точки A, B, C, D некомпланарны. Точка $E \in AD$ $(AE = 2ED)$, точка $L \in AB$ $(AL = 2LB)$, точка $F \in DC$ $(DF = 2FC)$, точка $M \in CB$ $(BM = 2MC)$. Каково взаимное расположение прямых EL и FM?

3. Точки A, B, C неколлинеарны. Плоскость, параллельная прямой AB, пересекает отрезки BC и AC в точках M и N соответственно. Найдите длину отрезка MN, если:

а) $AB = 30$ см и $MB : BC = 2:3$; б) $AB = 16$ см и $BM : MC = 5:3$;
в) $CM = 20$ см и $AB : BC = 4:5$; г) $BM = a$, $MC = c$, $AB = b$.

Б

4. Точки A, B, C, D некомпланарны. На отрезках AB, BC, CD и DA взяты соответственно точки A_1, B_1, C_1 и D_1 так, что $AA_1 : A_1B = 1:3$, $BB_1 : B_1C = 3:1$, $CC_1 : C_1D = 2:1$ и $DD_1 : D_1A = 1:2$. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 и D_1 компланарны.

5. Точки A, B, C и D некомпланарны. На отрезках AB, BC и CD взяты соответственно точки A_1, B_1 и C_1 так, что $AA_1 : A_1B = a$, $BB_1 : B_1C = b$ и $CC_1 : C_1D = c$. Плоскость $A_1B_1C_1$ пересекает отрезок AD в точке D_1. Найдите отношение $DD_1 : D_1A$.

6. Точки A, B, C, D некомпланарны. Точка $M \in AD$, а точка $N \in BD$. Каково взаимное расположение прямой MN и плоскости ABC, если известно, что $AM : MD = BN : ND$?

7. Точки A, B, C, D некомпланарны. Точка M является центром тяжести треугольника ABD, а точка N – центром тяжести треугольника BDC. Докажите, что прямая MN параллельна плоскости ABC.

§4 Параллельные плоскости

Возможны следующие случаи взаимного расположения двух плоскостей в пространстве:

а) плоскости пересекаются по прямой (рис. 8.19 а));
б) плоскости не имеют общих точек (рис. 8.19 б));
в) плоскости совпадают (рис. 8.19 в)).

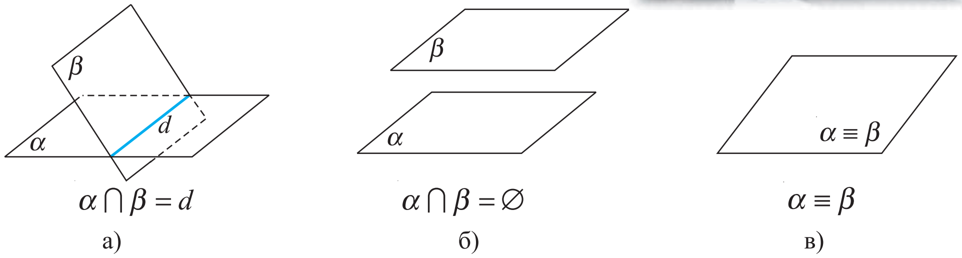


Рис. 8.19

Определение. Две плоскости называются **параллельными**, если они не имеют общих точек или совпадают.

Теорема 9 (признак параллельности плоскостей). Если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Доказательство

Пусть пересекающиеся прямые a и b, принадлежащие плоскости α, параллельны плоскости β (рис. 8.20).

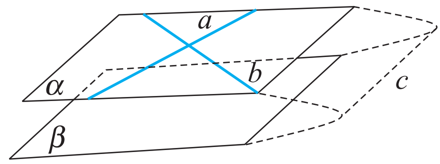
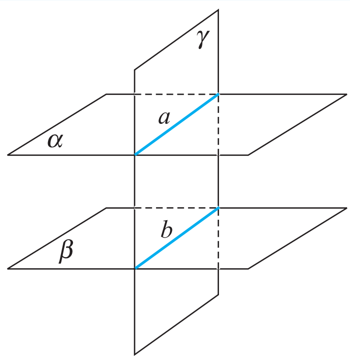


Рис. 8.20

Предположим, что плоскости α и β не параллельны. Тогда они пересекаются по прямой c. По теореме 8, прямые a и b параллельны прямой c, что противоречит аксиоме параллельности, так как получим, что в плоскости α через одну точку проходят две различные прямые a и b, параллельные прямой c, что невозможно. Следовательно, плоскости α и β параллельны. ►

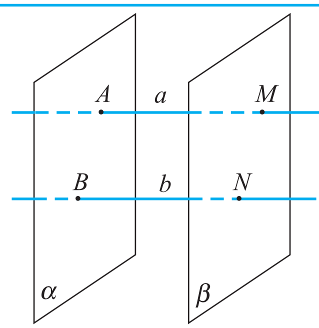
Теорема 10. Если две параллельные плоскости пересечены третьей плоскостью, то прямые пересечения параллельны (рис. 8.21 а)).

Теорема 11. Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, конгруэнтны (рис. 8.21 б)).



$(\alpha \parallel \beta,\ \gamma \cap \alpha = a,\ \gamma \cap \beta = b) \Rightarrow a \parallel b$

а)



$(a \parallel b, \alpha \parallel \beta) \Rightarrow [AM] \equiv [BN]$,
$A, B \in \alpha,\ M, N \in \beta$

б)

Рис. 8.21

Задание. Докажите теоремы 10 и 11.

Задания с решением

1. Отрезок AB не пересекает плоскость α и точки M и N делят его на три отрезка так, что $AM : MN = MN : NB = 1 : 2$. Через точки A, M, N и B проведены параллельные прямые, которые пересекают плоскость α в точках A_1, M_1, N_1 и B_1 соответственно (рис. 8.22).

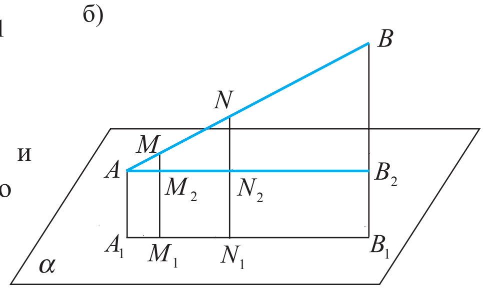


Рис. 8.22

Найдем длины отрезков MM_1 и NN_1, если известно, что $AA_1 = 2$ см, $BB_1 = 16$ см.

Решение:

Проведем через точку A прямую, параллельную A_1B_1, которая пересекает прямые MM_1, NN_1 и BB_1 в точках M_2, N_2 и B_2 соответственно. Треугольники AM_2M и AB_2B подобны, следовательно, $MM_2 : BB_2 = AM : AB$.

Поскольку $AM : MN = MN : NB = 1:2$, то $AB = 7AM$. Тогда $MM_2 : BB_2 = 1:7$, $MM_2 = BB_2 : 7 = 14 : 7 = 2$ (см).

Следовательно, $MM_1 = MM_2 + M_2M_1 = 2 + 2 = 4$ (см).

Аналогично получаем, что $\Delta ANN_2 \sim \Delta ABB_2$.
Тогда $NN_2 : BB_2 = AN : AB = 3AM : 7AM = 3:7$, откуда $NN_2 = \dfrac{3}{7}BB_2 = 6$ (см).
Следовательно, $NN_1 = NN_2 + N_2N = 6 + 2 = 8$ (см).

Ответ: $MM_1 = 4$ см, $NN_1 = 8$ см.

2. Точки A_1, A_2, A_3 расположены на ребре пирамиды $VABC$ так, что $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$. Через эти точки проведены плоскости, параллельные основанию пирамиды, которые пересекают ребра VB и VC в точках B_1, B_2, B_3 и C_1, C_2, C_3 соответственно (рис. 8.23). Найдем периметры треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, если периметры треугольников ABC и $A_3B_3C_3$ равны $\mathscr{P}$ и $\mathscr{P}_3$ соответственно.

Решение:

Отрезок A_2B_2 является средней линией трапеции $A_1A_3B_3B_1$, то есть $\mathscr{P}_2 = \dfrac{\mathscr{P}_1 + \mathscr{P}_3}{2}$ (1), где $\mathscr{P}_1$ и $\mathscr{P}_2$ – периметры треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ соответственно.

Аналогично, $\mathscr{P}_1 = \dfrac{\mathscr{P} + \mathscr{P}_2}{2}$ (2). Из (1) и (2) получаем:

$\mathscr{P}_2 = \dfrac{2\mathscr{P}_3 + \mathscr{P}}{3}$, $\mathscr{P}_1 = \dfrac{2\mathscr{P} + \mathscr{P}_3}{3}$.

Ответ: $\mathscr{P}_1 = \dfrac{2\mathscr{P} + \mathscr{P}_3}{3}$, $\mathscr{P}_2 = \dfrac{2\mathscr{P}_3 + \mathscr{P}}{3}$.

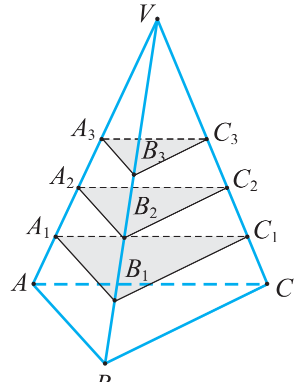


Рис. 8.23

3. В правильном тетраэдре $ABCD$ через точку $E \in AC$ проведено сечение, параллельное плоскости грани BCD. Найдем площадь сечения, если $AE : EC = 2:3$ и ребро тетраэдра равно a (рис. 8.24).

Решение:

Очевидно, что стороны треугольника FGE параллельны сторонам грани BDC и что треугольник FGE равносторонний. Из $\Delta AEF \sim \Delta ACB$ получаем:

$\dfrac{BC}{FE} = \dfrac{AC}{AE} = \dfrac{AE + EC}{AE} = 1 + \dfrac{EC}{AE}$, $\dfrac{BC}{FE} = 1 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2}$,

откуда $FE = \dfrac{2a}{5}$.

Тогда $\mathscr{A}_{FGE} = \dfrac{(EF)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \dfrac{4a^2 \cdot \sqrt{3}}{25 \cdot 4} = \dfrac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{25}$.

Ответ: $\mathscr{A}_{FGE} = \dfrac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{25}$.

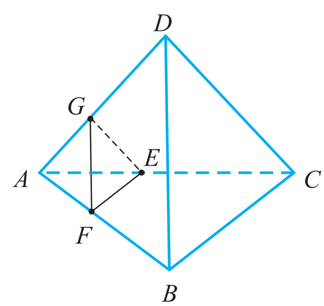


Рис. 8.24

4. Построим сечение прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через диагональ BD_1 и точку $M \in (CC_1)$.

Решение:

Очевидно, что двумя сторонами многоугольника искомого сечения являются отрезки BM и MD_1 (рис. 8.25). Точка $\{N\} = CD \cap D_1M$ принадлежит как плоскости ABC, так и искомой плоскости сечения. Следовательно, точка $\{P\} = BN \cap AD$ принадлежит как плоскости ADD_1, так и искомой плоскости сечения. Точка $\{L\} = AA_1 \cap PD_1$ является четвертой вершиной искомого многоугольника.

Ответ: Искомым сечением является четырехугольник BLD_1M.

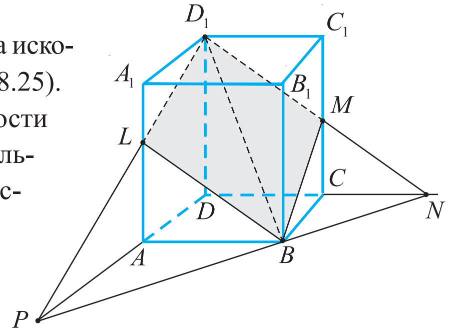


Рис. 8.25

Задачи

А

1. Точки A, B, C, D некомпланарны. Точки M, N, P – середины отрезков AD, BD и CD соответственно. Докажите, что плоскости MNP и ABC параллельны.

2. На ребрах тетраэдра $ABCD$ построены точки $L \in AD$, $P \in AD$ $(AL = LP = PD)$, $M \in BD$ $(DM = 2BM)$, $N \in CD$ $(ND = 2NC)$.

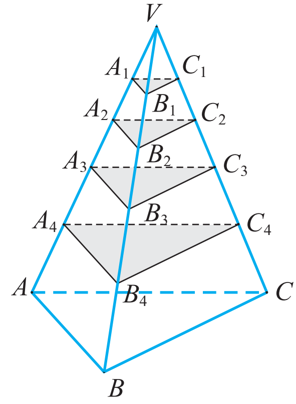
а) Докажите, что плоскости MNL и ABC параллельны.

б) Постройте точку I_1 пересечения прямой PM с плоскостью ABC.

в) Постройте точку I_2 пересечения прямой PN с плоскостью ABC.

г) Постройте пересечение плоскостей ABC и PMN.

3. Точки A_1, A_2, A_3, A_4 лежат на боковом ребре AV пирамиды $VABC$ так, что $[AA_4] \equiv [A_4A_3] \equiv [A_3A_2] \equiv [A_2A_1]$. Через эти точки проведены плоскости, параллельные плоскости основания пирамиды, которые пересекают ребра VB и VC в точках B_1, B_2, B_3, B_4 и C_1, C_2, C_3, C_4 соответственно. Вычислите периметры треугольников, полученных в сечениях, если периметр треугольника $A_1B_1C_1$ равен 5 см, а периметр треугольника ABC равен 40 см.



Б

4*. Треугольная прямая призма $ABCA_1B_1C_1$ пересечена плоскостью, проходящей через точку $M \in [AA_1]$ и параллельной прямым AB_1 и AC_1. Найдите периметр многоугольника, полученного в сечении, если $AM = 1$ см, $AA_1 = 3$ см, $AB = AC = 4$ см, $BC = 2$ см.

5. Тетраэдр $ABCD$ пересечен плоскостью, проходящей через точку $M \in [AD]$ и параллельной плоскости основания ABC. Найдите периметр многоугольника, полученного в сечении, если $AM = 5$ см, $AD = 15$ см, $AB = 20$ см, $BC = 19$ см, $AC = 18$ см.

6. На ребре VA треугольной пирамиды $VABC$ взяты точки A_1, A_2, A_3 такие, что $A_1A_2 = 2AA_1$ и $A_2A_3 = 2A_1A_2$. Через эти точки проведены плоскости, параллельные плоскости основания пирамиды, которые пересекают ребро VB в точках B_1, B_2, B_3, а ребро VC – в точках C_1, C_2, C_3. Найдите периметры $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ и $\mathcal{P}_3$ треугольников $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ и $A_3B_3C_3$ соответственно, если периметр треугольника ABC равен $\mathcal{P}$, а $AA_1 : VA_3 = \lambda$.

7. Пусть $ABCD$ – выпуклый четырехугольник и точка E, не лежащая в плоскости четырехугольника $ABCD$. Точки M, N, P, R лежат на отрезках AE, BE, CE, DE соответственно так, что $2AM = 3ME$, $2BN = 3NE$, $2CP = 3PE$, $3DR = 2RE$.

а) Докажите, что плоскость MNP параллельна плоскости четырехугольника $ABCD$.

б) Постройте точку I пересечения прямой NR с плоскостью четырехугольника $ABCD$.

8. Пусть $ABCD$ – выпуклый четырехугольник и точка E, не лежащая в плоскости четырехугольника $ABCD$. Точки M, N, P являются точками пересечения медиан треугольников ABE, BCE и CDE соответственно. Докажите, что плоскость MNP проходит через точку Q пересечения медиан треугольника ADE.

Задачи на повторение

А

1. Отрезок AB не пересекает плоскость α. Через концы отрезка и его середину, точку M, проведены параллельные прямые, которые пересекают плоскость α в точках A_1, B_1 и M_1 соответственно. Найдите длину отрезка MM_1, если:

а) $AA_1 = 3{,}2$ м, $BB_1 = 2{,}3$ дм; б) $AA_1 = 19$ см, $BB_1 = 2$ дм; в) $AA_1 = 33$ см, $BB_1 = 75$ см.

2. Отрезок AB не пересекает плоскость α и делится точками M и N на три конгруэнтных отрезка: $[AM]$, $[MN]$, $[NB]$. Через точки A, B, M, N проведены параллельные прямые, которые пересекают плоскость α в точках A_1, B_1, M_1 и N_1 соответственно. Найдите длины отрезков MM_1 и NN_1, если известно, что $AA_1 = 16$ см, $BB_1 = 4$ см.

3. Плоскости α, β параллельны, а точка M такая, что она и плоскость β находятся в разных полупространствах, определяемых плоскостью α. Через точку M построены две прямые, которые пересекают плоскость α в точках A_1 и A_2, а плоскость β – в точках B_1 и B_2. Вычислите длину отрезка A_1A_2, если $B_1B_2 = 20$ см и $MA_1 : A_1B_1 = 3:2$.

4. Точки A, B, C, D некомпланарны. Точка $L \in DC$ так, что $DL = 2LC$, а точка M является центром тяжести треугольника ABD. Докажите, что прямая ML параллельна плоскости ABC.

Б

5. Через точку O, не лежащую ни в одной из двух параллельных плоскостей α и β, проведены прямые a_1, a_2, a_3 и a_4, которые пересекают плоскость α в точках A_1, A_2, A_3 и A_4 соответственно, а плоскость β – в точках B_1, B_2, B_3 и B_4 соответственно.

Докажите, что $\dfrac{A_1A_2}{B_1B_2} = \dfrac{A_2A_3}{B_2B_3} = \dfrac{A_3A_4}{B_3B_4} = \dfrac{OA_1}{OB_1} = \dfrac{OA_2}{OB_2} = \dfrac{OA_3}{OB_3} = \dfrac{OA_4}{OB_4}$.

6. Докажите, что если любая прямая, которая пересекает одну из двух плоскостей, пересекает и другую плоскость, то эти плоскости параллельны.

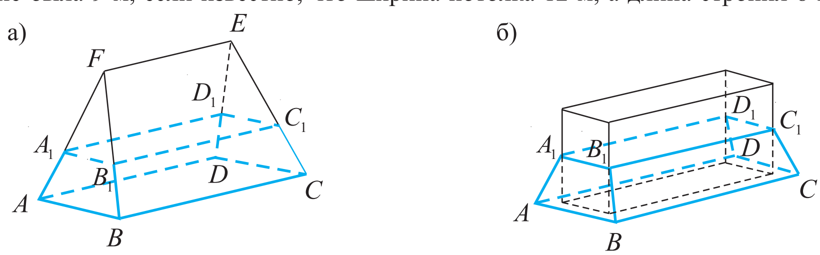
7. Прямая пересекает плоскость α в точке A. Через точки B и C заданной прямой (B находится между A и C), лежащие в одном и том же полупространстве, ограниченном плоскостью α, проведены две параллельные прямые, которые пересекают плоскость α в точках B_1 и C_1 соответственно. Найдите длину отрезка BB_1, если:
а) $CC_1 = a$ и $AC : BC = \lambda$; б) $CC_1 = a$ и $AB : AC = \mu$;
в) $AB = l$ и $AC : CC_1 = k$; г) $AC = a$, $BC = b$, $CC_1 = c$.

8. Точки A, B, C, D некомпланарны и $AC = 12$ см, $BD = 20$ см. Вычислите периметр четырехугольника, вершинами которого являются середины отрезков AB, BC, CD, DA.

9. Точка E не принадлежит плоскости трапеции $ABCD$ $(BC \parallel AD)$. Точки M и L – середины сторон AB и CD трапеции, а точки N и P – середины отрезков BE и CE. Докажите, что прямые MN и PL пересекаются.

10. Точки A, B, C, D некомпланарны. На отрезках AC и BC взяты соответственно точки M и N такие, что $AM : MC = BN : NC = m : n$. Найдите длину отрезка, заданного серединами отрезков AD и BD, если $MN = a$.

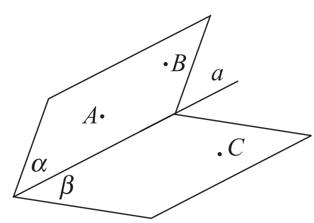
11. При реконструкции крыши жилого дома было принято решение построить мансарду. Стропила AF, BF, CE и DE нужно отпилить в точках A_1, B_1, C_1 и D_1 так, чтобы плоскость прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$ была параллельна плоскости потолка (рис. а)). Отпиленные концы стропил опираются на углы стен мансарды (рис. б)). На каком расстоянии от вершин углов должны быть отпилены стропила, чтобы ширина мансарды по внешней стороне была 9 м, если известно, что ширина потолка 12 м, а длина стропил 8 м?



12. Правильный тетраэдр $ABCD$ пересечен плоскостью, которая проходит через вершину A и середины ребер BD и CD. Найдите площадь полученного сечения, если длина ребра тетраэдра равна $2a$.

13. Любая пара прямых из трех данных некомпланарных прямых имеет общую точку. Докажите, что данные прямые имеют общую точку.

14. Плоскости α и β пересекаются по прямой a. Точки A и B лежат в плоскости α, а точка C – в плоскости β. Постройте прямые, по которым плоскость ABC пересекает плоскости α и β.

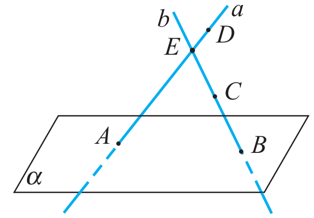


15. Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Точка M принадлежит отрезку DC. Постройте прямые, по которым пересекаются плоскости ADC, CBD, ABC и ABD с плоскостью, проходящей через точки M и A и параллельной прямой BD.

16. Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости, а точка E принадлежит отрезку AC так, что $AE : EC = 3 : 2$. Постройте прямые, по которым пересекаются плоскости ADC, ADB, ABC с плоскостью, проходящей через точку E и параллельной плоскости BCD.

17. Точка E не лежит в плоскости параллелограмма $ABCD$. Докажите, что плоскости ABE и CDE пересекаются по прямой, которая параллельна прямой DC.

18. Через точку E, не лежащую в плоскости α, проведены прямые a и b, которые пересекают плоскость α в точках A и B соответственно. Точка D принадлежит прямой a, а точка C – прямой b. Постройте точку пересечения прямой DC с плоскостью α.



19. Даны некомпланарные точки A, B, C и D. Точка M – середина отрезка AD, а точка G – пересечение медиан треугольника ABC.

а) Постройте точку F пересечения прямой MG и плоскости BCD.

б) Докажите, что точки B, D, C, F – вершины параллелограмма.

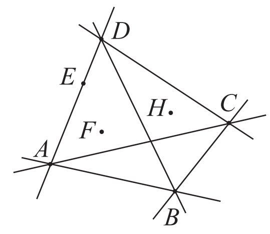
20. Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Точки E, F и H лежат на прямых AD, DC и BC соответственно, так что $EF \nparallel AC$ и $FH \nparallel DB$. Постройте точки пересечения плоскости EFH с прямыми AB и DB.

21. Даны некомпланарные точки A, B, C и D. Известно, что $E \in (AD)$, $F \in (ABD)$ и $H \in (BCD)$.

а) Постройте прямые, по которым плоскость EFH пересекает плоскости ABC, ACD, ABD и BCD.

б) Постройте точки, в которых плоскость ABC пересекает прямые EF, EH и FH.

в) Постройте пересечение прямой FH с плоскостью ADC.



22. Даны некомпланарные точки A, B, C и D. Пусть прямая a проходит через середины отрезков AB и DC, прямая b проходит через середины отрезков AD и BC, а прямая c проходит через середины отрезков AC и DB. Докажите, что прямые a, b и c имеют общую точку.

23. Точка E не лежит в плоскости параллелограмма $ABCD$. Точка M принадлежит отрезку EC, а точка N – отрезку ED, так что $EM : MC = EN : ND$.

а) Постройте пересечение плоскостей ACE и BDE.

б) Докажите, что $MN \parallel AB$.

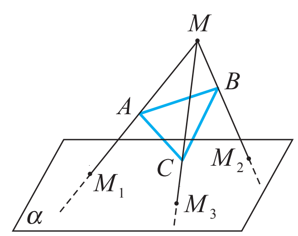
в) Постройте точку P пересечения плоскости LMN и прямой AD, где L – произвольная точка отрезка BC.

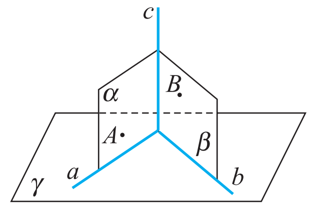
г) Определите вид четырехугольника $NMLP$.

24. Даны плоскости ABC и α такие, что ни одна из прямых AB, AC и BC не параллельна плоскости α, и произвольная точка M ($M \notin (ABC)$ и $M \notin \alpha$). Пусть M_1, M_2 и M_3 – точки пересечения прямых MA, MB и соответственно MC с плоскостью α.

а) Докажите, что в плоскости α существуют фиксированные точки F_1, F_2 и F_3, через которые проходят прямые M_3M_2, M_1M_3 и M_2M соответственно, независимо от положения точки M.

б) Докажите, что точки F_1, F_2 и F_3 коллинеарны.





25. Плоскости α и β пересекаются по прямой c. Эти плоскости пересекают плоскость γ по прямым a и b соответственно. Точка A лежит в плоскости α, а точка B – в плоскости β, $AB \nparallel \gamma$. Постройте точку пересечения прямой AB с плоскостью γ.

26. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ лежит в плоскости α. Пусть противолежащие стороны этого четырехугольника не параллельны. Точка E не лежит в плоскости α. Постройте пересечение плоскостей:
а) EAB и EDC; б) EAD и EBC; в) EAC и EBD.

27. Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Определите, сколько плоскостей, равноудаленных от этих точек, можно провести.

Проверочная работа

А

Время выполнения работы: 45 минут

1. Через две различные точки A и B, принадлежащие одной из двух параллельных плоскостей, проведены прямые, которые пересекают другую плоскость в точках A_1 и B_1 соответственно. Найдите длину отрезка A_1B_1, если $AB = 8$ см. ②

2. Укажите на изображении куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$: ②
а) прямые, параллельные плоскости BCD; б) плоскости, параллельные прямой A_1B_1.

3. Точка M является серединой ребра AD правильного тетраэдра $ABCD$, длина ребра которого равна a. Найдите периметр треугольника MNC, где N – точка пересечения прямой BD с плоскостью, проходящей через прямую MC параллельно прямой AB. ③

4. Параллелограммы $ABCD$ и ABB_1A_1 лежат в разных плоскостях. Вычислите длину отрезка B_1C, если $A_1D = 8$ см. ③

Б

Время выполнения работы: 45 минут

1. Прямая a параллельна плоскости α, а прямая b пересекает эту плоскость. Установите взаимное расположение прямых a и b. ①

2. Точки A, B, C, D некомпланарны. Установите взаимное расположение плоскости ABC и прямой: ③

а) EF, где E – середина отрезка AD, F – середина отрезка BD;

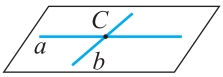
б) GH, где G лежит на отрезке BD, H лежит на отрезке CD и $\dfrac{BG}{GD} = \dfrac{CH}{HD} = \dfrac{1}{3}$.

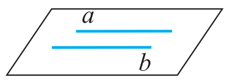
3. Точка E принадлежит ребру SD пирамиды $SABCD$. Нарисуйте сечение этой пирамиды, образованное плоскостью, проходящей через точку E и параллельной плоскости основания пирамиды. ③

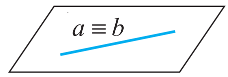
4. Постройте сечение правильного тетраэдра $ABCD$ с плоскостью, проходящей через точку $E \in (AD)$ так, что $AE : ED = 1 : 2$, и параллельную плоскости основания ABC. Вычислите площадь полученного сечения, если площадь одной грани тетраэдра равна $\mathscr{A}$. ③

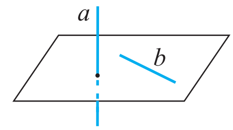
Взаимное расположение прямых и плоскостей

1. Взаимное расположение двух прямых

<table>
<tr><td colspan="3">a и b – компланарные</td><td>a и b – скрещивающиеся</td></tr>
<tr>
<td>

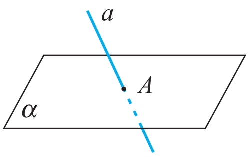
$a \cap b = \{C\}$</td>
<td>

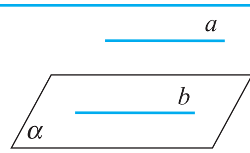
$a \cap b = \varnothing$</td>
<td>

$a \equiv b$</td>
<td>

$a \cap b = \varnothing$</td>
</tr>
</table>

2. Взаимное расположение прямой и плоскости

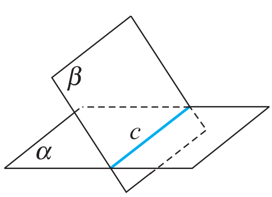
<table>
<tr><td>a пересекает α</td><td colspan="2">a параллельна α</td></tr>
<tr>
<td>

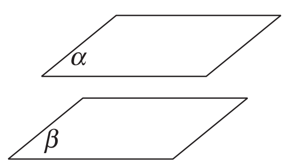
$a \cap \alpha = \{A\}$</td>
<td>

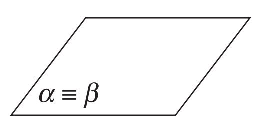
$b \subset \alpha,\ a \parallel b,\ a \cap \alpha = \varnothing$</td>
<td>

$a \subset \alpha \Rightarrow a \parallel \alpha$</td>
</tr>
</table>

3. Взаимное расположение двух плоскостей

<table>
<tr><td>α пересекает β</td><td colspan="2">α и β параллельны</td></tr>
<tr>
<td>

$\alpha \cap \beta = c$</td>
<td>

$\alpha \cap \beta = \varnothing$</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Модуль

9 Перпендикулярность в пространстве

Цели

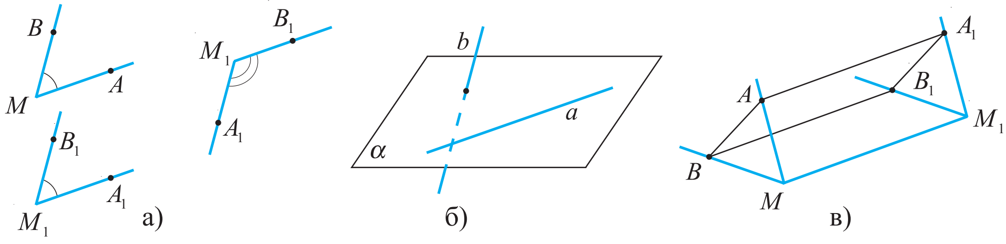
- распознавание, описание, построение перпендикулярных прямых и прямой, перпендикулярной плоскости;
- вычисление длин отрезков, измерение двугранных углов с применением теоремы о трех перпендикулярах;
- использование признаков перпендикулярности двух прямых, прямой и плоскости, двух плоскостей;
- распознавание, описание и построение ортогональных проекций точек, отрезков и прямых на плоскости;
- вычисление длин ортогональных проекций отрезков.

