МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РЕСПУБЛИКИ МОЛДОВА

Ион АКИРИ Валентин ГАРИТ Мария ЕФРОС Петру ЕФРОС Василе НЯГУ
Андрей ПОШТАРУ Николае ПРОДАН Думитру ТАРАГАН Анатол ТОПАЛЭ Василе ЧОБАНУ

МАТЕМАТИКА

Учебник для XII класса

EDITURA PRUT

Manualul a fost aprobat de Ministerul Educației al Republicii Moldova
(ordinul ministrului educației nr. 510 din 13 iunie 2011).
Manualul a fost elaborat cu suportul proiectului „Educație de calitate în mediul rural din Moldova" finanțat de Banca Mondială.

Школа/Лицей ....
Учебник № ....

Год пользования	Фамилия и имя учащегося	Учебный год	Состояние учебника	
			в начале года	в конце года
1				
2				
3				
4				
5				

• Учитель должен проверить правильность написания фамилии и имени ученика.
• Запрещаются записи на страницах учебника.
• Состояние учебника в начале и в конце учебного года определяется оценками: *отлично*, *хорошо*, *удовлетворительно* или *плохо*.

Autori: *Ion Achiri*, doctor, conferențiar universitar, IȘE (modulele 1, 9)
Vasile Ciobanu, doctor, conferențiar universitar, USM (modulele 2, 9)
Maria Efros, profesoară, grad didactic superior, Liceul de Creativitate şi Inventică „Prometeu-Prim" (modulele 7, 8, 9)
Petru Efros, doctor, conferențiar universitar, USM (modulele 7, 8, 9)
Valentin Garit, doctor, conferențiar universitar, USM (modulele 7, 8, 9)
Vasile Neagu, doctor habilitat, profesor universitar, USM (modulele 4, 9)
Andrei Poştaru, doctor, conferențiar universitar, USM (modulele 5, 6)
Nicolae Prodan, doctor, conferențiar universitar, USM (modulele 6, 9)
Dumitru Taragan, doctor, conferențiar universitar, USM (modulele 3, 9)
Anatol Topală, doctor, conferențiar universitar, USM (modulele 6, 9)

Recenzenți: *Mihai Băleanu*, profesor, grad didactic I, Liceul Teoretic din s. Selişte, Nisporeni
Radion Blîndu, profesor, grad didactic superior, Liceul Teoretic „Mihai Eminescu", Bălți
Andrei Corlat, doctor, conferențiar universitar, USM
Olga Şpuntenco, profesoară, grad didactic superior, Liceul Teoretic „Gaudeamus", Chişinău
Nina Ungureanu, profesoară, grad didactic I, Liceul Teoretic „Lucian Blaga", Iargara, Leova

Traducere din limba română: *Ion Achiri*, *Petru Efros*, *Valentin Garit*, *Andrei Poştaru*, *Nicolae Prodan*
Redactor: *Tatiana Rusu*
Corector: *Lidia Paşa*, *Larisa Nosacenco*
Copertă: *Sergiu Stanciu*, *Adrian Grosu*
Paginare computerizată: *Valentina Stratu*

Editura *Prut Internațional*, str. Alba Iulia nr. 23, bl. 1 A, Chişinău, MD 2051
Tel.: (+373 22) 75 18 74; tel./fax: (+373 22) 74 93 18; e-mail: editura@prut.ro; www.edituraprut.md

Descrierea CIP a Camerei Naționale a Cărții

Акири, Ион

Математика: Учебник для 12 класса / Ион Акири, Андрей Поштару, Валентин Гарит [и др.]; trad. din limba română: Ion Achiri [et al.]; М-во просвещения Республики Молдова. – Chişinău: *Prut Internațional*, 2017 (F.E.-P. „Tipografia Centrală"). – 264 p.

ISBN 978-9975-54-326-2

51(075.3)
M 340

Предисловие

Данный учебник, имея ту же структуру и являясь продолжением учебников математики для X–XI классов (авторы И. Акири, В. Гарит и др.), составлен в соответствии с модернизированным куррикулумом для лицеев, основанным на формировании компетенций, и позволяет реализовать куррикулумные требования, предусмотренные для учащихся XII класса.

Учебник содержит разделы по *математическому анализу*, *высшей алгебре*, *геометрии*, *теории вероятностей*, *математической статистике и финансовому исчислению* и структурирован по модулям. Для ориентации в начале каждого модуля приводятся образовательные цели, которые могут быть достигнуты в процессе изучения этого модуля.

В разделе З*адачи и упражнения на повторение* к каждому модулю предлагаются дидактические задания с более высоким уровнем комплексности и обобщения, в контексте интегрирования добытых знаний и формирования специфических компетенций по математике.

Для каждого модуля предлагается итоговая таблица – *Понятийная карта*, которая может быть использована при систематизации, классификации, обобщении изученного материала в рамках данного модуля.

Для проведения итогового повторения и подготовки учащихся к экзамену за лицейский курс (экзамен на степень бакалавра) в учебник включен специальный модуль „Итоговое повторение“ (Модуль 9), содержащий обзор теоретического материала, изученного в предыдущих классах, а также упражнения и задачи для повторения (§ 12). Учитывая, что на экзамене по БАКу тестовые задания не содержат ответы, авторы осознанно не предлагают ответы к упражнениям и задачам данного параграфа. В этом контексте предоставляется ученикам возможность потренироваться в корректности решения предложенных упражнений и задач. Учитель по мере необходимости окажет соответствующую помощь.

Учебник составлен таким образом, что им можно пользоваться при преподавании–учении–оценивании математики как для реального профиля, так и для гуманитарного. Заметим, что материал, обозначенный вертикальной чертой слева, предусмотрен только для реального профиля. Для гуманитарного профиля этот материал предлагается как дополнительный.

Кроме того, в соответствии с предусмотренными целями, упражнения и задачи, приведенные в конце каждого параграфа, упражнения и задачи на повторение, а также проверочная работа в конце каждого модуля, классифицированы по профилям. Буквой **А** обозначены упражнения, задачи и проверочные работы для обоих профилей; буквой **Б** – только для реального профиля, для гуманитарного профиля эти задания могут быть дополнительными. Более сложные задания обозначены звездочкой (*) и поэтому необязательны. Двумя звездочками (**) обозначены цели, предусмотренные для тем по выбору. Цели, обозначенные *, относятся только к реальному профилю.

Отметим, что проверочные работы ориентировочны. В зависимости от уровня подготовки класса учитель может усовершенствовать предложенные или разработать другие проверочные работы.

В данном учебнике использованы символы и обозначения, обычно встречаемые в литературе и рекомендованные куррикулумом по математике для гимназии.

Учебник предоставляет возможность ученикам с математическими способностями углубить свои знания, усваивая дополнительные теоретические понятия и выполняя более сложные задания.

Уважаемые учителя! Дорогие ученики! Надеемся, что этот учебник станет полезным дидактическим инструментом в изучении математики и формировании компетенции. Будем благодарны за Ваши пожелания и предложения по совершенствованию учебника.

Выражаем искреннюю благодарность рецензентам, а также всем, кто способствовал улучшению данного учебника.

Авторы

Модуль

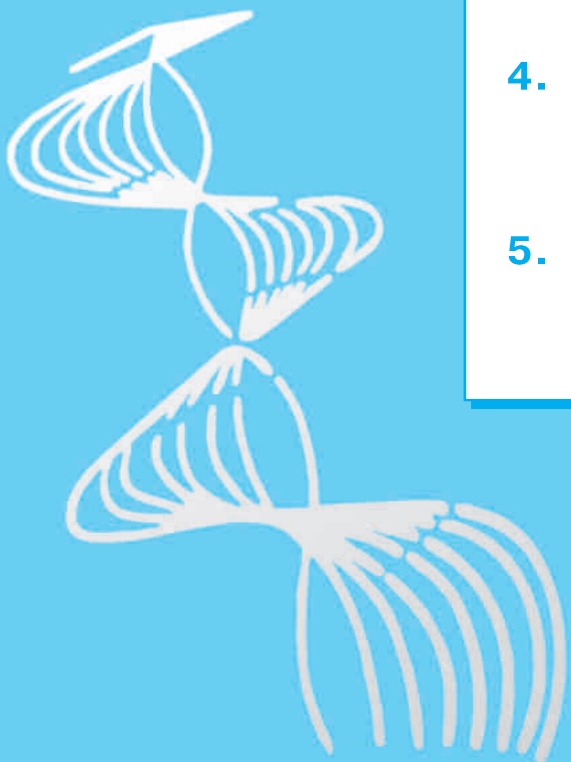
1

Дифференцируемые функции. Повторение

Цели модуля

- применение терминологии, соответствующей понятиям *производная функции* и **дифференциал функции*;
- применение свойств производной и *дифференциала функции в различных контекстах.

1. Производная функции
2. Дифференциал функции
3. Геометрический смысл производной и дифференциала функции
4. Правила вычисления производных и дифференциалов функций
5. Таблица производных и дифференциалов некоторых элементарных функций



$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

1. Производная функции

Пусть функция $f\colon I \to \mathbb{R}$ определена на интервале $I \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, а x – произвольная точка некоторой окрестности фиксированной точки x_0. Пусть $x - x_0 = \Delta x$ – приращение аргумента в точке x_0, а $f(x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$, или $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$ – приращение функции f в точке x_0, соответствующее приращению Δx аргумента.

Определение

Пусть интервал $I \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ и $f\colon I \to \mathbb{R}$ – некоторая функция. Будем говорить, что функция f **имеет производную в точке** x_0, если существует предел:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (1) \qquad \text{или} \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (2).$$

Этот предел называется **производной функции** f **в точке** x_0 и обозначается $f'(x_0)$.

Если, кроме этого, значение $f'(x_0)$ – конечное, то функция f называется **дифференцируемой в точке** x_0.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad \text{или} \qquad f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Замечания

1. Если предел (1) (или (2)) существует и бесконечен или не существует, то ***функция f не дифференцируема в точке x_0***.

2. В исследовании дифференцируемости некоторой функции в определенной точке принимаются во внимание лишь соответствующие значения этой функции из окрестности этой точки. Поэтому говорят, что *свойство дифференцируемости функции является ее локальным свойством*.

3. Будем говорить, что ***функция f*** **дифференцируема на множестве** M $(M \subseteq I)$, если она дифференцируема в каждой точке множества M.

Теорема 1

Если функция дифференцируема в данной точке, то она непрерывна в этой точке.

Обратное утверждение неверно. (Приведите пример.)

Определения

• Пусть интервал $I \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ и $f\colon I \to \mathbb{R}$ – некоторая функция.
Предел

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ (3) \ (\text{соответственно} \ \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ (4))$$

(если существует), конечный или бесконечный, называется **левой** (соответственно **правой**) **производной функции** f **в точке** x_0.
Обозначают: $f'_л(x_0)$, $f'_п(x_0)$.

• Функция $f\colon I \to \mathbb{R}$ $(I \subseteq \mathbb{R})$ называется **дифференцируемой слева** (соответственно **дифференцируемой справа**) **в точке** x_0, если предел (3) (соответственно предел (4)) существует и конечен.

Теорема 2

Функция $f\colon I \to \mathbb{R}$ $(I \subseteq \mathbb{R})$ дифференцируема в точке $x_0 \in I$, если и только если она дифференцируема слева и справа в точке x_0 и $f'_л(x_0) = f'_п(x_0)$.
В этом случае: $f'_л(x_0) = f'_п(x_0) = f'(x_0)$.

2. Дифференциал функции

Определение Линейная функция $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(\Delta x) = f'(x_0)\Delta x$, называется **дифференциалом функции** f **в точке** x_0 и обозначается $\mathrm{d}f(x_0)$.

В частности, для функции $f(x) = x$ имеем $f'(x_0) = 1$. Тогда $\mathrm{d}x(x_0) = \Delta x$, $\forall \Delta x \in \mathbb{R}$.

Если функция f дифференцируема в любой точке интервала $I \subseteq \mathbb{R}$, получаем формулу для вычисления дифференциала функции:

$$\boxed{\mathrm{d}f(x) = f'(x)\mathrm{d}x, \ \forall x \in I}.$$

Например, для функции $f: \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \cos 2x$, имеем:

$$\mathrm{d}(\cos 2x) = (\cos 2x)'\mathrm{d}x = -2\sin 2x\,\mathrm{d}x.$$

При вычислении приближенного значения функции в заданной точке часто применяют формулы:

1) $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$; 2) $\sqrt{1+\Delta x} \approx 1 + \frac{1}{2}\Delta x$; 3) $(1+\Delta x)^n \approx 1 + n \cdot \Delta x$.

Пример $\sqrt{25{,}04} = \sqrt{25+0{,}04} = \sqrt{25(1+0{,}0016)} = 5\sqrt{1+0{,}0016} \approx 5\left(1+\frac{1}{2}\cdot 0{,}0016\right) = 5{,}004.$

3. Геометрический смысл производной и дифференциала функции

Геометрический смысл производной функции f, дифференцируемой в точке x_0

Существование конечной производной функции f в точке x_0 эквивалентно существованию невертикальной касательной (непараллельной оси Oy) в точке $(x_0, f(x_0))$ графика G_f, при этом угловой коэффициент m этой касательной равен $f'(x_0)$ (рис. 1.1). То есть $m = f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$.

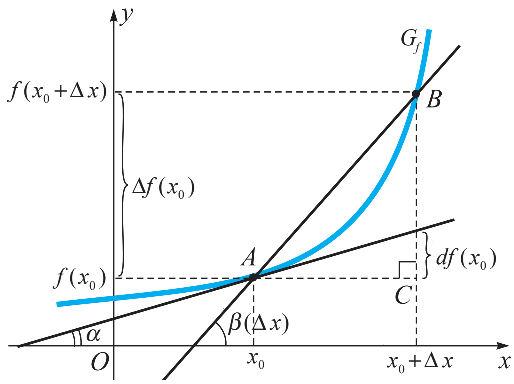


Рис. 1.1

Касательная (невертикальная) в точке $(x_0, f(x_0))$ графика функции f, непрерывной в точке x_0, есть прямая, уравнение которой имеет вид

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}.$$

Если $f'(x_0) = \infty$ ($f'(x_0) = +\infty$ или $f'(x_0) = -\infty$), то касательная в точке $(x_0, f(x_0))$ параллельна оси Oy, то есть уравнение касательной имеет вид $\boxed{x = x_0}$.

Для графика G_f функции f, непрерывной в точке $A(x_0, f(x_0))$, но не дифференцированной в ней, эта точка может быть:

- ***возвратной точкой***, если $f'_л(x_0) \neq f'_п(x_0)$ и обе производные бесконечны;
- ***угловой точкой***, если $f'_л(x_0) \neq f'_п(x_0)$ и хотя бы одна из этих производных конечная;
- ***точкой перегиба***, если $f'_л(x_0) = f'_п(x_0) = \pm\infty$ и обе производные имеют один и тот же знак.