§1 Перпендикулярные прямые и плоскости

Лемма. Два угла с соответственно параллельными сторонами конгруэнтны или дополняют друг друга до 180° (рис. 9.1 а)).

Доказательство

Пусть AMB и $A_1M_1B_1$ – два собственных угла, причем $[MA \parallel [M_1A_1$, $[MB \parallel [M_1B_1$, $MA = M_1A_1$ и $MB = M_1B_1$. Рассмотрим случай, когда точка A_1 лежит в полуплоскости, заданной прямой MM_1 и точкой A, а точка B_1 лежит в полуплоскости, заданной прямой MM_1 и точкой B (рис. 9.1 в)). При этих условиях MAA_1M_1 и MBB_1M_1 являются параллелограммами, то есть $MM_1 = AA_1 = BB_1$. Следовательно, ABB_1A_1 является параллелограммом и $AB = A_1B_1$. Заключение леммы следует из конгруэнтности треугольников AMB и $A_1M_1B_1$. ►

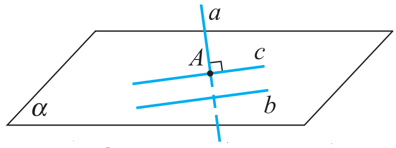


а) б) в)

Рис. 9.1

Полученный результат позволяет рассматривать угол между двумя скрещивающимися прямыми. Назовем ***углом между скрещивающимися прямыми*** a и b такой угол BMA, в котором M – произвольная точка пространства, $MB \parallel b$, $MA \parallel a$ и $m(\angle BMA) \in [0°, 180°]$ (рис. 9.1 а), б)).

Определение. Прямые a и b в пространстве называются **перпендикулярными**, если величина угла между ними равна 90° (рис. 9.2).



$(c \subset \alpha,\ a \cap c = \{A\},\ c \parallel b) \Rightarrow a \perp b$

Рис. 9.2

Обозначают: $a \perp b$.

Нетрудно заметить, что в кубе, изображенном на рисунке 9.3, прямые AA_1 и BC перпендикулярны. Прямые AD_1 и CB_1 также перпендикулярны.

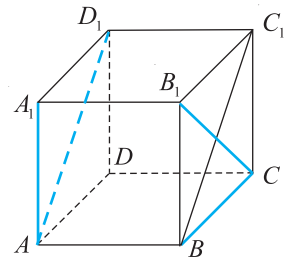


Рис. 9.3

В предыдущем модуле мы установили, что прямая и плоскость в пространстве либо параллельны, либо пересекаются.

Определения. • Прямая называется **перпендикулярной плоскости**, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости. В этом случае еще говорят, что **плоскость перпендикулярна прямой**.

• Прямая, которая не перпендикулярна плоскости и не параллельна этой плоскости, называется **наклонной** к этой плоскости (рис. 9.4).

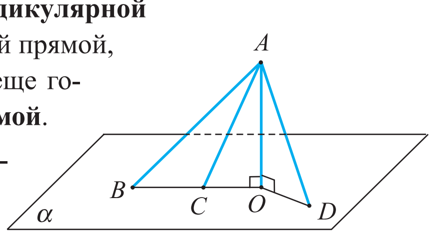


Рис. 9.4

На рисунке 9.4 прямая AO перпендикулярна плоскости α, а прямые AB, AC, AD являются наклонными к этой плоскости.

Теорема 1. Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в одной плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

Доказательство

Пусть прямые a и b, лежащие в плоскости α, пересекаются в точке O, и прямая c перпендикулярна прямым a и b (рис. 9.5). Докажем, что прямая c перпендикулярна любой прямой d, лежащей в плоскости α.

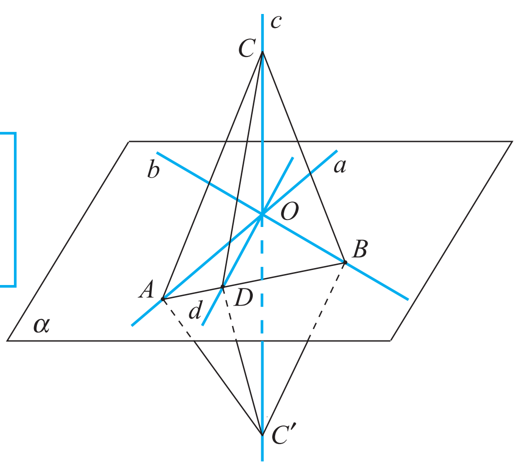


Рис. 9.5

В силу определения угла между двумя прямыми в пространстве можно предположить, что прямые c и d проходят через точку O. Возьмем на прямых a и b две произвольные точки A и B соответственно, отличные от O, так, чтобы прямая d пересекала отрезок AB в точке D. На прямой c возьмем точки C и C' такие, что $[OC'] \equiv [CO]$ (рис. 9.5).

Поскольку $\Delta COA \equiv \Delta C'OA$ и $\Delta COB \equiv \Delta C'OB$ (как прямоугольные треугольники с соответствующими конгруэнтными катетами), то $[AC] \equiv [AC']$ и $[BC] \equiv [BC']$. Следовательно, $\Delta ACB \equiv \Delta AC'B$ и $\angle CAB \equiv \angle C'AB$. По признаку СУС устанавливаем, что $\Delta CAD \equiv \Delta C'AD$, откуда следует, что треугольник CDC' – равнобедренный. Отрезок DO является медианой треугольника CDC', проведенной к его основанию, поэтому $[DO]$ является и высотой, то есть $c \perp d$. ►

Существование и единственность плоскости, проходящей через данную точку прямой и перпендикулярной этой прямой, следуют из следующей теоремы

Теорема 2. Через любую точку данной прямой проходит плоскость, перпендикулярная этой прямой, и притом только одна.

Задание. Докажите теорему 2.

Задание с решением

Докажем, что через произвольную точку A, не лежащую на данной прямой a, проходит плоскость, перпендикулярная прямой a, и притом только одна.

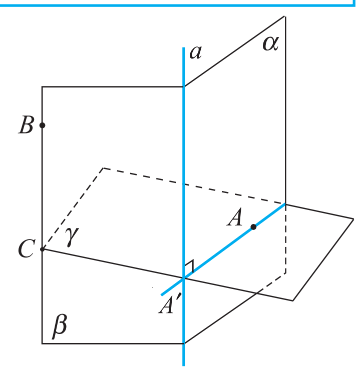


Рис. 9.6

Решение:

В плоскости α, заданной прямой a и точкой A, проводим прямую AA' перпендикулярно прямой a (рис. 9.6). Согласно аксиоме **ПР$_1$** (модуль 8), существует точка B, не лежащая в плоскости α, которая вместе с прямой a задает плоскость β. В плоскости β через точку A' проводим прямую $A'C$, перпендикулярную прямой a. Плоскость, проходящая через точки A, A', C, является искомой плоскостью.

Единственность плоскости α можно доказать при помощи теоремы 2.

Теорема 3. Каковы бы ни были плоскость и точка, существует одна и только одна прямая, проходящая через данную точку и перпендикулярная данной плоскости.

Доказательство

Пусть α – заданная плоскость и A – произвольная точка.

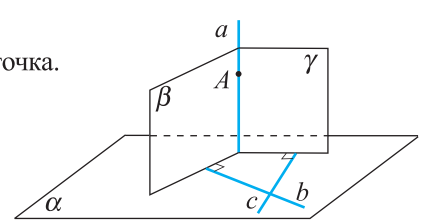


Рис. 9.7

Докажем *существование* перпендикулярной прямой. Возьмем в плоскости α две пересекающиеся прямые b и c. Рассмотрим плоскости β и γ, проходящие через точку A и перпендикулярные прямым b и c соответственно (рис. 9.7).

Плоскости β и γ, имеющие общую точку A, пересекаются по прямой a.

Так как $b \perp \beta$ и $c \perp \gamma$, то $a \perp b$ и $a \perp c$. Согласно теореме 1, прямая a перпендикулярна плоскости α.

Докажем *единственность* прямой a. Предположим, что через точку A проходит еще одна прямая a', перпендикулярная плоскости α (рис. 9.8). Тогда в плоскости δ, заданной прямыми a и a', через точку A проходят две прямые, перпендикулярные прямой $d = \delta \cap \alpha$, что невозможно. Полученное противоречие доказывает, что прямые a и a' совпадают. ►

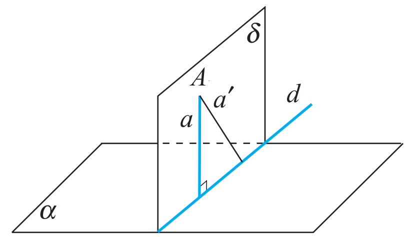


Рис. 9.8

Перечислим некоторые ***свойства перпендикулярности прямых и плоскостей***.

Теорема 4. Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой прямой (рис. 9.9 а)).

Теорема 5. Если две прямые перпендикулярны одной и той же плоскости, то они параллельны (рис. 9.9 б)).

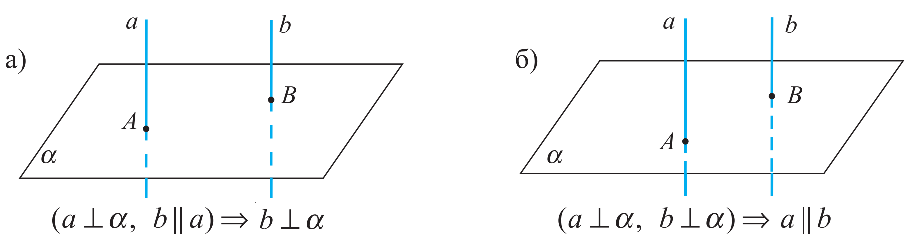


Рис. 9.9

Задание. Докажите теоремы 4 и 5.

Задачи

A

1. Прямоугольники $CDAB$ и $CDEF$ имеют общую сторону и их плоскости различны. Докажите, что $CD \perp BF$.
2. Треугольники CAD и BAD, где $m(\angle A) = 90°$, имеют общий катет и их плоскости различны. Докажите, что AD перпендикулярна прямой MN, где M – середина отрезка CD, а N – середина отрезка BD.
3. Несущая прямая отрезка AB длиной 5 см перпендикулярна плоскости α и пересекает ее в точке C. Точка D плоскости α такая, что $AD = 3$ см, $BD = 4$ см. Найдите длину отрезка CD.
4. Из вершины A квадрата $ABCD$ перпендикулярно к его плоскости проведена прямая AM. Найдите MB, MD и MC, если $AB = 4$ см, $MA = 3$ см.
5. Из вершины A острого угла прямоугольного треугольника ACB перпендикулярно к его плоскости проведена прямая AE. Найдите гипотенузу AB, если $AE = CB = a$, $EC = b$.
6. Расстояния от точек A и B, расположенных по одну сторону от плоскости α, до этой плоскости равны a и b соответственно. Найдите длину отрезка AB, если $A_1B_1 = c$, где $A_1, B_1 \in \alpha$ и $AA_1 \perp \alpha$, $BB_1 \perp \alpha$.

7. Из вершины A прямоугольника $ABCD$ перпендикулярно к его плоскости проведена прямая AE так, что $AE = 4$ см. Найдите DE, CE, BE и расстояние d от точки E до прямой BD, если $AB = 6$ см и $AD = 4$ см.

8. Точка D находится на расстоянии 9 см от вершин прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C, $AC = 8$ см, $BC = 6$ см. Найдите расстояние от точки D до плоскости треугольника ABC.

Б

9. Расстояния от точек A и B, расположенных по разные стороны от плоскости α, до этой плоскости равны a и b соответственно. Найдите длину отрезка AB, если $A_1B_1 = c$, где $A_1, B_1 \in \alpha$ и $AA_1 \perp \alpha$, $BB_1 \perp \alpha$.

10. Из вершины A параллелограмма $ABCD$ перпендикулярно к его плоскости проведена прямая AE так, что $AE = c$. Найдите BE, CE, DE, если $AB = a$, $AD = b$ и $m(\angle BAD) = \alpha$.

11. Точка D равноудалена от вершин равнобедренного треугольника ABC $(AB = AC)$. Найдите расстояние от точки D до плоскости треугольника ABC, если $BC = a$, $AD = b$, $m(\angle CAB) = \alpha$.

12. Точка M равноудалена от вершин многоугольника $ABCDE$. Докажите, что прямые MA, MB, MC, MD и ME образуют конгруэнтные углы с плоскостью многоугольника.

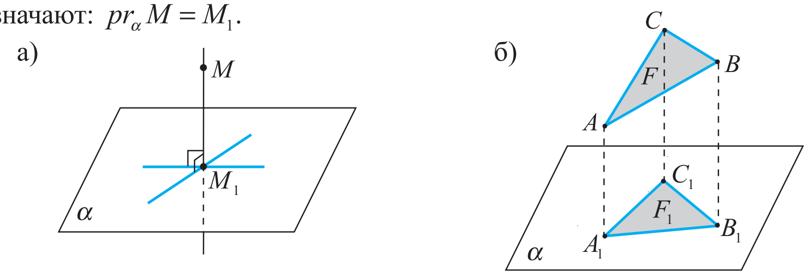
13. Прямые d_1 и d_2 пересекаются в точке A. Через точку A проходят плоскости α и β так, что $d_1 \perp \alpha$, $d_2 \perp \beta$. Докажите, что прямая пересечения плоскостей α и β перпендикулярна плоскости, определяемой прямыми d_1 и d_2.

14. Точка E, не принадлежащая плоскости прямоугольника $ABCD$, равноудалена от вершин прямоугольника. Докажите, что прямая, проходящая через точку O пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$ и точку E, перпендикулярна плоскости прямоугольника $ABCD$.

§ 2 Ортогональные проекции. Угол между прямой и плоскостью

Определение. **Ортогональной проекцией точки M на плоскость α** называется точка M_1 пересечения данной плоскости и прямой, проходящей через точку M перпендикулярно этой плоскости (рис. 9.10 а)).

Обозначают: $pr_\alpha M = M_1$.



$(MM_1 \perp \alpha,\ M_1 \in \alpha) \Rightarrow M_1 = pr_\alpha M$ $\qquad$ $F_1 = pr_\alpha F$

Рис. 9.10

Ортогональная (прямоугольная) проекция геометрической фигуры F на плоскость – это множество F_1 ортогональных проекций всех точек данной фигуры на эту плоскость (рис. 9.10 б)).

Пусть даны прямая a и точка M. Известно, что существует единственная плоскость α, которая проходит через точку M и перпендикулярна прямой a. Обозначим точку пересечения прямой a и плоскости α через M_1 (рис. 9.11 а), б)).

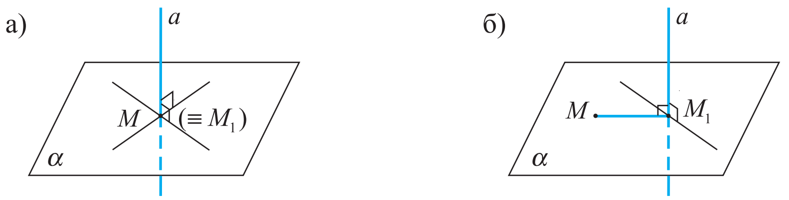


Рис. 9.11

Определение. Точка M_1 называется **ортогональной проекцией** точки M на прямую a, а длина отрезка MM_1 называется **расстоянием** от точки M до прямой a (рис. 9.11).

Замечание. В дальнейшем под проекцией будем подразумевать ортогональную проекцию.

Теорема 6. Проекцией прямой на плоскость является прямая или точка.

Доказательство

Если прямая a перпендикулярна плоскости α, то ее проекция совпадает с точкой пересечения прямой a и плоскости α.

Рассмотрим случай, когда прямая a не перпендикулярна плоскости α (рис. 9.12).

Отметим на прямой a две различные точки A и B и обозначим через A_1 и B_1 их проекции на плоскость α.

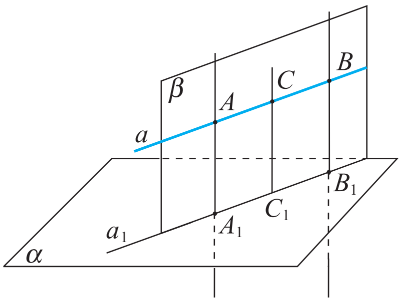


Рис. 9.12

Согласно теореме 5, прямые AA_1 и BB_1 параллельны. Следовательно, они задают некоторую плоскость β.

Прямые a и $a_1 = A_1B_1$ принадлежат плоскости β. Для любой точки $C \in a$, точка $C_1 = pr_\alpha C$ принадлежит плоскости β ($CC_1 \parallel AA_1$ и $C \in a \subset \beta$). Таким образом, C_1 лежит на прямой пересечения плоскостей α и β, то есть, на прямой A_1B_1. Это и доказывает, что проекция любой точки прямой a является точкой, лежащей на прямой a_1, то есть, $pr_\alpha a = a_1$. ►

Теорема 7 (теорема о трех перпендикулярах). Если проекция a_1 на плоскость α наклонной a перпендикулярна прямой b, лежащей в плоскости α, то и прямая a перпендикулярна прямой b.

Доказательство

Пусть прямая AA_1 перпендикулярна плоскости α, $A\in a$, $A_1\in\alpha$. Тогда $AA_1\perp b\subset\alpha$ (рис. 9.13). Из условия теоремы следует, что прямая b перпендикулярна прямой a_1, то есть, прямая b перпендикулярна и прямой AA_1, и прямой BA_1, откуда следует, что прямая b перпендикулярна плоскости, проходящей через точки A, B, A_1. Следовательно, прямая b перпендикулярна и прямой $AB=a$, лежащей в этой плоскости. ▶

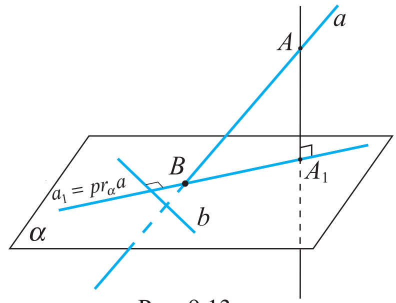


Рис. 9.13

Теорема 8 (обратная теореме 7). Если прямая a перпендикулярна прямой b, лежащей в плоскости α, и не перпендикулярна этой плоскости, то проекция a_1 на плоскости α прямой a перпендикулярна прямой b.

Доказательство

Прямая AA_1 (рис. 9.13) перпендикулярна плоскости α. Следовательно, $AA_1\perp b\subset\alpha$ и из условия теоремы следует, что $AB\perp b$, то есть прямая b перпендикулярна плоскости ABA_1. Значит, прямая b перпендикулярна прямой $a_1=BA_1=pr_\alpha a$. ▶

Теорема 9. Пусть α – плоскость, A – точка, не лежащая в плоскости α, B – точка, лежащая в плоскости α, и $A_1=pr_\alpha A$. Тогда $AA_1\leq AB$ (рис. 9.14).

Доказательство

Действительно, отрезок AA_1 перпендикулярен плоскости α, следовательно, и отрезку BA_1. Значит, треугольник AA_1B – прямоугольный с прямым углом A_1, откуда следует, что $AA_1\leq AB$, причем равенство имеет место, если B совпадает с A_1 $(AB\perp\alpha)$. ▶

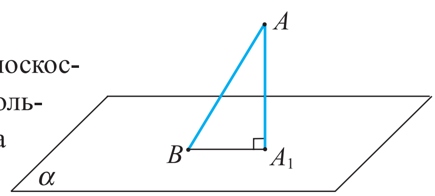


Рис. 9.14

Определение. Расстоянием от точки до плоскости называется длина отрезка, соединяющего данную точку и ее проекцию на эту плоскость.

На рисунке 9.14 длина отрезка AA_1 является расстоянием от точки A до плоскости α.

Теорема 10. Если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ справедливы соотношения $AB\equiv A_1B_1$, $AC\equiv A_1C_1$ и $BC>B_1C_1$, то $\mathrm{m}(\angle BAC)>\mathrm{m}(\angle B_1A_1C_1)$.

Из теоремы 10 следует, что величина угла между прямой и ее проекцией на плоскость меньше величины угла между этой прямой и любой другой прямой, лежащей в этой плоскости.

Действительно, пусть α – плоскость и a – наклонная ($a\not\perp\alpha$, $a\not\parallel\alpha$), пересекающая плоскость в точке A. Отметим на прямой a точку B, отличную от A, и найдем $B_1=pr_\alpha B$ (рис. 9.15).

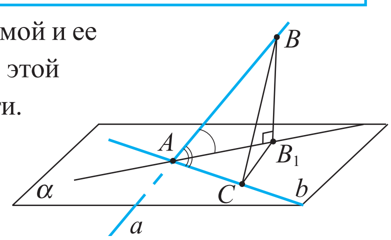


Рис. 9.15

На любой прямой b, лежащей в плоскости α $(b \neq AB_1)$ и проходящей через точку A, отметим такую точку C, что $AC = AB_1$.

Треугольники CAB и B_1AB удовлетворяют условиям теоремы 10: $AC = AB_1$, $[AB]$ – общая сторона и $CB > BB_1$, как гипотенуза и катет прямоугольного треугольника CB_1B с прямым углом в B_1. Следовательно, $\text{m}(\angle BAC) > \text{m}(\angle BAB_1)$.

Если прямая не перпендикулярна плоскости, оправданно следующее

Определение. **Углом между наклонной и плоскостью** называется острый угол между наклонной и ее проекцией на эту плоскость.

На рисунке 9.16, угол φ – это угол между наклонной a и плоскостью α.

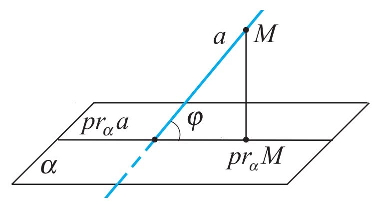


Рис. 9.16

Замечание. ***Углом между отрезком и плоскостью*** называется угол между несущей прямой этого отрезка и данной плоскостью.

Теорема 11. Длина проекции отрезка на плоскость равна произведению длины этого отрезка на косинус угла между отрезком и плоскостью.

Доказательство

Рассмотрим отрезок AB, плоскость α, $[AB] \nparallel \alpha$, проекции A_1 и B_1 на плоскость α точек A и B соответственно и точку D пересечения прямой AB с плоскостью α (рис. 9.17).

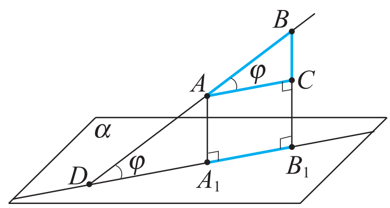


Рис. 9.17

Пусть C – точка пересечения прямой BB_1 с прямой, проходящей через точку A и параллельной прямой A_1B_1. Треугольник ABC – прямоугольный с прямым углом C и $\text{m}(\angle BAC) = \text{m}(\angle ADA_1) = \varphi$. Таким образом, из треугольника ABC имеем $AC = AB\cos\varphi$ и, так как $AC = A_1B_1$, то $A_1B_1 = AB\cos\varphi$.

Пусть точки A и B расположены по разные стороны от плоскости α (рис. 9.18).

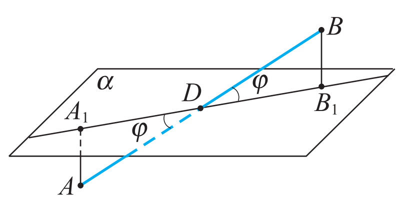


Рис. 9.18

Тогда $A_1B_1 = A_1D + DB_1$, а из треугольников AA_1D и BB_1D имеем

$$A_1D = AD\cos\varphi,\quad DB_1 = DB\cos\varphi.$$

Тогда $A_1B_1 = AD\cos\varphi + DB\cos\varphi = (AD + DB)\cos\varphi = AB\cos\varphi.$

Оставшиеся случаи ($[AB] \parallel \alpha$, ...) очевидны. ►

Задачи

А

1. Равнобедренные треугольники ABC и ABD имеют общее основание AB и $C \notin (ABD)$, а точка M – середина отрезка AB.
   а) Докажите, что прямая AB перпендикулярна плоскости MCD.
   б) Постройте проекцию несущей полупрямой медианы MC на плоскость треугольника ABD, если угол CMD острый.
   в) Найдите длину проекции медианы MC на плоскость ABD, если $MC = 4$ см, $MD = 8$ см, $CD = 6$ см.
   г) Найдите расстояние от точки D до плоскости ABC, используя данные пункта в).

2. Отрезок A_1B_1 является проекцией отрезка AB на плоскость α. Найдите:
   а) длину отрезка A_1B_1, если $AA_1 = 9$ см, $BB_1 = 13$ см, $AB = 5$ см;
   б) косинус угла между отрезком AB и плоскостью α.

3. Расстояние от точки A до плоскости α равно 3 см. Длины наклонных AC и AB $(C, B \in \alpha)$ к плоскости α равны 6 см. Точка M – середина отрезка CB, а $A_1 = pr_\alpha A$. Найдите длину отрезка A_1M, если:
   а) $m(\angle CAB) = 90°$; б) $m(\angle CAB) = 60°$.

4. Из точки, не лежащей в некоторой плоскости, построены две наклонные длиной в 30 см и 25 см. Разность длин их проекций равна 11 см. Найдите расстояние от точки до плоскости.

5. Балка установлена на двух столбах, высота которых 3 м и 5 м. Вычислите расстояние от пола до точки, делящей длину балки в отношении $2:3$, считая от нижней точки балки.

Б

6. Точка V не принадлежит плоскости правильного шестиугольника $ABCDEF$ и равноудалена от его вершин.
   а) Покажите, что прямая, проходящая через точку V и центр O шестиугольника, перпендикулярна плоскости шестиугольника.
   б) Покажите, что прямые VA, VB, VC, VD, VE, VF образуют с плоскостью шестиугольника конгруэнтные углы.

7. Точка E, равноудаленная от вершин выпуклого четырехугольника $ABCD$, не принадлежит его плоскости.
   а) Докажите, что четырехугольник $ABCD$ – вписанный.
   б) Докажите, что перпендикуляр, проходящий через точку E к плоскости четырехугольника $ABCD$, проходит через центр описанной около него окружности.
   в) Докажите, что углы между прямыми EA, EB, EC, ED и плоскостью четырехугольника $ABCD$ конгруэнтны.

8. Полупрямая $[OC$ образует с полупрямыми $[OA$ и $[OB$ конгруэнтные углы. Найдите длину проекции отрезка OC на плоскость AOB, если $m(\angle AOC) = m(\angle BOC) = \alpha$, $m(\angle AOB) = 2\beta$, и $OC = c$.

§ 3 Угол между двумя плоскостями

Напомним, что любая прямая a, лежащая в плоскости α, делит множество точек плоскости, не лежащих на прямой a, на два подмножества α_1 и α_2, которые называются ***открытыми полуплоскостями***. В этом случае говорят, что прямая a задает полуплоскости α_1 и α_2. Объединение открытой полуплоскости и прямой, задающей ее, называется ***замкнутой полуплоскостью***. Плоскость α называется ***несущей плоскостью*** полуплоскостей α_1 и α_2.

Определение. Объединение двух замкнутых полуплоскостей, заданных одной и той же прямой, называется **двугранным углом** (рис. 9.19).

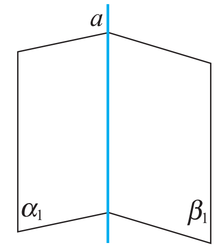


Рис. 9.19

Двугранный угол полуплоскостей α_1, β_1 обозначается $\angle(\alpha_1\beta_1)$.

Прямая a называется ***ребром двугранного угла*** $\angle(\alpha_1\beta_1)$, а полуплоскости α_1 и β_1 называются ***гранями двугранного угла***.

Если полуплоскости α_1 и β_1 совпадают, то двугранный угол между полуплоскостями α_1 и β_1 называется ***нулевым***.

Если полуплоскости α_1 и β_1 имеют одну и ту же несущую плоскость и их объединение совпадает с несущей плоскостью, то двугранный угол называется ***развернутым***.

Двугранным собственным углом называется двугранный угол, отличный от нулевого и развернутого.

Внутренней областью двугранного собственного угла называется пересечение полупространства, заданного несущей плоскостью полуплоскости α_1, содержащей полуплоскость β_1, с полупространством, заданным несущей плоскостью полуплоскости β_1, содержащей полуплоскость α_1.

Пусть $\angle(\alpha_1\beta_1)$ – двугранный собственный угол и A – произвольная точка на его ребре m. Из точки A в каждой из его граней α_1 и β_1 проводим полупрямые a и b, перпендикулярные ребру m (рис. 9.20 а)). Таким образом, получили угол с вершиной в точке A, сторонами которого являются полупрямые $[AB$ и $[AC$ $(C \in b,\ B \in a)$.

Этот угол можно получить и как пересечение двугранного угла $\angle(\alpha_1\beta_1)$ с плоскостью γ, перпендикулярной его ребру m и проходящей через точку A (рис. 9.20 б)).

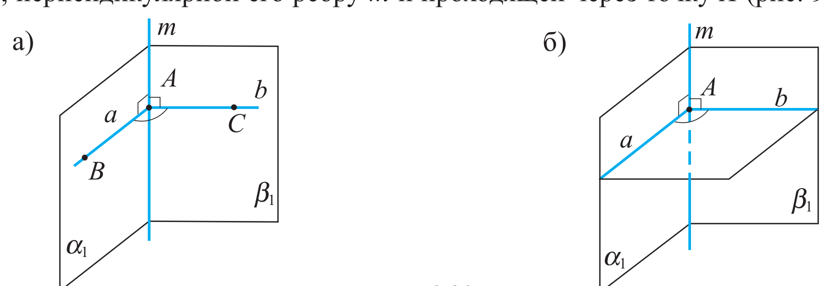


Рис. 9.20

Определение. Пересечение двугранного угла плоскостью, перпендикулярной его ребру, называется **линейным углом (плоским углом) двугранного угла**.

Можно доказать, что все линейные углы одного и того же двугранного угла конгруэнтны.

Определение. **Величиной двугранного угла** называется величина его линейного угла.

Возвращаясь к рисунку 9.20 а), запишем: $m(\angle(\alpha_1\beta_1)) = m(\angle BAC)$.

Определения. • **Полуплоскости** α_1 и β_1 называются **перпендикулярными**, если $m(\angle(\alpha_1\beta_1)) = 90°$.

• В этом случае соответствующие несущие плоскости α и β называются **перпендикулярными плоскостями**.

Обозначают: $\alpha_1 \perp \beta_1$, соответственно $\alpha \perp \beta$.

Теорема 12. Две плоскости перпендикулярны тогда и только тогда, когда одна из них содержит прямую, перпендикулярную другой плоскости.

Доказательство

Необходимость. Если две плоскости перпендикулярны, то несущая прямая любой стороны линейного угла перпендикулярна плоскости, которая ее не содержит.

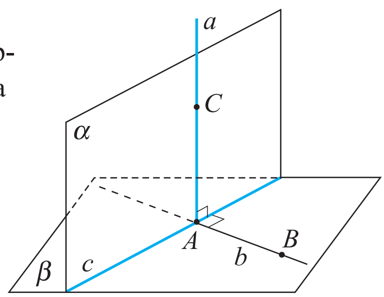


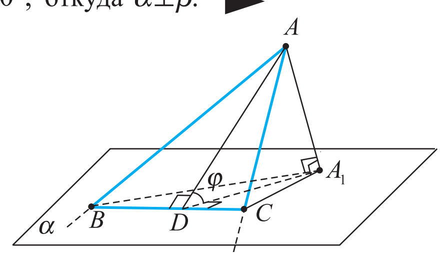
Рис. 9.21

Достаточность. Пусть плоскость α проходит через прямую a, перпендикулярную плоскости β (рис. 9.21).

Плоскости α и β пересекаются по прямой c, а прямые a и c пересекаются в точке A.

В плоскости β через точку A проводим прямую b, перпендикулярную прямой c. Устанавливаем, что угол BAC является линейным углом двугранного угла между плоскостями α и β. Поскольку $a \perp \beta$, то $a \perp b$. Значит, $m(\angle(\alpha\beta)) = 90°$, откуда $\alpha \perp \beta$. ▶

Теорема 13. Если φ – величина двугранного угла между плоскостью треугольника ABC и плоскостью α, $\mathcal{A}_\Delta$ – площадь треугольника ABC, $\mathcal{A}_{pr_\alpha \Delta}$ – площадь проекции треугольника ABC на плоскость α, то $\mathcal{A}_{pr_\alpha \Delta} = \mathcal{A}_\Delta \cdot \cos\varphi$ (рис. 9.22).



$\Delta A_1BC = pr_\alpha \Delta ABC$, $\mathcal{A}_{\Delta A_1BC} = \mathcal{A}_{\Delta ABC} \cdot \cos\varphi$

Рис. 9.22

Задания с решением

1. Дан равнобедренный треугольник ABC, у которого $AB = BC = 8$ см и $AC = 5$ см. Через вершины A и B перпендикулярно к плоскости ABC проводим прямые AA_1 и BB_1 так, что A_1 и B_1 лежат в одном и том же полупространстве, ограниченном плоскостью ABC, причем $AA_1 = 12$ см и $BB_1 = 6$ см (рис. 9.23). Найдем:

а) CD_1, где D_1 – середина отрезка A_1B_1;

б) расстояние от точки C до прямой A_1B_1;

в) величину двугранного угла между плоскостями ABC и A_1B_1C.

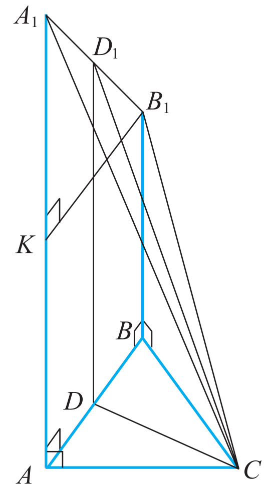


Рис. 9.23

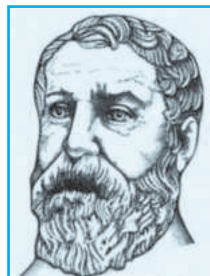
Решение:

а) Расстояние от точки C до середины D_1 отрезка A_1B_1 вычислим из прямоугольного треугольника DD_1C ($DD_1 \parallel AA_1 \Rightarrow DD_1 \perp (ABC)$). Отрезок DD_1 является средней линией трапеции AA_1B_1B, значит, $DD_1 = 9$ см, а отрезок DC является медианой треугольника ABC. Используя формулу вычисления медианы треугольника $\left(m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}\right)$, получаем, что $DC = \frac{1}{2}\sqrt{114}$ см.

Из прямоугольного треугольника CDD_1, по теореме Пифагора, получаем:

$$D_1C = \sqrt{DC^2 + DD_1^2} = \sqrt{\frac{1}{4}\cdot 114 + 81} = \sqrt{109{,}5}\ (\text{ñì}).$$

б) Расстояние от точки C до прямой A_1B_1 равно высоте треугольника A_1CB_1, проведенной из вершины C. По теореме Пифагора, для прямоугольного треугольника A_1AC получаем, что $A_1C = 13$ см. Аналогично из прямоугольных треугольников B_1BC и A_1KB_1 следует, что $B_1C = 10$ см и $A_1B_1 = 10$ см соответственно.



Герон Александрийский

Расстояние от точки C до прямой A_1B_1 может быть вычислено следующим образом: $h_c = \frac{2\mathcal{A}_{A_1B_1C}}{A_1B_1}$.

По формуле Герона[1] вычисляем площадь треугольника:

$$\mathcal{A}_{A_1B_1C} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{33}{2}\cdot\frac{13}{2}\cdot\frac{13}{2}\cdot\frac{7}{2}} = \frac{13}{4}\sqrt{231}\ (\text{см}).$$

Тогда $h_c = \dfrac{2\cdot\frac{13}{4}\sqrt{231}}{10} = \dfrac{13}{20}\sqrt{231}$ (см).

в) Треугольник ABC является проекцией треугольника A_1B_1C на плоскость треугольника ABC. Следовательно, величина φ двугранного угла между плоскостями ABC и A_1B_1C вычисляется по формуле $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{A_1B_1C}\cdot\cos\varphi$.

$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{5}{4}\sqrt{231}$ см^2. Отсюда $\cos\varphi = \frac{5}{13}$, а $\varphi = \arccos\frac{5}{13}$.

Ответ: а) $CD_1 = \sqrt{109{,}5}$ см; б) $\frac{13}{20}\sqrt{231}$ см; в) $\varphi = \arccos\frac{5}{13}$.

Замечание. Задача 1 в) показывает, что величина двугранного угла может быть найдена без построения его линейного угла.

2. Некомпланарные полупрямые $[OA$, $[OB$, $[OC$ с общим началом в точке O построены так, что $m(\angle AOC) = m(\angle BOC) = \alpha < 90^\circ$, $m(\angle AOB) = 2\beta$ (рис. 9.24).

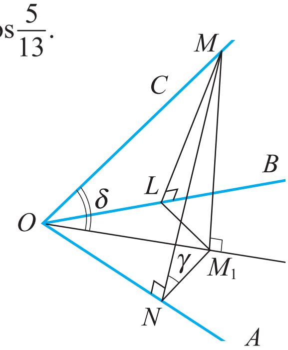


Рис. 9.24

а) Докажем, что проекция полупрямой $[OC$ на плоскость OAB является биссектрисой угла AOB.

[1] Герон Александрийский (1 от Р. Х.) – древнегреческий математик и механик.

б) Найдем величину двугранного угла с ребром *OA*.

в) Определим величину угла между прямой *OC* и плоскостью *OAB*.

Решение:

а) Пусть M_1 – проекция некоторой точки $M \in [OC$ на плоскость *OAB*, а *N* и *L* – точки пересечения прямых, проходящих через точку *M* и перпендикулярные прямым *OA* и *OB* соответственно. Прямые NM_1 и LM_1 являются проекциями прямых *MN* и соответственно *ML* на плоскость *OAB*. В силу теоремы о трех перпендикулярах $NM_1 \perp OA$ и $LM_1 \perp OB$.

Поскольку $\Delta ONM \overset{\text{ГУ}}{\equiv} \Delta OLM$, то $[ON] \equiv [OL]$ и $[MN] \equiv [ML]$.

Так как $\Delta MNM_1 \overset{\text{ГК}}{\equiv} \Delta MLM_1$, то $[NM_1] \equiv [LM_1]$.

$\Delta ONM_1 \overset{\text{КК}}{\equiv} \Delta OLM_1 \Rightarrow \angle NOM_1 \equiv \angle LOM_1$, то есть полупрямая $[OM_1$ является биссектрисой угла *AOB*, ч. т. д.

б) В прямоугольных треугольниках OMN, ONM_1, MNM_1 получаем:

$$ON = OM\cos\alpha, \quad NM = OM\sin\alpha; \quad NM_1 = ON\,\mathrm{tg}\beta = OM\cos\alpha\,\mathrm{tg}\beta;$$

$$\cos\gamma = \frac{NM_1}{NM} = \frac{OM\cos\alpha\,\mathrm{tg}\beta}{OM\sin\alpha} = \mathrm{ctg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta. \text{ Тогда } \gamma = \arccos(\mathrm{ctg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta).$$

в) В прямоугольных треугольниках ONM_1 и MOM_1 имеем:

$$OM_1 = \frac{ON}{\cos\beta} = \frac{OM\cos\alpha}{\cos\beta}, \quad \cos\delta = \frac{OM_1}{OM} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}, \text{ откуда } \delta = \arccos\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\right).$$

Ответ: б) $\gamma = \arccos(\mathrm{ctg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta)$; в) $\delta = \arccos\left(\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}\right)$.

3. Известно, что точка *M*, не лежащая в плоскости некоторого многоугольника, равноудалена от его вершин. Докажем, что около данного многоугольника можно описать окружность.

Решение:

Пусть точка *M*, не лежащая в плоскости многоугольника $A_1A_2A_3\ldots A_n$, такая, что $[MA_1] \equiv [MA_2] \equiv$ $\equiv [MA_3] \equiv \ldots \equiv [MA_n]$ (рис. 9.25). Точка *O* является проекцией точки *M* на плоскость многоугольника. Тогда треугольники OMA_1, OMA_2, OMA_3, ..., OMA_n – прямоугольные и конгруэнтны (признак ГК), откуда следует, что $[OA_1] \equiv [OA_2] \equiv \ldots \equiv [OA_n]$. Следовательно, точка *O*, лежащая в плоскости этого многоугольника, равноудалена от его вершин, то есть около многоугольника можно описать окружность, а точка *O* – центр этой окружности.

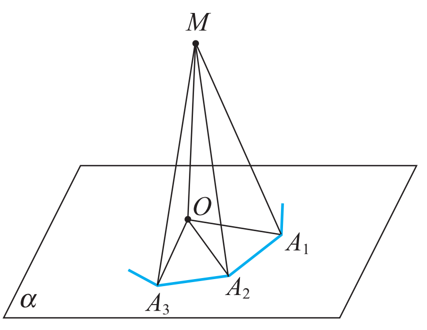


Рис. 9.25

Замечание. Точки прямой *OM* равноудалены от вершин многоугольника $A_1\ldots A_n$.

4. В грани α двугранного угла $\angle(\alpha\beta)$ величины φ проведена прямая *AD*, которая образует с ребром *b* двугранного угла угол величиной δ (рис. 9.26). Найдем величину γ угла между прямой *AD* и гранью β.

Решение:

Пусть $\angle ABC$ – линейный угол двугранного угла $\angle(\alpha\beta)$. По условию задачи $m(\angle ABC) = \varphi$, $m(\angle ADB) = \delta$. Так как $AC \perp \beta$, следует, что $\angle ADC$ является искомым углом. В прямоугольных треугольниках ABD, ACB и ACD имеем: $AB = AD\sin\delta$, $AC = AB\sin\varphi = AD\sin\delta\sin\varphi$, $AC = AD\sin\gamma$.

Таким образом, $AD\sin\gamma = AD\sin\delta\sin\varphi$. Следовательно, $\sin\gamma = \sin\delta\sin\varphi$.

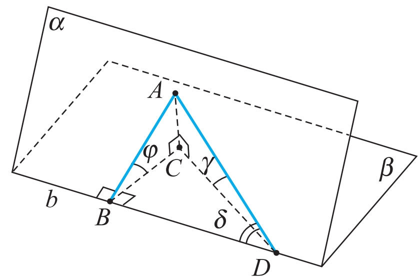


Рис. 9.26

5. Пусть точка $A \notin \alpha$, и из этой точки проведены к плоскости α наклонная AB и перпендикуляр AO, где точка B – основание наклонной, а точка O – основание перпендикуляра. Через основание наклонной в плоскости α построена прямая BC, которая образует с проекцией наклонной угол величиной δ. Пусть φ и γ – величины углов между наклонной AB и ее проекцией OB и соответственно прямой BC (рис. 9.27). Покажем, что $\cos\gamma = \cos\varphi\cos\delta$.

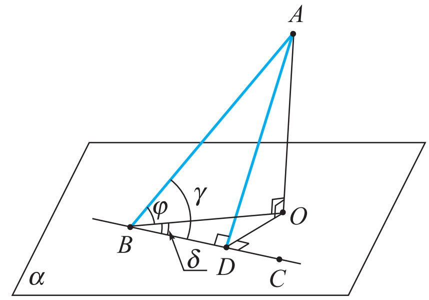


Рис. 9.27

Решение:

В плоскости α построим прямую $OD \perp BC$. Тогда, в силу теоремы о трех перпендикулярах, имеем $AD \perp BC$. Пусть $AB = x$. Тогда из прямоугольных треугольников AOB, BDO и ADB получим: $BO = x\cos\varphi$; $BD = BO\cos\delta = x\cos\varphi\cos\delta$, $BD = x\cos\gamma$. Следовательно, $\cos\gamma = \cos\varphi\cos\delta$.

Задачи

A

1. Равносторонние треугольники ABC и ABD имеют общую сторону AB, а их плоскости образуют прямой угол. Найдите длину отрезка CD, если $AB = 2$ см.
2. Сторона правильного треугольника ABC равна 3 см. Сторона AB расположена в плоскости α. Двугранный угол между плоскостями ABC и α равен 30°. Найдите:
   а) длину проекции медианы треугольника ABC, проведенной из вершины C на плоскость α;
   б) расстояние от точки C до плоскости α.
3. Через меньшее основание трапеции проведена плоскость. Расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до этой плоскости равно 6 см, а отношение длин оснований равно $3:2$. Найдите расстояние от большего основания до плоскости.
4. Через одну из сторон параллелограмма проведена плоскость. Расстояние от противолежащей стороны до этой плоскости равно 10 см. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей до этой плоскости.

Б

5. Треугольник $A_1B_1C_1$ является ортогональной проекцией ΔABC на плоскость α. Найдите косинус двугранного угла между плоскостями ABC и α, если $AA_1 = BB_1 = 3$ см, $CC_1 = 8$ см, $A_1B_1 = 13$ см, $A_1C_1 = C_1B_1 = 12$ см.

6. Точка E равноудалена от сторон ромба $ABCD$ и не лежит в его плоскости. Докажите, что:
а) проекция точки E на плоскость ромба совпадает с точкой пересечения диагоналей ромба;
б) двугранные углы между плоскостями EAB, EBC, ECD, EDA и плоскостью ромба конгруэнтны.

7. Пусть $ABCD$ – выпуклый четырехугольник и точка E такая, что углы между плоскостями EAB, EBC, ECD, EDA и плоскостью четырехугольника конгруэнтны. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ описанный, и проекция точки E на плоскость четырехугольника $ABCD$ равноудалена от его сторон.

8. Равнобедренный треугольник ABC $(AB = AC)$ и равносторонний треугольник ADE находятся в разных плоскостях и имеют общую медиану AF. Докажите, что прямая AF перпендикулярна плоскости, проходящей через точки F, B, D.

9. Через один из катетов равнобедренного прямоугольного треугольника построена плоскость, которая образует с другим катетом угол в 45°. Найдите угол между гипотенузой и построенной плоскостью.

10. В трапеции $ABCD$, $m(\angle BAD) = 60°$. Через большее основание AB проведена плоскость, которая образует со стороной AD угол в 45°. Найдите отношение площади трапеции к площади проекции этой трапеции на построенную плоскость.

Задачи на повторение

А

1. Прямые AB, AC и AD перпендикулярны. Найдите длину отрезка CD, если:
а) $AB = 6$ см, $BC = 14$ см, $AD = 3$ см;
б) $BD = 18$ см, $BC = 32$ см, $AD = 10$ см;
в) $AB = m$, $BC = n$, $AD = p$;
г) $BD = s$, $BC = n$, $AD = p$.

2. Расстояние от точки M до вершин равностороннего треугольника равно b. Найдите расстояние от точки M до плоскости треугольника, если сторона треугольника равна a, а $b > \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

3. Из вершины B равнобедренной трапеции $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ перпендикулярно к ее плоскости проведена прямая BE так, что $BE = 4$ см. Вычислите расстояния d_1 и d_2 от точки E до прямых CD и AD соответственно, если известно, что высота трапеции равна 4 см, а $BC = 4$ см и $AD = 12$ см.

4. Через вершину A правильного шестиугольника $ABCDEF$ перпендикулярно к его плоскости проведена прямая AM так, что $AM = AB$. Вычислите величину угла между плоскостями:
а) MDC и AEF; б) DCM и DEM.

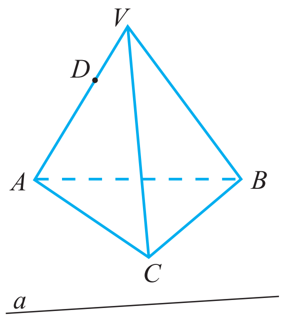
5. Точка D равноудалена от несущих прямых сторон треугольника ABC. Вычислите расстояния от точки D до сторон треугольника, если расстояние от точки D до плоскости треугольника равно $\sqrt{2}$ см, а $AB = AC = 6$ см, $BC = 4$ см.

6. Вычислите длину кабеля, который должен быть протянут от столба высотой 8 м до крыши здания высотой 20 м, если известно, что расстояние от дома до столба равно 9 м.

Б

7. Точка M, не лежащая в плоскости некоторого многоугольника, равноудалена от всех его сторон. Докажите, что многоугольник – описанный.

8. Точка M равноудалена от сторон многоугольника $ABCDE$. Докажите, что величины двугранных углов между плоскостями AMB, BMC, CMD, DME, EMA и плоскостью многоугольника равны.



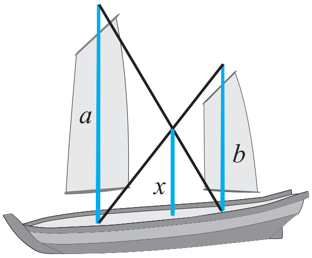
9. Плоскость α пересекает ребро AV пирамиды $VABC$ в точке D, а плоскость, содержащая грань ABC, пересекает плоскость α по прямой a (см. рисунок). Постройте сечение данной пирамиды плоскостью α.

10. Прямая a пересекает плоскость α, а точка P принадлежит плоскости α. Существует ли в плоскости α прямая, проходящая через точку P и перпендикулярная прямой a?

11. Докажите, что диагональ куба перпендикулярна плоскости, проходящей через концы трех ребер, исходящих из той же вершины, что и эта диагональ.

12. Через вершину острого угла прямоугольного треугольника проведена плоскость, параллельная одному из его катетов. Длина проекции большего катета на плоскость α равна $2\sqrt{31}$ см. Найдите длину проекции гипотенузы на плоскость α, если длины катетов треугольника равны 30 см и 40 см.

13. Две мачты яхты соединены канатами так, что вершина каждой мачты соединена с основанием другой мачты. На каком расстоянии от палубы яхты находится точка пересечения канатов, если высоты мачт равны a и b?



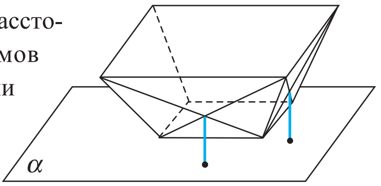
14. Точка M равноудалена от вершин правильного шестиугольника со стороной, равной a. Найдите расстояние от точки M до плоскости шестиугольника, если расстояние от точки M до вершины шестиугольника равно b.

15. Точка C не лежит в плоскости прямого угла AOB и равноудалена от сторон угла. Найдите расстояние от точки C до плоскости угла, если $CO = a$, а расстояние от точки C до одной из сторон угла равно b.

16. Из точки A к некоторой плоскости проведены два конгруэнтных отрезка. Величина угла, образованного отрезками, равна 2α, а величина угла, образованного их проекциями на эту плоскость, равна 2β. Найдите расстояние от точки A до плоскости, если длина одного из отрезков равна b.

17. Из точки, удаленной от плоскости на расстояние a, проведены к плоскости два отрезка равной длины. Величина угла между отрезками равна 2α, а величина угла между каждым из отрезков и плоскостью равна β. Найдите расстояние между концами отрезков, лежащих в данной плоскости.

18. Приемный бункер мельницы состоит из четырех стен в виде равнобедренных трапеций с основанием 0,4 м и 1,2 м. Расстояние между плоскостями верхнего и нижнего проемов равно 2 м. Для увеличения прочности стен бункера были приварены вдоль диагоналей каждой стенки железные уголки, а в точках пересечения диагоналей приварены вертикальные опоры до плоскости нижнего проема. Найдите высоту вертикальных опор.



Проверочная работа

А

Время выполнения работы: 45 минут

1. Найдите расстояние от середины отрезка AB до плоскости, которая не пересекает этот отрезок, если расстояния от точек A и B до этой плоскости равны 2,4 см и 4,6 см соответственно. ②

2. Длина стороны равностороннего треугольника равна 6 см. Точка, не лежащая в плоскости треугольника, находится на расстоянии 3 см от каждой стороны треугольника. Вычислите расстояние от этой точки до плоскости данного треугольника. ②

3. Точка M равноудалена от вершин прямоугольника, длины сторон которого равны 4 см и 10 см. Найдите расстояние от точки M до прямых, на которых лежат стороны прямоугольника, если расстояние от точки M до плоскости прямоугольника равно 5 см. ③

4. Сторона равностороннего треугольника ABC равна 12 см. Прямые MA, MB, MC образуют с плоскостью треугольника ABC конгруэнтные углы величиной в 30°. Вычислите расстояние от точки M до плоскости треугольника ABC. ③

Б

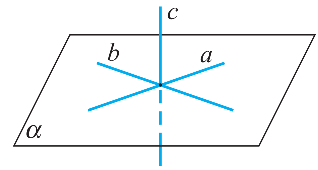
Время выполнения работы: 45 минут

1. Отрезок длины l пересекает плоскость. Концы отрезка расположены на расстоянии a и b от этой плоскости. Найдите расстояние от середины отрезка до этой плоскости. ②

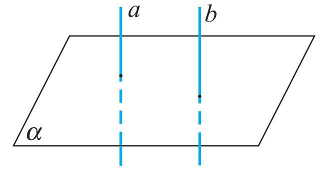
2. Через медиану треугольника проведена плоскость. Докажите, что вершины треугольника, которые не лежат в построенной плоскости, равноудалены от этой плоскости. ②

3. Длины сторон равнобедренного треугольника ABC равны 5 см, 5 см, 2 см. Расстояние от точки M до плоскости ABC равно 8 см, а ее проекция на плоскость ABC совпадает с серединой наибольшей высоты треугольника. Вычислите расстояние от точки M до сторон треугольника. ③

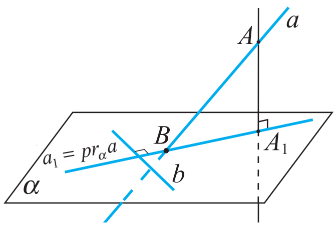
4. Найдите величину угла между боковым ребром и плоскостью основания правильной четырехугольной пирамиды, если все ее ребра конгруэнтны. ③



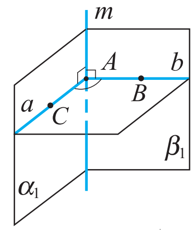
$(a\subset\alpha,\ b\subset\alpha,\ \alpha\nparallel b,\ c\perp a,\ c\perp b)\Rightarrow c\perp\alpha$



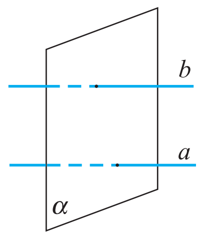
$(a\parallel b,\ a\perp\alpha)\Rightarrow b\perp\alpha$



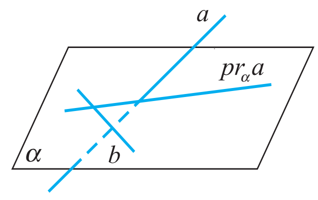
$(a\perp\alpha,\ AB$ – наклонная,
$B\in\alpha,\ A_1\in\alpha,\ A_1B\perp b)\Rightarrow AB\perp\alpha$



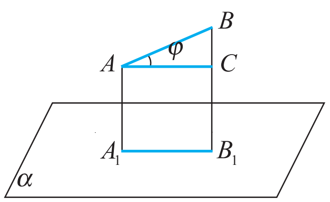
$\angle(\alpha_1\beta_1)$ – двугранный угол, $\alpha\cap\beta=m$,
$(ABC)\perp m$, $\mathrm{m}(\angle(\alpha_1\beta_1))=\mathrm{m}(\angle BAC)$



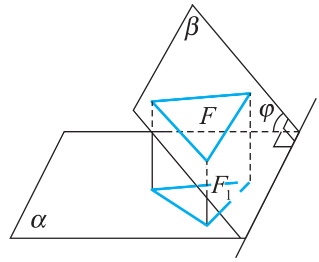
$(a\perp\alpha,\ b\perp\alpha)\Rightarrow a\parallel b$



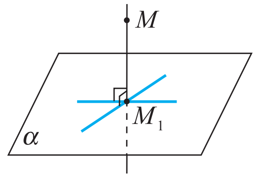
$b\subset\alpha$ 1) $a\perp b\Rightarrow pr_\alpha a\perp b$
2) $b\perp pr_\alpha a\Rightarrow a\perp b$



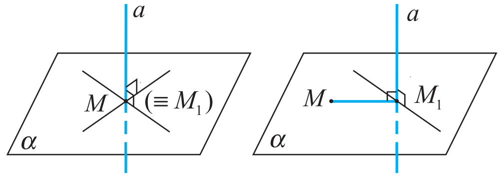
$([A_1B_1]\equiv pr_\alpha[AB],\ AC\parallel A_1B_1)\Rightarrow$
$\Rightarrow$ длина проекции $[AB]$ равна $AB\cos\varphi$



$(F\subset\beta,\ F_1=pr_\alpha F,\ \mathrm{m}(\angle(\alpha\beta))=\varphi)\Rightarrow$
$\Rightarrow\mathcal{A}_{F_1}=\mathcal{A}_F\cos\varphi$



$(MM_1\perp\alpha,\ M_1\in\alpha)\Rightarrow$ длина MM_1 равна расстоянию от точки M до плоскости α



$a\perp\alpha$, M, $M_1\in\alpha$, $M_1\in a$, MM_1 – расстояние от точки M до прямой a

Модуль

10 Геометрические преобразования

Цели

- распознавание и применение в различных контекстах понятий: *осевая симметрия*, *центральная симметрия*, *симметрия относительно плоскости*, **параллельный перенос*, **подобие в пространстве*, **поворот вокруг прямой*;
- применение терминологии, соответствующей геометрическим преобразованиям;
- построение образов, полученных в результате изученных геометрических преобразований;
- применение геометрических преобразований при решении задач.

В предыдущих классах были изучены осевая симметрия, центральная симметрия, параллельный перенос, подобие в плоскости. Также было определено понятие конгруэнтности треугольников. Конгруэнтность более сложных фигур определяется с помощью геометрических преобразований, которые имеют широкое применение. Например, для составления программы, позволяющей увидеть на экране компьютера перемещение пространственной фигуры, необходимы геометрические преобразования.

§1 Понятие геометрического преобразования. Изометрические преобразования

Пусть X и Y – непустые множества точек пространства. Напомним, что если каждой точке x множества X ставится в соответствие одна и только одна точка y множества Y, то определено отображение множества X в множество Y. Обозначаем: $f\colon X \to Y$ или $X \xrightarrow{f} Y$. Точка $y = f(x)$ называется ***образом*** точки $x \in X$, а x является одним из ***прообразов*** точки $y \in Y$. Говорят, что точка x отображается в точку y при отображении f.

Примеры

1. Даны плоскость α и прямая d, пересекающая эту плоскость. Через произвольную точку M пространства проходит единственная прямая, параллельная прямой d. Пусть M' – точка пересечения этой прямой с плоскостью α (рис. 10.1).

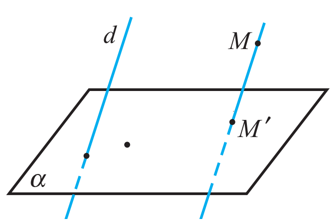


Рис. 10.1

Отображение пространства в плоскость α, при котором каждой точке M пространства соответствует точка $M' \in \alpha$ такая, что $MM' \parallel d$, называется ***параллельным проектированием*** пространства на плоскость α в направлении прямой d.

2. Пусть O – некоторая точка пространства. Отображение пространства на себя, при котором каждой точке M, отличной от O, соответствует точка M' такая, что точка O является серединой отрезка MM', а точка O соответствует себе, называется ***центральной симметрией*** пространства относительно центра O (рис. 10.2).

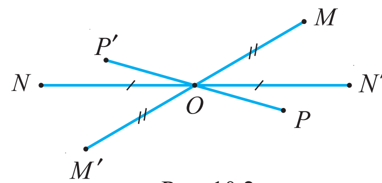


Рис. 10.2

Обозначают: S_O.

Точка O называется ***центром симметрии***.

Очевидно, если при центральной симметрии точка M' является образом точки M, то точка M является образом точки M'; говорят, что точки M и M' ***симметричны*** относительно центра симметрии.

Заметим, что параллельное проектирование пространства на плоскость не является биективным отображением (так как каждая точка плоскости имеет бесконечно много прообразов), а центральная симметрия является биективным отображением пространства.