Геометрический смысл дифференциала функции f

$\Delta f(x_0)$ представляет собой приращение „ординаты функции f“, соответствующее приращению Δx ее аргумента, а $\mathrm{d}f(x_0)$ представляет собой приращение „ординаты касательной“ в точке $(x_0, f(x_0))$ графика G_f, соответствующее тому же приращению Δx аргумента функции f (рис. 1.1).

4. Правила вычисления производных и дифференциалов

Основные правила вычисления производных и дифференциалов
(без уточнения условий, когда они применимы)

1° $(f \pm g)' = f' \pm g'$.

2° $(c \cdot f)' = c \cdot f'$.

3° $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.

4° $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$.

5° Производная сложной функции:
$(g \circ f)'(x) = (g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

1°′ $\mathrm{d}(f \pm g) = \mathrm{d}f \pm \mathrm{d}g$.

2°′ $\mathrm{d}(c \cdot f) = c \cdot \mathrm{d}f$, c – постоянная.

3°′ $\mathrm{d}(f \cdot g) = g \cdot \mathrm{d}f + f \cdot \mathrm{d}g$.

4°′ $\mathrm{d}\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g \cdot \mathrm{d}f - f \cdot \mathrm{d}g}{g^2}$.

5°′ Дифференциал сложной функции: $\mathrm{d}f(g) = f'(g) \cdot \mathrm{d}g$.

6° Производная обратной функции: $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$.

7° Производные высших порядков: $f'' = (f')'$; $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

8° Если $f, g: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, где I – интервал, и $f(x) > 0$, $\forall x \in I$, то

$$(f^g)' = f^g\left(g' \cdot \ln f + g \cdot \frac{f'}{f}\right).$$

Примеры

1 Для функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2\sin^2 x - 5x$, имеем $\mathrm{d}f(x) = \mathrm{d}(2\sin^2 x - 5x) =$
$= \mathrm{d}(2\sin^2 x) - \mathrm{d}(5x) = 2\mathrm{d}(\sin^2 x) - 5\mathrm{d}x = 2 \cdot 2\sin x \cos \mathrm{d}x - 5\mathrm{d}x = (2\sin 2x - 5)\mathrm{d}x$.

2 Для функции $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x^{2\sqrt{x}}$, имеем:

$$(x^{2\sqrt{x}})' = x^{2\sqrt{x}}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}} + 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{x}\right) = x^{2\sqrt{x}-0,5}(\ln x + 2).$$

5. Таблица производных и дифференциалов некоторых элементарных функций

№	f	D_f	f'	$D_{f'}$	$\mathrm{d}f$
1	c (постоян.)	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$	0
2	x^n, $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$n \cdot x^{n-1}$	$\mathbb{R}$	$n \cdot x^{n-1}\mathrm{d}x$
3	x^α, $\alpha \in \mathbb{R}^*$	$(0, +\infty)$	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$(0, +\infty)$	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}\mathrm{d}x$
4	$\sqrt{x}$	$[0, +\infty)$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(0, +\infty)$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$
5	a^x, $a > 0$, $a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$a^x \ln a$	$\mathbb{R}$	$a^x \ln a\, \mathrm{d}x$
6	e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$	$e^x \mathrm{d}x$
7	$\log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$	$(0, +\infty)$	$\dfrac{1}{x \ln a}$	$(0, +\infty)$	$\dfrac{1}{x \ln a}\mathrm{d}x$
8	$\ln x$	$(0, +\infty)$	$\dfrac{1}{x}$	$(0, +\infty)$	$\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$
9	$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\cos x\, \mathrm{d}x$

10	$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x\,dx$
11	$\operatorname{tg} x$	$\mathbb{R}\setminus\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R}\setminus\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$	$\frac{1}{\cos^2 x}dx$
12	$\operatorname{ctg} x$	$\mathbb{R}\setminus\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\mathbb{R}\setminus\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}dx$
13	$\arcsin x$	$[-1, 1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
14	$\arccos x$	$[-1, 1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
15	$\operatorname{arctg} x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}dx$
16	$\operatorname{arcctg} x$	$\mathbb{R}$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$-\frac{1}{1+x^2}dx$

Упражнения и задачи

А

1. Найдите производную функции $f: D\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=\sqrt{5}$; б) $f(x)=x^{\sqrt{2}}$;

в) $f(x)=2-4x^{10}$; г) $f(x)=2\sqrt{x}$;

д) $f(x)=-8\sin x$; е) $f(x)=7\cdot 2^x$;

ж) $f(x)=6\log_3 x$; з) $f(x)=7\operatorname{tg} x$.

2. Найдите производную функции $f: D\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=2x-3\sqrt{x}+\pi$; б) $f(x)=(2x-3)^2$;

в) $f(x)=-3^{2x-1}$; г) $f(x)=5\sqrt{x^2+1}$;

д) $f(x)=\ln(x^3-3)$; е) $f(x)=\operatorname{tg}(3x+\sqrt{5})$;

ж) $f(x)=3\sin^2 x$; з) $f(x)=\ln^3(2x+1)$.

3. Найдите f' функции $f: D\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=3^{2x}-\lg(2x-1)$; б) $f(x)=\sin 2x+3\cos 5x$;

в) $f(x)=\sqrt{6x}+\operatorname{ctg} 4x$; г) $f(x)=x\sin 5x$;

д) $f(x)=x^2\lg x$; е) $f(x)=\frac{x-1}{x+2}$;

ж) $f(x)=\frac{\ln x}{x^3}$; з) $f(x)=x^2e^x$.

4. Вычислите значение производной функции $f: D\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=\cos 3x$, в точке $x_0=\frac{\pi}{3}$;

б) $f(x)=\ln(2x-3)$, в точке $x_0=2$;

в) $f(x)=\sqrt[3]{x}-\sin 2x$, в точке $x_0=1$.

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

5. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $f'(x)=0$, если $f: D\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=5x^2-3x+8$; б) $f(x)=\lg(x^2-x)$;

в) $f(x)=5^{x^3-3x^2}$.

6. Найдите интервалы возрастания и убывания функции $f: D\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=x^3-3x$; б) $f(x)=\frac{2x}{x-1}$; в) $f(x)=2^{x^2-6x}$.

7. Запишите уравнение касательной к графику функции $f: D\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=2\sqrt{x}$, в точке $x_0=4$;

б) $f(x)=5e^{3x}$, в точке $x_0=0$;

в) $f(x)=\cos 2x$, в точке $x_0=\frac{\pi}{3}$.

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

8. Запишите уравнения касательных к графику функции:

а) $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+4$;

б) $g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=(x-2)^2$,

проходящих через начало системы координат.

9. Материальная точка движется согласно закону $s(t)=t^3-12t^2+4$.

а) В какой момент времени ускорение этой точки равно нулю?

б) Каково минимальное значение скорости этой точки?

10. В какой точке графика функции $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}$, следует провести касательную, чтобы она образовала угол в $60°$ с положительным направлением оси Ox?

Б

1. Найдите производную функции $f\colon D \to \mathbb{R}$:

а) $f(x)=2x^5-16\sqrt{x}+2005$; б) $f(x)=\sqrt[3]{x^2+4}$;

в) $f(x)=\log_5^2(2x+1)$; г) $f(x)=3\sin^2(1-x^3)$;

д) $f(x)=-\sqrt{2}\cdot 8^{\frac{1}{x}}$; е) $f(x)=\operatorname{arctg}(3x^3+1)$.

2. Определите область дифференцируемости и найдите производную функции $f\colon D \to \mathbb{R}$:

а) $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x^3}$; б) $f(x)=\dfrac{\cos 3x}{x^2-1}$;

в) $f(x)=x^3\sin 5x$; г) $f(x)=\sqrt{x}\cdot\lg(x^2+1)$;

д) $f(x)=\ln^3\sin 2x$; е) $f(x)=\cos^4(3x^3+5)$;

ж) $f(x)=\arccos^2\dfrac{1}{x}$; з) $f(x)=\sqrt[3]{x}\cdot 2^x$.

3. Вычислите значение производной функции $f\colon D \to \mathbb{R}$:

а) $f(x)=3\sin\dfrac{x}{4}$, в точке $x_0=\pi$;

б) $f(x)=3\lg x^2$, в точке $x_0=-1$;

в) $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$, в точке $x_0=0$;

г) $f(x)=2^{x^2+3}$, в точке $x_0=1$.

4. Запишите уравнение касательной к графику функции $f\colon D \to \mathbb{R}$:

а) $f(x)=\sqrt[4]{x^2-3}$, в точке $x_0=\sqrt{7}$;

б) $f(x)=e^{5x+1}$, в точке $x_0=-2$;

в) $f(x)=-3\arccos 3x$, в точке $x_0=0$;

г) $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$, в точке $x_0=0$.

5. Найдите f'' функции $f\colon D \to \mathbb{R}$:

а) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$; б) $f(x)=\cos^2 3x$;

в) $f(x)=\ln(3x-2)$; г) $f(x)=3xe^{2x}$.

6. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $f''(x)\ge 0$, если $f\colon D \to \mathbb{R}$:

а) $f(x)=x^4-3x^3+2x+1$; б) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$;

в) $f(x)=x\cdot e^x$; г) $f(x)=\ln x^2$.

7. Запишите хотя бы одну функцию $f\colon D \to \mathbb{R}$, производная которой f' равна:

а) $3+2\sin x$; б) $-3e^{3x}$; в) $x^3-\dfrac{2}{x}$.

8. Найдите $2f''(x)-3f'(x)+f(x)$ для функции $f\colon D \to \mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$.

9. Найдите левую и правую производные функции $f\colon D \to \mathbb{R}$:

а) $f(x)=6-3|x|$, в точке $x_0=0$;

б) $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$, в точке $x_0=0$;

в) $f(x)=\ln(x^2+1)$, в точке $x_0=1$.

10. Даны функции $f, g, h\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{2|x-1|}$, $g(x)=|x^2-16|$, $h(x)=\begin{cases}2^{x+1}, & \text{если } x\le 0,\\ \sqrt{x}, & \text{если } x>0.\end{cases}$

1) Найдите для каждой из этих функций:

а) множество точек, в которых функция непрерывна;

б) множество точек, в которых функция дифференцируема;

в) возвратные и угловые точки графика функции;

г) интервалы возрастания и убывания функции.

2) Начертите графики этих функций.

11. Найдите дифференциал функции $f\colon D \to \mathbb{R}$:

а) $f(x)=x(x+1)$; б) $f(x)=\cos(3x+4)$;

в) $f(x)=\sin^2 x$; г) $f(x)=\sqrt{2x}$;

д) $f(x)=\dfrac{3x^2}{x-4}$; е) $f(x)=2^{x^2+3}$;

ж) $f(x)=x^2\lg x$; з) $f(x)=\ln\cos x$.

$df(x)=f'(x)dx,\ \forall x\in I$

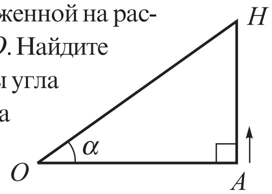
12. Используя дифференциал, вычислите приближенно:
а) $\cos 61°$; б) $\operatorname{tg}46°$; в) $e^{2,1}$; г) $\sqrt{122}$; д) $(0{,}9997)^{2011}$.

13. Количество электричества, протекающее через проводник в любой момент времени t, выражается формулой $Q(t)=0{,}5\cos\pi t$.

а) Найдите напряжение тока.

б) Когда напряжение тока максимально? Минимально?

14. Вертолет взлетает вертикально вверх со скоростью 40 м/мин из точки A, расположенной на расстоянии 30 м от наблюдателя O. Найдите скорость изменения величины угла α в момент времени, когда вертолет достигнет высоты 300 м.

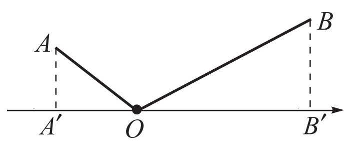


15. Найдите действительные решения уравнения $f'(x)=0$, где $f\colon D \to \mathbb{R}$:

а) $f(x)=x\ln x$; б) $f(x)=xe^x$;

в) $f(x)=\sin x-\cos x$; г) $f(x)=x+\sin x$.

16. Два села (A и B) расположены на расстоянии 12 км и соответственно 25 км от прямолинейной газовой магистрали. Ортогональная проекция отрезка AB на прямую, изображающую этот газопровод, равна 25 км. Для газификации этих сел необходимо построить распорядительный узел в точке O. Где должна быть расположена точка O, чтобы стоимость газопровода до этих сел была минимальной?



Модуль

2

Первообразная и неопределенный интеграл

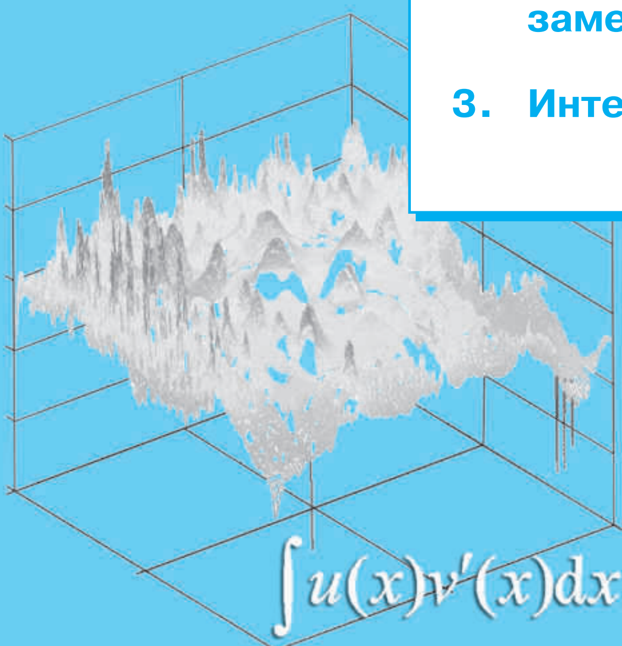
Цели модуля

- вычисление первообразных и неопределенных интегралов, применяя соответствующие свойства и таблицу неопределенных интегралов;
- *вычисление неопределенных интегралов, применяя:
  а) метод замены переменной;
  б) интегрирование по частям;
- применение в различных контекстах понятия первообразной и неопределенного интеграла.

1. Понятие первообразной функции. Понятие неопределенного интеграла

2. Интегрирование методом замены переменной

3. Интегрирование по частям



$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

§ 1 ПОНЯТИЕ ПЕРВООБРАЗНОЙ ФУНКЦИИ. ПОНЯТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1.1. Понятие первообразной

Одна из основных задач дифференциального исчисления состоит в определении производной заданной функции. Различные задачи математического анализа и многочисленное применение производной в геометрии, механике и технике приводят к обратной задаче: для заданной функции f необходимо найти такую функцию F, производная которой равна функции f.

Восстановление функции по ее производной является одной из основных задач интегрального исчисления.