Определение. Биективное отображение пространства на себя называется **геометрическим преобразованием** пространства.

В дальнейшем для краткости изложения будем использовать слово „преобразование“ вместо выражения „геометрическое преобразование“.

Пусть F – пространственная фигура и g – преобразование пространства. Фигура $F' = g(F)$, состоящая из образов всех точек фигуры F при преобразовании g, называется ***образом*** фигуры F при преобразовании g.

Так как преобразования являются частным случаем отображений, они обладают всеми основными свойствами отображений. Композиция преобразований является преобразованием; имеет место ассоциативный закон композиции преобразований; можно определить сужение преобразования на фигуру и т. д.

Если при преобразовании g фигура F отображается на себя, т. е. $g(F) = F$, то сужение преобразования g на фигуру F называется ***преобразованием симметрии*** фигуры F. Для краткости говорим, что g является преобразованием симметрии фигуры F.

Определение. Преобразование g пространства называется **преобразованием изометрии** (или **изометрией**) пространства, если для любых двух точек M и N пространства и их образов $M' = g(M)$, $N' = g(N)$ имеет место равенство $MN = M'N'$.

Таким образом, изометрия – это отображение пространства на себя, сохраняющее расстояния. Изометрии также называют ***перемещениями*** или ***движениями*** пространства.

Очевидно, что тождественное преобразование пространства, то есть преобразование, которое отображает каждую точку пространства на себя, является изометрией.

Две фигуры называются ***конгруэнтными***, если существует изометрия, которая отображает одну из этих фигур в другую.

Теорема 1. При изометрии три коллинеарные точки отображаются в три коллинеарные точки, причем точка, лежащая между двумя другими, отображается в точку, лежащую между образами двух других точек.

Доказательство

Пусть A, B, C – коллинеарные различные точки. Тогда одна и только одна из них лежит между двумя другими. Пусть точка B лежит между точками A и C. Тогда имеет место равенство $AB + BC = AC$. Обозначим через A', B', C' образы точек A, B, C соответственно. Из определения изометрии следуют равенства $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$, откуда получаем равенство $A'B' + B'C' = A'C'$, то есть B' лежит между A' и C', а это означает, что точки A', B', C' коллинеарны. ►

Определение. **Инвариантной точкой** изометрии g называется такая точка A, что $g(A) = A$; **инвариантной прямой** изометрии g называется такая прямая d, что $g(d) = d$; **инвариантной плоскостью** изометрии g называется такая плоскость α, что $g(\alpha) = \alpha$.

Если все точки некоторой прямой являются инвариантными при изометрии g, то такая прямая называется ***прямой инвариантных точек*** этой изометрии.

Задание с решением

Покажем, что если изометрия не имеет инвариантных точек, то инвариантные прямые данной изометрии (если таковые существуют) являются параллельными.

Решение:

Предположим противное. Пусть a и b – две инвариантные непараллельные прямые данной изометрии g. Прямые a и b пересекаются или являются некомпланарными. Если прямые a и b пересекаются в точке M, то точка $M' = g(M)$ принадлежит этим прямым (инвариантным), т. е. $g(M) = M$. Это противоречит условию задачи. В случае скрещивающихся прямых a и b существует их общий перпендикуляр AB, $A \in a$, $B \in b$. Так как AB – наименьшее расстояние между прямыми a и b, получаем, что точки A и B являются инвариантными точками изометрии g, что также противоречит условию задачи.

Задачи

А

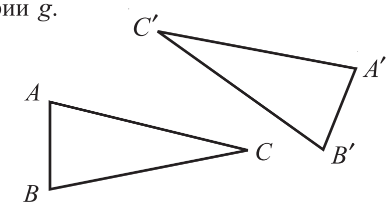
1. Приведите примеры геометрических преобразований в пространстве.
2. Является ли параллельное проектирование пространства на плоскость изометрией?
3. Дан угол AOB и отображение f пространства на себя такое, что:
   а) образом любой точки M пространства, не принадлежащей углу AOB, является сама точка M;
   б) образом любой точки, принадлежащей углу AOB, является точка, симметричная ей относительно биссектрисы этого угла.
   Является ли данное отображение геометрическим преобразованием пространства? А изометрией?
4. При некотором геометрическом преобразовании фигура отображается на себя. Является ли данное преобразование изометрией пространства? Приведите примеры.

Б

5. Докажите, что изометрия отображает:
   а) отрезок на конгруэнтный ему отрезок; б) треугольник на конгруэнтный ему треугольник.
6. Докажите, что изометрия отображает угол на конгруэнтный ему угол.

7. Докажите, что отображение, обратное изометрии, также является изометрией.

8. Пусть $\Delta A'B'C'$ – образ треугольника ABC при изометрии g.
Постройте образ:
а) медианы BK; б) биссектрисы BL;
в) высоты BM; г) центра тяжести G;
д) центра I вписанной окружности;
е) ортоцентра H;
ж) центра O окружности, описанной около треугольника ABC при данной изометрии.



9. а) Докажите, что если A и B – различные инвариантные точки изометрии f, то любая точка прямой AB является инвариантной.
б) Допускает ли изометрия пространства ровно две различные инвариантные точки?

10. а) Докажите, что если A, B, C – инвариантные неколлинеарные точки изометрии f, то любая точка плоскости ABC является инвариантной.
б) Допускает ли изометрия пространства ровно три инвариантные точки?

11. Изометрия f имеет одну инвариантную точку.
а) Имеет ли изометрия f^{-1} одну инвариантную точку? б) А изометрия $f \circ f$?

12. При изометрии f известно, что для некоторой точки A $f(A) = B$, а $f(B) = A$. Имеет ли изометрия $f \circ f$ инвариантные точки?

§2 Центральная симметрия

В § 1 мы определили симметрию пространства относительно точки и назвали ее центральной симметрией.

Теорема 2. Центральная симметрия пространства является изометрией.

Доказательство

Пусть M и N – образы произвольных точек M' и N' соответственно при центральной симметрии S_O.

Если точки M, N и O неколлинеарны (рис. 10.3 а)), то истинность теоремы следует из конгруэнтности треугольников MON и $M'ON'$ (признак СУС), т. е. $MN = M'N'$.

Если точки M, N и O коллинеарны и, например, M лежит между O и N (рис. 10.3 б)), то

$$MN = ON - OM = ON' - OM' = M'N'.$$

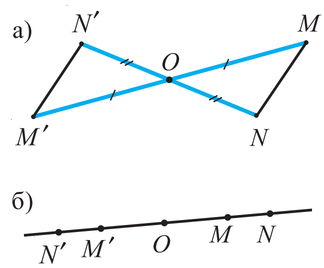


Рис. 10.3

Аналогично получаем равенство $MN = M'N'$ и в других случаях расположения точек M, N и O на одной прямой. Таким образом, центральная симметрия сохраняет расстояния между точками и, следовательно, является изометрией. ►

Определение. Фигуры F и F' называются **симметричными** относительно точки O, если $S_O(F) = F'$.

В частности, если фигура F симметрична сама себе относительно точки O, то F называется ***центрально-симметричной фигурой***, а O называется ***центром симметрии фигуры*** F. Например, окружность, квадрат, сфера являются центрально-симметричными фигурами.

Задание с решением

Точка A принадлежит внутренней области угла BOC. Построим отрезок, концы которого лежат на сторонах угла и серединой которого является точка A.

Решение:

Через точку $O' = S_A(O)$ проводим прямые $O'C'$ и $O'B'$, параллельные прямым OC и OB соответственно. Отрезок DE, где $D = O'C' \cap OB$ и $E = O'B' \cap OC$, является искомым отрезком.

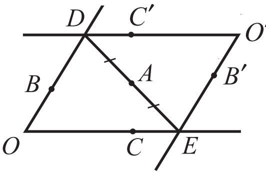


Рис. 10.4

Задачи

А

1. Приведите примеры центрально-симметричных геометрических фигур.
2. Симметричны ли любые две точки пространства относительно некоторой третьей точки пространства?
3. Сколько центров симметрии имеет фигура, образованная двумя параллельными прямыми? Какую фигуру образуют эти центры симметрии?
4. Могут ли два неконгруэнтных отрезка быть симметричными относительно точки?
5. Могут ли два пересекающихся отрезка быть симметричными относительно точки? А непересекающиеся?
6. Точки A, B, C, D расположены в пространстве так, что точки A и C симметричны относительно B, а B и D симметричны относительно C. Что можно еще сказать о расположении этих точек?
7. Постройте фигуру, симметричную треугольнику относительно:
   а) некоторой вершины треугольника; б) середины некоторой стороны треугольника.
8. Существуют ли точки, прямые и плоскости, которые при центральной симметрии инвариантны?
9. Какое отображение получим в результате композиции $S_O \circ S_O$?
10. Является ли треугольник центрально-симметричной фигурой?

Б

11. Докажите, что отображение, обратное центральной симметрии, есть та же симметрия.
12. Докажите, что центральная симметрия отображает:
    а) плоскость на параллельную ей плоскость;
    б) две параллельные плоскости на две параллельные плоскости;
    в) две пересекающиеся плоскости на две плоскости, пересечением которых является образ прямой, по которой пересекаются данные плоскости;
    г) две перпендикулярные плоскости на две перпендикулярные плоскости.
13. Даны точка A и фигура F, $A \notin F$. Найдите множество всех точек пространства, симметричных точке A относительно всех точек фигуры F, если F является:
    а) отрезком; б) прямой; в) плоскостью.
14. Покажите, что при центральной симметрии прямая и ее образ компланарны.
15. Покажите, что если фигура $F = [AB] \cup [CD]$ является центрально-симметричной, то и фигура $[AC] \cup [BD]$ является центрально-симметричной относительно того же центра.

§3 Осевая симметрия

Даны прямая d и точка $A \notin d$. Точка A' называется ***симметричной*** точке A относительно прямой d, если $AA' \perp d$, $AA' \cap d = M$ и $AM = A'M$. Точки прямой d симметричны сами себе относительно данной прямой.

Определение. Преобразование пространства, которое отображает каждую точку пространства в симметричную ей относительно прямой d, называется **симметрией пространства относительно прямой** d или **осевой симметрией с осью** d.

Обозначают: S_d, $S_d(A) = A'$, $S_d(B) = B'$ (рис. 10.5).

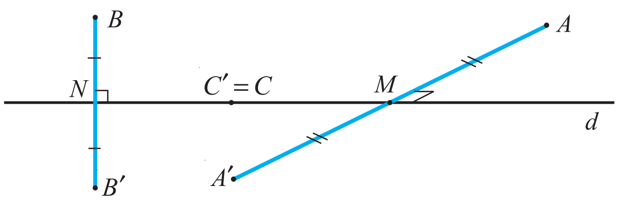


Рис. 10.5

Теорема 3. Осевая симметрия пространства является изометрией.

Доказательство

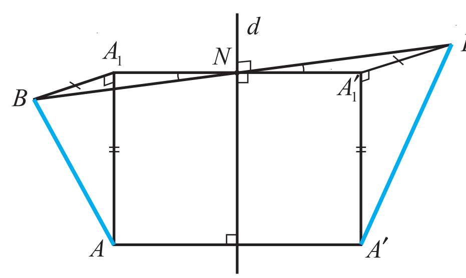


Рис. 10.6

Пусть осевая симметрия с осью d отображает различные точки A и B в точки A' и B' соответственно. Докажем, что $AB = A'B'$. Если прямые AB и d компланарны, то очевидно, что $AB = A'B'$. Предположим, что прямые AB и d скрещивающиеся (рис. 10.6) и $BB' \cap d = N$. Через точку N проведем прямую, параллельную прямой AA', и отложим на ней такие симметричные отрезки A_1N и NA_1', что $A_1A_1' = AA'$. Четырехугольник $AA_1A_1'A'$ является прямоугольником, следовательно, $AA_1 = A'A_1'$. Так как ось d перпендикулярна прямым BB' и A_1A_1', то она перпендикулярна и плоскости, проходящей через эти прямые. Из того, что $AA_1 \parallel d \parallel A'A_1'$ получаем, что $AA_1 \perp A_1B$ и $A'A_1' \perp A_1'B'$. Так как треугольники A_1NB и $A_1'NB'$ конгруэнтны, то $BA_1 = B'A_1'$. Итак, катеты прямоугольных треугольников AA_1B и $A'A_1'B'$ конгруэнтны, значит, и треугольники конгруэнтны, следовательно, $AB = A'B'$. ▶

Если при осевой симметрии S_d фигура F' является образом фигуры F, то есть $F' = S_d(F)$, то фигуры F' и F называются ***симметричными относительно прямой d***.

Прямая d является осью симметрии фигуры F, если осевая симметрия относительно оси d отображает фигуру F на себя, т. е. $S_d(F) = F$. Например, несущие прямые диагоналей и медиатрис сторон квадрата являются его осями симметрии; любая прямая, проходящая через центр окружности и лежащая в плоскости окружности или перпендикулярная к ней, является ее осью симметрии.

Задание с решением

На сторонах AB и AC треугольника ABC с $m(\angle A) < 90°$ даны точки P и Q соответственно (рис. 10.7). Найдите на стороне BC такую точку X_1, что периметр ΔPQX наименьший.

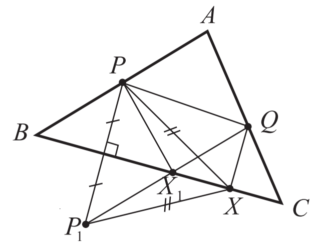


Рис. 10.7

Решение:

Пусть $P_1 = S_{BC}(P)$, тогда $P_1X = PX$, $\forall X \in (BC)$.

Периметр ΔPQX наименьший, если сумма $P_1X + XQ$ наименьшая, что возможно, если $X = X_1 = BC \cap P_1Q$.

Задачи

А

1. Приведите примеры фигур, которые:
а) имеют хотя бы одну ось симметрии;
б) не имеют оси симметрии.

2. Какие оси симметрии имеет куб?

3. Постройте образ куба при осевой симметрии относительно:
а) несущей прямой ребра куба;
б) несущей прямой диагонали грани.

4. Определите взаимное расположение оси симметрии d и образа α' плоскости α при симметрии S_d, если:
а) $\alpha \supset d$; б) $d \perp \alpha$; в) d – наклонная к плоскости α.

5. Даны две различные точки A и B. Укажите оси всех осевых симметрий, которые отображают A в B. Какую фигуру образуют все оси?

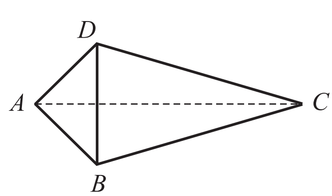
6. Укажите все оси симметрии:
а) отрезка; б) полупрямой; в) прямой;
г) плоскости; д) параллелограмма.

Б

7. Каково взаимное расположение при осевой симметрии:
а) прямой и ее образа;
б) плоскости и ее образа?

8. Найдите
а) инвариантные прямые при симметрии S_d;
б) прямые, состоящие из инвариантных точек при симметрии S_d.

9. Постройте образ данной фигуры при симметрии относительно прямой AB, если A, B, C, D – некомпланарные точки, ABC и ABD – равнобедренные треугольники с общим основанием AB.



§4 Симметрия относительно плоскости

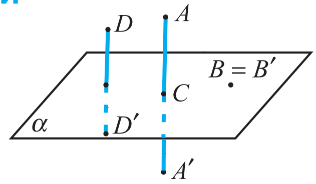


Рис. 10.8

Даны плоскость α и точки A, A', не лежащие в этой плоскости. Точки A и A' называются ***симметричными относительно плоскости*** α, если эта плоскость перпендикулярна отрезку AA' и делит его пополам. Любая точка B плоскости α считается симметричной самой себе относительно этой плоскости (рис. 10.8).

Определение. Преобразование пространства, которое отображает любую точку пространства в точку, симметричную ей относительно плоскости α, называется **симметрией пространства относительно плоскости** α.

Обозначают: S_α.

Плоскость α называется ***плоскостью симметрии***.

Если для фигуры F выполняется равенство $F = S_\alpha(F)$, то плоскость α называется ***плоскостью симметрии фигуры F***, а фигура F называется ***фигурой, симметричной относительно плоскости α***.

Например, прямой круговой цилиндр симметричен относительно любой плоскости, содержащей его ось.

Задание с решением

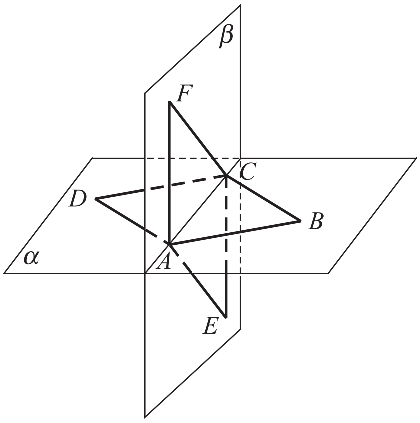


Рис. 10.9

Плоскости α и β перпендикулярны (рис. 10.9). Четырехугольники $ABCD$ и $AECF$ – ромбы. Докажем, что четырехугольник $EBFD$ ромб.

Решение:

Замечаем, что при симметрии S_α,
$S_\alpha([FB]) = [BE]$, $S_\alpha([FD]) = [DE]$.

Следовательно, $[FB] \equiv [BE]$, $[FD] \equiv [DE]$.

Аналогично, при симметрии S_β,
$S_\beta([FB]) = [FD]$, откуда следует, что $[FB] \equiv [FD]$. Таким образом, у четырехугольника $EBFD$ все стороны конгруэнтны, т. е. он является ромбом.

Задачи

A

1. Приведите примеры геометрических фигур, которые имеют плоскость симметрии.
2. Укажите инвариантные прямые при симметрии относительно плоскости.
3. Укажите плоскости симметрии (если они существуют):
   а) отрезка; б) прямой;
   в) плоскости; г) двух пересекающихся прямых;
   д) двух параллельных прямых; е) двух параллельных плоскостей.
4. Известно, что отрезки AB и $A'B'$ симметричны относительно плоскости. Компланарны ли или скрещивающиеся несущие прямые этих отрезков?
5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте точку, симметричную точке A относительно плоскости: а) CC_1D_1; б) BDD_1; в) CDA_1; г) BDC_1; д) BCB_1.

6. Две перпендикулярные плоскости пересекаются по прямой d. Точки A и B симметричны точке C относительно этих плоскостей. Найдите расстояние от точки C до прямой d, если $AB = 10$ì .

7. Плоскость α симметрична плоскости β относительно плоскости γ. Каково взаимное расположение этих плоскостей?

Б

8. Докажите, что симметрия пространства относительно плоскости α:

а) является изометрией;

б) совпадает с обратной ей симметрией, то есть $S_\alpha = S_\alpha^{-1}$;

в) отображает прямую на прямую и плоскость на плоскость.

9. Точки A и B расположены по одну сторону от плоскости α. Найдите в плоскости α такую точку M, чтобы сумма $AM + MB$ была наименьшей.

10. Точки A и B расположены по разные стороны от плоскости α. Найдите на плоскости α такую точку M, чтобы модуль разности $AM - MB$ был наибольшим.

11. Через прямую d проведены всевозможные плоскости. Точка A не лежит на прямой d. Какую фигуру образуют все точки, симметричные точке A относительно этих плоскостей?

12. Докажите, что композиция трех симметрий относительно трех взаимно перпендикулярных плоскостей является центральной симметрией.

§5 Параллельный перенос

Две полупрямые, лежащие на одной прямой, называются ***одинаково направленными*** (или ***сонаправленными***), если их пересечением является полупрямая, и соответственно ***противоположно направленными***, если их пересечением не является полупрямая.

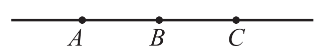
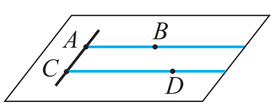


Рис. 10.10

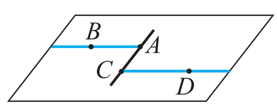
Полупрямые $[AC$ и $[BC$ на рисунке 10.10 сонаправленные, а $[BA$ и $[AC$ – противоположно направленные. Обозначают: $[AC \uparrow\uparrow [BC$, $[BA \uparrow\downarrow [AC$.

Если полупрямые параллельны и не лежат на одной прямой, то они принадлежат одной плоскости. Прямая, проходящая через начала этих полупрямых, делит плоскость на две полуплоскости. Если данные полупрямые находятся в одной полуплоскости, то они называются ***одинаково направленными полупрямыми*** (рис. 10.11 а)), а если лежат в разных плоскостях – ***противоположно направленными*** (рис. 10.11 б)).



$[AB \uparrow\uparrow [CD$

а)



$[AB \uparrow\downarrow [CD$

б)

Рис. 10.11

Очевидно, что две полупрямые, одинаково направленные третьей полупрямой, будут одинаково направленными.

Определение. **Параллельным переносом, заданным упорядоченной парой точек** (A, A'), называется преобразование пространства, которое отображает каждую точку M пространства в такую точку M', что $[MM' \uparrow\uparrow [AA'$ и $MM' = AA'$ $MM' = AA'$ (рис. 10.12).

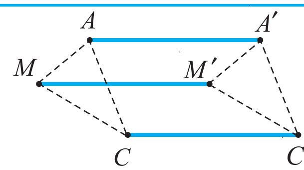


Рис. 10.12

Параллельный перенос, заданный парой (A, A'), обозначается $t_{AA'}$. Таким образом, $M' = t_{AA'}(M)$, $C' = t_{AA'}(C)$ и т. д.

Очевидно, если $t_{AA'}(M) = M'$, то $t_{MM'}(A) = A'$, и в этом случае $t_{AA'} = t_{MM'}$. Это означает, что параллельный перенос может быть задан любой парой точек, одна из которых является образом другой при данном параллельном переносе.

Тождественное преобразование пространства можно рассматривать как параллельный перенос, заданный любой парой совпадающих точек: $t_{AA}(M) = t_{BB}(M) = M$, $\forall M$ и $\forall A, B$.

Если $M' = t_{AA'}(M)$ и $M \notin AA'$, то четырехугольник $AA'M'M$ является параллелограммом.

Задание с решением

Два села, A и B, разделены рекой, берега которой считаются параллельными прямыми. Где следует построить мост через реку, чтобы путь между этими селами был кратчайшим (мост строится перпендикулярно берегам реки)?

Решение:

Рассмотрим вектор $\overline{a}$, перпендикулярный берегам реки, модуль которого равен ширине реки (рис. 10.13). Если $B_1 = t_{\overline{a}}(B)$, то точка M пересечения прямой AB_1 с тем берегом реки, где находится точка A, является точкой, из которой следует построить мост. Для любой другой точки M_1 этого берега имеем $M_1 \neq M$, $AM_1 + M_1B_1 > AM + MB_1 = AB_1 = AM + NB$.

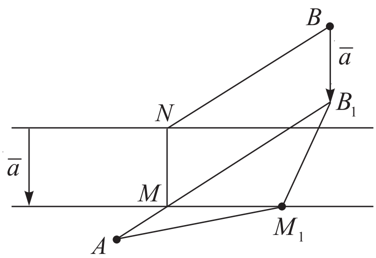
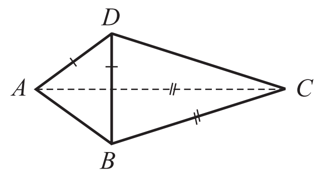


Рис. 10.13

Задачи

Б

1. Постройте образ параллелограмма $ABCD$ при параллельном переносе t_{AM}, если точка M совпадает с:
   а) вершиной B; б) вершиной C; в) вершиной D; г) точкой пересечения диагоналей.
2. Постройте образ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ при параллельном переносе t_{AM}, если точка M совпадает с:
   а) вершиной B; б) вершиной B_1; в) вершиной C_1;
   г) серединой ребра AB; д) центром куба O.
3. Три различные параллельные прямые пересекают две различные параллельные плоскости в вершинах треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно. Докажите, что эти треугольники конгруэнтны.



4. Даны некомпланарные точки A, B, C, D такие, что треугольники ABD и ABC – равнобедренные с общим основанием AB (см. рисунок). Постройте образ фигуры $ABCD$ при параллельном переносе t_{AC}.

5. Существуют ли инвариантные точки, прямые и плоскости при параллельном переносе, отличном от тождественного?

6. Определите параллельный перенос, обратный для t_{AB}.

7. Докажите, что:
а) параллельный перенос является изометрией пространства;
б) параллельный перенос отображает прямую на параллельную ей прямую, полупрямую – на сонаправленную ей полупрямую, плоскость – на параллельную ей плоскость;
в) композиция двух параллельных переносов является параллельным переносом.

8. Существует ли параллельный перенос, отображающий одну из двух данных плоскостей на другую, если эти плоскости: а) пересекаются; б) параллельные?

9. Докажите, что если стороны одного угла сонаправлены со сторонами другого угла, то эти углы конгруэнтны.

10. Докажите, что $S_B \circ S_A = t_{AA_1}$, где $A_1 = S_B(A)$.

11. Докажите, что композиция двух симметрий относительно двух параллельных плоскостей является параллельным переносом в направлении, перпендикулярном данным плоскостям, от первой плоскости ко второй, на расстоянии, равном удвоенному расстоянию между этими плоскостями.

12. Докажите, что параллельный перенос является композицией двух симметрий относительно плоскостей. Как построить такие плоскости?

13. Докажите, что композиция двух осевых симметрий, оси которых параллельны, является параллельным переносом. Как задать этот параллельный перенос?

§6 Преобразование подобия. Гомотетия

Определение. Пусть k – действительное положительное число. **Преобразованием подобия с коэффициентом *k*** (или **подобием с коэффициентом *k***) пространства называется отображение пространства на себя, при котором для любых двух точек A, B и их образов A', B' соответственно выполнено условие $A'B' = kAB$.

Заметим, что изометрия – это подобие с коэффициентом $k = 1$.

Из равенства $A'B' = kAB$ получаем, что если $A \neq B$, то $A' \neq B'$, то есть подобие пространства является биективным отображением пространства.

Теорема. 1) Композиция двух подобий с коэффициентами k_1 и k_2 является подобием с коэффициентом $k_1 k_2$.
2) Преобразование, обратное подобию с коэффициентом k, является подобием с коэффициентом $\dfrac{1}{k}$.

Доказательство

1) Пусть различные точки A, B отображаются при подобии с коэффициентом k_1 в точки A', B' соответственно, а эти точки отображаются при подобии с коэффициентом k_2 в точки A'', B''. Тогда $A'B' = k_1\, AB$ и $A''B'' = k_2\, A'B'$. Из этого получаем, что $A''B'' = k_1 \cdot k_2\, AB$, то есть преобразование, отображающее точки A, B в точки A'', B'' соответственно, является подобием с коэффициентом $k_1 k_2$.

2) При подобии с коэффициентом k для различных точек A и B пространства и их образов A' и B' соответственно имеет место равенство $A'B' = k\, AB$. Из этого получаем, что $AB = \frac{1}{k} A'B'$, то есть преобразование, отображающее точки A', B' в точки A, B соответственно, является подобием с коэффициентом $\frac{1}{k}$. ►

Две фигуры называются ***подобными***, если существует преобразование подобия пространства, отображающее одну фигуру на другую. Конгруэнтность фигур – это частный случай подобия $(k = 1)$.

Определение. Даны точка O и ненулевое действительное число k. **Гомотетией с центром O и коэффициентом k** называется преобразование пространства на себя, удовлетворяющее условиям:
1. Точка O отображается на себя.
2. Если $M \neq O$ и M' – образ точки M, то точки O, M и M' коллинеарны. Точка O является внешней точкой отрезка MM' при $k > 0$ и внутренней точкой этого отрезка при $k < 0$.
3. Для любой точки M пространства и ее образа M' имеет место равенство $OM' = |k|\, OM$ (рис. 10.14).

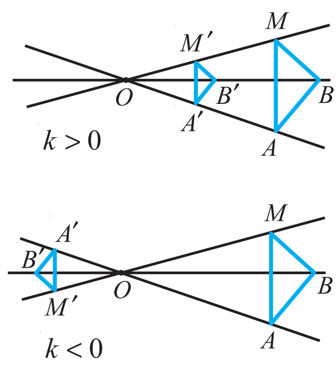


Рис. 10.14

Две фигуры называются ***гомотетичными***, если существует гомотетия пространства, отображающая одну фигуру на другую.

Гомотетия – это частный случай подобия.

Задание с решением

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 10.15). Построим сечение куба плоскостью так, чтобы сечение было правильным шестиугольником.

Решение:

Сечением куба плоскостью A_1DB является правильный треугольник A_1DB. Рассмотрим гомотетию с центром A и коэффициентом $k = \frac{3}{2}$. Образом плоскости A_1DB при этой гомотетии является плоскость $A_2D_2B_2$, которая пересекает куб по правильному шестиугольнику $MNPQRS$. Точки M, N, P, Q, R, S являются серединами ребер DC, CB, BB_1, A_1B_1, A_1D_1 и D_1D соответственно.

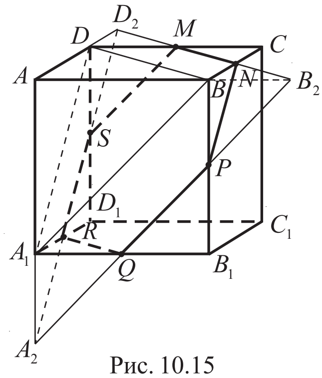
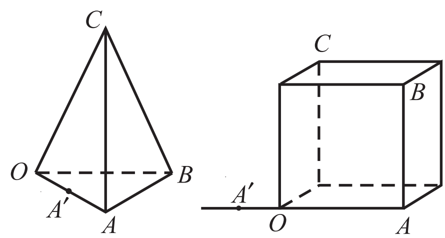


Рис. 10.15

Задачи

Б

1. Приведите примеры подобия из различных областей.
2. Может ли сфера быть подобной кубу?
3. Являются ли подобными куб и его фотография?
4. Сколько инвариантных точек имеет гомотетия с коэффициентом $k \neq 1$? А инвариантных прямых?
5. Ребро одного куба в три раза больше ребра другого куба. Для покраски граней меньшего куба использовали банку краски. Сколько банок краски необходимо для покраски большего куба?
6. При гомотетии с центром O точка A' является образом точки A. Найдите образы точек B и C (рассмотрите случаи а) и б) данного рисунка).