Определение

Пусть I – интервал из множества $\mathbb{R}$ и $f\colon I \to \mathbb{R}$ – некоторая функция. Функция F, определенная на интервале I, называется **первообразной** для функции f на этом интервале, если:
1) функция F дифференцируема на интервале I; 2) $F'(x) = f(x),\ \forall x \in I$.

Если интервал I замкнут слева (справа) и точка a является его ограничением слева (справа), то под производной функции F в точке a понимается правая (левая) производная функции F в точке a.

Примеры

1 Функция $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ F(x) = x^3$, является первообразной для функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2$, так как $F'(x) = (x^3)' = 3x^2 = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$.

2 Функция $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ F(x) = \sin x$, является первообразной для функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$, поскольку $(\sin x)' = \cos x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

3 Если $a > 0,\ a \neq 1$, то функция $F\colon D \to \mathbb{R},\ F(x) = \dfrac{a^x}{\ln a}$, является первообразной для функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = a^x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Замечание

Задача нахождения первообразной заданной функции f решается неоднозначно. Действительно, если F является первообразной для f на интервале I, то есть $F'(x) = f(x),\ \forall x \in I$, то функция $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная, также является первообразной для функции f на интервале I, поскольку $(F(x) + C)' = f(x)$, $\forall x \in I$.

Пример

Первообразной для функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos x$, является не только функция $F_1(x) = \sin x$, но и функция $F(x) = \sin x + C$, так как $(\sin x + C)' = \cos x,\ \forall x \in \mathbb{R}$ и $\forall C \in \mathbb{R}$.

Теорема 1

Если $F\colon I \to \mathbb{R}$ является первообразной для функции $f\colon I \to \mathbb{R}$ на интервале I, то любая другая первообразная функции f на I имеет вид $F + C$, где C – произвольная постоянная.

Доказательство:

Пусть $\Phi\colon I \to \mathbb{R}$ – первообразная функции f на интервале I, то есть $\Phi'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$. Тогда $(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0,\ \forall x \in I$. Получили функцию $\Phi(x) - F(x) = C$ (см. Учебник математики для XI класса, модуль VII, § 1, следствие теоремы 1), где C – произвольная постоянная.

Таким образом, $\Phi(x) = F(x) + C$.

Замечание

Графики любых двух первообразных для функции f получаются друг из друга путем параллельного переноса вдоль оси Oy (рис. 2.1).

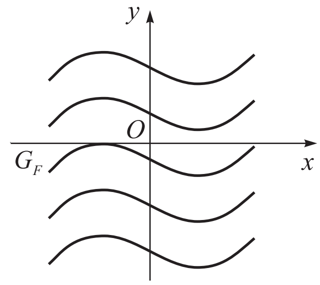


Рис. 2.1

Можно доказать следующую теорему.

Теорема 2

Любая функция $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, имеет первообразные на этом отрезке.

1.2. Понятие неопределенного интеграла

Определение

Пусть $f\colon I \to \mathbb{R}$ (интервал $I \subseteq \mathbb{R}$) – некоторая функция, имеющая первообразные. Множество первообразных функции f называется **неопределенным интегралом от функции** f.

Обозначается $\int f(x)\mathrm{d}x$ и читается: „Интеграл от эф от икс дэ икс“.

Символ $\int$ называется ***знаком интеграла***.

Итак, $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$, где F – одна из первообразных для функции f на интервале I, то есть $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$, а C – произвольная постоянная.

Нахождение первообразных некоторой функции (имеющей первообразные) называется ***интегрированием***. Обозначение $\int f(x)\mathrm{d}x$ является неделимым, то есть символам $\int$ и $f(x)\mathrm{d}x$, отдельно взятым, не придают какого-либо смысла. Функция f называется ***подынтегральной функцией***, переменная x – ***переменной интегрирования***, а C – ***постоянной интегрирования***.

Примеры

1. $\int x^2\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + C$, так как $\left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2$.

2. $\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C$, поскольку $(\sin x + C)' = \cos x$.

3. $\int e^{-2x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C$, так как $\left(-\frac{1}{2}e^{-2x} + C\right)' = e^{-2x}$.

1.3. Основные свойства неопределенного интеграла

1° Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x);$$

дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$\mathrm{d}\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right) = f(x)\mathrm{d}x.$$

Доказательство:

$$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x) \text{ и}$$

$$\mathrm{d}\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right) = \mathrm{d}(F(x) + C) = \mathrm{d}F(x) + \mathrm{d}C = F'(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x.$$

2° Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная, то есть $\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C$.

Доказательство:

Так как $\mathrm{d}F(x) = F'(x)\mathrm{d}x$, то $\int \mathrm{d}F(x) = \int F'(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$.

3° Если функция $f\colon I \to \mathbb{R}$ имеет первообразные и $k \in \mathbb{R}^*$, то и функция kf имеет первообразные на интервале I и верно соотношение: $\int k \cdot f(x)\mathrm{d}x = k \cdot \int f(x)\mathrm{d}x$, то есть постоянный множитель можно вынести за знак интеграла.

Доказательство:

Пусть F – первообразная для функции f, то есть $F'(x) = f(x)$. Тогда kF является первообразной функции kf. Значит, $(k \cdot F(x))' = kF'(x) = kf(x)$. Отсюда следует равенство: $k\int f(x)\mathrm{d}x = k(F(x) + C) = kF(x) + C_1 = \int kf(x)\mathrm{d}x$, где $C_1 = kC$.

4° Если функции $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ имеют первообразные на интервале I, то и функции $f+g$, $f-g$ имеют первообразные на этом интервале и верны соотношения:

а) $\int [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$; б) $\int [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x - \int g(x)\mathrm{d}x$,

то есть неопределенный интеграл от суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) интегралов этих функций.

Доказательство:

а) Пусть F и G – первообразные для функций f и g соответственно.

Тогда функция $F+G$ является первообразной для функции $f+g$.

Значит, $\int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x = [F(x) + C_1] + [G(x) + C_2] = [F(x) + G(x)] + [C_1 + C_2] =$

$= [F(x) + G(x)] + C = \int [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x.$

Соотношение б) доказывается аналогично.

5° Неопределенный интеграл является инвариантным при замене переменной интегрирования x на любую дифференцируемую функцию, то есть, если $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$, то $\int f(u)\mathrm{d}u = F(u) + C$, где $u = \varphi(x)$ – любая дифференцируемая функция по x.

Доказательство:

Так как $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$, то $F'(x) = f(x)$.

Рассмотрим функцию $F(u) = F(\varphi(x))$. Из инвариантности дифференциала следует, что:

$$\mathrm{d}F(u) = F'(u)\mathrm{d}u = f(u)\mathrm{d}u.$$

Отсюда: $\int f(u)\mathrm{d}u = \int \mathrm{d}F(u) = F(u) + C$.

6° Пусть $f\colon I \to \mathbb{R}$ $(I \subseteq \mathbb{R})$ и $F\colon I \to \mathbb{R}$ – одна из первообразных функции f на интервале I, а k и b – постоянные, $k \neq 0$. Тогда $\int f(kx+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{k}F(kx+b) + C$.

Доказательство:

Так как $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$, то, согласно правилу вычисления производной сложной функции, имеем:

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)' = \frac{1}{k}F'(kx+b) \cdot k = f(kx+b), \ \forall x \in I.$$

Значит, $\int f(kx+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{k}\int f(kx+b)\mathrm{d}(kx+b) = \frac{1}{k}\int f(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{k}F(u) + C$,

где $u = kx+b$.

7° Если числитель подынтегральной функции является производной знаменателя этой функции, то неопределенный интеграл равен натуральному логарифму абсолютной величины знаменателя этой функции.

Доказательство:

Пусть заданы функции $f, f': I \to \mathbb{R},\ f \neq 0,\ \forall x \in I$.

Тогда $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(f(x))}{f(x)} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + C = \ln|f(x)| + C$.

Задания с решением

1 Вычислим:

а) $\int (6x^2 - 3x + 5)\mathrm{d}x$; б) $\int \sin 5x\mathrm{d}x$; в) $\int (2x-1)^{100}\mathrm{d}x$; г) $\int \frac{\mathrm{d}x}{3x-1}$.

Решение:

$\int k f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$

а) Используя свойства 3° и 4°, получим:

$$\int (6x^2 - 3x + 5)\mathrm{d}x = 6\int x^2\mathrm{d}x - 3\int x\mathrm{d}x + 5\int \mathrm{d}x = 2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + C.$$

Вычислим интегралы б), в) и г), применив свойства 6° и 7°.

б) Имеем $k = 5,\ b = 0$. Получаем:

$$\int \sin 5x\mathrm{d}x = -\frac{1}{5}\cos 5x + C.$$

в) Имеем $k = 2,\ b = -1$.

$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b)+C$

$$\int (2x-1)^{100}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{101}(2x-1)^{101} + C = \frac{1}{202}(2x-1)^{101} + C.$$

г) $\int \frac{\mathrm{d}x}{3x-1} = \frac{1}{3}\cdot\int \frac{3}{3x-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\cdot\int \frac{(3x-1)'}{3x-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\cdot\ln|3x-1| + C.$

2 Материальная точка движется по числовой оси в положительном направлении. Пусть $v(t)$ – мгновенная скорость этой точки в любой момент времени t. Найдем закон $s = s(t)$ движения этой точки, если известна мгновенная скорость $v(t)$ в момент времени t_0.

Решение:

Известно (см. Учебник математики для XI класса, модуль V, §1, раздел 1.2.2), что мгновенная скорость $v(t)$ материальной точки в любой момент времени t равна производной функции $s(t)$, которой задается закон движения этой точки.

Итак, задача нахождения закона движения материальной точки $s = s(t)$, когда известно значение мгновенной скорости $v(t)$ в момент времени t_0, сводится к задаче нахождения первообразной функции $v(t)$, поскольку $s'(t) = v(t)$.

Любая первообразная функции $v(t)$ имеет форму $s(t) = \int v(t)\mathrm{d}t + C$.

Постоянную C можно определить, учитывая дополнительные условия.

Пусть, например, $v(t) = a(t - t_0) + v_0$, где $v_0 = v(t_0)$, a – ускорение.

Тогда $s(t) = \int [a(t - t_0) + v_0]\mathrm{d}t = \frac{a(t-t_0)^2}{2} + v_0 t + C$.

3 Материальная точка движется по оси Ox в положительном направлении с постоянным ускорением a. В исходный момент времени $t_0 = 0$ материальная точка имеет абсциссу x_0 и начальную скорость v_0. Найдем закон $x = x(t)$ движения этой материальной точки.

Решение:

Так как $x'(t)=v(t)$ и $v'(t)=a(t)$, из условия $a(t)=a$ получаем $v'(t)=a$.
Отсюда следует, что $v(t)=at+C_1$. При $t_0=0$ получаем $C_1=v_0$.
Значит, $x'(t)=v(t)=at+v_0$. Следовательно, $x(t)=\int(at+v_0)\mathrm{d}t=\frac{at^2}{2}+v_0t+C_2$.
Для нахождения постоянной C_2 подставим $t_0=0$. Получаем $C_2=x_0$.

Итак, $x(t)=\frac{at^2}{2}+v_0t+x_0$ – закон движения материальной точки в любой момент времени.

4 Найдем закон распада радиоактивного вещества.

Решение:

Обозначим $x(t)$ – количество радиоактивного вещества в момент времени t, а x_0 – количество радиоактивного вещества в исходный момент времени $t_0=0$. За промежуток времени $[t, t+\Delta t]$ количество радиоактивного вещества изменится следующим образом: $x(t)-x(t+\Delta t)=\beta\cdot x(t)\cdot\Delta t$, или $\Delta x(t)=-\beta\cdot x(t)\cdot\Delta t$ (1), где β – коэффициент пропорциональности (положительное число), зависящий от радиоактивного вещества.

Разделим (1) на Δt и найдем предел при $\Delta t\to 0$. Получаем:

$$x'(t)=-\beta\cdot x(t)\Leftrightarrow\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=-\beta\cdot x(t)\Leftrightarrow\frac{\mathrm{d}x(t)}{x(t)}=-\beta\cdot\mathrm{d}t.$$

Тогда $\int\frac{\mathrm{d}x(t)}{x(t)}=\int(-\beta)\,\mathrm{d}t$. Значит, $\ln|x(t)|=-\beta t+\ln C\Leftrightarrow x(t)=C\cdot e^{-\beta t}$.

Из условия $x(0)=x_0$ находим $C=x_0$.

Итак, получили следующий закон распада радиоактивного вещества:

$$x(t)=x_0\cdot e^{-\beta t}.$$

5 В сосуде налито a литров однородной жидкости, содержащей b кг соли. Через каждую минуту из сосуда отливают c литров жидкости и добавляют c литров разбавителя. Найдем закон изменения количества соли $x(t)$ в однородной жидкости в любой момент времени.

Решение:

За период времени $[t, t+\Delta t]$ из сосуда отливают $c\cdot\Delta t$ литров однородного вещества. Это количество вещества заменяется за этот период времени $c\cdot\Delta t$ литрами разбавителя. Определим количество соли, удаляемое из сосуда за соответствующий период времени.

Концентрация соли в момент времени t равна $\frac{x(t)}{a}$ кг/л. Следовательно, в $c\cdot\Delta t$ литрах жидкости содержится соли в количестве $\Delta x(t)=-\frac{x(t)}{a}\cdot c\cdot\Delta t$ (кг) (2). Знак „минус" показывает, что количество соли в жидкости уменьшается. Разделим (2) на Δt и найдем предел при $\Delta t\to 0$. Получаем: $\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=-\frac{c}{a}\cdot x(t)\Leftrightarrow\frac{\mathrm{d}x(t)}{x(t)}=-\frac{c}{a}\cdot\mathrm{d}t$.

Тогда $\int\frac{\mathrm{d}x(t)}{x(t)}=\int-\frac{c}{a}\mathrm{d}t$. Значит, $\ln|x(t)|=-\frac{c}{a}t+\ln C\Leftrightarrow x(t)=C\cdot e^{-\frac{c}{a}t}$.

Учитывая условие $x(0)=b$, находим $b=C\cdot e^0=C$. Следовательно, $x(t)=b\cdot e^{-\frac{c}{a}t}$ – закон изменения количества соли в жидкости в момент времени t.

1.4. Таблица неопределенных интегралов (первообразных)

Ниже представлена таблица наиболее употребляемых неопределенных интегралов. Бóльшая часть формул этой таблицы получена непосредственно из определения действия интегрирования, ибо интегрирование есть действие, обратное дифференцированию. Достоверность остальных формул можно проверить дифференцированием.

1	$\int 0\,\mathrm{d}x = C,\ \forall x \in \mathbb{R}$
2	$\int 1\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x = x + C,\ \forall x \in \mathbb{R}$
3	$\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \in \mathbb{N}^*,\ x \in \mathbb{R}$
4	$\int x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \forall x \in (0, +\infty),\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
5	$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = 2\sqrt{x} + C, \forall x \in (0, +\infty)$
6	$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ \forall x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$
7	$\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C,\ \forall x \in \mathbb{R}$
8	$\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln\|x\| + C,\ \forall x \in (-\infty, 0) \cup (0,\ +\infty)$
9	$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C,\ \forall x \in \mathbb{R}$
10	$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C,\ \forall x \in \mathbb{R}$
11	$\int \frac{1}{\cos^2 x} \mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + C,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \,\middle\|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$
12	$\int \frac{1}{\sin^2 x} \mathrm{d}x = -\operatorname{ctg} x + C, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
13*	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1,\ \forall x \in (-1, 1)$
14*	$\int \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C_1, \forall x \in \mathbb{R}$
15*	$\int \frac{1}{a^2+x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \forall x \in \mathbb{R}, a \neq 0$
16*	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \mathrm{d}x = \arcsin \frac{x}{a} + C, \forall x \in (-a, a), a > 0$
17*	$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\| + C, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-a, a\},\ a \neq 0$
18*	$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C,\ a > 0,\ x \in (-a, a)$

19*	$\int\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln\lvert x+\sqrt{a^2+x^2}\rvert+C,\ a\neq 0,\ x\in\mathbb{R}^*$
20*	$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\ln\lvert x+\sqrt{a^2+x^2}\rvert+C,\ a\neq 0,\ x\in\mathbb{R}^*$
21*	$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\rvert+C,\ a>0,\ x\in(-\infty,-a)\cup(a,+\infty)$

Задания с решением

1 Вычислим интеграл:

а) $\int\frac{\mathrm{d}x}{3x-1}$; б*) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+8}$; в*) $\int\frac{3x-1}{x^2-2x+5}\mathrm{d}x$; г*) $\int\frac{x}{1+x^4}\mathrm{d}x$; д) $\int\sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

Решение:

а) $\int\frac{\mathrm{d}x}{3x-1}=\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}(3x-1)}{3x-1}=\frac{1}{3}\ln\lvert 3x-1\rvert+C.$

б*) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+8}=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2+4}=\int\frac{\mathrm{d}(x+2)}{2^2+(x+2)^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2}+C.$

в*) Вычислим $\mathrm{d}(x^2-2x+5)=(x^2-2x+5)'\mathrm{d}x=(2x-2)\mathrm{d}x.$

Имеем: $3x-1=3\left(x-\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{2}\left(2x-\frac{2}{3}\right)=\frac{3}{2}\left(2x-2+2-\frac{2}{3}\right)=\frac{3}{2}(2x-2)+2.$

Тогда $\int\frac{3x-1}{x^2-2x+5}\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\int\frac{(2x-2)\mathrm{d}x}{x^2-2x+5}+2\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x+5}=$

$=\frac{3}{2}\ln(x^2-2x+5)+2\int\frac{\mathrm{d}(x-1)}{(x-1)^2+2^2}=\frac{3}{2}\ln(x^2-2x+5)+\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C.$

г*) $\int\frac{x}{1+x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2)}{1+(x^2)^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x^2+C.$

д) $\int\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\int\frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\cos 2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C.$

2 Найдем для функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos x+\sin x$, первообразную F, которая удовлетворяет условию $F(0)=1$.

Решение:

Одна из первообразных функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos x+\sin x$, – это функция $F_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F_1(x)=\sin x-\cos x$. Любая другая первообразная функция f имеет вид $F(x)=\sin x-\cos x+C$, где C – произвольная постоянная. Для нахождения постоянной C учитываем условие $F(0)=1$. Откуда получаем: $C=2$.

Следовательно, функция $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=\sin x-\cos x+2$, – искомая первообразная.

3 Найдем для функции $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\sin(2x+1)$, первообразную, график которой проходит через точку $M(1,1)$.

Решение:

$$F(x)=\int\left[\frac{1}{\sqrt{x}}+\sin(2x+1)\right]\mathrm{d}x=\int x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x+\int\sin(2x+1)\mathrm{d}x=2\sqrt{x}-\frac{1}{2}\cos(2x+1)+C.$$

Так как график первообразной F должен проходить через точку $M(1, 1)$, получаем $1 = 2 - \frac{1}{2}\cos 3 + C$, откуда $C = \frac{1}{2}\cos 3 - 1$.

Следовательно, функция $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = 2\sqrt{x} - \frac{1}{2}\cos(2x+1) + \frac{1}{2}\cos 3 - 1$, – искомая первообразная.

Упражнения и задачи

А

1. Найдите первообразные функции $f\colon D \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = 3x - 5\cos x + e^x$;

б) $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$;

в) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[5]{x^4}$;

г) $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{3\sqrt{x}}$;

д) $f(x) = \cos^2 \frac{x}{2}$;

е) $f(x) = \left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)^2$.

2. Используя таблицу неопределенных интегралов, найдите первообразные функции $f\colon D \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = \sqrt{x}$; б) $f(x) = \frac{1}{x^2}$;

в) $f(x) = \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}$; г) $f(x) = \frac{3\cdot 2^x - 2\cdot 3^x}{2^x}$;

д) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$; е) $f(x) = 2\sin^2\frac{x}{2}$.

3. Найдите функцию f, если $f'(x) = 5e^{3x}$ и $f(0) = 4$.

4. Найдите функцию f, если $f'(x) = \sqrt{x}$ и $f(1) = 2$.

5. Найдите для функции $f\colon \mathbb{R}\setminus\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$.

Б

1. Используя таблицу неопределенных интегралов, найдите первообразные функции $f\colon D \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = a^x \cdot e^x$;

б) $f(x) = \frac{\sqrt{x} - x^3 e^x + x^2}{x^3}$;

в) $f(x) = \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}$;

г) $f(x) = \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}$; д) $f(x) = \frac{1}{\cos 2x + \sin^2 x}$;

е) $f(x) = \sqrt[8]{(8-3x)^6}$; ж) $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^4+1}}$;

з) $f(x) = \frac{6x-5}{2\sqrt{3x^2-5x+6}}$; и) $f(x) = \frac{1}{1+9x^2}$;

к) $f(x) = \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}$; л) $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x}+4}$.

2. Найдите первообразные функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x-1|\cdot(2x-1)$.

3. Найдите для функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x \cdot e^x$, первообразную, график которой проходит через точку $\left(0, \frac{1}{1+\ln 2}\right)$.

4. Найдите функцию f, если $f''(x) = 3x^2$, $f'(0) = 1$, $f(0) = 1$.

5. Пусть даны графики двух первообразных функции $f\colon D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$. Один график проходит через точку $M_1(1, 2)$, а другой – через точку $M_2(8, 4)$. Какой из этих двух графиков расположен выше в декартовой системе координат? Чему равна разность этих двух первообразных?

6. Материальная точка движется прямолинейно со скоростью $v(t) = \sqrt[3]{1+t}$ (время t измеряется в секундах, скорость v – в метрах в секунду). Найдите закон движения $s = s(t)$ этой материальной точки и пройденный путь за первые 7 секунд, если $s(0) = 0$.

7. Твердое тело, разогретое до 100°C, погружается в среду с температурой 20°C. За какой промежуток времени температура тела понизится до 25°C, если оно за 10 мин охлаждается до 60°C?

§ 2 ИНТЕГРИРОВАНИЕ МЕТОДОМ ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ

В некоторых случаях при переходе к новой переменной интегрирования вычисление заданного интеграла сводится к вычислению более простого интеграла.

Этот метод называется ***методом подстановки*** или ***методом замены переменной***. В основе этого метода лежит следующая теорема:

Теорема 3

Пусть I, J – интервалы из $\mathbb{R}$ и $\varphi\colon I \to J$, $f\colon J \to \mathbb{R}$ – функции со свойствами:

1) функция φ дифференцируема на интервале I;

2) функция f имеет первообразные на интервале J (пусть $F\colon J \to \mathbb{R}$ – одна из ее первообразных).

Тогда функция $(f \circ \varphi)\cdot\varphi'$ имеет первообразные на интервале I, а $F \circ \varphi$ – одна из первообразных функции $(f \circ \varphi)\cdot\varphi'$, то есть

$$\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\mathrm{d}t = (F \circ \varphi)(t) + C. \qquad (1)$$

Доказательство:

Поскольку функции F и φ дифференцируемы, то функция $F \circ \varphi$ дифференцируема и $(F \circ \varphi)' = (F' \circ \varphi)\cdot\varphi' = (f \circ \varphi)\cdot\varphi'$.

Значит, функция $F \circ \varphi$, по определению, является первообразной для функции $(f \circ \varphi)\cdot\varphi'$.

Замечание

Формула (1) называется ***формулой замены переменной*** в неопределенном интеграле.

Задание с решением

Вычислим:

а) $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x-1)^2}\mathrm{d}x$; б) $\displaystyle\int (7x-9)^{2017}\mathrm{d}x$;

в) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$; г) $\displaystyle\int e^{\cos x}\sin x\,\mathrm{d}x$.

Решение:

а) Обозначим $x-1=t$, тогда $x=t+1$. Отсюда $\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$. По формуле (1)

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{(t+1)^3}{t^2}\mathrm{d}t = \int\left(\frac{t^3+3t^2+3t+1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \int\left(t+3+\frac{3}{t}+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2}t^2+3t+3\ln|t|-\frac{1}{t}+C.$$

Возвращаясь к переменной x, получим:

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x-1)^2+3(x-1)+3\ln|x-1|+\frac{1}{1-x}+C.$$

б) Сделаем подстановку $7x-9=t$, тогда $x=\frac{1}{7}(t+9)$. Отсюда $\mathrm{d}x=\frac{1}{7}\mathrm{d}t$.

Согласно формуле (1), $\displaystyle\int (7x-9)^{2017}\mathrm{d}x = \int t^{2017}\frac{1}{7}\mathrm{d}t = \frac{1}{7}\cdot\frac{t^{2018}}{2\,018}+C.$

Возвращаясь к переменной x, получим:

$$\int (7x-9)^{2017}\mathrm{d}x = \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2\,018}(7x-9)^{2018}+C = \frac{1}{14126}(7x-9)^{2018}+C.$$

в) Чтобы определить подстановку, запишем данный интеграл следующим образом:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x\, dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\cos x\, dx}{1 - \sin^2 x}.$$

Сделаем подстановку $t = \sin x$. Тогда $dt = \cos x\, dx$.

Значит, $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dt}{1 - t^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$

г) Обозначим $t = \cos x$. Тогда $dt = -\sin x\, dx$.

Значит, $\displaystyle\int e^{\cos x} \sin x\, dx = -\int e^t dt = -e^t + C = -e^{\cos x} + C.$

Упражнения и задачи

Б

1. Найдите первообразные функции $f : D \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = (2x+3)^3$; б) $f(x) = (-4x+5)^{200}$;

в) $f(x) = (3x+1)^{\pi}$; г) $f(x) = \dfrac{x^4 + 3\sqrt{x^5} + 7x - 4}{x^2}$;

д) $f(x) = \dfrac{5 + \sqrt[4]{x} - x}{\sqrt[3]{x}}$; е) $f(x) = \dfrac{1}{12x+5}$;

ж) $f(x) = e^{4-3x}$; з) $f(x) = \sin(12x+7)$;

и) $f(x) = \dfrac{3x}{4x^2+5}$; к) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-9x^2}}$;

л) $f(x) = \dfrac{1}{15x^2-7}$; м) $f(x) = \dfrac{1}{6x^2+14}$.

2. Найдите, применив метод замены переменной, первообразные функции $f : D \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = \dfrac{4x+2}{x^2+x+3}$; б) $f(x) = \dfrac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x}$;

в) $f(x) = \dfrac{\sin^3 x}{\cos x}$; г) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^4}}$;

д) $f(x) = \dfrac{1}{x(1+\ln x)}$; е) $f(x) = \sqrt{x^2-3x+2}$;

ж) $f(x) = \sqrt{9-4x^2}$; з) $f(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{x+1}}$;

и) $f(x) = \dfrac{1}{x\cdot\sqrt{1+x^2}}$; к) $f(x) = \sqrt{\dfrac{e^x-1}{e^x+1}}$.

3. Найдите, применив метод замены переменной, первообразные функции $f : D \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = \dfrac{1}{x\cdot\sqrt{x+1}}$; б) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$;

в) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{e^x+1}}$; г) $f(x) = \cos^2\sqrt{x}$;

д) $f(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$.

4. Вычислите, применив метод замены переменной, интеграл:

а) $\displaystyle\int x\sqrt{1+5x}\, dx$; б) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)}$;

в) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\, dx$; г) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$.

$$\int f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)dx = \left(\int f(t)dt\right)\circ\varphi$$

§ 3 ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

Теорема 4

Если функции $u,\ v\colon I\to\mathbb{R}$ (интервал $I\subseteq\mathbb{R}$) дифференцируемы и имеют непрерывные производные на интервале I, то для функций $uv,\ u'v$ и uv' существуют первообразные и:

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x=u(x)v(x)-\int v(x)u'(x)\mathrm{d}x, \qquad (1)$$

или на „языке дифференциалов“: $\int u\,\mathrm{d}v=uv-\int v\,\mathrm{d}u.$

Доказательство:

Из равенства $[u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x),\ \forall x\in I$, следует:

$$u(x)v'(x)=[u(x)v(x)]'-u'(x)v(x). \qquad (2)$$

Значит, одна из первообразных функции $[u(x)v(x)]'$ на интервале I равна $u(x)v(x)$.

По условию теоремы для функции $u'(x)v(x)$ существует первообразная на интервале I. Следовательно, для функции $u(x)v'(x)$ также существует первообразная на интервале I. Интегрируя равенство (2), получим (1).

Замечание

Формула (1) называется ***формулой интегрирования по частям*** неопределенного интеграла.

Так как $u'(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}u(x),\ \ v'(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}v(x),$ то эта формула может быть записана в виде $\int u(x)\mathrm{d}v(x)=u(x)v(x)-\int v(x)\mathrm{d}u(x)$ или кратко: $\int u\,\mathrm{d}v=uv-\int v\,\mathrm{d}u.$

Задания с решением

1 Вычислим: а) $\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$; б) $\int x e^x\mathrm{d}x$; в) $\int \ln x\cdot x\,\mathrm{d}x$; г) $\int \cos x\cdot e^x\mathrm{d}x$.