а) б)

7. Три прямые, проходящие через точку O, пересекают параллельные плоскости α и β в точках A, B, C и A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ гомотетичны.
8. Докажите, что в результате преобразования подобия пересечение и объединение двух фигур отображаются соответственно на пересечение и объединение их образов.
9. Дано преобразование подобия. Какой фигурой является образ:
   а) окружности; б) круга; в) параллелограмма;
   г) квадрата; д) куба; е) сферы?

§7 Поворот вокруг прямой

Определение. **Поворотом с осью *l* и углом φ** (или **вокруг прямой *l* на угол φ**) называется такое отображение пространства на себя, при котором каждая точка прямой l отображается на себя, а каждая точка A, не лежащая на прямой l, отображается на такую точку A', что A и A' принадлежат плоскости α, перпендикулярной l, $A_0A = A_0A'$ и $m(\angle AA_0A') = \varphi$, где $A_0 = \alpha \cap l$.

Обозначают: R_l^{φ}.

Считается, что направление поворота (в плоскости α) от точки A к точке A' является одним и тем же для всех точек A, если смотреть в одном и том же заданном направлении прямой l (рис. 10.16).

Прямая l называется ***осью поворота***, а угол φ – ***углом поворота***.

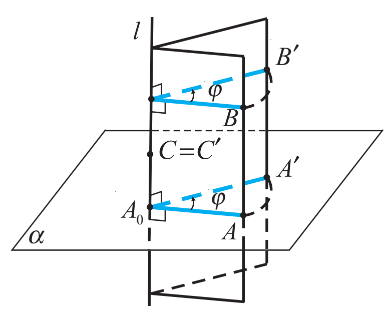


Рис. 10.16

Если $R_l^{\varphi}(F)=F$, то прямая l является осью поворота фигуры F. Можно показать, что поворот вокруг прямой является изометрией.

Определение. Фигура называется **фигурой вращения**, если существует прямая, любой поворот вокруг которой отображает фигуру саму на себя. Такая прямая называется **осью вращения фигуры**.

Например, окружность, круг, сфера, цилиндр, конус являются фигурами вращения.

Задание с решением

Определим оси поворота куба.

Решение:

Рассмотрим куб $K = ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 10.17).

Если M – центр грани $ABCD$, а N – центр грани $A_1B_1C_1D_1$, то $R_{MN}^{90^\circ}(K)=R_{MN}^{180^\circ}(K)=R_{MN}^{270^\circ}(K)=$ $=R_{MN}^{360^\circ}(K)=K$. Таким образом, MN является осью поворота куба. Куб имеет еще две такие оси поворота.

Прямая AC_1 является осью поворота куба на углы в 120°, 240° и 360°.

Такими осями являются еще прямые DB_1, CA_1, DD_1.

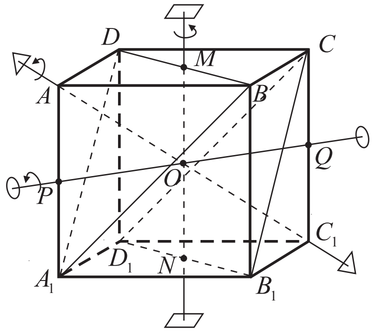


Рис. 10.17

Куб имеет еще шесть осей поворота на углы 180° и 360°. Это прямые, которые проходят через середины противоположных ребер куба.

Итак, куб имеет 13 осей поворота.

Задачи

Б

1. Покажите, что если изометрия имеет по крайней мере две инвариантные различные точки A и B и не имеет инвариантных точек, не лежащих на прямой AB, тогда эта изометрия является поворотом вокруг оси AB.

2. Даны две точки A и B. Укажите поворот, отображающий точку A на точку B. *Какую фигуру образуют оси всех таких поворотов?

3. Сколько осей вращения имеет:

   а) сфера; б) сфера без одной точки;

   в) сфера без двух точек; г) сфера без трех точек?

4. Докажите, что поворот вокруг оси является изометрией.

5. Докажите, что осевая симметрия является поворотом вокруг оси.

6. Докажите, что любая прямая a, перпендикулярная оси поворота, отображается при данном повороте на прямую a', лежащую в той же плоскости, что и прямая a; угол, образованный прямыми a и a', конгруэнтен углу поворота.

7. Даны прямая l и точки A и B такие, что прямые l и AB скрещиваются. Найдите на прямой l такую точку M, чтобы сумма $AM+MB$ была наименьшей.

Задачи на повторение

А

1. Даны две прямые d_1, d_2 и две точки A, C. Найдите точки B, D $(B \in d_1,\ D \in d_2)$ такие, чтобы четырехугольник $ABCD$ был параллелограммом. Обсуждение.

2. Даны прямая d, окружность $\mathscr{C}$ и точки A, C. Найдите точки B и D $(B \in d,\ D \in \mathscr{C})$ такие, чтобы четырехугольник $ABCD$ был параллелограммом. Обсуждение.

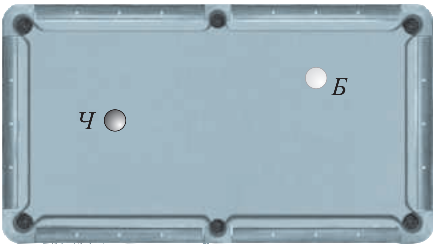
3. Покажите, что если медиана BM треугольника ABC является и высотой, то ΔABC равнобедренный.

4. Окружности $\mathscr{C}_1$ и $\mathscr{C}_2$ имеют общую точку M и расположены в одной плоскости. Проведите прямую d через точку M так, чтобы хорды, отсекаемые этими окружностями, из прямой d были конгруэнтными.

Б

5. На стороне AB остроугольного треугольника ABC дана фиксированная точка P, а на сторонах AC и BC – переменные точки X и Y соответственно. Найдите точки X_1 и Y_1 такие, чтобы периметр треугольника PX_1Y_1 был наименьшим.

6. На бильярдном столе расположены белый шар *Б* и черный шар *Ч*. Определите точки на бортах стола, при отскоке от которых белый шар попадет в черный шар.



7. Даны вершины A, B треугольника ABC и прямая d, содержащая биссектрису угла C треугольника. Найдите вершину C.

8. Даны пересекающиеся прямые d_1 и d_2 и вектор $\overline{a}$, неколлинеарный ни с одной из этих прямых. Найдите точки $M_1 \in d_1$ и $M_2 \in d_2$ такие, что $\overrightarrow{M_1M_2} = \overline{a}$.

9. Даны пересекающиеся прямые d_1, d_2 и две различные точки A, B, не лежащие на этих прямых. Постройте параллелограмм ABB_1A_1 так, чтобы $A_1 \in d_1$, $B_1 \in d_2$.

Проверочная работа

А

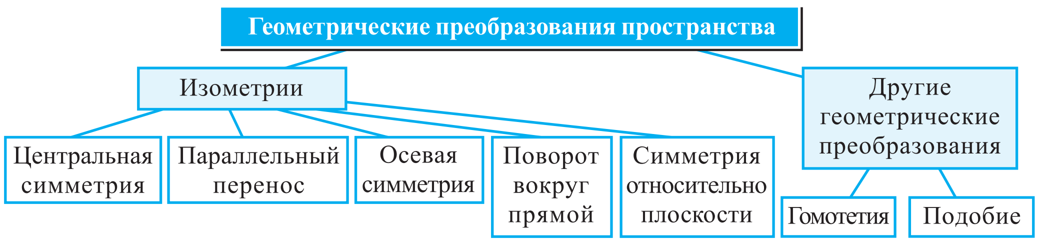
Время выполнения работы: 45 минут

1. Укажите плоскости симметрии двух пересекающихся плоскостей. ①
2. Укажите оси симметрии двух параллельных прямых. ①
3. Сколько центров, осей и плоскостей симметрии имеет куб? ②
4. Выясните, сколько центров, осей и плоскостей симметрии имеет правильный тетраэдр. ③
5. Найдите, какие прописные буквы латинского алфавита допускают центр симметрии, а какие – оси симметрии. ③

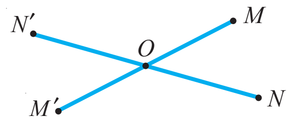
Б

Время выполнения работы: 45 минут

1. Докажите, что две скрещивающиеся прямые имеют три оси симметрии. ①
2. Докажите, что изометрия пространства отображает две пересекающиеся плоскости на две пересекающиеся плоскости. ①
3. Докажите, что плоскость, проходящая через диагональное сечение куба, является его плоскостью симметрии. ②
4. Какие из следующих фигур являются подобными: ③
   а) два куба;
   б) два правильных тетраэдра;
   в) две сферы;
   г) два цилиндра;
   д) два параллелепипеда?
5. На плоскости с ортогональной системой координат xOy даны точки $A(2, 1)$, $B(-1, 4)$, $C(-3, -1)$, $D(0, -4)$. Найдите координаты точек, симметричных этим точкам относительно: ③
   а) начала координат O; б) точки A;
   в) осей координат; г) прямой AB.

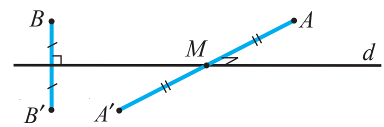


Центральная симметрия: S_O



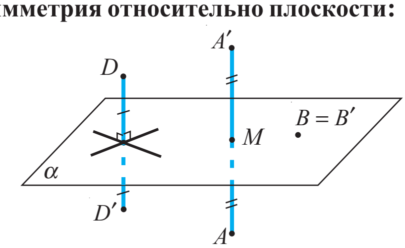
1. $S_O(O)=O$;
2. $\forall M \neq O,\ S_O(M)=M'$, где O – середина отрезка MM'.

Осевая симметрия: S_d



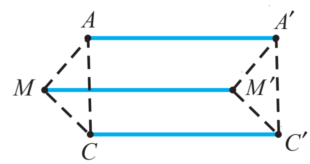
1. $\forall M \in d,\ S_d(M)=M$;
2. $\forall A \notin d,\ S_d(A)=A'$, где $AA' \perp d$, и если $AA' \cap d = M$, то M – середина $[MM']$.

Симметрия относительно плоскости: S_α



1. $\forall B \in \alpha,\ S_d(B)=B$;
2. $\forall A \notin \alpha,\ S_d(A)=A'$, где $AA' \perp d$ и точка $M = AA' \cap d$ – середина отрезка AA'.

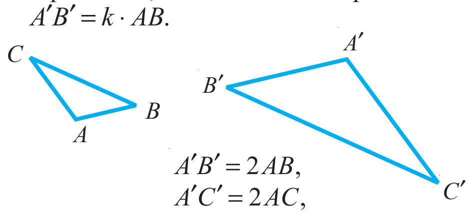
Параллельный перенос, заданный упорядоченной парой точек $(A,\ A')$: $t_{AA'}$



$\forall M \notin (AA'),\ t_{AA'}(M)=M'$, где $AA'M'M$ – параллелограмм.
$t_{AA'}(C)=C'$

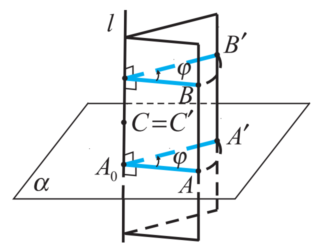
Подобие с коэффициентом $k,\ k>0$

Для любых точек A, B пространства и их образов A', B' имеет место равенство $A'B'=k\cdot AB$.



$A'B'=2AB$,
$A'C'=2AC$,
$B'C'=2BC$.

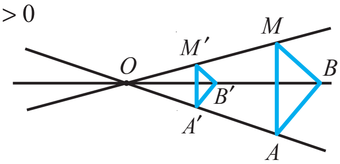
Поворот с осью l и углом φ: R_l^φ



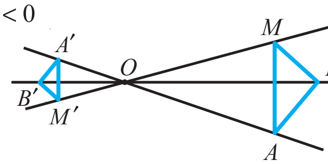
$R_l^\varphi(A)=A',\ R_l^\varphi(B)=B'$

Гомотетия с центром O и коэффициентом k

$k>0$



$k<0$



Ответы и указания

Модуль 1. § 1. А. 2. Например, $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = \frac{1}{n}$. **3.** а) $\frac{3}{5}, \frac{5}{6}, 1, \frac{9}{8}, \frac{11}{9}$; б) возрастающая.

§ 1. Б. 6. $\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{5}{9}, \frac{9}{12}, \frac{9}{15}$. **8.** Например, а) $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = (-1)^{2n-1} \cdot n$; б) $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = n+2$. **9.** а) Возрастающая, ограниченная; б) возрастающая, ограниченная; в) убывающая, ограниченная; г) не является ни убывающей, ни возрастающей, ограниченная; д) убывающая, ограниченная. **10.** а) $\frac{11}{10}, \left(\frac{11}{10}\right)^2, \left(\frac{11}{10}\right)^3, \left(\frac{11}{10}\right)^4, \left(\frac{11}{10}\right)^5$; б) возрастающая, ограниченная снизу. **12.** а) $x_n = \frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$; б) строго возрастающая; в) $1 \leq x_n < \frac{3}{2}$, $n \in \mathbb{N}^*$. **13.** а) $x_n = 3 \cdot 5^{n-1}$; б) строго возрастающая. **14.** а) $x_n = 1-2n$, $n \in \mathbb{N}^*$; б) строго возрастающая, ограниченная сверху. **15.** а) $x_n = 5n-15$, $n \in \mathbb{N}^*$, возрастающая, ограниченная снизу; б) $x_n = 4 \cdot 2^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$, возрастающая, ограниченная снизу. **16.** а) $x_n = a + \beta(n-1)$, $n \in \mathbb{N}^*$; б) $x_n = a \cdot \alpha^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$; в) прямым вычислением или методом математической индукции получаем:
$x_n = a \cdot \alpha^{n-1} + \beta(1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{n-2})$, $n \in \mathbb{N}^*$. **17.** $x_n = 5n-2$, $n \in \mathbb{N}^*$.

§ 2. А. 1. а) $x_n = 3(-1)^{n-1}$; б) $x_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$; в) $x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$; г) $x_n = (2n-1)^2$. **2.** а) 7, 9, 11, 13; б) –3, 2, 7, 12; в) 1,3; 1,6; 1,9; 2,2; г) $\frac{2}{7}, \frac{1}{5}, \frac{4}{35}, \frac{1}{35}$. **3.** а) $a_1 = 23$; б) $a_1 = 597$. **4.** а) $-10, -5, -\frac{5}{2}, -\frac{5}{4}$; б) $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}$. **5.** 23 дм. **6.** 1900 мест. **7.** 4 154,28 лея. **8.** 1700 м. **9.** 5 760 леев. **10.** 512 бактерий.

§ 2. Б. 11. 484. **12.** а) $a_n = \frac{n-13}{3}$, $S_{14} = -\frac{77}{3}$; б) $a_n = \frac{5n+16}{35}$, $S_{25} = \frac{405}{7}$. **14.** а) $b_n = 9 \cdot 2^{n-1}$; б) $b_n = 10\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$. **15.** а) $b_1 = \frac{768}{125}$; $q = -\frac{5}{4}$; б) $b_1 = \frac{1}{2}$; $q = -\frac{1}{2}$. **16.** $S_9 = 40^8 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-5}$.
17. *Указание*. Находим числа x, y, z из системы $xz = y^2$, $x+z = 2(y+a)$, $x(z+b) = (y+a)^2$. **18.** $\frac{47 \pm \sqrt{1993}}{4}$. **19.** а) $b_1 = 0{,}3$; б) $b_1 = -\frac{1}{21}$. **20.** $S = \{55\}$. **21.** Меньше, чем 2. **22.** Например, $180 = 12+24+48+96$; $180 = \frac{9}{2}+\frac{27}{2}+\frac{81}{2}+\frac{243}{2}$.

§ 3. Б. 6. а) 0; б) 0; в) 0; г) $\frac{1}{3}$; д) 0; е) 0; ж) 0; з) 1; и) $\frac{8}{3}$; к) e^{-4}; л) –1; м) $\frac{1}{2}$; н) e^{-2}; о) 0.

***Упражнения и задачи на повторение.* А. 1.** а) $\frac{1}{3}, 1, \frac{7}{5}, \frac{5}{3}, \frac{13}{7}$; б) $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}$; в) $-6, \frac{15}{2}, -\frac{20}{3}, \frac{29}{4}, \frac{-34}{5}$. **2.** а) $x_n = \frac{n}{n+1}$; б) $x_n = 2n$; в) $x_n = 3 \cdot (-1)^{n-1}$; г) $x_n = \frac{1}{3^n}$. **3.** Например, а) 22, 24, 26, 28, 30; б) 1, –1, 1, –1, ...; в) $x_n = \frac{n}{n+1}$, $n \geq 1$. **4.** Не является монотонной. **5.** а) $a_n = -4n+2$; б) $a_n = 2n-1$; в) $a_n = 5n-15$; г) $a_n = 7n-4$. **6.** а) –24 550; б) 4850. **7.** а) $x = \frac{(a^2-1)^2}{2a(2-a)}$; б) $a = b$, $x \in \mathbb{R}$. **8.** а) $b_n = 2 \cdot 6^{n-1}$; б) $b_n = -10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; в) $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$. **9.** а) $x_n = 2 \cdot 3^{n-1}$, $q = 3$; б) $x_n = 2n+2$, $r = 2$; в) $x_n = -4\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, $q = \frac{1}{3}$; г) $x_n = 5n-6$, $r = 5$. **10.** а) $n = 10$, $S_n = 140$; б) $a_1 = 4$, $n = 8$ или $a_1 = -2$, $n = 11$. **11.** а) $S_9 = 2\,555$; б) $S_8 = 765$.

12. За 5 часов. **13.** 313,6 м. **14.** $-1\pm\sqrt{6}$. **15.** Например, а) $x_{2k}=1+(-1)^{2k}$; б) $x_{2k-1}=\dfrac{2^{2k-1}+(-2)^{2k-1}}{2^{2k-1}}$; в) $x_{2k}=2k\cdot\sin k\pi$; г) $x_{2k}=\cos 2k\pi$; д) $x_{3k}=\dfrac{6k+(-1)^{3k}}{6k}$.

Б. **16.** 24 л. ед. **19.** 243 л. **20.** 1224. **21.** $S_n=n[x^2+(3-n)ax+a^2]$. **22.** а) $+\infty$; б) $+\infty$; в) $-\infty$; г) $-\dfrac{2}{3}$; д) $\dfrac{2}{3}$; е) $\dfrac{1}{2}$; ж) e^{-1}; з) e; и) 0.

Проверочная работа. **А.** **1.** а) $\dfrac{1}{3}$, 1, $\dfrac{7}{5}$, $\dfrac{5}{3}$, $\dfrac{13}{7}$; б) 0, $\dfrac{2}{3}$, 0, $\dfrac{2}{3}$, 0. **2.** Строго убывающая. **3.** $a_1=2$, $r=3$ или $a_1=14$, $r=-3$. **4.** $b_1=1$, $q=-3$. **5.** На 6 этаж.

Б. **1.** 5, $-\dfrac{7}{2}$, 3, $-\dfrac{11}{4}$, $\dfrac{13}{5}$. **2.** $b_n=4(-3)^{n-1}$. **3.** Строго убывающая. **5.** $a_1=\dfrac{1}{3}$, $r=\dfrac{1}{4}$. **6.** $b_1=\dfrac{30}{7}$, $q=\dfrac{3}{4}$ или $b_1=-\dfrac{30}{7}$, $q=-\dfrac{3}{4}$. **7.** 9 колец.

Модуль 2. **§1. Б.** **1.** *Указание.* Покажите, что $(2-r,\,2+r)\cap E\neq\varnothing$, $\forall r>0$. **2.** а) -2, 2; б) 2, 4; в) $-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{2}$, -1, 1. **3.** а) $x_n=4+\dfrac{1}{n}$; б) $x_n'=-1+\dfrac{2}{2n+1}$, $x_n''=\dfrac{n}{n+1}$. **5.** а) 2; б) $\dfrac{3}{7}$; в) $-\dfrac{1}{2}$. **7.** *Указание.* Исследуйте $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n')$ и $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n'')$ для последовательностей $(x_n')_{n\geq1}$, $x_n'\to x_0$, и $(x_n'')_{n\geq1}$, $x_n''\to x_0$, которые определяются из условия, что функция синус или косинус принимает, например, одно из значений 0, 1 или -1, и используйте замечание 3 из определения предела по Гейне. **8.** а) $l_л(2)=5$, $l_п(2)=6$; б) $l_л(-1)=l_п(-1)=1$; $l_л(1)=-\infty$, $l_п(1)=+\infty$. **9.** а) $l(0)=1$, $\nexists\, l(1)$; б) $l(0)=-2$, $l(2)=-4$. **10.** а) $l_л(k\pi)=-1$, $l_п(k\pi)=1\Rightarrow\nexists\lim\limits_{x\to k\pi}f(x)$; б) $l_л(k)=k-1$, $l_п(k)=k\Rightarrow\nexists\lim\limits_{x\to k}f(x)$. **11.** а) $x_0\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$; б) $x_0\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; в) $x_0\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.** а) $a=1$, $\lim\limits_{x\to1}f(x)=4$; $a=-2$, $\lim\limits_{x\to1}f(x)=1$; б) $a=2$, $\lim\limits_{x\to2}f(x)=0$; $a=-3$, $\lim\limits_{x\to2}f(x)=5$. **13.** $a=1$.

§ 2. Б. **1.** а) -1; б) $+\infty$; в) $+\infty$; г) $-\infty$; д) $+\infty$; е) ∞. **2.** а) 4; б) $-\infty$; в) $+\infty$; г) $-\infty$; д) 55; е) $-\dfrac{2}{5}$; ж) 0; з) $+\infty$; и) -3. **3.** а) $\dfrac{1}{2}$; б) $-\infty$; в) $+\infty$; г) $e(e-1)^2$; д) $\dfrac{1}{2}e$; е) $+\infty$. **4.** а) $-\infty$; б) $-\infty$; в) $-\infty$; г) $+\infty$; д) 2; е) $-\dfrac{1}{3}$. **5.** а) 1; б) 2; в) $(-1)^n$; г) $3\cdot(-1)^{n+1}$. **7.** *Указание.* См. указание к упражнению 7 из §1. а) И; б) Л; в) И. **8.** а) $f(\pm0)=0$, $f(1+0)=f(-1-0)=+\infty$, $f(1-0)=f(-1+0)=-\infty$; б) $f(1+0)=f(-1-0)=0$, $f(1-0)=f(-1+0)=+\infty$; в) $f(-1-0)=1$, $f(-1+0)=0$. **9.** $m=-1$, $m=2$. **10.** $m\in[-1,\,3]$. **11.** а) 1; б) $-\infty$; в) 0; г) $-\infty$; д) $+\infty$; е) $-\infty$; ж) $-\infty$; з) $-\infty$.

§ 3. Б. **1.** а) 3; б) -3; в) $\dfrac{3}{4}$; г) $\dfrac{1}{2}$; д) -2; е) $\dfrac{3}{4}$; ж) 4; з) $\dfrac{1}{2}$; и) $\dfrac{1}{16}$; к) 1; л) $\dfrac{1}{4}$; м) $\dfrac{1}{9}$; н) $\dfrac{3}{8}$; о) 3; п) $-\dfrac{2}{3}$; р) $\dfrac{4}{3}$; с) $\dfrac{5}{4}$; т) $e^{\frac{1}{2}}$; у) e^2; ф) e^3; х) e^{-1}. **2.** а) $\dfrac{3}{2}$; б) $\dfrac{8}{3}$; в) $-\dfrac{5}{12}$; г) 2; д) 3; е) $-\dfrac{1}{2}$; ж) $\dfrac{1}{2}$; з) 3; и) $\dfrac{1}{2}$; к) 2; л) $\dfrac{9}{2}$; м) $-\dfrac{2}{3}$; н) $\dfrac{1}{2}$; о) $-\dfrac{1}{3}$; п) -1; р) $-\dfrac{5}{6}$; с) $-\dfrac{1}{3}$; т) $-\dfrac{5}{2}$; у) $-\dfrac{9}{4}$; ф) $\dfrac{5}{6}$; х) $\dfrac{3}{4}$. **3.** а) $+\infty$; б) $+\infty$; в) $-\infty$; г) $+\infty$. **4.** а) $m=-1$, $n=4$; б) $n=2+\pi$, $m=-2$.

§ 4. Б. **1.** 1) $\dfrac{12}{25}$; 2) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^5$; 3) $\dfrac{1}{3}$; 4) -3; 5) 1; 6) 0; 7) $2-\log_2 3$; 8) $\dfrac{3}{5}$; 9) $\dfrac{1}{2}$; 10) $-\infty$; 11) $\dfrac{5}{4}$; 12) $\dfrac{1}{5}$; 13) 3; 14) $-\dfrac{1}{2}$; 15) $\dfrac{1}{3}$; 16) -1; 17) -3; 18) 0; 19) e^{-2}; 20) e^3; 21) $\sqrt{6}$; 22) e^5; 23) $\dfrac{2}{3}$; 24) 1;

25) $2^{n(n+1)}$; 26) $\dfrac{n(n-1)}{2}$; 27) C_{n+1}^2; 28) $\dfrac{3}{2}\ln 2$; 29) $-\dfrac{1}{4}$; 30) $-\dfrac{7}{2}$; 31) $\sqrt[32]{e}$; 32) $e^{10}\cdot\sqrt{e}$; 33) $\sqrt[3]{e}$; 34) $\sqrt[4]{e^3}$; 35) $\sqrt[3]{e^2}$. **2.** $a=1,\ b=-1$. **3.** $+\infty$, если $a+2b>0$; $-\infty$, если $a+2b<0$; $-\dfrac{3b}{4}$, если $a+2b=0$. **4.** $a=2,\ b=5,\ f(-1\pm 0)=\pm\infty$. **5.** $a=-3,\ b=-1$.

Упражнения и задачи на повторение. **Б. 1.** а) $\dfrac{2}{5}$; б) $-\dfrac{1}{2}$; в) $\dfrac{7}{12}$; г) -3; д) -14; е) $-\infty$; ж) $\dfrac{5}{28}$; з) -1; и) $\dfrac{1}{12}$; к) $-\dfrac{3}{4}$; л) $-\dfrac{3}{4}$; м) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; н) $\dfrac{2}{3}$; о) $-\dfrac{1}{4}$. **2.** а) $\dfrac{1}{2}$; б) 1; в) $\dfrac{4}{3}$; г) $\dfrac{2}{3}$; д) $\log_{72}\dfrac{8}{9}$; е) $\dfrac{1}{3}$; ж) 2; з) $\dfrac{2}{5}$; и) 3; к) 4; л) e^2; м) e^{-1}; н) $e^{-\frac{3}{2}}$; о) $\dfrac{3}{5}$. **3.** а) $-\infty$; б) 0; в) $\dfrac{1}{2}$; г) $+\infty$; д) $+\infty$; е) 0. **4.** а) $a\in\left\{-\dfrac{1}{2}, 1\right\}$; б) $a\in\{\pm 1, \pm 4\}$; в) $a=5$; г) $a=0$. **5.** а) $a=1,\ b=-2$; б) $a=-2,\ b=3$; в) $a=2,\ b=4$. **6.** а) $x=-1,\ x=3$; б) 600 м; в) 400 м; г) 5,7°; д) 200 м. **7.** а) 5 200 м; б) 621 км 480 м; в) 10 м.

Проверочная работа. **Б. 1.** C. **2.** C. **3.** а) $l_1=4,\ l_3=9$; б) $l=\dfrac{9}{4}$; в) $l_2=\dfrac{1}{16}$; г) $S=(4,5]\cup[8,9)$. **4.** а) 1; б) $\dfrac{1}{2}$.

Модуль 3. **§1. Б. 2.** а), б), в) Непрерывна, как элементарная функция. **3.** а), б) Непрерывна на $[a,b]$; в) непрерывна на промежутках $[a, x_0)$ и $(x_0, b]$. **4.** а) Непрерывна на промежутках $[-3,-2)$, $[-2,-1)$, $(-1,2]$, $(2,4]$ и $(4,5]$; б) $f(-1)\cdot f(0)=2\cdot 1=2$, $f(2)\cdot f(4)=1\cdot 3=3$, $f(0)\cdot f(4{,}5)=1\cdot 2=2$. **5.** а) *Указание.* $\forall x_0\in\mathbb{R}\Rightarrow|\sin x-\sin x_0|=\left|2\sin\dfrac{x-x_0}{2}\cos\dfrac{x+x_0}{2}\right|\le$ $\le 2\left|\sin\dfrac{x-x_0}{2}\right|\le|x-x_0|\Rightarrow\forall\varepsilon\ge 0\ \exists\delta>0\ (\delta<\varepsilon)$ такое, что $|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon,\ \forall x\in\mathbb{R},\ |x-x_0|<\delta$; б), в) и г) выполняется аналогично а). **6.** *Указание.* Запишите условие $|f(x)-6|<\dfrac{1}{10}$ в виде $|x^2+x-6|=|x-2||x+3|<\dfrac{1}{10}$. Так как $|x+3|\le 7$ (поскольку $0\le x\le 4$), то предыдущее условие верно, если $|x-2|<\dfrac{1}{70}$, то есть для $\delta=\dfrac{1}{70}$. Функция непрерывна, но это не следует из полученных условий. Надо проверить, если $\forall\varepsilon>0$ $\left(\text{и не только для } \varepsilon=\dfrac{1}{10}\right)$ $\exists\delta>0$ такое, что $|x-2|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(2)|<\varepsilon$. **7.** а), б) Непрерывна; в) разрывна в $x_0=0$; г) разрывна в $x_0=0$. **8.** $a=0,\ a=-\sqrt{2},\ a=\sqrt{2}$. **9.** а) $x_0=1$; $f(1+0)-f(1-0)=-e$; б) $x_0=-1,\ x_1=0$; $f(-1+0)-f(-1-0)=2$, $f(+0)-f(-0)=1$. **10.** а) Непрерывна в точках $x_1=-1,\ x_2=1$; б) непрерывна на множестве $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $x_0=0$ – точка разрыва второго порядка. **11.** а) Непрерывна; б) разрывна в точках $x_1=-1,\ x_2=1$. **12.** а) $a+be=2,\ a,b\in\mathbb{R}$; б) $a=-1$.