Решение:

а) $\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x=\left(u=\operatorname{arctg} x,\ \mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2},\ \ \mathrm{d}v=\mathrm{d}x,\ v=\int \mathrm{d}x,\ \ v=x\right)=$

$=x\cdot\operatorname{arctg} x-\int x\cdot\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=x\cdot\operatorname{arctg} x-\dfrac{1}{2}\int\dfrac{\mathrm{d}(x^2+1)}{1+x^2}=x\cdot\operatorname{arctg} x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$

б) $\int xe^x\mathrm{d}x=(u=x,\ \ \mathrm{d}u=\mathrm{d}x,\ \ \mathrm{d}v=e^x\mathrm{d}x,\ \ v=\int e^x\mathrm{d}x=e^x)=xe^x-\int e^x\mathrm{d}x=xe^x-e^x+C.$

в) $\int \ln x\cdot x\,\mathrm{d}x=\left(u=\ln x,\ \mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}x}{x},\ \mathrm{d}v=x\,\mathrm{d}x,\ v=\dfrac{x^2}{2}\right)=\dfrac{x^2}{2}\ln x-\int\dfrac{x^2}{2}\cdot\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{2}\ln x-\dfrac{1}{4}x^2+C.$

г) $\int \cos x\cdot e^x\mathrm{d}x=(u=\cos x,\ \ \mathrm{d}u=-\sin x\,\mathrm{d}x,\ \ \mathrm{d}v=e^x\mathrm{d}x,\ v=e^x)=$

$=\cos x\cdot e^x+\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x=(u=\sin x,\ \ \mathrm{d}u=\cos x\,\mathrm{d}x,\ \ \mathrm{d}v=e^x\mathrm{d}x,\ \ v=e^x)=$

$=\cos x\cdot e^x+\sin x\cdot e^x-\int e^x\cos x\,\mathrm{d}x.$

Таким образом, $2\int\cos x\cdot e^x\mathrm{d}x=(\cos x+\sin x)e^x\Leftrightarrow\int\cos x\cdot e^x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+C.$

2 Вычислим $I_n=\int\dfrac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^n},\ \ n\in\mathbb{N}^*,\ \ a\neq 0.$

Решение:

Для $n=1$ имеем $I_1=\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}+C.$

Пусть $n>1$. Умножив и разделив подынтегральную функцию на a^2, затем прибавив и отняв x^2 от числителя, получим:

$$I_n=\frac{1}{a^2}\int\frac{a^2}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x=\frac{1}{a^2}\int\frac{a^2+x^2}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x-\frac{1}{a^2}\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x=\frac{1}{a^2}\left[I_{n-1}-\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x\right].$$

Применим формулу интегрирования по частям:

$$u = x,\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x,\ \mathrm{d}v = \frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n},\quad v = \int \frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = -\frac{1}{(2n-2)(x^2+a^2)^{n-1}}$$

и получим: $\displaystyle\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = -\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\cdot x + \int \frac{\mathrm{d}x}{(2n-2)(x^2+a^2)^{n-1}}.$

Значит, $\displaystyle I_n = \frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)}I_{n-1}\right]$ для $n>1$. (3)

Таким образом, выразили интеграл I_n через I_{n-1}.

Формула (3) называется ***рекуррентной формулой***.

Например, для $n = 2$ получим:

$$I_2 = \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2}I_1 = \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

Замечание

Бóльшая часть интегралов, которые вычисляются посредством интегрирования по частям, может быть разбита на следующие три группы:

1) Интегралы, подынтегральная функция которых содержит в качестве множителя одну из следующих функций: $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$.

   Эти интегралы вычисляются, применяя формулу интегрирования по частям, если принять в качестве $u(x)$ одну из указанных выше функций.

2) Интегралы вида $\int P_n(x)\cos cx\,\mathrm{d}x$, $\int P_n(x)\sin cx\,\mathrm{d}x$, $\int P_n(x)e^{cx}\mathrm{d}x$, где $c\in\mathbb{R}^*$, $P_n(x)$ – функция, соответствующая многочлену $P(X)$ степени n.

   Эти интегралы вычисляются путем n-кратного применения формулы интегрирования по частям, причем в качестве $u(x)$ берется $P_n(x)$. После каждого интегрирования степень $P_n(x)$ уменьшится на единицу.

3) Интегралы вида $\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$; $\int e^{cx}\sin bx\,\mathrm{d}x$; $\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x$; $\int \cos(\ln x)\mathrm{d}x$, $a, b, c\in\mathbb{R}^*$.

   Обозначив через I любой из этих интегралов и произведя двукратное интегрирование по частям, получим уравнение I степени относительно I.

Упражнения и задачи

Б

1. Найдите первообразные функции $f: D\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=\ln x$; б) $f(x)=x\ln x$;

в) $f(x)=xe^x$; г) $f(x)=e^x\sin x$;

д) $f(x)=e^{\alpha x}\sin\beta x$; е) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$;

ж) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$; з) $f(x)=x\cdot 3^x$;

и) $f(x)=\sin(\ln x)$; к) $f(x)=x\cos x^2$.

2. Найдите первообразные функции $f: D\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=x^2\ln x$; б) $f(x)=(x^2-2x-1)e^x$;

в) $f(x)=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}$; г) $f(x)=\dfrac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}$;

д) $f(x)=\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$; е) $f(x)=\sqrt{a^2+x^2}$;

ж) $f(x)=x^3e^x$; з) $f(x)=x^2e^x\sin x$;

и) $f(x)=x\operatorname{arctg} x$; к) $f(x)=x^3\sin x$;

л) $f(x)=\dfrac{1}{\sin^3 x}$; м) $f(x)=\dfrac{1}{\cos^3 x}$.

3. Докажите, что функция F является первообразной для функции f на указанном интервале:

а) $F(x)=4-\cos x,\ f(x)=\sin x,\ x\in(-\infty,\infty)$;

б) $F(x)=\operatorname{tg}x-\sqrt{2},\ f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x},\ x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$;

в) $F(x)=9-\dfrac{1}{x},\ f(x)=\dfrac{1}{x^2},\ x\in(0,+\infty)$;

г) $F(x)=|x|,\ f(x)=-1,\ x\in(-\infty,0)$.

4. Найдите закон распада радия, если известно, что скорость распада прямо пропорциональна его исходному количеству.

5. Найдите для функции $f\colon D\to\mathbb{R}$ первообразную, график которой проходит через указанную точку:

а) $f(x)=x^2,\ M(2,1)$;

б) $f(x)=\sqrt{x},\ A(9,1)$;

в) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3-x}},\ B(-1,5)$.

6. Вычислите, применяя интегрирование по частям, интеграл:

а) $\int\ln(2x+5)\mathrm{d}x$; б) $\int(x^2-3x+4)e^x\mathrm{d}x$;

в) $\int(1-2x)\cos\dfrac{x}{3}\mathrm{d}x$; г) $\int(1-3x)\cdot2^x\mathrm{d}x$.

Упражнения и задачи на повторение

А

1. Покажите, что функция $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+5\cos x-3$, имеет первообразные на множестве $\mathbb{R}$ и найдите одну из ее первообразных.

2. Найдите первообразные функции $f\colon D\to\mathbb{R}$, используя таблицу неопределенных интегралов и правила интегрирования:

а) $f(x)=(x+1)^2-1$; б) $f(x)=\dfrac{5}{3x+2}$;

в) $f(x)=\dfrac{1}{3-x}$; г) $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 3x}$;

д) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}+x\sqrt[3]{x}+7$; е) $f(x)=5^x-2\cos x$;

ж) $f(x)=\dfrac{x^2}{5(x^2+1)}$; з) $f(x)=e^{4x}+\dfrac{1}{\sin^2 7x}$.

3. Найдите для функции $f\colon\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x^3}$, первообразную, график которой проходит через точку $A\left(-\dfrac{1}{2},3\right)$.

4. Покажите, что функция $F\colon(0,\pi)\to\mathbb{R}$, $F(x)=3-\operatorname{ctg}x$, является одной из первообразных для функции $f\colon(0,\pi)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

5. Угловой коэффициент касательной к кривой в точке с абсциссой x равен x. Напишите уравнения всех таких кривых и найдите ту кривую, которая проходит через начало системы координат.

6. Согласно закону „естественного роста“, скорость роста вещества прямо пропорциональна его количеству. Найдите формулу для определения количества вещества y в зависимости от времени, если в момент времени $t=0$ количество вещества было равно y_0.

Б

1. Докажите, что функция $F\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=x\cdot\dfrac{|x|}{2}$, является первообразной для функции $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|x|$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

2. Найдите для функции $f\colon(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$, первообразную $F\colon(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, график которой проходит через точку $M\left(1,\dfrac{5}{2}\right)$.

3. Найдите первообразные функции $f\colon D\to\mathbb{R}$, используя метод замены переменной:

а) $f(x)=\dfrac{3}{x\cdot\ln x}$; б) $f(x)=\dfrac{3}{4\sin^2 x+5\cos^2 x}$.

4. Найдите первообразные функции $f\colon D\to\mathbb{R}$, используя метод интегрирования по частям:

а) $f(x)=x\cdot\arccos x$; б) $f(x)=e^{2x}\cos3x$;

в) $f(x)=\dfrac{x\cdot\cos x}{\sin^3 x}$.

5. Найдите функцию, производная которой равна $2x-3$, если известно, что значение функции в точке 2 равно 2.

6. Угловой коэффициент касательной к кривой в точке с абсциссой x равен $3x^2$. Каково уравнение этой кривой, если она проходит через точку $(2, 3)$?

7. Найдите кривую, обладающую свойством: отрезок касательной к этой кривой с концами в точке касания и в точке пересечения касательной с осью абсцисс делится осью ординат на два конгруэнтных отрезка.

Проверочная работа

Время выполнения работы: 90 минут

A

1. Покажите, что функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 4$, имеет первообразные на множестве $\mathbb{R}$, и найдите одну из ее первообразных. 1

2. Найдите первообразные функции $f: D \to \mathbb{R}$, используя таблицу неопределенных интегралов и их свойства: 3

   а) $f(x) = x^3$; б) $f(x) = \frac{5}{6}\sqrt{x}$;

   в) $f(x) = \cos x - 3e^x$; г) $f(x) = \frac{1}{3x^6}$;

   д) $f(x) = 2x^2 + 3 - \frac{5}{x}$; е) $f(x) = (x+1)^2 + 3$.

3. Найдите расстояние (в метрах), пройденное материальной точкой за промежуток времени [0, 5] (в секундах), если ее скорость меняется по закону $v(t) = 9{,}8t - 0{,}003t^2$. Определите ускорение материальной точки в конце движения. 2

4. Найдите для функции $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, первообразную F, график которой проходит через точку $M(9, -2)$. 1

5. Покажите, что функция $F: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, является первообразной для функции $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$. 2

6. Вычислите интеграл: 1

   а) $\int x(1-3x)^2 \mathrm{d}x$; б) $\int \sin(3x-1)\mathrm{d}x$.

Б

1. Найдите действительные значения постоянных a и b, при которых функция $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = e^{-x} \cdot (a\cos 4x + b\sin 4x)$, является первообразной для функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}\cos 4x$. 2

2. Найдите первообразные функции $f: D \to \mathbb{R}$, применив метод замены переменной: 2

   а) $f(x) = x \cdot \sqrt{4 - x^2}$; б) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x} \cdot (\sqrt[3]{x} - 1)}$.

3. Вычислите интеграл, применив интегрирование по частям: 2

   а) $\int \arcsin^2 x \,\mathrm{d}x$; б) $\int x^2 \cdot \ln(1+x)\mathrm{d}x$.

4. Скорость материальной точки меняется по закону $v(t) = Rt + a\sqrt{t}$. Найдите расстояние (в метрах), пройденное материальной точкой за промежуток времени [0, 4] (в секундах), а также ее ускорение в конце движения. 2

5. Найдите функцию A, при которой $A''(v) = 3v^2$, $A'(0) = 1$, $A(0) = -1$. 1

6. Докажите, что функция $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \sin^2 x$, является первообразной для функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin 2x$. 1

$$\int f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x)dx = \left(\int f(t)dt\right) \circ \varphi$$

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

Первообразные и неопределенные интегралы

Первообразная функция

Пусть $I\subseteq\mathbb{R}$ – интервал и функция $f\colon I\to\mathbb{R}$.
Функция $F\colon I\to\mathbb{R}$ называется первообразной для функции f на интервале I, если: 1) F дифференцируема на интервале I;
2) $F'(x)=f(x),\ \forall x\in I$.

Неопределенный интеграл

$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$, где F – одна из первообразных функции f на интервале I, $I\subseteq\mathbb{R}$, а $C\in\mathbb{R}$.

Свойства неопределенного интеграла

1° $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)'=f(x)$ 2° $\int \mathrm{d}F(x)=F(x)+C$

3° $\int kf(x)\mathrm{d}x=k\cdot\int f(x)\mathrm{d}x,\ k\neq 0,\ k\in\mathbb{R}$

4° $\int[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x$

5° Если $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$, то $\int f(u)\mathrm{d}u=F(u)+C$,
где $u=\varphi(x)$ – дифференцируемая функция.

6° Пусть $f\colon I\to\mathbb{R}\ (I\subseteq\mathbb{R})$, $F\colon I\to\mathbb{R}$ и $F'(x)=f(x),\ \forall x\in I$, а k и b – постоянные, $k\neq 0$. Тогда $\int f(kx+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{k}F(kx+b)+C$.

7° Пусть даны функции $f,\ f'\colon I\to\mathbb{R}\ (I\subseteq\mathbb{R})$, $f\neq 0,\ \forall x\in I$.
Тогда $\int\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\ln|f(x)|+C$.

Методы вычисления неопределенных интегралов

1. *Метод замены переменной*

Пусть I, J – интервалы из $\mathbb{R}$ и $\varphi\colon I\to J$, $f\colon I\to\mathbb{R}$ – функции со свойствами:
1) φ дифференцируема на интервале I;
2) f имеет первообразные на интервале J (пусть $F\colon J\to\mathbb{R}$ – одна из ее первообразных).