§2. Б. 1. а) Разрывна в $x_0=1$; б) разрывна в $x_0=1$; в) разрывна в $x_0=\dfrac{\pi}{4}$; г) разрывна в точках $x_k=k,\ k\in\mathbb{Z}$. **2.** $\exists\varepsilon_0>0,\ \forall\delta>0,\ \exists x_\delta$ такое, что $|x_\delta-x_0|<\delta$ и $|f(x_\delta)-f(x_0)|\ge\varepsilon_0$. **3.** *Указание.* $\lim\limits_{x\to+0}f(x)=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{\frac{\sin x}{x}}=0=f(0)$. Значит, f непрерывна на $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. **4.** а) $a=2$, $b=-1$; б) не существует. **5.** а) 2) $f\circ g$ непрерывна, $g\circ f$ разрывна в $x_0=0$; б) 2) $f\circ g$ разрывна в точках $0, -1, 1$, $g\circ f$ непрерывна; в) 2) $f\circ g$ разрывна в точках $x_k=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$;

$g \circ f$ разрывна в $x_0 = 0$; г) 2) $f \circ g$ разрывна в $x_0 = -1$, $g \circ f$ разрывна в $x_0 = 1$.

6. а) $(f \circ g)(x) = (x+1)^2$ и $(g \circ f)(x) = x^2 + 1$ непрерывны; б) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x, \text{ если } x \le 1, \\ x-2, \text{ если } x > 1 \end{cases}$ разрывна в $x_0 = 1$, $(g \circ f)(x) = \begin{cases} x, \text{ если } x \le 0, \\ x-2, \text{ если } x > 0 \end{cases}$ разрывна в $x_0 = 0$; в) $f \circ g$ разрывна в точках $x_n = \ln n$, $n \in \mathbb{N}^*$; $g \circ f$ разрывна в точках $x_k = k$, $k \in \mathbb{Z}$; г) $f \circ g$ разрывна в точках $x_m = m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, и $x_k = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; $g \circ f$ разрывна в точках $x_k = k$, $k \in \mathbb{Z}$; д) $f \circ g$ разрывна в точках $x_0 = 0$ и $x_k = \dfrac{1}{k}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$; $g \circ f$ разрывна в точках $x_k = k$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$; е) $f \circ g$ разрывна в точках $x \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]$; $g \circ f$ разрывна в точках $x_k = k$, $k \in \mathbb{Z}$. **7.** а) $a = 1$; б) $a = 1$; в) $a = 0$; г) $a = \dfrac{3}{2}$; д) $\forall a \in \mathbb{R}$.

8. Например, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in \mathbb{Q}, \\ -1, \text{ если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \end{cases}$ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -f(x)$.

9. Например, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -1, \text{ если } x < 0, \\ 0, \text{ если } x = 0, \\ 1, \text{ если } x > 0; \end{cases}$ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x$.

§ 3. Б. **1.** *Указание.* $\lim\limits_{x \to x_0} f_{\pm}(x) = f_{\pm}(x_0)$, $\forall x_0 \in I$. **2.** *Указание.* Пусть (a, b) – конечный интервал. $\tilde{f}: [a, b] \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), \text{ если } a < x < b, \\ \alpha, \text{ если } x = a, \\ \beta, \text{ если } x = b, \end{cases}$ – непрерывная функция на отрезке $[a, b]$, значит, и ограниченная: $m \le (\tilde{f}(x)) \le M$, $\forall x \in [a, b] \Rightarrow m \le f(x) \le M$, $\forall x \in (a, b)$. Если $(a, b) = (a, +\infty)$ $(a \ne -\infty)$, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \Delta > a$ такое, что $\beta - \varepsilon < f(x) < \beta + \varepsilon$, $\forall x \ge \Delta$. На интервале (a, Δ) функция f ограничена: $m \le f(x) \le M, \forall x \in (a, \Delta) \Rightarrow \min(\beta - \varepsilon, m) \le f(x) \le \max(\beta + \varepsilon, M)$, $\forall x \in (a, +\infty)$. Аналогично для интервалов $(-\infty, b)$ и $(-\infty, +\infty)$. **4.** $f: (a, b) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{(x-a)(b-x)}$.

7. Например: а) $f: (0, 1) \to [0, 1]$, $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right], \\ -4x + 3, \text{ если } x \in \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}\right], \\ 0, \text{ если } x \in \left(\dfrac{3}{4}, 1\right); \end{cases}$

б) $f: (0, 1) \to (0, 1)$, $f(x) = x$; в) $f: (0, 1) \to (0, 1]$, $f(x) = \begin{cases} 2x, \text{ если } x \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right], \\ -2x + 2, \text{ если } x \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right). \end{cases}$

8. а) *Указание.* Пусть $\alpha = -1$, $\beta = 0$. Тогда $f(-1) = -1$ и $f(0) = 1$, и функция f не принимает на $(-1, 0)$ значений из интервала $(0, 1)$; б) имеем $f(0{,}5) = -0{,}5$ и $f(1) = 0$, но функция f не принимает на $(0{,}5; 1)$ значений из интервала $(-0{,}5; 0)$; в) функция f принимает только целые значения. **9.** а) $x \in (e^{-4}, 3)$; б) $x \in (-\infty, -4)$; в) $x \in \left(\dfrac{-3 + \sqrt{13}}{2}, 1\right) \cup (10^{10}, +\infty)$. **10.** а) $f > 0$ на $(-\infty, 0) \cup (a, b) \cup (c, +\infty)$ и $f < 0$ на $(0, a) \cup (b, c)$; б) $f > 0$ на $(1, +\infty)$ и $f < 0$ на $(-\infty, -4) \cup (-4, 1)$. **11.** Теорема о прохождении функции через нуль неприменима.

Упражнения и задачи на повторение. **Б.** **1.** $\alpha=-1$. **2.** а) $x=1$ – точка разрыва первого рода; б) $x=1$ – точка разрыва второго рода; в) $x=-1$ – точка разрыва первого рода; г) $f(x)$ непрерывна на множестве $\mathbb{R}$. **3.** $a=\frac{1}{2}$, $b=1$. **5.** а) $x=0$ точка разрыва для функции f, g непрерывна; б) $(f\circ g)(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x=1,\\ 1, \text{ если } x\neq 1,\end{cases}$ $(g\circ f)(x)=\begin{cases}4, \text{ если } x<0,\\ 1, \text{ если } x=0;\end{cases}$ в) $f\circ g$ разрывна в точке $x=1$; $g\circ f$ разрывна в точке $x=0$. **6.** а), б), г) Ограничены; в) неограничена. **9.** а) $S=(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$; б) $S=(1,4)$; в) $S=\left(0,\frac{1}{e^2}\right)\cup(1,+\infty)$.

Проверочная работа. **Б.** **1.** а) Может иметь место (*Указание*. Примените теорему Вейерштрасса.); б) не может иметь место; в), г), д), е) могут иметь место (*Указание*. Приведите примеры.) **2.** а) Непрерывна; б) $x_0=1$ – точка разрыва первого рода. **3.** а) Ограничена; б) неограничена. **4.** $a\in\{0{,}5; 1\}$.

Модуль 4. **§1.** **А.** **1.** а) $\Delta x=1{,}5$, $\Delta f=3{,}75$; в) $\Delta x=-0{,}5-\sqrt{3}$, $\Delta f=2{,}75$; г) $\Delta x=-4{,}7$, $\Delta f=17{,}39$. **2.** в) $f'(x)=6x^2$; г) $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$. **3.** а) $f'(-1)=f'(0)=f'(0{,}5)=f'(10)=0{,}5$. **4.** а) $y=-x+4$, тупой угол; $y=\sqrt{3}x+(3-\sqrt{3})$, острый угол; б) $y=x+2$, острый угол; $y=-\sqrt{3}x+(3+\sqrt{3})$, тупой угол; в) $y=0$, нулевой угол; $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{9-\sqrt{3}}{3}$, острый угол.

§1. **Б.** **5.** б) Функция f не дифференцируема в точках $x_0=-2$ и $x_1=2$. **7.** а) Функция f не дифференцируема в $x_0=0$; б) функция f дифференцируема в $x_0=0$. **8.** а) $m\in\mathbb{Z}$, $m>1$; б) $n\in\mathbb{N}^*$, $n\geq 2$. **9.** $n=0$, $m=\frac{2}{e}$. *Указание*. Для нахождения параметров m и n рассмотрите условия непрерывности и дифференцируемости функции в точке $x_0=e$.

§2. **А.** **1.** а) f дифференцируема в точках x_0 и x_1; б) f дифференцируема в x_1 и не дифференцируема в x_0; в) f дифференцируема в x_1 и не дифференцируема в точках x_0 и x_2. **3.** а) $y=3x-2$; б) $y=-1$; в) $y=4x+6$. **4.** а) $0°$; б) $60°$.

§2. **Б.** **6.** а) f не дифференцируема в точках $x_0=-3$ и $x_1=3$; б) f не дифференцируема в $x_0=10$. **7.** а) 1) $y=x+0{,}75$; 2) $y=6x-3$; 3) $y=-8x-24$; б) 1) $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{(4-\pi)\sqrt{2}}{8}$; 2) $y=\frac{1}{2}x+\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}$; 3) $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\pi\sqrt{3}-6}{12}$. **8.** а) 1) Функции f, g, h непрерывны на множестве $\mathbb{R}$; 2) f дифференцируема на множестве $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; g дифференцируема на множестве $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; h дифференцируема на множестве $\mathbb{R}\setminus\{-3, 3\}$. **9.** а) 1) $y=3x$, $\alpha=\operatorname{arctg}3$; 2) $y=x+1$, $\alpha=\frac{\pi}{4}$; б) 1) $y=-\frac{1}{3}x-1$, $\alpha=-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$; 2) $y=-2x+6$, $\alpha=-\operatorname{arctg}2$. **10.** $b=4$, $c=1$.

§3. **А.** **1.** а) $f'(x)=8x^7$, $D_{f'}=\mathbb{R}$; б) $f'(x)=-7x^{-8}$, $D_{f'}=\mathbb{R}^*_+$; в) $f'(x)=\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$, $D_{f'}=\mathbb{R}^*_+$; г) $f'(x)=3^x\ln 3$, $D_{f'}=\mathbb{R}$; д) $f'(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x\ln\frac{1}{2}$, $D_{f'}=\mathbb{R}$; е) $f'(x)=\frac{1}{x\ln 3}$, $D_{f'}=\mathbb{R}^*$; ж) $f'(x)=-\frac{1}{x\ln 3}$, $D_{f'}=\mathbb{R}^*$; з) $f'(x)=\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$, $D_{f'}=\mathbb{R}^*$. **2.** а) $\frac{1}{7\ln 7}$; б) $\frac{10}{\ln 10}$; в) 120; г) $\frac{1}{14}$; д) $32\ln 2$; е) 0. **3.** а) $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$; б) $y=x\ln 2+1$; в) $y=x\log_8\sqrt{e}+\log_8\frac{2}{e}$; г) $y=5x+4$.

§3. **Б.** **4.** а) $f'(x)=1{,}5\sqrt{x}$, $D_{f'}=\mathbb{R}_+$; б) $f'(x)=3{,}4x^2$, $D_{f'}=\mathbb{R}$. **5.** а) $f'(x)=\frac{1}{7\sqrt[7]{x^6}}$, $D_{f'}=\mathbb{R}^*$;

б) $f'_п(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x>0$; $f'_л(x)=\dfrac{1}{-2\sqrt{-x}}$, $x<0$; $D_{f'}=\mathbb{R}^*$; в) $f'(x)=\dfrac{1}{x^2\ln 0{,}4}$, $D_{f'}=\mathbb{R}^*$; г) $f'_п(x)=2^x\ln 2$, $x>0$; $f'_л(x)=2^{-x}\ln 2$, $x<0$; $D_{f'}=\mathbb{R}$. **6.** а) $f'_п\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$, $f'_л\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$; б) $f'_п(0)=2$, $f'_л(0)=-2$; в) $f'_л(0)=3$, $f'_п(0)=-2$. **7.** а) $y=-42x-63$; б) $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3\sqrt{3}-\pi}{6}$; в) $y=\dfrac{3x}{27\ln 27}+\dfrac{\ln 9-1}{\ln 3}$; г) $y=2{,}5x\ln 2{,}5+2{,}5(1-\ln 2{,}5)$. **8.** $m=1$, $n=0$.

§ 4. А. **1.** а) $f'(x)=30x^5$; б) $f'(x)=\pi e^x$; в) $f'(x)=\dfrac{1}{x\ln 9}$; г) $f'(x)=3x^2-10x$; д) $f'(x)=14x-3$; е) $f'(x)=\dfrac{2}{x\ln 5}$. **2.** а) $D_f=\mathbb{R}_+$, $f'(x)=\dfrac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}$, $D_{f'}=\mathbb{R}^*_+$; б) $D_f=\mathbb{R}^*_+$, $f'(x)=\dfrac{1}{x\ln 3}+5x^4$, $D_{f'}=\mathbb{R}^*$; в) $f'(x)=e^x(1+x)$, $D_f=D_{f'}=\mathbb{R}$; г) $D_f=\mathbb{R}^*_+$, $f'(x)=\dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}}{x}$, $D_{f'}=\mathbb{R}^*_+$; д) $D_f=\mathbb{R}^*_+$, $f'(x)=-\dfrac{\log_3 x}{3\sqrt[3]{x^2}}-\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x\ln 3}$, $D_{f'}=\mathbb{R}^*_+$; е) $f'(x)=\dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$, $D_f=D_{f'}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$; ж) $D_f=\mathbb{R}^*$, $f'(x)=-\dfrac{2x}{(x^2+2)^2}$, $D_{f'}=\mathbb{R}$; з) $f'(x)=\dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}$, $D_f=D_{f'}=\mathbb{R}^*_+\setminus\{1\}$; и) $f'(x)=\dfrac{e^x(x-4)}{(x-3)^2}$, $D_f=D_{f'}=\mathbb{R}\setminus\{3\}$; к) $f'(x)=\dfrac{4x-1}{2\sqrt{2x^2-x}}$, $D_f=(-\infty;\ 0]\cup[0{,}5;\ +\infty)$, $D_{f'}=(-\infty;\ 0)\cup(0{,}5;\ +\infty)$; л) $D_f=\mathbb{R}^*_+$, $f'(x)=-\dfrac{4}{x\ln 2}$, $D_{f'}=\mathbb{R}^*$. **3.** а) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$; б) $\log_5 0{,}5+\dfrac{2}{\ln 5}$. **4.** а) $v(t)=-t^2+6t+7$; б) 15 м/с; в) 7 с. **5.** а) $t_1=1$ с, $t_2=2$ с; б) $v_1(t)=12t+4$, $a_1(t)=12$; $v_2(t)=3t^2+6t+6$, $a_2(t)=6t+6$; в) $v_1(1)=16$ м/с, $v_1(2)=26$ м/с, $a_1(1)=a_1(2)=12$ м/с^2; $v_2(1)=15$ м/с, $v_2(2)=30$ м/с, $a_2(1)=12$ м/с^2, $a_2(2)=18$ м/с^2; г) $v_1(t)=v_2(t)$ в моментах времени $t_1=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$ с и $t_2=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$ с, $a_1(t)=a_2(t)$ в моменте времени $t=1$ с.

§ 4. Б. **6.** а) $f'(x)=25x^{24}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\sin x$; б) $f'(x)=\cos x+\dfrac{1}{x\ln 0{,}3}-\dfrac{1}{5\cdot\sqrt[5]{x^4}}$; в) $f'(x)=\dfrac{5}{x}+\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3x}}+\dfrac{10}{x^3}$; г) $f'(x)=\dfrac{1}{3\cdot\sqrt[6]{32x^5}}+7e^x+\dfrac{3}{x^{10}}$; д) $f'(x)=-\sqrt{5}\sin x-7\cos x-\dfrac{4}{x}$; е) $f'(x)=5\left(\dfrac{\sin x}{4\sqrt[4]{x^3}}+\sqrt[4]{x}\cos x\right)$; ж) $f'(x)=8x^2(3\ln x+1)$; з) $f'(x)=3x^{-6}(\log_3 x-0{,}2\log_3 e)$; и) $f'(x)=\dfrac{10x-15}{x^2-3x}$; к) $f'(x)=\dfrac{6\sqrt{2}\log_5^2\operatorname{tg}x}{\sin 2x\ln 5}$; л) $f'(x)=3\cdot 6^{3x}\cdot\ln 6\cdot\sin^2 4x+4\cdot 6^{3x}\cdot\sin 8x$; м) $f'(x)=\dfrac{-6x^2\cdot\ln x\cdot\sin(3x^2-1)-2\cdot\cos(3x^2-1)}{x\ln^3 x}$. **7.** а) $y=\sqrt{3}x+\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{\pi\sqrt{3}}{3}\right)$; б) $y=0$; в) $y=\sqrt{3}\cdot x+1-\sqrt{3}$. **8.** $a\in\mathbb{R}$, $b=2$, $c=1$. **9.** Например, а) $f(x)=2x-\sin x+2008$; б) $f(x)=-e^{2x}-100$. **10.** а) $S=\{(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{2}\mid n\in\mathbb{Z}\}$; б) $S=\{(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi k}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\}$. **11.** а) $S=(-\infty,\ 2-\sqrt{3})\cup(2+\sqrt{3},\ +\infty)$; б) $S=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\left(-\dfrac{\pi}{36}+\dfrac{k\pi}{3},\ \dfrac{7\pi}{36}+\dfrac{k\pi}{3}\right)$. *Указание.* Решите неравенство $\sin(6x-\pi)<\dfrac{1}{2}$. **12.** а) $f''(x)=12x-10$; б) $f''(x)=-18\sin 3x$; в) $f''(x)=20e^{-2x}$;

г) $f''(x)=-\dfrac{3}{(3-x^2)\sqrt{3-x^2}}$; д) $f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}$; е) $f''(x)=-\dfrac{x}{27\sqrt{\left(1-\dfrac{x^2}{9}\right)^3}}$; ж) $f''(x)=-\dfrac{4}{(x+1)^3}$;

и) $f''(x)=(\sqrt{x})^{x-1}\cdot\left[\left(\ln\sqrt{x}+\dfrac{x-1}{2x}\right)^2+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{2x^2}\right]$. *Указание*. Примените дважды формулу $(\ln x)'=\dfrac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$. **13.** $-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}-\dfrac{5}{x^2+1}+3\operatorname{arctg}x$. **15.** $70m$ N. **16.** 168. **17.** $n\cdot 2^{n-1}$. *Указание*. Дифференцируйте тождество $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\ldots+C_n^nx^n$ и подставьте $x=1$.

§ 5. Б. 1. а) $f(x_1)\approx -0{,}96$, $f(x_2)\approx -1{,}02$; б) $f(x_1)\approx 751{,}2$, $f(x_2)\approx 4{,}86$. **2.** а) $\approx 1{,}16$; б) $\approx 0{,}972$; в) $\approx 6{,}0009$; г) $\approx 0{,}999$; д) $\approx 0{,}05$. **3.** а) $\mathrm{d}f(x)=(3x^2+2)\mathrm{d}x$; б) $\mathrm{d}f(x)=\dfrac{\mathrm{d}x}{(1-x)^2}$; в) $\mathrm{d}f(x)=\cos(x+1)\mathrm{d}x$; д) $\mathrm{d}f(x)=-2\sin 2x\,\mathrm{d}x$. **4.** а) $\mathrm{d}f(x)=(\log_2 x+\log_2 e)\mathrm{d}x=\log_2(ex)\mathrm{d}x$; б) $\mathrm{d}f(x)=2xe^{4x}(1+2x)\mathrm{d}x$; в) $\mathrm{d}f(x)=\left[\operatorname{ctg}(x+5)-\dfrac{x}{\sin^2(x+5)}-\dfrac{1}{x}\right]\mathrm{d}x$; г) $\mathrm{d}f(x)=\dfrac{9}{x}\mathrm{d}x$.
5. а) $-\dfrac{2}{3}\mathrm{d}x$; б) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\mathrm{d}x$; в) $\dfrac{1}{\ln 4}\mathrm{d}x$. **6.** а) $\mathrm{d}f(x)=\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+20x^3+\dfrac{7}{x^8}\right)\mathrm{d}x$;
б) $\mathrm{d}f(x)=\left(-2\cdot e^{-x}\cdot\ln 3-\dfrac{2x}{x^2-1}\right)\mathrm{d}x$; в) $\mathrm{d}f(x)=\left(\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}-\dfrac{2x-1}{5\sqrt[5]{(x^2-x)^4}}\right)\mathrm{d}x$. **7.** а) $2\dfrac{1}{8}\mathrm{d}x$; б) не существует; в) $\dfrac{1}{3}\mathrm{d}x$; г) $28\mathrm{e}^4\mathrm{d}x$. **8.** а) $\approx 0{,}695$. *Указание*. Вычислите $\cos(45°+1°)$. б) $\approx 1{,}05$. *Указание*. Вычислите $\lg(10+1{,}2)$. в) $\approx 2{,}511$; г) $\approx 0{,}497$; д) $\approx 0{,}92$.

§ 6. А. 1. а) x_0; б) x_0, x_2; в) x_2; г) x_2; д), е) ни в одной из указанных точек. **2.** а) 1) $S=\left\{\dfrac{1}{4}\right\}$; выполняются условия теоремы Ферма; б) 1) $S=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$; выполняются условия теоремы Ферма. **3.** а) Да; б) нет.

§ 6. Б. 6. а) $c=1$; б) функция f не дифференцируема в $x_0=2$; в) $c=0$; г) $c=\dfrac{\pi}{2}$. **7.** а) $a=7, b=-3$, $d=-1$; б) $c=-\dfrac{3}{14}$. **8.** *Указание*. Примените следствие теоремы Ролля. **9.** *Указание*. Исследуйте функцию $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\cdot 2^x-2\cdot x^{10}+2$. **11.** а) $c=-0{,}5$; б) $c=\dfrac{3\sqrt{3}}{e}$; в) теорема Лагранжа не может быть применена к функции f, так как она не дифференцируема на интервале (0, 3); г) $c=\ln\dfrac{e^5-1}{5e}$. **13.** $f'(x)=7$. *Указание*. Примените следствие 3 теоремы Лагранжа. **14.** а) 3; б) ∞; в) $-\dfrac{1}{3}$; г) 1; д) 0; е) 0; ж) 1; з) 0. **15.** а) 0; б) 0; в) 0.

Упражнения и задачи на повторение. **А. 1. B. 2. D. 3.** а) И; б) $y=2x-1$; в) $S=\mathbb{R}^*$; д) $O(0, 0)$. **4.** а) $S=\left\{0, 1\dfrac{1}{3}\right\}$; б) $S=\{e^{-1}\}$; в) $S=\{0\}$. **5.** $S=[0, +\infty)$. **6.** а) 4 с; б) 6 с.
Б. 7. а) $(\cos x)\sin(\sin x)\mathrm{d}x$; б) $(-\sin x)\cos(\cos x)\mathrm{d}x$; в) $\dfrac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$. **8.** а) $S=\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $S=\left\{-\dfrac{\pi}{4}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$; в) $S=\{0\}$. **9.** а) 1) $f'_{л}(0)=f'_{п}(0)=0$; 2) $f'_{л}(3)=0$, $f'_{п}(3)=3$; 3) $f'_{л}(0)=2$, $f'_{п}(0)=0$. **11.** *Указание*. Примените следствия теоремы Ролля. **12.** Функция f непрерывна на $[1, +\infty)$, но не дифференцируема в точке $x_0=2$. **14.** $c=\dfrac{1}{2}$. **15.** а) Функция f

удовлетворяет условиям теоремы Ролля и $c=2$; б) функция f удовлетворяет условиям теоремы Ролля и $c=\frac{\pi}{2}$; в) функция f удовлетворяет условиям теоремы Ролля и $c=\frac{12\pm\sqrt{3}}{3}$. **16.** $\frac{2}{3}$.

Проверочная работа. **А.** **1.** а) <; б) $S=\left[\frac{1}{6}, +\infty\right)$; в) $S=\{-3, 0\}$. **2.** а) $\mathbb{R}_+^*$; б) Л; в) $y=x+1$. **3.** а) $f'(x)=x\cdot 5^{3x}(2+x\ln 125)$; б) $f'(x)=\frac{-x+15}{2\sqrt{x-5}(x+5)^2}$. **4.** 1,5 с.

Б. **1.** а) И; б) $S=\left\{(k+1)\frac{\pi}{6}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$; в) $y=6x-(6\pi+1)$. **2.** а) $\mathbb{R}_+^*$; б) $\frac{2\log_{0,2}6x}{x\ln 0,2}dx$; в) $\frac{2(1-\ln 0,2\cdot\log_{0,2}6x)}{x^2\ln^2 0,2}$. **3.** а) $S=\left\{(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3}-10+k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$;

б) $S=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\left(-\frac{\pi}{3}-10+2k\pi, \frac{4\pi}{3}-10+2k\pi\right)$; $S=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\left(-\frac{2\pi}{3}-10+2k\pi, -\frac{\pi}{3}-10+2k\pi\right)$.

4. $e^{-\frac{1}{2}}$. **5.** а) $a=\ln 2$, $b=0$, $d=1$; б) $c=0$. **6.** 1 с.

Модуль 5. **§ 1.** **А.** **1.** а) $(-\infty, -1]\nearrow$, $[-1, 1]\searrow$, $[1, +\infty)\nearrow$; $f(-1)=2$ – максимум, $f(1)=-2$ – минимум; б) $(-\infty, 0]\searrow$, $[0, +\infty)\nearrow$; $f(0)=3$ – минимум; в) $(-\infty, 1]\searrow$, $[1, +\infty)\nearrow$; $f(1)=-3$ – минимум; г) $(-\infty, -2]\nearrow$, $[-2, 2]\searrow$, $[2, +\infty)\nearrow$; $f(-2)=16$ – максимум; $f(2)=-16$ – минимум; д) $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right]\nearrow$, $\left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right]\searrow$, $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)\nearrow$; $f\left(-\frac{3}{2}\right)=0$ – максимум; $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{27}{2}$ – минимум; е) $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]\nearrow$, $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)\searrow$; $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{4}$ – максимум. **2.** а) $f(-2)=f(2)=-4$ – минимумы, $f(0)=12$ – максимум; б) $f(1)=4$ – минимум; в) $f(-5)=0$ – максимум, $f(1)=-324$ – минимум; г) $f(-\sqrt{2})=4\sqrt{2}$ – максимум, $f(\sqrt{2})=-4\sqrt{2}$ – минимум; д) $f(1)=0$ – минимум, $f(-1)=4$ – максимум; е) f строго возрастающая. **3.** а) $m=-7$, $M=9$; б) $m=-\frac{2}{3\sqrt{3}}$, $M=120$.

§ 1. **Б.** **5.** а) $(-\infty, 1]\nearrow$, $(1, 3)\searrow$, $[3, +\infty)\nearrow$; б) $\left[0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right]\searrow$, $\left[\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right)\nearrow$; в) $(-\infty, 3]\searrow$, $[3, +\infty)\searrow$; г) $[0, +\infty)\searrow$; д) $(-\infty, -3]\searrow$, $[-3, -\sqrt{3}]\nearrow$, $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]\nearrow$, $[\sqrt{3}, 3]\nearrow$, $[3, +\infty)\searrow$; е) $(-\infty, -1]\nearrow$, $[1, +\infty)\nearrow$. **6.** а) $a\in[1, +\infty)$; б) $a\in[-1, +\infty)$; в) $a\geq 1$. **7.** а) $f(5)=-\frac{27}{4}$ – максимум; б) $f(2k\pi)=1$, $f(2k\pi+\frac{\pi}{2})=1$, $f(2k\pi+\frac{5}{4}\pi)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$, – максимумы и $f(2k\pi+\pi)=-1$, $f\left(2k\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$, – минимумы, в) $f(-1)=\frac{\pi}{2}-1$ – максимум, $f(1)=1-\frac{\pi}{2}$ – минимум; г) $f\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{e^2}{3}$; д) $f(-\sqrt{2})=f(\sqrt{2})=4e^{-2}$ – максимумы; $f(0)=0$ – минимум; е) $f(1)=0$ – минимум; $f(e^2)=4e^{-2}$ – максимум; ж) $f\left(-\frac{5}{4}\right)=\frac{9^{3\sqrt{6}}}{8}$ – максимум; $f(1)=0$ – минимум; з) $f(0)=0$ – максимум; $f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$ – минимум; и) $f(-1)=e^{-1}$ – минимум; $f(2)=4\sqrt{e}$ – максимум. **8.** а) $m=\min[f(-1), f(0), f(2)]=f(2)=-13$; $M=\max[f(-1), f(0), f(2)]=f(0)=3$; б) $m=\min[f(0), f\left(\frac{\pi}{6}\right), f\left(\frac{5\pi}{6}\right), f(\pi)]=f(0)=f(\pi)=1$, $M=\max[f(0), f\left(\frac{\pi}{6}\right), f\left(\frac{5\pi}{6}\right), f(\pi)]=$ $=f\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{5}{4}$; в) $m=2-2\ln 2$, $M=+\infty$.

§ 2. Б. 1. а) $y=x$; б) нет асимптот; в) $x=0$, $y=3$. **2.** а) $y=0$, $x=0$; б) $x=\pm 2$; в) $y=0$ при $+\infty$, $x=0$; г) $y=x$ при $+\infty$ и $-\infty$. **3.** а) Выпукла вверх на $(-\infty, -3)$ и выпукла вниз на $(-3, +\infty)$; б) выпукла вниз на $(-\infty, -1)\cup(0,1)$ и выпукла вверх на $(-1,0)\cup(1, +\infty)$; в) выпукла вверх на интервалах $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$, и выпукла вниз на интервалах $((2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$; г) выпукла вверх на $(-\infty, 0)$ и выпукла вниз на $(0, +\infty)$; д) выпукла вниз на $(-\infty, 0)$ и выпукла вверх на $(0, +\infty)$; е) выпукла вверх на $\left(0, e^{-\frac{3}{2}}\right)$ и выпукла вниз на $\left(e^{-\frac{3}{2}}, +\infty\right)$; ж) выпукла вниз на интервалах $\left(e^{2k\pi-\frac{\pi}{4}}, e^{2k\pi+\frac{3\pi}{4}}\right)$, $k\in\mathbb{Z}$, и выпукла вверх на интервалах $\left(e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}, e^{2k\pi+\frac{5\pi}{4}}\right)$, $k\in\mathbb{Z}$. **4.** *Указание*. Сначала определите точки, в которых $f''=0$, и точки, в которых f'' не существует или равна бесконечности, а затем исследуйте знак f'' в окрестности найденных точек. **5.** а) $y=0, x=0$; б) нет асимптот; в) $x=0$, $y=1$; г) $x=-1$, $x=0$, $x=1$, $y=x$; д) $y=-1$ при $-\infty$ и $y=1$ при $+\infty$; е) $y=0$. **7.** Например, $f\colon \mathbb{R}\setminus\{k\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x-[x]}$, $k\in\mathbb{Z}$.