Тогда функция $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$ имеет первообразные на интервале I, а $F\circ\varphi$ является одной из первообразных для функции $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$, то есть

$$\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\mathrm{d}t=(F\circ\varphi)(t)+C=F(\varphi(t))+C.$$

2. *Метод интегрирования по частям*

Если функции $u, v\colon I\to\mathbb{R}$ дифференцируемы и имеют непрерывные производные на интервале, то функции uv, $u'v$ и uv' имеют первообразные, и множество этих первообразных удовлетворяет соотношению:

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)\mathrm{d}x\ \ \left(\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u\right).$$

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int 0\mathrm{d}x=C,\ \forall x\in\mathbb{R}$ **2.** $\int 1\mathrm{d}x=\int\mathrm{d}x=x+C,\ \forall x\in\mathbb{R}$

3. $\int x^n\mathrm{d}x=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C,\ n\in\mathbb{N}^*,\ x\in\mathbb{R}$

4. $\int x^\alpha\mathrm{d}x=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ \forall x\in(0,\infty),\ \alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

5. $\int\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\sqrt{x}+C,\ \forall x\in(0,+\infty)$

6. $\int a^x\mathrm{d}x=\frac{a^x}{\ln a}+C,\ \forall x\in\mathbb{R},\ a\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$

7. $\int e^x\mathrm{d}x=e^x+C,\ \forall x\in\mathbb{R}$

8. $\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C,\ \forall x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

9. $\int\cos x\,\mathrm{d}x=\sin x+C,\ \forall x\in\mathbb{R}$ **10.** $\int\sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C,\ \forall x\in\mathbb{R}$

11. $\int\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\mathrm{tg}\,x+C,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$

12. $\int\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=-\mathrm{ctg}\,x+C,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$

13*. $\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin x+C=-\arccos x+C_1,\ \forall x\in(-1,1)$

14*. $\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{arctg}x+C=-\mathrm{arcctg}x+C_1,\ \forall x\in\mathbb{R}$

15*. $\int\frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{\mathrm{a}}+C,\ \forall x\in\mathbb{R},\ a\neq 0$

16*. $\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin\frac{x}{\mathrm{a}}+C,\ \forall x\in(-a,a),\ a>0$

17*. $\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-a,a\},\ a>0$

18*. $\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C,\ a>0,\ x\in(-a,a)$

19*. $\int\sqrt{a^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|+C,\ a\neq 0,\ x\in\mathbb{R}^*$

20*. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|+C,\ a\neq 0,\ x\in\mathbb{R}^*$

21*. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C,\ a>0,\ x\in(-\infty,-a)\cup(a,+\infty)$

Модуль

3

Определенный интеграл

Цели молдуля

- распознавание определенного интеграла в различных контекстах;
- применение формулы Ньютона–Лейбница при вычислении определенного интеграла;
- применение геометрического смысла определенного интеграла при решении задач;
- использование свойств определенного интеграла в различных контекстах;
- вычисление определенного интеграла при помощи таблицы интегралов;
- *вычисление определенных интегралов, применяя:
  а) интегрирование по частям;
  б) метод замены переменной;
- распознавание определенного интеграла в различных областях.

$$\int_a^b f(x)dx = I = \lim_{\|T\| \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta_k$$

§ 1 ПОНЯТИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ

1.1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла

В элементарной геометрии известен метод нахождения площади плоской геометрической фигуры, ограниченной отрезками и дугами окружности. В общем случае, когда плоская фигура ограничена произвольными кривыми, задачу нахождения ее площади можно решить только методами математического анализа, а именно методом интегрального исчисления.

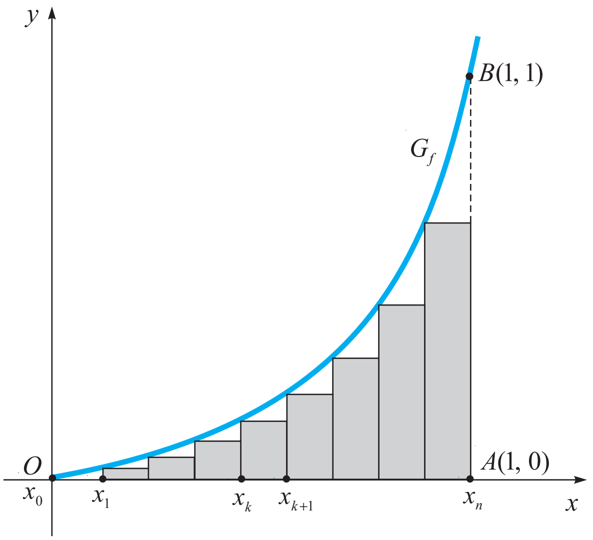


Рис. 3.1

Рассмотрим плоскую фигуру OAB, ограниченную параболой $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, осью Ox и вертикальной прямой, проходящей через точку $A(1, 0)$ (рис. 3.1). Найдем площадь этой фигуры методом предельного перехода, который является одним из основных методов математического анализа. Для этого разобьем отрезок $[0, 1]$ на n $(n \geq 2)$ конгруэнтных отрезков длины $\frac{1}{n}$ при помощи $n+1$ точек деления $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, где $x_k = \frac{k}{n}$, $k = \overline{0, n}$. На каждом из полученных отрезков $[x_k, x_{k+1}]$ построим прямоугольник P_k высотой h_k, где $h_k = f(x_k) = \left(\frac{k}{n}\right)^2$, и основанием $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \frac{1}{n}$, $k = \overline{0, n-1}$. В этом случае площадь прямоугольника P_k равна $f(x_k)\Delta x_k = \frac{k^2}{n^3}$.

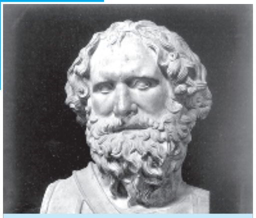
Просуммировав площади всех n прямоугольников, получим действительное число

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^3} = \frac{0^2 + 1^2 + \ldots + (n-1)^2}{n^3},$$

которое является приближенным значением (с недостатком) площади $\mathscr{A}(OAB)$ плоской фигуры OAB. Интуитивно, чем больше число точек деления x_k, тем точнее число σ_n выражает площадь этой фигуры. Естественно полагать, что предел последовательности $(\sigma_n)_{n\geq 1}$ при $n \to \infty$ равен $\mathscr{A}(OAB)$. Используя известную формулу $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, получим $\sigma_n = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}$. Значит,

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \frac{1}{3}. \qquad (1)$$

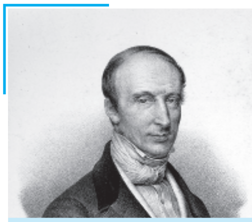
Итак, по определению, площадь фигуры OAB равна пределу последовательности $(\sigma_n)_{n\geq 1}$, где $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x_k$, то есть $\mathscr{A}(OAB) = \frac{1}{3}$.



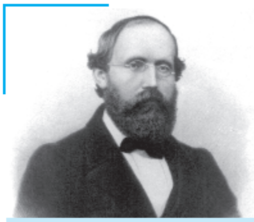
Архимед из Сиракуз (ок. 287–212 до Р. Х.) – древнегреческий ученый

Этот же метод вычисления предела сумм вида $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x_k$ при условии, что длины Δx_k соответствующих отрезков одновременно стремятся к нулю, встречается при решении многих задач из математики и физики (например, таких задач, как нахождение площади поверхности, объема тела, длины графика функции и др.).

Предполагают, что формула (1) была известна еще Архимеду. В 1823 году, используя суммы вида (1), французский математик О. Л. Коши применил этот прием для вычисления площадей фигур, ограниченных графиками непрерывных функций. Однако общая задача вычисления площадей с помощью таких сумм была решена лишь немецким математиком Б. Риманом. Он рассматривал более общие суммы, чем те, которые рассмотрены выше, и задал новый класс функций, для которых пределы таких сумм в определенном смысле являются конечными.



Огюстен Луи Коши (1789–1857) – французский математик



Бернхард Риман (1826–1866) – немецкий математик

Итак, применив интуитивное понятие площади, в итоге мы пришли естественно к выводу о необходимости изучения предела сумм специального вида:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x_k}.$$

Предел сумм вида $\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$ играет важную роль в математическом анализе и его приложениях и будет изучен далее.

1.2. Определенный интеграл от непрерывной функции

Рассмотрим отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$ и функцию $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, непрерывную на $[a, b]$.

Согласно теореме 2 (модуль 2), функция f имеет первообразные на $[a, b]$. Пусть $F, \Phi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ – первообразные функции f на промежутке $[a, b]$. По теореме 1 (модуль 2) функции F и Φ отличаются между собой на произвольную постоянную. Значит, для любого $x \in [a, b]$ и любой постоянной $C \in \mathbb{R}$ имеем $F(x) = \Phi(x) + C$.

Следовательно, $F(b) - F(a) = [\Phi(b) + C] - [\Phi(a) + C] = \Phi(b) - \Phi(a)$.

Полученное равенство $F(b) - F(a) = \Phi(b) - \Phi(a)$ устанавливает, что данная разность не зависит ни от первообразной F, ни от первообразной Φ, а зависит только от функции f и от чисел a и b. Этот факт позволяет сформулировать следующее понятие.

Определение

Пусть $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ – одна из первообразных непрерывной функции $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Действительное число $F(b) - F(a)$ называется **определенным интегралом** от функции f от a до b и обозначается $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Итак,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \quad (\textit{\textbf{формула Ньютона–Лейбница}}).$$

Исаак Ньютон (1642–1727) – английский физик, математик и астроном

Готфрид Вильгельм Фрейхер фон Лейбниц (1646–1716) – немецкий математик, один из выдающихся философов конца XVII и начала XVIII веков, один из основателей немецкого просветительства. В области математики Лейбниц в 1675 году разработал основы дифференциального и интегрального исчислений независимо от Ньютона, который объявил о принципах исчисления бесконечно малых в работе, изданной еще в 1666 году. Математические символы, введенные Лейбницем в дифференциальном и интегральном исчислений, используются в математике и сегодня.

Замечания

1. Запись $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ читается как: „Интеграл от а до бэ от эф от икс дэ икс“.

2. Символ $\int$ называется ***знаком интеграла***. Числа a и b называются ***пределами интегрирования***: a – ***нижний предел***, b – ***верхний предел***; промежуток $[a, b]$ называется ***промежутком интегрирования***; x называется ***переменной интегрирования***, а функция f – ***подынтегральной функцией***; символ $f(x)dx$ называется ***подынтегральным выражением***. Переменную x можно заменить любой другой переменной: u, v, s, t и т. д. Таким образом:

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(u)\mathrm{d}u = \int\limits_a^b f(s)\mathrm{d}s = \ldots$$

3. Если $a = b$, то по определению имеем $\int\limits_a^a f(x)\mathrm{d}x = F(a) - F(a) = 0.$

4. Для разности $F(b) - F(a)$ используется обозначение $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$, которое читается как: „Эф от икс от а до бэ“. Следовательно, формула Ньютона–Лейбница записывается и следующим образом:

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b},$$

где $F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x.$

5. Чтобы вычислить интеграл $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$, сначала находим первообразную F для функции f, а затем вычисляем разность $F(b) - F(a)$.

6. Определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ – это действительное число, тогда как неопределенный интеграл $\int f(x)\mathrm{d}x$ – это множество всех первообразных для функции f на промежутке $[a, b]$.

7. В разделе 1.3 будет сформулировано другое определение определенного интеграла, основанное на понятии „интегральные суммы“, то есть суммы специального вида, рассмотренные в разделе 1.1. В итоге интеграл $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ получит геометрическое или механическое обоснование, что дает возможность применить интеграл в разделе 1.4. и в модуле 4 при решении задач по геометрии, физике, экономике и т. п.

Задания с решением

1 Вычислим интеграл $\int\limits_{-1}^2 x^2\mathrm{d}x.$

Решение:

Функция $f: [-1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, непрерывна на промежутке $[-1, 2]$, а значит, имеет первообразную $F(x) = \frac{1}{3}x^3$, $x \in [-1, 2]$.

Применим формулу Ньютона–Лейбница и получим:

$$\int\limits_{-1}^2 x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^2 = F(2) - F(-1) = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 3.$$

2 Вычислим интеграл $\int\limits_2^3 \frac{\mathrm{d}y}{y^2}$.

Решение:

Функция $f\colon [2, 3] \to \mathbb{R}$, $f(y) = \frac{1}{y^2}$, непрерывна на $[2, 3]$, а значит, имеет первообразную $F(y) = -\frac{1}{y}$, $y \in [2, 3]$.

На основании формулы Ньютона–Лейбница имеем:

$$\int\limits_2^3 \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = -\frac{1}{y}\Big|_2^3 = F(3) - F(2) = \left(-\frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

3 Вычислим интеграл $\int\limits_1^4 \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$.

Решение:

Первообразная непрерывной функции $f\colon [1, 4] \to \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{t}$, – это функция $F(t) = \sqrt{t} - \ln t$, $t \in [1, 4]$.

Следовательно,

$$\int\limits_1^4 \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t = (\sqrt{t} - \ln t)\Big|_1^4 = F(4) - F(1) = (2 - \ln 4) - (1 - \ln 1) = 1 - 2\ln 2.$$

4 Вычислим интеграл $\int\limits_{-2}^0 (6x^2 - 2x + 1)\,\mathrm{d}x$.

Решение:

Вычислим неопределенный интеграл от непрерывной функции $f\colon [-2, 0] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 6x^2 - 2x + 1$, и получим множество первообразных этой функции:

$$\int (6x^2 - 2x + 1)\,\mathrm{d}x = 6\int x^2\mathrm{d}x - 2\int x\,\mathrm{d}x + \int \mathrm{d}x = \frac{6x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + x + C = 2x^3 - x^2 + x + C.$$

Рассмотрим первообразную $F\colon [-2, 0] \to \mathbb{R}$, $F(x) = 2x^3 - x^2 + x$.

Так как $F(-2) = -16 - 4 - 2 = -22$ и $F(0) = 0$, согласно формуле Ньютона–Лейбница получим:

$$\int\limits_{-2}^0 (6x^2 - 2x + 1)\,\mathrm{d}x = (2x^3 - x^2 + x)\Big|_{-2}^0 = F(0) - F(-2) = 22.$$

5 Вычислим интеграл $\int\limits_0^3 \left(\sqrt{3x} - \frac{2}{2x+3}\right)\mathrm{d}x$.

Решение:

Одну из первообразных найдем следующим образом: $F(x) = \int \left(\sqrt{3x} - \frac{2}{2x+3}\right)\mathrm{d}x =$

$$= \sqrt{3}\int \sqrt{x}dx - 2\int \frac{dx}{2x+3} = \sqrt{3}\cdot \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - 2\cdot\frac{1}{2}\ln|2x+3| = \frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}} - \ln|2x+3|.$$

Поскольку $F(3) = \frac{2}{3}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{3}{2}} - \ln 9 = \frac{2}{3}\cdot 3^2 - \ln 3^2 = 6 - 2\ln 3$, $F(0) = -\ln 3$, получим

$$\int\limits_0^3 \left(\sqrt{3x} - \frac{2}{2x+3}\right)\mathrm{d}x = F(3) - F(0) = 6 - 2\ln 3 + \ln 3 = 6 - \ln 3.$$

6 Вычислим интеграл $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}(2\cos x-\sin 3x)\mathrm{d}x.$

Решение:

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}(2\cos x-\sin 3x)\mathrm{d}x=\left(2\sin x+\frac{1}{3}\cos 3x\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}=$$

$$=\left(2\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{2}\right)-\left(2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{3}\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right)=$$

$$=\left(2\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{2}\right)-\left(-2\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2}\right)=2\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot 0+2\cdot 1-\frac{1}{3}\cdot 0=3.$$

7 Вычислим интеграл $\int\limits_{0}^{1}(2^{3x}-4^{x+1})\mathrm{d}x.$

Решение:

$F(x)=\int 2^{3x}\mathrm{d}x-4\cdot\int 4^{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\cdot\frac{2^{3x}}{\ln 2}-4\cdot\frac{4^{x}}{\ln 4}=\frac{2^{3x}}{3\ln 2}-\frac{2\cdot 4^{x}}{\ln 2}$. Тогда

$$\int\limits_{0}^{1}(2^{3x}-4^{x+1})\mathrm{d}x=F(1)-F(0)=\left(\frac{8}{3\ln 2}-\frac{8}{\ln 2}\right)-\left(\frac{1}{3\ln 2}-\frac{2}{\ln 2}\right)=-\frac{16}{3\ln 2}+\frac{5}{3\ln 2}=-\frac{11}{3\ln 2}.$$

Приведенные ниже теоремы выражают основные свойства определенного интеграла от непрерывной функции.