§ 3. Б. 3. в) $\mathscr{A}_{\max}=\dfrac{a^2}{2}$.

§ 4. А. 1. а) $v(0)=s'(0)=12$ м/с. б) Через 2 с. Расстояние равно 16 м.
2. $R=r$, $P_{\max}=P(r)=\dfrac{E^2}{4r}$. **4.** 4 225 леев.

§ 4. Б. 5. $v(t)=3at^2+b$; $a(t)=v'(t)=6at$. **6.** *Указание*. $v(t)=3t^2-12t$; $a(t)=6t-12$, $a(t)=0\Rightarrow t=2$, $v_{\min}=v(2)=-12$. **7.** *Указание*. Доход $B(x)=p(x)\cdot x-C(x)$. $x=11$ ед., $B_{\max}=479$ д. ед.

Упражнения и задачи на повторение. **А. 1.** а) $(-\infty,-4]\nearrow$, $[-4,0]\searrow$, $[0,+\infty)\nearrow$; б) $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right]\nearrow$, $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]\searrow$, $\left[\frac{1}{3},+\infty\right)\nearrow$. **2.** а) $(-\infty,-1]\searrow$, $[-1,+\infty)\nearrow$; б) $(-\infty,0]\nearrow$, $[0,1]\searrow$, $[1,+\infty)\nearrow$; в) $(-\infty,-2]\searrow$, $\left[-2,-\frac{1}{2}\right]\nearrow$, $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)\nearrow$; г) $\left(-\infty,\frac{4}{5}\right]\nearrow$, $\left[\frac{4}{5},2\right]\searrow$, $[2,+\infty)\nearrow$; д) $\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\searrow$, $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\nearrow$, $\left[\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right)\searrow$; е) $(-\infty,1]\searrow$, $[1,+\infty)\nearrow$. **3.** а) $(-\infty,-1]\searrow$, $[-1,+\infty)\nearrow$; б) $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]\searrow$, $\left[-\frac{3}{2},0\right]\nearrow$, $\left[0,\frac{3}{2}\right]\searrow$, $\left[\frac{3}{2},+\infty\right)\nearrow$; в) $(-\infty,-2]\nearrow$, $[-2,2]\searrow$, $[2,+\infty)\nearrow$; г) $(-\infty,+\infty)\nearrow$; д) $(-\infty,-1]\nearrow$, $[-1,1]\searrow$, $[1,+\infty)\nearrow$; е) $\left(-\infty,-\frac{2}{5}\right]\nearrow$, $\left[-\frac{2}{5},0\right]\searrow$, $[0,+\infty)\nearrow$. **4.** а) $m=-3$, $M=2$; б) $m=\dfrac{6-2\sqrt{3}}{3}$, $M=8$. **6.** а) $a=2$; б) $a=-\dfrac{3}{2}$.
7. $B_{\max}=B(39)=4\,443$ лея.

Б. 9. а) $(-\infty,-1]\searrow$, $[-1,+\infty)\nearrow$; б) $(-\infty,-1]\searrow$, $[-1,1]\nearrow$, $[1,+\infty)\searrow$; в) $[0,e^{-\frac{1}{2}}]\searrow$, $[e^{-\frac{1}{2}},+\infty)\nearrow$. **10.** $m\in(-\infty,-1]$. **13.** а) $m\in[0,1]$; б) $m\in\varnothing$; в) $m\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$; г) $m=1$. **14.** а) Выпукла вверх на $(-\infty,-1)$ и выпукла вниз на $(-1,+\infty)$; б) выпукла вверх на $(0,\pi)$ и выпукла вниз на $(\pi, 2\pi)$; в) выпукла вверх на $(-\infty,-\sqrt{3})\cup(0,\sqrt{3})$ и выпукла вниз на $(-\sqrt{3},0)\cup(\sqrt{3},+\infty)$. **15.** а) $x=0$; б) $x=0$; в), г) не имеет точек перегиба; д) $x=e$; е) $x=0$, $x=4$. **16.** а) $x=1$, $y=1$

при $+\infty$ и $-\infty$; б) $x=-1$, $x=1$, $y=0$ при $+\infty$ и $-\infty$; в) $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}x$ при $+\infty$ и $-\infty$; г) $x=0$, $y=0$ при $+\infty$; д) $x=0$, $y=1$ при $+\infty$ и $-\infty$; е) $x=k\pi$, $k\in\mathbb{N}$. **17.** $a=8$, $b=2$. **19.** $x=26$, $B_{\max}=B(26)=336$ леев.

Проверочная работа. **А.** **1.** $(-\infty,\ 3]\searrow$, $[3,\ +\infty)\nearrow$. **3.** $B_{\max}=B(21)=873$ лея.

Б. **1.** $(-\infty,\ -1]\nearrow$, $[-1,\ 0]\searrow$, $[0,\ 1]\nearrow$, $[1,\ +\infty)\searrow$. **2.** $m=-\infty$, $M=2\ln 2$. **4.** $V_{\max}=1000$ д. ед. и получается для налога в 50 д. ед. на единицу продукции.

Модуль 6. § 1. А. **1.** а) $-1+2\mathrm{i}$; б) $6-2\mathrm{i}$; в) $\sqrt{3}+\sqrt{2}-(1+\sqrt{3})\mathrm{i}$; г) $-10-10\mathrm{i}$; д) $6-\sqrt{3}-(3+\sqrt{2})\mathrm{i}$; е) $\frac{2}{5}-\frac{1}{5}\mathrm{i}$; ж) $\frac{3}{10}+\frac{1}{10}\mathrm{i}$; з) $21-20\mathrm{i}$; и) $2+2\mathrm{i}$; к) $\frac{1}{2}$; л) $-\frac{\mathrm{i}}{4}$; м) $\frac{44+5\mathrm{i}}{318}$. **2.** а) $-\mathrm{i}$; б) 1; в) 1; г) $-\mathrm{i}$; д) -1. **3.** а) $S=\left\{\left(\frac{37}{11},\ \frac{20}{11}\right)\right\}$; б) $S=\left\{\left(-\frac{1}{7},\ -\frac{2}{7}\right)\right\}$; в) $S=\left\{\left(-\frac{7}{5},\ -\frac{8}{5}\right)\right\}$; г) $S=\left\{\left(-\frac{3+4\sqrt{3}}{3},\ 8+\sqrt{3}\right)\right\}$. **4.** а) $S=\left\{\frac{3-\mathrm{i}\sqrt{15}}{4},\ \frac{3+\mathrm{i}\sqrt{15}}{4}\right\}$; б) $S=\left\{\frac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2},\ \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right\}$; в) $S=\left\{\frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{15}}{2},\ \frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{15}}{2}\right\}$; г) $S=\left\{\frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{4\sqrt{2}-1}}{2\sqrt{2}},\ \frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{4\sqrt{2}-1}}{2\sqrt{2}}\right\}$; д) $S=\left\{\frac{1-3\mathrm{i}}{2},\ \frac{1+3\mathrm{i}}{2}\right\}$; е) $S=\left\{\frac{-2-\mathrm{i}\sqrt{31}}{5},\ \frac{-2+\mathrm{i}\sqrt{31}}{5}\right\}$; ж) $S=\left\{\frac{5-\mathrm{i}\sqrt{127}}{4},\ \frac{5+\mathrm{i}\sqrt{127}}{4}\right\}$; з) $S=\{1-\mathrm{i},\ 1+\mathrm{i}\}$; и) $S=\{-2-\mathrm{i},\ -2+\mathrm{i}\}$. **5.** а) 4; б) $-52\mathrm{i}$; в*) $76\mathrm{i}$; г*) $117-44\mathrm{i}$. **6.** а) $S=\{1+2\mathrm{i}\}$; б) $S=\left\{\frac{1}{5}(3-4\mathrm{i})\right\}$; в) $S=\left\{-\frac{5}{3}+5\mathrm{i}\right\}$; г*) $S=\left\{\frac{1}{2}(4-3\mathrm{i})\right\}$. **7*.** а) $S=\left\{1-\mathrm{i},\ -\frac{1}{3}\right\}$; б) $S=\left\{z_1=\frac{1}{2}((2+\mathrm{i})z_2-\mathrm{i}),\ z_2\in\mathbf{C}\right\}$. **8.** а) $\{1\pm\mathrm{i}\}$; б) не существует; в) $\{3\mathrm{i}\}$.

§ 1. Б. **9.** а) 0; б) $\frac{1}{130}(19-3077\mathrm{i})$; в) $72(1+\mathrm{i})$; г) $\frac{1}{41}(-1+32\mathrm{i})$. **10.** а) $S=\{\pm\mathrm{i},\ \pm\sqrt{2}\}$; б) $S=\{\pm2\mathrm{i},\ \pm\sqrt{3}\}$; в) $S=\{\pm\mathrm{i}\sqrt{5},\ \pm\mathrm{i}\sqrt{7}\}$. **11.** а) z^4+4; б) z^4-1; в) a^2-ab+b^2; г) $a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ac)$. **14.** $\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}$. **15.** $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

§ 2. Б. **2.** а) $\{\pm(1-\mathrm{i})\}$; б) $\{\pm(2-3\mathrm{i})\}$; в) $\{\pm(7+\mathrm{i})\}$; г) $\{\pm(\sqrt{3}-\mathrm{i})\}$; д) $\{\pm(\sqrt{3}-\mathrm{i}\sqrt{2})\}$; е) $\{\pm(\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{3})\}$. **3.** а) $S=\{-1+\mathrm{i},\ -3-\mathrm{i}\}$; б) $S=\{1+2\mathrm{i},\ -6\mathrm{i}\}$; в) $S=\{\mathrm{i},\ -3+\mathrm{i}\}$; г) $S=\left\{-3+\mathrm{i},\ \frac{3-\mathrm{i}}{2}\right\}$; д) $S=\{-1+\mathrm{i},\ 1-\mathrm{i}\}$; е) $S=\{-7-\mathrm{i},\ 7+\mathrm{i}\}$. **4.** $\{\pm(\beta-\alpha i)\}$. **5.** а) $5(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)$; б) $3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$; в) $2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$; г) $2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$; д) $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$; е) $4\left(\cos\frac{4\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{5}\right)$; ж) $\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)$; з) $\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\varphi\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\varphi\right)$; и) $2^{-50}(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)$. **6.** а) 1; б) $-64(1+\mathrm{i})$; в) $512(1-\mathrm{i}\sqrt{3})$. **7.** а) $\left\{-\mathrm{i},\ \frac{\pm\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2}\right\}$; б) $\left\{-3,\ \frac{3}{2}(1\pm\mathrm{i}\sqrt{3})\right\}$; в) $\left\{\pm\frac{1}{2}[(\sqrt{3}+1)-(\sqrt{3}-1)\mathrm{i}],\ \pm\frac{1}{2}[(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)\mathrm{i}]\right\}$;

г) $\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i),\ \frac{\sqrt{2}}{2}(-1\pm i)\right\}$; д) $\left\{2^{-\frac{1}{12}}\left(\cos\frac{1}{6}\left(\frac{-5\pi}{12}+2k\pi\right)+i\sin\frac{1}{6}\left(\frac{-5\pi}{12}+2k\pi\right)\right)\middle|\ k=\overline{-2,3}\right\}$.

8. а) i; б) $2-i,\ -2-i$.

§ 3. Б. **1.** а) $S=\left\{\sqrt[12]{2}\left(\cos\frac{1}{72}(23\pi+24k\pi)+i\sin\frac{1}{72}(23\pi+24k\pi)\right)\middle|\ k=\overline{-3,2}\right\}$;

б) $S=\left\{\frac{1}{\sqrt[10]{2}}\left(\cos\frac{1}{60}(23\pi+24k\pi)+i\sin\frac{1}{60}(23\pi+24k\pi)\right)\middle|\ k=\overline{-3,1}\right\}$;

в) $S=\left\{1,\ \varepsilon,\ \varepsilon^2,\ \sqrt[3]{6},\ \sqrt[3]{6}\varepsilon,\ \sqrt[3]{6}\varepsilon^2\ \middle|\ \varepsilon=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$; г) $S=\left\{\pm1,\ \pm i,\ \pm\frac{\sqrt[4]{8}}{2}(1\pm i)\right\}$;

д) $S=\left\{\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5}\right)\middle|\ k=\overline{-2,2}\right\}\cup\left\{\sqrt[5]{3}\left(\cos\frac{1}{5}(\pi+2k\pi)+i\sin\frac{1}{5}(\pi+2k\pi)\right)\middle|\ k=\overline{-2,2}\right\}$.

2. $S=\{0,\ -1,\ 1\}$. **4.** $S=\left\{\frac{\varepsilon_k+1}{\varepsilon_k-1}\ \middle|\ \varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{6}+i\sin\frac{2k\pi}{6},\ k=\overline{-2,3}\right\}$.

5. а) $S=\left\{-i,\ i,\ \frac{-5-\sqrt{21}}{2},\ \frac{-5+\sqrt{21}}{2}\right\}$; б) $S=\left\{2\pm\sqrt{3},\ -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$; в) $S=\left\{-1,\ \frac{5-\sqrt{21}}{2},\ \frac{5+\sqrt{21}}{2}\right\}$.

Упражнения и задачи на повторение. **А.** **1.** а) $1-2i$; б) $2+2i$; в) $-10+10i$; г) $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i$; д) i; е) 1; ж) i. **3.** а) $S=\{\pm3i\}$; б) $S=\{\pm4+2i\}$. **4.** 1. **5.** а) $-4(\sqrt{3}-i)$; б) $-2-2i\sqrt{3}$. **6.** а) $2+i$; б) $\frac{127}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $-\frac{11}{4}i$; г) $\frac{12}{13}+\frac{5}{13}i$. **7.** $z=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}+i$.

Б. **8.** –1. *Указание*. Умножьте равенство на $z-1$; получим $z^4=z$. **9.** –64.

10. а) $S=\left\{\frac{-3+\sqrt{21}}{2}i,\ \frac{3-\sqrt{21}}{2}i\right\}$; б) $S=\left\{\frac{\sqrt{3}}{3}+i\right\}$; в) $S=\{1+i\}$; г) $S=\{0,\ \pm i\}$;

д) $S=\{1-i;\ 0{,}8-0{,}4i\}$. **11.** а) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; б) $\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$.

12. а) $\left\{\sqrt[3]{4}(\cos\varphi_t+i\sin\varphi_t)\mid\varphi_t\in\left\{\frac{2\pi}{9},\ \frac{8\pi}{9},\ \frac{14\pi}{9}\right\}\right\}$;

б) $\left\{\sqrt[3]{\frac{3}{4}}(\cos\varphi_t+i\sin\varphi_t)\mid\varphi_t\in\left\{\frac{7\pi}{18},\ \frac{19\pi}{18},\ \frac{31\pi}{18}\right\}\right\}$. **13.** а) -2^6; б) -2^7; в) -2^5. **14.** $n=4k,\ k\in\mathbb{N}$.

15. Точки M_1 и M_3.

Проверочная работа. **А.** **1.** а) $\frac{5}{3}-\frac{17}{5}i$; б) $-\frac{16}{3}-\frac{109}{6}i$; в) $\frac{11}{50}-\frac{23}{50}i$. **2.** $S=\left\{\frac{2}{17}(4-i)\right\}$.

3. $S=\left\{\left(1,\ \frac{1}{5}\right)\right\}$. **4.** $S=\left\{\frac{1-i\sqrt{6}}{7},\ \frac{1+i\sqrt{6}}{7}\right\}$. **5.** а) 2i; б) **C**.

Б. **1.** а) $-\frac{11}{3}-\frac{8+\sqrt{3}}{2}i$; б) $93(1-i)$; в) $-\frac{23}{53}+\frac{1}{53}i$. **2.** $S=\left\{\frac{-\sqrt{7}-7i}{4},\ \frac{-\sqrt{7}+7i}{4}\right\}$. **3.** $x=2,\ y=3$.

5. $z_1=-i$; $z_2=-1-i$. **6.** $2^4(1+i)$. **7.** $S=\left\{\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right),\ -\sqrt[3]{\frac{3}{2}}i\right\}$. **8.** $S=\{(i,\ 1+i)\}$.

Модуль 7. § 1. **А.** **1.** а) $\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 8 & -3 \\ 2 & -1-\mathrm{i} \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3+\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} & 2+2\mathrm{i} \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 3 & -2+\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} & -1+\mathrm{i} \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 \\ -3 & 6 & 3\mathrm{i} \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 2\mathrm{i} & 0 & 14 \\ 4 & -2\mathrm{i} & 6 \end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix} 6\mathrm{i} & 0 & 2\mathrm{i} \\ -2 & 4\mathrm{i} & -1-2\mathrm{i} \\ 10\mathrm{i} & -2 & -6\mathrm{i} \end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$; и) $\begin{pmatrix} 5\mathrm{i} & 4 \\ -1+\mathrm{i} & 5\mathrm{i} \end{pmatrix}$;

к) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ \mathrm{i} & 0 & 2 \\ 1 & -2 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$. **2.** $x=2,\ y=1,\ z=-1,\ u=0$. **3.** а) $AB=\begin{pmatrix} 17 & 18 \\ 43 & 30 \end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix} -4 & 12 \\ 5 & 51 \end{pmatrix}$; б) AB не существует, $BA=\begin{pmatrix} 6 & -18 \\ -42 & 14 \\ -48 & 8 \end{pmatrix}$; в) $AB=\begin{pmatrix} -3 & 18 & 33 \\ 18 & 4 & 10 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix} -3 & 12 & 11 \\ 27 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}$; г) $AB=\begin{pmatrix} a+c & b+c & a+b+c \\ 2 & 2 & 3 \\ x+z & y+z & x+y+z \end{pmatrix}$,

$BA=\begin{pmatrix} a+x & b+y & c+z \\ 1+x & 1+y & 1+z \\ a+1+x & b+1+y & c+1+z \end{pmatrix}$; д) $AB=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 9 & 3 \\ 10 & 3 \\ 24 & 10 \end{pmatrix}$, BA не существует; е) $AB=BA=A$.

4. а), б) $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 46 & -10 \\ 32 & -8 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix} 13 & -21 \\ -21 & 34 \end{pmatrix}$.

5. а) $\begin{pmatrix} -9 & 12 \\ -62 & -5 \end{pmatrix}$; б), д) не существует; в) $\begin{pmatrix} -46 & 39 & 96 \\ 9 & -69 & 144 \\ 27 & 27 & -63 \end{pmatrix}$;

е) $\begin{pmatrix} a^2+bd+cg-1 & ab+bc+ch & ac+bf+c\mathrm{i} \\ ad+ed+fg & bd+e^2+fh-1 & dc+ef+f\mathrm{i} \\ ag+hd+\mathrm{i}g & bg+eh+\mathrm{i}h & cg+fh+\mathrm{i}^2-1 \end{pmatrix}$. **6.** а) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 12 & 7 \end{pmatrix}$; б) не существует;

в) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -5 & 12 & 22 \\ 18 & 2 & 10 \\ 0 & 6 & 13 \end{pmatrix}$; г) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2-a & -b & 2-c \\ -1 & 1 & 1 \\ 2-x & 2-y & 2-z \end{pmatrix}$; д) не существует; е) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2-a & -b & -c \\ -d & 2-e & -f \\ -g & -h & 2-\mathrm{i} \end{pmatrix}$.

8. $T_1=1{,}1\cdot T=\begin{pmatrix} 2{,}2 & 3{,}3 & 4{,}4 & 2{,}2 & 3{,}3 \\ 4{,}4 & 2{,}2 & 3{,}3 & 6{,}6 & 3{,}3 \\ 3{,}3 & 1{,}1 & 2{,}2 & 3{,}3 & 5{,}5 \end{pmatrix}$. **9.** $M=M_1+M_2+M_3=\begin{pmatrix} 10 & 10 & 13 & 11 & 11 \\ 19 & 11 & 9 & 5 & 12 \\ 12 & 13 & 9 & 17 & 8 \end{pmatrix}$.

§ 1. **Б.** **10.** а) $\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 20 & -15 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 6 & -2-\mathrm{i} & 2+3\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} & \mathrm{i} & 2-\mathrm{i} \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 3-3\mathrm{i} & 9 & -3 \\ 0 & 3\mathrm{i} & 9+3\mathrm{i} \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 & 3\mathrm{i} \\ -3 & -1 & -1+4\mathrm{i} \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix} c_k & c_{k-1} \\ c_{k-1} & c_{k-2} \end{pmatrix}$, c_i – числа Фибоначчи: $c_{-1}=0,\ c_0=1$, $c_k=c_{k-1}+c_{k-2}$; з) $\begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n^k \end{pmatrix}$; и) $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$; к) $\begin{pmatrix} -33 & 19 & 32 \\ 4 & 47 & -1 \\ -5 & -50 & -29 \end{pmatrix}$;

л) $\begin{pmatrix} 6 & 21 & -10 & 17 \\ -1 & 54 & -51 & 30 \\ -4 & -39 & 20 & 7 \\ 26 & 19 & -2 & 71 \end{pmatrix}$. **11.** а) $\begin{pmatrix} 5 & 11 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 16 & 15 & 8 \\ 16 & 14 & 8 \\ 8 & 7 & 8 \end{pmatrix}$. **13.** $S = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 15{,}1 & 11{,}7 \\ 10{,}3 & 8{,}1 \\ 15{,}4 & 11{,}8 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{array}$.

14. а) 3, если $\alpha \neq -9$; 2, если $\alpha = -9$; б) 3, если $\alpha \neq 5$; 2, если $\alpha = 5$; в) 1. **15.** а) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$;

б) не обратима; в) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; г) $\frac{1}{20}\begin{pmatrix} 8 & 4 & -4 \\ 1 & -7 & 2 \\ -6 & 2 & 8 \end{pmatrix}$; д) $-\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix}$; е) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; з) не обратима; и) $\frac{1}{2-\mathrm{i}}\begin{pmatrix} -2+2\mathrm{i} & 1-2\mathrm{i} & 2-\mathrm{i} \\ 1-2\mathrm{i} & \mathrm{i} & 0 \\ -\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$;

к) $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 & 6 \\ -1 & 2 & 7 & -10 \\ 4 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; л) $\begin{pmatrix} 24 & 3 & -4 & -8 \\ -\frac{23}{2} & -1 & 2 & \frac{7}{2} \\ 10 & 1 & -2 & -3 \\ -5 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; м) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

16. $\begin{pmatrix} a & 0 \\ a-b & b \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$. **17.** $S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.

§ 2. А. 1. а) –10; б) 24; в) $-a$; г) –17i; д) 9–10i; е) –374; ж) –11; з) –22; и) 4; к) –18.
2. а) $S = \left\{ \left(\frac{11}{7}, \frac{-2}{7} \right) \right\}$; б) $S = \left\{ \left(\frac{13}{23}, \frac{-2}{23} \right) \right\}$; в) $S = \left\{ \left(\frac{19}{14}, \frac{3}{14} \right) \right\}$; г) $S = \left\{ \left(\frac{21}{8}, \frac{-27}{8} \right) \right\}$;

д) $S = \left\{ \left(\frac{ac-bd}{a^2+b^2}, \frac{ad+bc}{a^2+b^2} \right) \right\}$; е) $S = \{(1, 0, 1)\}$; ж) $S = \{(1, 3, 2)\}$; з) $S = \{(2, 1, 3)\}$;

и) $S = \left\{ \left(\frac{5}{3}, 0, -\frac{2}{3} \right) \right\}$; к) правило Крамера не применимо.

§ 2. Б. 3. а) –20; б) 0; в) 0; г) –15; д) 36. **5.** а) Изменится на противоположное значение; б) умножится на $(-1)^n$. **6.** Изменится на сопряженное комплексное число. **7.** Умножится на α^n. **8.** *Указание*. Разложите определитель по третьему столбцу. **9.** а) $x = 1+\mathrm{i}$, $y = \mathrm{i}$; б) $x = 2+\mathrm{i}$, $y = 2-\mathrm{i}$; в) $x = 3-11\mathrm{i}$, $y = -3-9\mathrm{i}$, $z = 1-7\mathrm{i}$. **10.** а) 4 кв. ед.; б) коллинеарные; в) $\frac{27}{2}$ кв. ед.; г) 13 кв. ед. **11.** а) *Указание*. Прибавьте ко второй и третьей строкам первую строку, умноженную на –1. $(a-b)(c-a)(c-b)$; б) $(x-a)^2(2a+x)$;

в) $ab(a^2+b^2-cb)+c(c^3-b^2c-a^3)$. **12.** а) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\frac{1}{20}\begin{pmatrix} 8 & 4 & -4 \\ 1 & -7 & 2 \\ -6 & 2 & 8 \end{pmatrix}$;

г) $-\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix}$; д) $\frac{1}{17}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ -4 & 5 & 3 \\ 12 & 2 & -9 \end{pmatrix}$; е) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

13. $X=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}$, $Y=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & -1\\ 6 & 1\end{pmatrix}$. **14.** а) $S=\{1, 2\}$; б) $S=\{0, 3a\}$. **15.** а) *Указание.* Прибавьте к первой строке третью строку и вынесите общий множитель. $(a^2+b^2+c^2)(a-b)(a-c)(c-b)(a+b+c)$; б) $(a-b)(b-c)(c-a)(ab+ac+bc)$.

§ 3. А. **1.** а), б), г) не является решением; в) является решением. **2.** а) $S=\{(1, 0, 1)\}$; б) $S=\{(1, -3, 3)\}$; в) $S=\{(1, 1, -2)\}$; г) $S=\{(1, 2, -2)\}$. **3.** а) $S=\{(5\alpha-1, 3\alpha+1, \alpha)\,|\,\alpha\in\mathbf{C}\}$; б) $S=\{(0, 0, 0)\}$; в) $S=\{(0, 0, 2)\}$; г) $S=\left\{\left(\frac{7}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)\right\}$; д) $S=\{(7, -6, 3)\}$; е) $S=\{(1-\alpha, \alpha, 2\alpha-1)\,|\,\alpha\in\mathbf{C}\}$. **4.** а) 4,5 лея; 4 лея.

§ 3. Б. **5.** а) $S=\left\{\left(\frac{-2+4\mathrm{i}}{15}, \frac{1-2\mathrm{i}}{3}, \frac{-4+3\mathrm{i}}{15}\right)\right\}$; б) $S=\{(1, 2, -2)\}$; в) $S=\{(-1, -1, 0, 1)\}$. **6.** а), г), д), е) совместна; б), в) несовместна. **7.** а) $S=\left\{\left(\frac{1}{5}(11-\alpha), \frac{2}{5}(-1+\alpha), \alpha\right)\,\middle|\,\alpha\in\mathbf{C}\right\}$; частное решение: $(3, -2, -4)$; г) $S=\{(1, 2, -2)\}$; д) $S=\{(1, 2, 1)\}$; е) $S=\{(\lambda, 1, 0)\,|\,\lambda\neq 0\}$; $S=\{(-\alpha, 1-2\alpha, \alpha)\,|\,\alpha\in\mathbf{C}, \lambda=0\}$. **8.** а) $S=\{(-3\alpha, \alpha, -\alpha)\,|\,\alpha\in\mathbb{R}\}$; б) $S=\{(\alpha, 3\alpha, \alpha)\,|\,\alpha\in\mathbb{R}\}$; в) $S=\{(0, 0, 0)\,|\,\lambda\neq 0\}$; $S=\{(-\alpha, -2\alpha, \alpha)\,|\,\lambda=0\}$; г) $S=\{(0, 0, 0)\,|\,\lambda\in\mathbb{R}\}$.

Упражнения и задачи на повторение. **А.** **1.** а) $\begin{pmatrix}5 & \mathrm{i} & -3\\ -2\mathrm{i} & 8 & 2+7\mathrm{i}\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}3\mathrm{i} & 1 & -\mathrm{i}\\ 2 & 4\mathrm{i} & -1+2\mathrm{i}\end{pmatrix}$.

2. а) $\begin{pmatrix}9 & 3\\ 10 & 3\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}\mathrm{i} & -2\mathrm{i}\\ 2 & -6\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}-5\\ 52\\ -33\end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix}11 & 9 & 13\\ -22 & -27 & -17\\ 29 & 32 & 26\end{pmatrix}$.

3. а) $x=-1$, $y=2$; б) $x=5$, $y=11$ или $x=-1$, $y=5$. **4.** $\begin{pmatrix}1 & 3\\ -6 & 1\end{pmatrix}$. **5.** а) 2; б) 3; в) 2. **6.** 1×2. **7.** а) $-\mathrm{i}$; б) 0; в) -70; г) -88; д) 0; е) $-21\mathrm{i}$; ж) 0; з) 0. **8.** а) $S=\{(2, 1)\}$; б) $S=\{(\mathrm{i}, 1)\}$; в) $S=\{(1, 1, 1)\}$; г) $S=\{(3, 2, 1)\}$; д) $S=\varnothing$; е) $S=\left\{\left(1, \frac{1}{2}\right)\right\}$; ж) $S=\{(4-t, 5-t)\,|\,t\in\mathbf{C}\}$; з) $S=\{(2, 3, -1)\}$. **9.** 5 жучков и 3 паука. **10.** 5 см и 12 см. **11.** а) $\alpha\in\mathbf{C}\setminus\left\{\frac{16}{3}\right\}$; б) $\alpha\in\mathbf{C}^*$.