Сначала сделаем следующее примечание: если $b>a$, то по определению полагаем $\int\limits_{b}^{a}f(x)\mathrm{d}x=F(a)-F(b)$, где $F\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ – первообразная непрерывной функции $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$.

Теорема 1

Пусть $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$, $a<b$, – непрерывная функция на отрезке $[a,b]$. Если в определенном интеграле поменять местами пределы интегрирования, то определенный интеграл меняет знак на противоположный, то есть $\int\limits_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x=-\int\limits_{b}^{a}f(x)\mathrm{d}x.$

Доказательство:

Если $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$, $a<b$, – непрерывная функция на $[a,b]$, то (теорема 2, модуль 2) она имеет первообразные. Пусть $F\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ – одна из первообразных функции f на $[a,b]$.

Значит, $\int\limits_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)=-[F(a)-F(b)]=-\int\limits_{b}^{a}f(x)\mathrm{d}x.$

Теорема 2

(свойство линейности определенного интеграла)

Пусть функции $f,g\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ – непрерывные на отрезке $[a,b]$ и λ, μ – произвольные действительные числа. Тогда $\int\limits_{a}^{b}(\lambda f(x)+\mu g(x))\mathrm{d}x=\lambda\int\limits_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x+\mu\int\limits_{a}^{b}g(x)\mathrm{d}x.$

Доказательство:

Если функции f и g непрерывны на $[a,b]$, то и функция $h=\lambda f+\mu g$ непрерывна и имеет первообразные на $[a,b]$. Пусть $H=\lambda F+\mu G$ – одна из первообразных на $[a,b]$

функции h, где F и G – первообразные функций f и g соответственно на отрезке $[a, b]$. Применив формулу Ньютона–Лейбница, получим:

$$\int_a^b(\lambda f(x)+\mu g(x))\mathrm{d}x=\int_a^b h(x)\mathrm{d}x=H(b)-H(a)=(\lambda F(b)+\mu G(b))-(\lambda F(a)+\mu G(a))=$$
$$=\lambda(F(b)-F(a))+\mu(G(b)-G(a))=\lambda\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\mu\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Из теоремы 2, подставив, в частности, $\lambda\in\mathbb{R}$ и $\mu=0$ или $\lambda=1$ и $\mu=\pm1$, получим:

Следствие 1

Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то и функция λf, $\lambda\in\mathbb{R}$, непрерывна на $[a, b]$ и $\int_a^b\lambda f(x)\mathrm{d}x=\lambda\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (*определенный интеграл является однородным*).

Следствие 2

Если f и g – непрерывные функции на отрезке $[a, b]$, то и функции $f+g$ и $f-g$ непрерывны на $[a, b]$ и

$$\int_a^b(f(x)+g(x))\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\mathrm{d}x,\quad \int_a^b(f(x)-g(x))\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

(*свойство аддитивности определенного интеграла*).

Замечание

Согласно методу математической индукции, для любого $n\in\mathbb{N}^*$ получаем, что для любых функций $f_1, f_2, ..., f_n\colon [a, b]\to\mathbb{R}$, непрерывных на $[a, b]$, и любых действительных чисел $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ $(n\geq 1)$ справедливо равенство:

$$\int_a^b\Big(\sum_{k=1}^n\lambda_k f_k(x)\Big)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^n\lambda_k\int_a^b f_k(x)\mathrm{d}x.$$

Задание с решением

Вычислим интеграл:

а) $I=\displaystyle\int_1^2\frac{3-2x-4x^2}{x}\mathrm{d}x$; б) $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\sin\frac{x}{2}+\frac{2}{\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)}\right)\mathrm{d}x$; в*) $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}8\sin^4 x\,\mathrm{d}x$.

Решение:

а) Преобразуя подынтегральную функцию и применяя свойство линейности определенного интеграла, получаем:

$$I=\int_1^2\left(\frac{3}{x}-2-4x\right)\mathrm{d}x=3\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x}-2\int_1^2\mathrm{d}x-4\int_1^2x\mathrm{d}x=3(\ln x)\Big|_1^2-2(x)\Big|_1^2-\left(4\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2=$$
$$=3(\ln 2-\ln 1)-2(2-1)-2(2^2-1)=3\ln 2-2-6=-8+3\ln 2.$$

б) Из свойства линейности интеграла следует:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x+2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)}=-2\left(\cos\frac{x}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}+2\cdot\frac{1}{2}\left(\mathrm{tg}\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}=$$
$$=-2\left(\cos\frac{\pi}{6}-\cos 0\right)+\left(\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}+\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}\right)=-2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)+(\sqrt{3}+\sqrt{3})=2+\sqrt{3}.$$

в*) Поскольку

$$8\sin^4 x = 2(2\sin^2 x)^2 = 2(1-\cos 2x)^2 = 2 - 4\cos 2x + 2\cos^2 2x = 3 - 4\cos 2x + \cos 4x,$$

из свойства линейности интеграла получим:

$$I = 3\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx - 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 4x\,dx = 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - 2\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{4}\sin 4x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3\pi}{4} - 2 + 0 = \frac{3\pi - 8}{4}.$$

1.3. Определенный интеграл как предел интегральной суммы

В разделе 1.1 мы отметили, что площадь плоской геометрической фигуры может быть найдена приближенно, используя конечное объединение прямоугольных полосок. Для этого отрезок $[a, b]$, который является областью определения функции $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, делим на частичные отрезки и строим прямоугольники, основания которых – эти частичные отрезки, а высота – значение функции в произвольной точке основания (рис. 3.1).

Рассмотрим отрезок $[a, b]$, где $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Определения 2

- **Разбиением** отрезка $[a, b]$ называется любое конечное упорядоченное множество точек $T = (x_0, x_1, ..., x_n)$, где $n \geq 1$ и $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$.
- Точки x_k, $k = \overline{0, n}$, называются **точками деления**.
- Отрезки $[x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$, называются **частичными отрезками** или **элементарными отрезками** разбиения T.
- Положительное число $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $k = \overline{0, n-1}$, называется **длиной** частичного отрезка $[x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$, а положительное число $\|T\| = \max\limits_{0 \leq k \leq n-1} \Delta x_k$ – наибольшее из длин всех частичных отрезков – называется **нормой** разбиения T.

Примеры

1 Множество $T = (1, 2, 3, ..., 10)$ является разбиением отрезка $[1, 10]$ нормы $\|T\| = 1$.

2 Множество $T = \left(0, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, 1\right)$ является разбиением отрезка $[0, 1]$, норма которого $\|T\| = \frac{3}{4}$.

Определение 3

Пусть $T = (x_0, x_1, ..., x_n)$ – произвольное разбиение отрезка $[a, b]$. **Системой промежуточных точек**, соответствующей разбиению T, называется любая конечная система $\xi = (\xi_0, \xi_1, ..., \xi_{n-1})$ точек $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$.

Определение 4

Пусть $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ – некоторая ограниченная функция, $T = (x_0, x_1, ..., x_n)$ – произвольное разбиение отрезка $[a, b]$ и $\xi = (\xi_0, \xi_1, ..., \xi_{n-1})$ – система промежуточных точек разбиения T. **Суммой Римана**, или **интегральной суммой**, соответствующей функции f, разбиению T и системе промежуточных точек ξ, называется действительное число

$$\sigma(T, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = f(\xi_0)(x_1 - x_0) + f(\xi_1)(x_2 - x_1) + ... + f(\xi_{n-1})(x_n - x_{n-1}).$$

Замечания

Геометрическая интерпретация суммы Римана. Если $f\colon [a, b] \to [0, +\infty)$ – непрерывная функция на отрезке $[a, b]$, то произведение $f(\xi_k)\Delta x_k$ геометрически представляет собой площадь прямоугольника D_k с основанием Δx_k и высотой $f(\xi_k)$. Значит, сумма Римана $\sigma(T,\xi) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$ представляет собой площадь ступенчатой фигуры $D = \bigcup\limits_{k=0}^{n-1} D_k$, образованной прямоугольниками $D_0, D_1, ..., D_{n-1}$ (рис. 3.2).

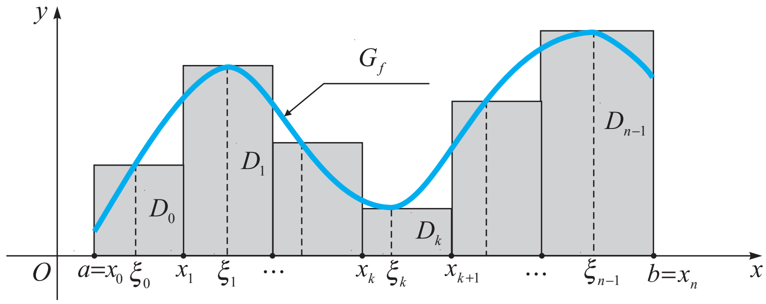


Рис. 3.2

Очевидно, что эта площадь $\sigma(T, \xi)$ приближенно выражает площадь фигуры, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$, осью Ox и графиком функции $f\colon [a, b] \to [0, +\infty)$. Приближенное значение искомой суммы будет точнее, если основания прямоугольников D_k, $k = \overline{0, n-1}$, будут сколь угодно малы, то есть, если норма $\|T\| \to 0$.

Рассмотрим интегральную сумму $\sigma(T, \xi) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$. Добавим на отрезке $[a, b]$ и другие точки деления, чтобы $\|T\| \to 0$. Тогда интегральная сумма $\sigma(T,\xi)$ изменится и в общем случае может приблизиться к некоторому числу $I \in \mathbb{R}$.

Определение 5

(предел интегральной суммы по Коши, или **„на языке $\varepsilon - \delta$“)**

Число $I \in \mathbb{R}$ называется **пределом интегральной суммы** $\sigma(T, \xi)$ при $\|T\| \to 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого разбиения T нормы $\|T\| < \delta$ и для любой системы промежуточных точек ξ следует, что $|\sigma(T, \xi) - I| < \varepsilon$.

Предел интегральной суммы обозначают: $\lim\limits_{\|T\| \to 0} \sigma(T, \xi) = I$.

Определение 6

Будем говорить, что функция $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ **интегрируема** (**интегрируема по Риману**) на отрезке $[a, b]$, если интегральная сумма, соответствующая функции f, имеет конечный предел: $I = \lim\limits_{\|T\| \to 0} \sigma(T, \xi)$, $I \in \mathbb{R}$. Число I называется **определенным интегралом (интегралом Римана)** от функции f на отрезке $[a, b]$.

Итак:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = I = \lim_{\|T\| \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta_k}\,.$$

Теорема 3

(формула Ньютона–Лейбница)

Пусть $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ – интегрируемая функция на отрезке $[a, b]$ и $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ – первообразная для функции f. Тогда:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (\textit{\textbf{формула Ньютона–Лейбница}}).$$

Доказательство:

Пусть $T=(x_0, x_1, ..., x_n)$ – произвольное разбиение отрезка $[a, b]$. По теореме Лагранжа о конечных приращениях (см. Учебник математики для XI класса, модуль 5, раздел 6.3), примененной к функции F на частичном отрезке $[x_k, x_{k+1}]$, существует точка $c_k \in (x_k, x_{k+1})$ такая, что $F(x_{k+1})-F(x_k)=F'(c_k)(x_{k+1}-x_k)$. Поскольку F – первообразная функции f на отрезке $[a, b]$, то $F'(x)=f(x)$ для любого $x\in[a, b]$.

Следовательно, $F(x_{k+1})-F(x_k)=f(c_k)\Delta x_k$, $k=\overline{0, n-1}$.

Однако функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. На основании определения 6, существует конечный предел $I=\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sigma(T, \xi)$, где $I=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$, и этот предел, по определению 5, не зависит ни от вида разбиения T, ни от способа выбора системы промежуточных точек ξ, то есть можно полагать, что $\xi_k=c_k$, $k=\overline{0, n-1}$. При таком выборе системы промежуточных точек ξ, предел I не изменяется. Вычислив интегральную сумму, соответствующую разбиению T и системе промежуточных точек $\xi=(c_0, c_1, ..., c_{n-1})$, получим постоянную величину:

$$\sigma(T, \xi)=\sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k=\sum_{k=0}^{n-1}(F(x_{k+1})-F(x_k))=F(b)-F(a).$$

Следовательно, $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x=I=\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sigma(T, \xi)=F(b)-F(a)$. ◀

Замечания

1. Поскольку любая непрерывная функция имеет первообразные, теорема 3 устанавливает, что в случае непрерывной функции „интеграл Римана“ совпадает с „определенным интегралом“ из раздела 1.2.

2. Интеграл Римана определяется для класса функций, необязательно непрерывных на промежутке.

Примеры

1 Постоянная функция $f: [a, b]\to\mathbb{R}$, $f(x)=c$ $(c\in\mathbb{R})$, интегрируема на любом отрезке $[a, b]\subset\mathbb{R}$ и $\int\limits_a^b c\,\mathrm{d}x=c(b-a)$.

В самом деле, каким бы ни были разбиение T и промежуточные точки ξ_k, получим, что $f(\xi_k)=c$.

Значит, $\sigma(T, \xi)=\sum\limits_{k=0}^{n-1} c\Delta x_k=c\cdot\sum\limits_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)=c(x_n-x_0)=c(b-a)$ и

$\int\limits_a^b c\,\mathrm{d}x=\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sigma(T, \xi)=c(b-a)$.

Таким образом, функция f интегрируема на $[a, b]$ и $\int\limits_a^b c\,\mathrm{d}x=c(b-a)$.

2 Функция Дирихле $D: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $D(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x\in\mathbb{Q},\\ 0, & \text{если } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\end{cases}$ не интегрируема ни на одном из отрезков $[a, b]\subset\mathbb{R}$, где $a<b$.

Действительно, пусть $T=(x_0, x_1, ..., x_n)$ – произвольное разбиение отрезка $[a, b]$ и пусть $\xi'=(\xi'_0, \xi'_1, ..., \xi'_{n-1})$, $\xi''=(\xi''_0, \xi''_1, ..., \xi''_{n-1})$ – две системы промежуточных точек $\xi'_k, \xi''_k\in[x_k, x_{k+1}]$, $k=\overline{0, n-1}$.