Б. **12.** $\lambda=210$. **13.** а) $x=1, y=-3$; б) $x=1, y=2, u=0, v=3$. **14.** 2. **15.** $\begin{pmatrix}1 & na\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. **16.** б) Наименьшее значение: -4, наибольшее значение: 4. **17.** а) 2; б) 2; в) 4. **18.** а) BA не существует, $AB=\begin{pmatrix}14 & -5 & 22 & 6\\ 7 & 10 & 1 & 7\\ 3 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$; б) $AB=BA=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$; в) AB не существует, $BA=\begin{pmatrix}1 & 4\mathrm{i} & 0\\ 0 & -1 & 1+\mathrm{i}\end{pmatrix}$. **19.** $\frac{1}{1-\alpha^2}\begin{pmatrix}1 & -\alpha & -\alpha\\ -\alpha & 1 & 1\\ -\alpha & \alpha^2 & 1\end{pmatrix}$, $\alpha\neq\pm 1$. **20.** $X=\begin{pmatrix}3 & -5\\ 0 & 4\end{pmatrix}$. **21.** а) 1; б) 36; в) -15. **22.** $\mathcal{V}=6$ (куб. ед.). **23.** а) $S=\left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$; б) $S=\{-2, 0, 1\pm\mathrm{i}\}$. **24.** $\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 4 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$. **25.** При

$\alpha \neq \pm 2$ система совместна и определена; при $\alpha = 2$ система имеет бесконечное множество решений; при $\alpha = -2$ система несовместна. **26.** а) $\begin{pmatrix} 2 & -\mathrm{i} \\ 3 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}$; б), д), ж), з) не существует A^{-1};

в) $\frac{1}{70}\begin{pmatrix} 8 & 7 & 3 \\ 14 & -14 & 14 \\ -34 & 14 & -4 \end{pmatrix}$; г) $\frac{1}{88}\begin{pmatrix} -6 & 20 & -15 \\ 30 & -12 & 31 \\ -20 & 8 & -6 \end{pmatrix}$; е) $\frac{1}{21}\begin{pmatrix} 17 & -8 & 5 \\ -16 & 10 & -1 \\ 6\mathrm{i} & -9\mathrm{i} & 3\mathrm{i} \end{pmatrix}$.

27. а) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 4 & -1 \\ -6 & 14 & -11 & 3 \\ 4 & -11 & 10 & -3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{13}{36} & \frac{7}{18} & -\frac{1}{18} \\ \frac{1}{4} & -\frac{11}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{7}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{4} & \frac{7}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$;

в) $A^{-1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 & -8 \\ 7 & 2 & -15 & 17 \\ 2 & -8 & 0 & 7 \\ -8 & 2 & 15 & -13 \end{pmatrix}$. **28.** а) $S = \left\{\left(\frac{5}{3}, \frac{19-9t}{6}, \frac{11-3t}{t}, t\right) \middle| t \in \mathbf{C}\right\}$;

б) $S = \{(5-3t,\ -5+2t, 1-t, t) \mid t \in \mathbf{C}\}$; в) $S = \{(-5+2\lambda+4t,\ -1+\lambda+t, \lambda, t) \mid \lambda, t \in \mathbf{C}\}$;

г) $S = \left\{\left(\frac{1}{6}+5t, \frac{1}{6}-\frac{7}{6}t, \frac{1}{6}+5t, 6t\right) \middle| t \in \mathbf{C}\right\}$; д) $S = \left\{\left(\frac{1}{\alpha+2}, \frac{1}{\alpha+2}, \frac{1}{\alpha+2}\right) \middle| \alpha \in \mathbf{C}\right\}$ при $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$;
$S = \{(1-\lambda-t, \lambda, t) \mid t, \lambda \in \mathbf{C}\}$ при $\alpha = 1$; $S = \varnothing$ при $\alpha = -2$; е) $S = \varnothing$ при $\lambda \in \mathbb{R}^*$;
$S = \{(-0{,}5\lambda - 6{,}5t - 1{,}5;\ -3{,}5\lambda - 9{,}5t - 3{,}5;\ \lambda;\ t) \mid \lambda, t \in \mathbf{C}\}$ при $\lambda = 0$.
29. а) $S = \{(-5\alpha, \alpha, t, -3\alpha + t) \mid \alpha, t \in \mathbf{C}\}$; б) $S = \varnothing$ при $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$;
$S = \{(t, t, t) \mid t \in \mathbf{C}\}$ при $\lambda = -2$; $S = \{(\alpha, t, -\alpha - t) \mid \alpha, t \in \mathbf{C}\}$ при $\lambda = 1$;
в) $S = \varnothing$ при $\lambda \neq 1$; $S = \{(2t, -3t, 5t, 4t) \mid t \in \mathbf{C}\}$ при $\lambda = 1$. **30.** I сосуд – 7,5 л, II сосуд – 45 л. **31.** I велосипедист – 5 км/ч, II велосипедист – 3 км/ч. **32.** I вкладчик – 2 000 д. ед., II вкладчик – 3 000 д. ед., III вкладчик – 5 000 д. ед.

Проверочная работа. **А.** **1.** а) $\begin{pmatrix} 8 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 16 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}$. **2.** Например, $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -11 & -10 \end{pmatrix}$.
3. $S = \{(1, -1, 0)\}$. **4.** $S = \{(0, \frac{2}{3}\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbf{C}\}$; частное решение: $(0,\ 2,\ 3)$.

Б. **1.** а) $\begin{pmatrix} -1 & 3\mathrm{i} & 5+6\mathrm{i} \\ 4\mathrm{i} & 2 & 4+2\mathrm{i} \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4+7\mathrm{i} & 4+5\mathrm{i} \\ 12-9\mathrm{i} & -8+5\mathrm{i} \\ 6-9\mathrm{i} & -7+\mathrm{i} \end{pmatrix}$. **2.** Например, $\begin{pmatrix} 2 & 3\mathrm{i} & 0 & 2 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 4 & 8 & 3\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 27 & 47 & 21\mathrm{i} \end{pmatrix}$.

3. C. **4.** $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 \\ \frac{6}{4} & \frac{5}{4} & -\frac{7}{4} \end{pmatrix}$. **5.** $X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 22 & 15 & -21 \\ 16 & 14 & -18 \\ -4 & -6 & 6 \end{pmatrix}$. **6.** $S = \{(2,\ -3,\ 24,\ -39)\}$.

7. $S = \left\{\left(\frac{5}{9}\alpha + \frac{1}{3}\mathrm{i}\beta,\ \frac{1}{9}\beta + \frac{28}{27}\mathrm{i}\alpha,\ -\frac{47}{27}\alpha - \frac{7}{9}\mathrm{i}\beta,\ \alpha,\ \beta\right) \middle| \alpha, \beta \in \mathbf{C}\right\}$.

Модуль 8. **§1. А.** **1.** Нет. **2.** Л. **3.** а) PQ; б) PC; в) QC. **4.** $\frac{a^2}{16}\sqrt{3}$ кв. ед. **5.** 3 плоскости. **6.** 6 плоскостей. **7.** а) 6; б) 4. **8.** а) 10; б) 10. **9.** а) Нет; б) нет; в) да. **10.** а), б) Ни одной точки, точку, бесконечное множество точек; в) ни одной точки, точку, две точки, бесконечное множество точек. **11.** Да, если точки неколлинеарны.

§1. Б. **14.** *Указание*. Пересекающиеся прямые d_1 и d_2 определяют плоскость α. Прямая d_3 пересекает прямые d_1 и d_2 в двух различных точках плоскости α. **15.** *Указание*. Прямые AD и CB лежат в одной плоскости. **16.** *Указание*. Если две различные плоскости α и β имеют общую точку, то они пересекаются по прямой **17.** *Указание*. Примените метод доказательства от противного. **18.** *Указание*. $a \cap AB = C \subset \beta \Rightarrow \beta$ разделяет точки A и B. **19.** *Указание*. $A \in \alpha$ и $A \notin \beta$, $B \in \beta$ и $B \notin \alpha \Rightarrow$ искомая прямая – AB. **20.** *Указание*. Точка $D \notin (ABC)$.

§2. А. **1.** Нет. **2.** $a \nparallel c$. **3.** Да. **5.** Скрещивающиеся.

§2. Б. **8.** $a \nparallel c$. **9.** Все пространство без точек плоскости (A, d). **10.** $d \nparallel d_2$. **11.** Прямые d и AB скрещивающиеся.

§3. А. **1.** $d \parallel MN$. **2.** $EL \parallel FM$. **3.** а) 10 см; б) 6 см; в) 16 см; г) $\frac{bc}{a+c}$.

§3. Б. **4.** *Указание*. $\Delta A_1BB_1 \sim \Delta ABC \Rightarrow A_1B_1 \parallel AC$ и $\Delta D_1DC_1 \sim \Delta ADC \Rightarrow D_1C_1 \parallel AC$. **5.** *Указание*. Примените теорему Менелая. $\frac{1}{abc}$. **6.** $MN \parallel (ABC)$. **7.** *Указание*. $M_1 = DM \cap AB$, $N_1 = DN \cap BC$, тогда $\Delta DMN \sim \Delta DM_1N_1$.

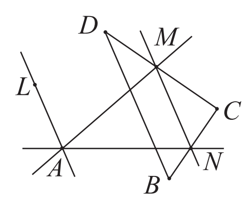
§4. А. **1.** *Указание*. $MN \parallel AB$, $NP \parallel BC$. **2.** *Указание*. а) $LM \parallel AB$ и $MN \parallel BC$; б) $I_1 = PM \cap AB$; в) $I_2 = PN \cap AC$; г) $(ABC) \cap (PMN) = I_1I_2$. **3.** $\mathscr{P}_{A_2B_2C_2} = 13{,}75$ см, $\mathscr{P}_{A_3B_3C_3} = 22{,}5$ см, $\mathscr{P}_{A_4B_4C_4} = 31{,}25$ см.

§4. Б. **4.** 8 см. **5.** 38 см. **6.** $\mathscr{P}_1 = \frac{6\lambda+1}{7\lambda+1}\mathscr{P}$, $\mathscr{P}_2 = \frac{4\lambda+1}{7\lambda+1}\mathscr{P}$, $\mathscr{P}_3 = \frac{\mathscr{P}}{7\lambda+1}$. **7.** *Указание*. а) $\Delta MEN \sim \Delta AEB$ и $\Delta NEP \sim \Delta BEC$; б) $I = NR \cap BD$. **8.** *Указание*. $(MNP) \parallel (ABC) \Rightarrow$ $\Rightarrow (MNP) \cap (AED)$ есть прямая $d \parallel AD$ и $Q \in d$.

Задачи на повторение. **А.** **1.** а) 17,15 дм; б) 19,5 см; в) 54 см. **2.** $MM_1 = 12$ см, $NN_1 = 8$ см. **3.** 12 см. **4.** *Указание*. Если точка M_1 – середина отрезка AB, то $\Delta MDL \sim \Delta M_1DC \Rightarrow ML \parallel M_1C$.

Б. **7.** а) $\frac{a}{\lambda}(\lambda-1)$; б) μa; в) $\frac{l}{k}$; г) $\frac{c}{a}(a-b)$. **8.** 32 см. **10.** $\frac{m+n}{2n}a$. **11.** 2 м. **12.** $0{,}25a^2 \cdot \sqrt{11}$ у.е. **13.** *Указание*. Пусть I – точка пересечения каких-либо двух прямых из данных. Если предположим, что третья прямая пересекает одну из этих прямых в некоторой точке, отличной от I, то эти три прямые будут компланарными, что противоречит гипотезе. **14.** Прямые AB и DC, где $D = a \cap AB$.

15. AM, $MN \parallel DB$, AN и $AL \parallel DB$; см. рисунок.



16. *Указание*. Пересечение двух плоскостей, которые проходят через две параллельные прямые, есть прямая, параллельная этим двум прямым. **17.** См. задачу 16. **18.** Точка существует, если $AB \nparallel DC$, то есть, если $AD : DE \neq BC : CE$. **19.** *Указание*. Пусть $BE = EC$, тогда $[MF]$ – медиана ΔADF. Из условия имеем $AG : GE = 2:1$, следовательно, $[AE]$ – медиана ΔADF. **20.** *Указание*. Если $I = AC \cap EF$, то $IH \cap AB$ – одна из точек пересечения, а $FH \cap DB$ – вторая точка пересечения. **21.** *Указание*. а) $I_1 = EF \cap AB$,

$H_1 = BC \cap HD$, $I_2 = EH \cap AH_1$ $(EFH) \cap (ABC) = I_1 I_2$ и т.д. в) $F_1 = DF \cap AB$, $H_1 = DH \cap BC$, $F_1 H_1 \cap AC = P$, тогда $FH \cap DP$ – точка пересечения. **22.** *Указание.* Примените свойство средней линии и свойства параллелограмма. **23.** а) Прямая, проходящая через точку E и центр параллелограмма; б) $MN \parallel DC \parallel AB$; в) $LP \parallel DC$; г) $MNLP$ – трапеция. **24.** *Указание.* F_1, F_2 и F_3 – точки пересечения прямых CB, AC и BA соответственно с плоскостью α. **25.** *Указание.* Возьмите точку $M \in c$ $(M \notin \gamma,\ AM \nparallel \gamma,\ BM \nparallel \gamma)$. Постройте $(ABM) \cap \alpha$ – это прямая A_1B_1, где $A_1 = a \cap AM$, $B_1 = b \cap BM$, и точка пересечения есть $AB \cap A_1B_1$. **27.** 4.

Проверочная работа. **А.** **1.** 8 см. **2.** а) A_1B_1, A_1D_1, D_1C_1, B_1C_1, A_1C_1, D_1B_1; б) (ADB), (DCC_1), (ABA_1), $(D_1A_1B_1)$. **3.** $a(0{,}5 + \sqrt{3})$. **4.** 8 см.

Б. **1.** $a \nparallel b$. **2.** а) $EF \parallel (ABC)$, б) $GH \parallel (ABC)$. **4.** $\frac{4}{9}\mathscr{A}$.

Модуль 9.

§1. А. **1.** *Указание.* $CD \perp CB$, $CD \perp CF \Rightarrow CD \perp (CBF)$. **2.** $DA \perp CB$, $CB \parallel MN \Rightarrow$ $\Rightarrow MN \perp AD$. **3.** 2,4 см. **4.** $MB = MD = 5$ см, $MC = \sqrt{41}$ см. **5.** $AB = b$. **6.** $AB = \sqrt{(a-b)^2 + c^2}$. **7.** $DE = 4\sqrt{2}$ см, $CE = 2\sqrt{17}$ см, $BE = 2\sqrt{13}$ см, $d = \frac{4}{13}\sqrt{286}$ см. **8.** $2\sqrt{14}$ см.

§1. Б. **9.** $AB = \sqrt{(a+b)^2 + c^2}$. **10.** $\sqrt{a^2 + c^2}$, $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\alpha}$, $\sqrt{b^2 + c^2}$.

11. $\sqrt{b^2 - \dfrac{a^2}{4\sin^2\alpha}}$. **13.** *Указание.* Если $d = \alpha \cap \beta$, то из $d_1 \perp \alpha \Rightarrow d_1 \perp d$, а из $d_2 \perp \beta \Rightarrow d_2 \perp d \Rightarrow d \perp (d_1 d_2)$. **14.** *Указание.* ΔAEC – равнобедренный $\Rightarrow EO \perp AC$; аналогично, ΔBED – равнобедренный $\Rightarrow EO \perp BD$.

§2. А. **1.** *Указание.* а) $AB \perp MD$, $AB \perp MC$; б) $pr_{(ABC)}[MC) = [MD)$; в) 2,75 см; г) $1{,}5\sqrt{15}$ см. **2.** а) 3 см; б) 0,6. **3.** а) 3 см; б) $3\sqrt{2}$ см. **4.** 24 см. **5.** 3,8 м.

§2. Б. **6.** *Указание.* а) ΔAVD – равнобедренный, $[VO]$ – медиана; ΔBVE – равнобедренный, $[VO]$ – медиана $\Rightarrow VO \perp (ABC)$; б) $\Delta AOV \equiv \Delta BOV \equiv \Delta COV \equiv \Delta DOV \equiv \Delta EOV \equiv \Delta FOV$. **7.** *Указание.* а), б) Если $O = pr_{(ABC)}E$, то $\Delta AOE \equiv \Delta BOE \equiv \Delta COE \equiv \Delta DOE \Rightarrow OA = OB = OC = OD$. **8.** $c\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}$.

§3. А. **1.** $\sqrt{6}$ см. **2.** а) $\frac{9}{4}$ см; б) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ см. **3.** 15 см. **4.** 5 см.

§3. Б. **5.** $\frac{\sqrt{1221}}{39}$. **6.** *Указание.* а) Если $O = pr_{(ABC)}E$, а $[EM]$, $[EN]$, $[EP]$, $[EQ]$ – высоты треугольников AEB, BEC, CED и DEA соответственно, то $OM = ON = OP = OQ$, т. е. точка O равноудалена от сторон ромба; б) $\Delta MOE \equiv \Delta NOE \equiv \Delta POE \equiv \Delta QOE \Rightarrow \angle EMO \equiv \angle ENO \equiv$ $\equiv \angle EPO \equiv \angle EQO$. **7.** Если $O = pr_{(ABC)}E$ и $[EM]$, $[EN]$, $[EP]$, $[EQ]$ – высоты треугольников AEB, BEC, CED и DEA соответственно, то $\Delta MOE \equiv \Delta NOE \equiv \Delta POE \equiv \Delta QOE$, т. е. $MO = NO = PO = QO$. **9.** 30°. **10.** $\sqrt{3}$.

Задачи на повторение. **А.** **1.** а) 13 см; б) 30 см; в) $\sqrt{p^2 + n^2 - m^2}$; г) $\sqrt{2p^2 + n^2 - s^2}$. **2.** $\sqrt{b^2 - \frac{1}{3}a^2}$. **3.** $d_1 = 2\sqrt{6}$ см, $d_2 = 4\sqrt{2}$ см. **4.** а) 30°; б) $\arccos\left(-\frac{7}{8}\right)$. **5.** 2 см. **6.** 15 м.

Б. **10.** *Указание.* Прямая из плоскости α перпендикулярна $pr_\alpha a$. **12.** 32 см. **13.** $\dfrac{ab}{a+b}$. **14.** $\sqrt{b^2 - a^2}$. **15.** $\sqrt{2b^2 - a^2}$. **16.** $b\cos\alpha\sqrt{1 - \mathrm{tg}^2\alpha\,\mathrm{ctg}^2\beta}$. **17.** $\dfrac{2a\sin\alpha}{\cos\beta}$. **18.** 0,5 м.

Проверочная работа. **А. 1.** 3,5 см. **2.** $\sqrt{6}$ см. **3.** $5\sqrt{2}$ см, $\sqrt{29}$ см. **4.** 4 см.
Б. 1. $\frac{1}{2}|a-b|$. **3.** $\sqrt{70}$ см, $2\sqrt{16{,}06}$ см. **4.** 45°.

Модуль 10. **§ 1. А. 2.** Нет. **3.** Является геометрическим преобразованием, но не изометрическим. **4.** Не всегда (например, параллельное проектирование).

§ 1. Б. 8. а) $B'K'$, где $A'K'=K'C'$; б) $B'L'$, где $\angle A'B'L' \equiv \angle L'B'C'$ и т. д. **9.** Если $C \in [AB]$ и $f(C)=C'$, то $AC=AC'$, $CB=C'B$ и $AC+CB=AC'+C'B$, следовательно, $C \equiv C'$. Аналогично получаем $C \notin [AB]$. **10.** а) См. задачу 9; б) нет. **11.** а) Да, если $f(A)=A$, то $f^{-1}(A)=f^{-1}(f(A))=\mathrm{I}(A)=A$. б) да, так как $(f \circ f)(A)=f(A)=A$. **12.** Да, так как $(f \circ f)(A)=f(f(A))=f(B)=A$.

§ 2. А. 2. Да. **3.** Бесконечное множество; центры симметрии образуют прямую, параллельную заданным прямым. **4.** Нет. **5.** Нет. **6.** Точки коллинеарны. **8.** Да (центр симметрии, любая прямая, любая плоскость, проходящие через центр центральной симметрии). **9.** Идентичное. **10.** Нет.

§ 2. Б. 13. а) Отрезок, параллельный заданному отрезку; б) прямая, параллельная заданной прямой; в) плоскость, параллельная заданной плоскости.

§ 3. А. 1. а) Равнобедренный треугольник, прямоугольник; б) треугольник со сторонами разной длины, параллелограмм. **2.** Прямые, проходящие через центры двух противоположных граней; прямые, проходящие через середины двух параллельных ребер, которые не принадлежат одной грани. **4.** а) $\alpha \equiv \alpha'$ и $d \in \alpha'$; б) $\alpha \equiv \alpha'$ и $d \perp \alpha'$; в) $d \cap \alpha' \neq \varnothing$. **5.** Любая медиатриса отрезка *AB*. Все оси образуют медиальную плоскость отрезка *AB*. **6.** а) Несущая прямая отрезка и любая его медиатриса; б) несущая прямая полупрямой; в) сама прямая и любая перпендикулярная к ней прямая; г) любая прямая, лежащая в плоскости, и любая прямая, перпендикулярная плоскости; д) прямая, перпендикулярная плоскости параллелограмма и проходящая через точку пересечения его диагоналей.

§ 3. Б. 7. а) Образ прямой, параллельной оси, есть прямая, параллельная заданной прямой; образ прямой, пересекающей ось, есть прямая, проходящая через точку пересечения заданной прямой с осью, причем ось является несущей прямой биссектрис вертикальных углов, образованных прямой и ее образом; образ прямой, не пересекающей ось, есть прямая, не пересекающая заданную прямую. **8.** а) Любая прямая, перпендикулярная оси симметрии, и сама ось; б) ось симметрии.

§ 4. А. 2. Любая прямая, лежащая в плоскости, и любая прямая, перпендикулярная плоскости. **3.** а) Любая плоскость, содержащая отрезок, и медиальная плоскость отрезка; б) любая плоскость, проходящая через прямую, и любая плоскость, перпендикулярная заданной прямой; в) сама плоскость и любая плоскость, перпендикулярная заданной плоскости; г) плоскость, содержащая заданные прямые, и две плоскости, перпендикулярные плоскости, проходящей через эти прямые и которые содержат биссектрисы углов, образованных этими прямыми; д) плоскость, проходящая через заданные прямые, плоскость, перпендикулярная плоскости, определенной заданными прямыми, и равноудаленная от этих прямых, и любая плоскость, перпендикулярная заданным прямым; е) плоскость, равноудаленная от заданных плоскостей, и любая плоскость, перпендикулярная заданным плоскостям. **4.** Прямые компланарны. **6.** 5 м. **7.** $\alpha \parallel \beta$, если $\alpha \parallel \gamma$; $\alpha \nparallel \beta$, если $\alpha \nparallel \gamma$.

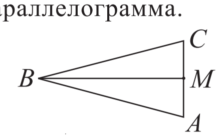
§ 4. Б. **9.** Точка M – точка пересечения прямой AB' с плоскостью α, где B' – точка, симметричная точке B относительно плоскости α. **10.** Точка M – точка пересечения прямой AB' с плоскостью α, где B' – точка, симметричная точке B относительно плоскости α. **11.** Окружность, лежащая в плоскости, проходящей через точку A и перпендикулярной прямой d, центр которой есть точка пересечения прямой d с этой плоскостью, а радиус – расстояние от точки A до прямой d.

§ 5. Б. **5.** Не существует инвариантных точек. Любая прямая и любая плоскость, параллельные прямой, проходящей через точку и ее образ при данном параллельном переносе. **6.** t_{BA}.

§ 6. Б. **2.** Нет. **3.** Нет. **4.** Одна точка – центр гомотетии. Любая прямая, проходящая через центр гомотетии. **5.** 9 банок. **6.** а) Стороны треугольника $A'B'C'$ параллельны сторонам треугольника ABC; б) см. 6 а). **7.** $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. **9.** а) Окружность; б) круг; в) параллелограмм; г) квадрат; д) куб; е) сфера.

§ 7. Б. **3.** а) Бесконечное число осей; б) одну ось; в) одну ось или не имеет осей; г) не имеет осей. **7.** *Указание*. Рассмотрите поворот вокруг прямой l, при котором точка B отображается в такую точку B', что: 1) $B' \in (lA)$; 2) Точки A и B' расположены по разные стороны прямой l. Тогда $M = AB' \cap l$ – искомая точка.

Задачи на повторение. **А.** **1.** *Указание*. Если O – середина $[AC]$, то $S_O(d_1) \cap d_2$ – вершина параллелограмма. **2.** *Указание*. Если O – середина $[AC]$, то $S_O(d) \cap \mathscr{C}$ – вершина параллелограмма.

3. 

$S_M(B) = B_1 \Rightarrow ABCB_1$ – параллелограмм с перпендикулярными диагоналями $\Rightarrow ABCB_1$ – ромб.

4. Если $S_M(\mathscr{C}_1) = \mathscr{C}_1'$ и $\mathscr{C}_1' \cap \mathscr{C}_2 = B$, то прямая AB есть искомая прямая.

Б. **1.** Если $P_1 = S_{AC}(P)$ и $P_2 = S_{BC}(P)$, то $X_1 = AC \cap P_1P_2$ и $Y_1 = BC \cap P_1P_2$. **6.** *Указание*. Точка отскока – это пересечение борта стола с отрезком, соединяющим одну из этих точек с точкой, симметричной другой точке относительно борта. **7.** Вершина C – точка пересечения прямых d и BA_1, где $A_1 = S_d(A)$. **8.** Если $d_3 = t_{\bar{a}}(d_1)$, то $M_2 = d_3 \cap d_2$, а $M_1 = t_{-\bar{a}}(M_2)$. **9.** Пусть $B_2 \in d_2$ и $BB_2 \parallel d_1$, $A_2 \in d_1$ и $AA_2 \parallel d_2$, $\bar{a} = \overrightarrow{AA_2}$, $\bar{b} = \overrightarrow{BB_2}$, тогда $t_{\bar{a}+\bar{b}}(A) = A_1$, $t_{\bar{a}+\bar{b}}(B) = B_1$.

Проверочная работа. **А.** **1.** Биссектральные плоскости заданной фигуры и любая плоскость, перпендикулярная прямой, по которой пересекаются плоскости. **2.** Прямая, лежащая в плоскостях, проходящих через заданные прямые, и равноудаленная от них. Любая прямая, лежащая в плоскости, проходящей через заданные прямые, и перпендикулярная к ним, и любая прямая, перпендикулярная плоскости, проходящей через заданные прямые, и пересекающая первую ось симметрии. **3.** Один центр симметрии, 13 осей, 9 плоскостей. **4.** Не имеет центра симметрии, 7 осей, 6 плоскостей.

Б. **1.** Пусть a и b – заданные скрещивающиеся прямые. Прямая AB – общий перпендикуляр к прямым a и b (таковой существует, и он – единственный), где $A \in a$, $B \in b$. Пусть точка C – середина отрезка AB. Рассмотрим прямые a_1, b_1 проходящие через точку C и параллельные прямым a и b соответственно. Тогда оси симметрии заданной фигуры – это прямая AB и несущие прямые биссектрис углов, образованных прямыми a_1 и b_1. **4.** а) Да; б) да; в) да; г) в общем случае, нет; д) в общем случае, нет.

Содержание

Предисловие ... 3

Модуль 1. Последовательности действительных чисел ... 5

§ 1. Последовательности действительных чисел. Повторение и дополнения ... 5
§ 2. Арифметические прогрессии и геометрические прогрессии ... 13
§ 3. Предел последовательности. Сходящиеся последовательности, расходящиеся последовательности ... 22
Упражнения и задачи на повторение ... 30
Проверочная работа ... 32

Модуль 2. Предел функции ... 34

§1. Предел функции в точке ... 34
§ 2. Операции над пределами функций. Пределы элементарных функций ... 44
§ 3. Вычисление пределов функций ... 54
§ 4. Неопределенности в операциях над пределами функций ... 60
Упражнения и задачи на повторение ... 64
Проверочная работа ... 66

Модуль 3. Непрерывные функции ... 68

§ 1. Функции, непрерывные в точке. Функции, непрерывные на множестве ... 68
§ 2. Операции над непрерывными функциями ... 76
§ 3. Свойства непрерывных функций ... 79
Упражнения и задачи на повторение ... 85
Проверочная работа ... 86

Модуль 4. Дифференцируемые функции ... 88

§ 1. Производная функции ... 89
§ 2. Геометрический смысл производной ... 96
§ 3. Производные некоторых элементарных функций ... 101
§ 4. Техника дифференцирования ... 105
§ 5. Дифференциал функции ... 115
§ 6. Основные свойства дифференцируемых функций ... 118
Упражнения и задачи на повторение ... 127
Проверочная работа ... 129

Модуль 5. Приложения производной ... 131

§ 1. Роль первой производной в исследовании функций ... 131
§ 2. Роль первой производной в исследовании функций. Асимптоты ... 139
§ 3. Построение графиков функций ... 148
§ 4. Применение производных в физике, геометрии, экономике. Задачи на максимум и минимум ... 154
Упражнения и задачи на повторение ... 160
Проверочная работа ... 162

Модуль 6. Комплексные числа ... 164

§ 1. Операции над комплексными числами, заданными в алгебраической форме ... 164
§ 2. Геометрическое изображение комплексных чисел. Тригонометрическая форма комплексных чисел ... 170
§ 3. Приложения комплексных чисел ... 178
Упражнения и задачи на повторение ... 181
Проверочная работа ... 183

Модуль 7. Элементы высшей алгебры ... 185

§ 1. Матрицы ... 185
§ 2. Определители ... 199
§ 3. Системы линейных уравнений ... 215
Упражнения и задачи на повторение ... 226
Проверочная работа ... 230

Модуль 8. Параллельность прямых и плоскостей ... 232

§ 1. Аксиомы геометрии в пространстве ... 232
§ 2. Взаимное расположение двух прямых в пространстве ... 235
§ 3. Прямые и плоскости ... 238
§ 4. Параллельные плоскости ... 241
Задачи на повторение ... 245
Проверочная работа ... 248

Модуль 9. Перпендикулярность в пространстве ... 250

§ 1. Перпендикулярные прямые и плоскости ... 250
§ 2. Ортогональные проекции. Угол между прямой и плоскостью ... 254
§ 3. Угол между двумя плоскостями ... 259
Задачи на повторение ... 264
Проверочная работа ... 266

Модуль 10. Геометрические преобразования ... 268

§ 1. Понятие геометрического преобразования. Изометрические преобразования ... 268
§ 2. Центральная симметрия ... 271
§ 3. Осевая симметрия ... 273
§ 4. Симметрия относительно плоскости ... 275
§ 5. Параллельный перенос ... 276
§ 6. Преобразование подобия. Гомотетия ... 278
§ 7. Поворот вокруг прямой ... 280
Задачи на повторение ... 282
Проверочная работа ... 283

Ответы и указания ... 285