Если каждое из чисел ξ'_k является рациональным, то $D(\xi'_k)=1$ и, значит,

$$\sigma(T,\xi')=\sum_{k=0}^{n-1}D(\xi'_k)\Delta x_k=\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k=x_n-x_0=b-a,$$

откуда следует, что $\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sigma(T,\xi')=b-a.$

Если же каждое из чисел ξ''_k – иррациональное число, то $D(\xi''_k)=0$, и тогда соответствующая интегральная сумма $\sigma(T,\xi'')=\sum\limits_{k=0}^{n-1}D(\xi''_k)\Delta x_k=0.$ Значит, $\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sigma(T,\xi'')=0.$

Поскольку для разных систем ξ' и ξ'' промежуточных точек интегральные суммы имеют разные пределы, то не существует предел $\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sigma(T,\xi)$ и, следовательно, функция D не интегрируема на отрезке $[a,b]$.

Приведем без доказательства два важных результата из теории интегрального исчисления.

Теорема 4 **(необходимое условие интегрируемости)**

Если функция $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Замечания

1. Теорему 4 можно сформулировать по другому: *Если функция* $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ *не ограничена на отрезке* $[a,b]$, *то она не интегрируема на этом отрезке*.

Например, функция $f\colon [0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & \text{если } x\in(0,1],\\ 0, & \text{если } x=0,\end{cases}$ не ограничена на отрезке $[0,1]$, так как $\lim\limits_{x\to+0}f(x)=+\infty$. Значит, функция f не интегрируема на отрезке $[0,1]$.

2. Условие ограниченности функции f на отрезке $[a,b]$ является лишь необходимым, но не достаточным условием интегрируемости функции f. Например, существуют функции f, ограниченные на отрезке $[a,b]$, (функция Дирихле), но не интегрируемые на этом отрезке.

Теорема 5 **(классы интегрируемых функций)**

а) Любая функция $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$, непрерывная на отрезке $[a,b]$, интегрируема на этом отрезке.

б) Любая функция $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$, монотонная на отрезке $[a,b]$, интегрируема на этом отрезке.

Задания с решением

1 Вычислим интеграл:

а*) $\int\limits_0^{\pi}\dfrac{\sin s\,ds}{2+\cos s}$; б*) $\int\limits_1^{e}\dfrac{\ln x}{x}dx$; в) $\int\limits_{-13}^{0}\dfrac{dx}{\sqrt[3]{2x-1}}$; г) $\int\limits_0^{1}\dfrac{x^3}{x+1}dx$.

Решение:

а*) Вычислим первообразную $F(s)$, $s\in[0,\pi]$, для функции $f\colon[0,\pi]\to\mathbb{R}$, $f(s)=\dfrac{\sin s}{2+\cos s}$:

$$F(s)=\int\frac{\sin s\,ds}{2+\cos s}=-\int\frac{d(2+\cos s)}{2+\cos s}=-\ln(2+\cos s).$$

Значит,

$$\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin s ds}{2+\cos s}=-\ln(2+\cos s)\Big|_0^{\pi}=F(\pi)-F(0)=-\ln(2+\cos\pi)+\ln(2+\cos 0)=\ln 3.$$

б*) $\int\limits_1^e \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = \int\limits_1^e \ln x\,\mathrm{d}(\ln x) = \frac{1}{2}\ln^2 x\Big|_1^e = \frac{1}{2}(\ln^2 e - \ln^2 1) = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}.$

в) $\int\limits_{-13}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{2x-1}} = \int\limits_{-13}^{0}(2x-1)^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-1)^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}\Bigg|_{-13}^{0} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}(2x-1)^{\frac{2}{3}}\Big|_{-13}^{0} =$

$= \frac{3}{4}\left[(-1)^{\frac{2}{3}} - (-27)^{\frac{2}{3}}\right] = \frac{3}{4}(1-9) = -6.$

г) Найдем первообразные для функции $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$. Для этого вычислим неопределенный интеграл: $\int \frac{x^3}{x+1}\mathrm{d}x = \int \frac{x^3+1-1}{x+1}\mathrm{d}x = \int \frac{(x+1)(x^2-x+1)-1}{x+1}\mathrm{d}x =$

$= \int\left(x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \ln|x+1| + C.$

Рассмотрим первообразную $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \ln(x+1)$, $x \in [0, 1]$.

Согласно формуле Ньютона–Лейбница,

$$\int\limits_0^1 \frac{x^3}{x+1}\mathrm{d}x = F(1) - F(0) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 - \ln 2\right) - (0 - \ln 1) = \frac{5}{6} - \ln 2.$$

2 Докажем (используя определения 5 и 6), что функция $f\colon [a, b] \to [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$, интегрируема на любом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

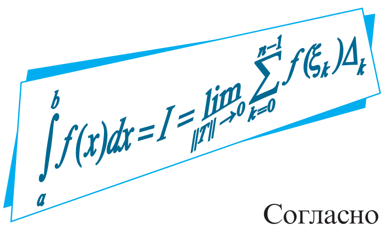
Доказательство:

Пусть $T = (x_0, x_1, ..., x_n)$ – произвольное разбиение отрезка $[a, b]$ и $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$, – произвольные промежуточные точки. Согласно теореме Лагранжа о конечных приращениях, примененной к первообразной $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \sin x$, для функции f, на каждом элементарном (частичном) отрезке $[x_k, x_{k+1}]$, существуют точки $c_k \in (x_k, x_{k+1})$ такие, что

$$\sin x_{k+1} - \sin x_k = \cos c_k(x_{k+1} - x_k), \quad k = \overline{0, n-1}.$$

Отсюда следует, что:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos c_k \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1}(\sin x_{k+1} - \sin x_k) = \sin x_n - \sin x_0 = \sin b - \sin a.$$



Так как $\sigma(T, \xi) = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\cos\xi_k \Delta x_k$, можно записать:

$$\sigma(T, \xi) - (\sin b - \sin a) = \sum_{k=0}^{n-1}(\cos\xi_k - \cos c_k)\Delta x_k.$$

Согласно теореме Лагранжа, примененной к функции f на $[\xi_k, c_k]$ (или на $[c_k, \xi_k]$), существует точка $\Theta_k \in (\xi_k, c_k)$ такая, что $\cos\xi_k - \cos c_k = -\sin\Theta_k(\xi_k - c_k)$, $k = \overline{0, n-1}$. Поскольку производная $f'(x) = -\sin x$ ограничена на отрезке $[a, b]$, получим:

$$|\cos\xi_k - \cos c_k| = |\sin\Theta_k||\xi_k - c_k| \le 1\cdot\Delta x_k \le \max_{0\le k\le n-1}\Delta x_k = \|T\|.$$

Следовательно,

$$|\sigma(T, \xi) - (\sin b - \sin a)| \le \sum_{k=0}^{n-1}|\cos\xi_k - \cos c_k|\Delta x_k \le \|T\|\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k = \|T\|(b-a). \quad (2)$$

Для любого $\varepsilon > 0$ положим $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{b-a} > 0$. Тогда из соотношения (2) следует, что для любого разбиения T нормы $\|T\| < \delta$ и для произвольного выбора системы промежуточных точек ξ справедливо неравенство $|\sigma(T, \xi) - (\sin b - \sin a)| \le \|T\|(b-a) < \delta(b-a) = \varepsilon$.

На основании определений 5 и 6, функция $f\colon [a, b] \to [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$, интегрируема на отрезке $[a, b]$ и $\int\limits_a^b \cos x \,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\|T\| \to 0} \sigma(T, \xi) = \sin b - \sin a$.

1.4. Геометрический смысл определенного интеграла

Определение 7 Пусть даны действительные числа a, b, $a < b$, и непрерывная, положительная функция $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Плоская фигура, ограниченная графиком функции f, осью абсцисс Ox и вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$, называется **подграфиком функции** f (или **криволинейной трапецией**) (рис. 3.2).

Интегральные суммы $\sigma(T, \xi) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$, определенные для непрерывной и положительной функции $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, геометрически представляют собой площадь фигуры $D = \bigcup\limits_{k=0}^{n-1} D_k$, составленной из прямоугольников $D_0, D_1, \ldots, D_{n-1}$ (рис. 3.2).

Эти суммы дают приближенное значение с определенной точностью для площади $\mathscr{A}$ подграфика функции f (рис. 3.2). Так как, чем меньше норма $\|T\|$, тем точнее приближенное равенство $\mathscr{A} \approx \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$, то, переходя к пределу при $\|T\| \to 0$, это приближенное равенство становится точным равенством:

$$\boxed{\mathscr{A} = \lim_{\|T\| \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x}\,.$$

Запомните! Геометрический смысл определенного интеграла от непрерывной и положительной функции f на отрезке $[a, b]$ состоит в том, что этот интеграл равен площади $\mathscr{A}$ подграфика функции f на отрезке $[a, b]$ (рис. 3.2).

Задания с решением

1 Найдем площадь подграфика функции $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ (раздел 1.1, рис. 3.1).

Решение:

$$\mathscr{A} = \int_0^1 x^2 \mathrm{d}x = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

2 Найдем площадь подграфика функции $f\colon [0, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x+1}$ (рис. 3.3).

Решение:

$$\mathscr{A} = \int_0^3 \sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x = \left.\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_0^3 =$$

$$= \frac{2}{3}\left.\sqrt{(x+1)^3}\right|_0^3 = \frac{2}{3}\left(\sqrt{4^3} - \sqrt{1^3}\right) =$$

$$= \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3}.$$

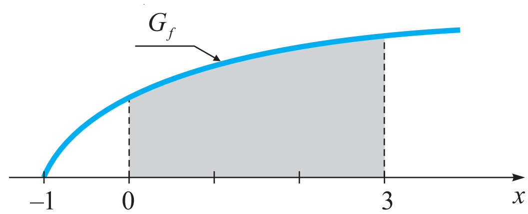


Рис. 3.3

3 Вычислим площадь подграфика функции $f\colon [-1, 3] \to \mathbb{R},\ f(x) = (x+1)(3-x)$, изображенного на рисунке 3.4.

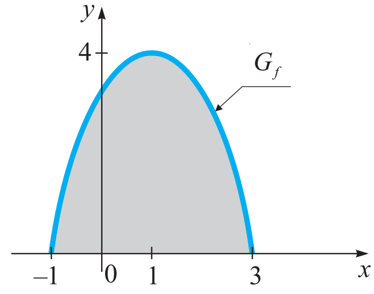


Рис. 3.4

Решение:

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{3}(x+1)(3-x)\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-1}^{3}(3+2x-x^2)\mathrm{d}x = \left(3x + x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{3} =$$

$$= (9+9-9) - \left(-3+1+\frac{1}{3}\right) = 11 - \frac{1}{3} = 10\frac{2}{3}.$$

Упражнения и задачи

A

Применив формулу Ньютона–Лейбница, вычислите интеграл:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

1. а) $\int_0^{\sqrt{2}} x^3\mathrm{d}x$; б) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} x^3\mathrm{d}x$; в) $\int_{-1}^{1} x^4\mathrm{d}x$;

г) $\int_{-\sqrt{2}}^{-1} x^5\mathrm{d}x$; д) $\int_1^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$; е) $\int_4^9 \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}$;

ж) $\int_0^1 \sqrt{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$; з) $\int_{-8}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}}$;

и) $\int_1^9 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x}}$; к) $\int_1^8 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x\sqrt[3]{x}}}$.

2. а) $\int_{-1}^{1}(3x^2-2x+1)\mathrm{d}x$; б) $\int_1^3 (2-x)^2\mathrm{d}x$;

в) $\int_0^1 x(x-1)^2\mathrm{d}x$; г) $\int_{-1}^{2}(3x-2)(2-x)\mathrm{d}x$;

д) $\int_0^1 (3\sqrt{x} - 4\sqrt[3]{x} - 1)\mathrm{d}x$; е) $\int_1^4 \frac{1-3x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

3. а) $\int_1^{e^2} \frac{\mathrm{d}x}{x}$; б) $\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{2x+1}$;

в) $\int_1^2 \frac{3x^2+x+4}{x^3}\mathrm{d}x$; г) $\int_{-1}^{0}\left(1+\frac{3}{3x-1}\right)\mathrm{d}x$;

д) $\int_1^4 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(2x+1)}\right)\mathrm{d}x$; е) $\int_{-1}^{2}\left(x-2+\frac{4}{x+2}\right)\mathrm{d}x$;

ж) $\int_{-1}^{0}\left(x^2+x+1+\frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x$; з) $\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$;

и) $\int_{-3}^{-2}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x$; к) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$.

4. а) $\int_0^{\ln 2} e^x\mathrm{d}x$; б) $\int_{-1}^{1} e^{-x}\mathrm{d}x$; в) $\int_{-\ln 2}^{\ln\sqrt{2}} e^{2x}\mathrm{d}x$; г) $\int_{-1}^{0} 2^x\mathrm{d}x$;

д) $\int_0^{\log_3 4} 3^{2x}\mathrm{d}x$; е) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x$; ж) $\int_{-\pi}^{2\pi} \sin 3x\,\mathrm{d}x$; з) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$;

и) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$; к) $\int_0^{\pi} \cos\frac{x}{6}\mathrm{d}x$; л) $\int_0^{2\pi} \sin\frac{x}{3}\mathrm{d}x$; м) $\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{12}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 3x}$;

н) $\int_0^{\pi} (\sin x + \cos x)^2\mathrm{d}x$; о) $\int_{-\pi}^{\pi} (\sin^2 x - \cos^2 x)\mathrm{d}x$;

п) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}$; р) $\int_0^{\pi} \frac{\cos^2 x\,\mathrm{d}x}{1+\sin x}$.

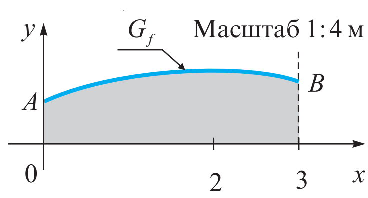
5. Вычислите площадь подграфика функции:

а) $f\colon [1, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$;

б) $f\colon [0, 4] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$;

в) $f\colon [-1, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = 2^x$.

6. На рисунке изображена одна из боковых стен теплицы. Дуга AB задана функцией $f\colon [0, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{12}(6+4x-x^2)$.



а) Найдите площадь обеих боковых стен этой теплицы.

б) Какое количество краски потребуется для покраски снаружи этих двух стен теплицы, если расход краски составляет 150 г на 1 м²?

в) Какова стоимость краски, если цена одного килограмма 25 леев?

Б

1. Вычислите интеграл:

а) $\int\limits_{-3}^{0}\sqrt[3]{1+3x}\,dx$; б) $\int\limits_{-6}^{-1}\sqrt{3-x}\,dx$; в) $\int\limits_{0}^{6}\frac{dx}{\sqrt{2x+4}}$;

г) $\int\limits_{-3}^{0}\frac{dx}{\sqrt[4]{1-5x}}$; д) $\int\limits_{0}^{1}(2-3x)^3\,dx$; е) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{3}}\frac{dx}{(3x+1)^5}$;

ж) $\int\limits_{e}^{e^3}\frac{\ln x}{x}\,dx$; з) $\int\limits_{1}^{e}\frac{\ln^4 x}{x}\,dx$; и) $\int\limits_{e}^{e^2}\frac{dx}{x\ln^2 x}$;

к) $\int\limits_{1}^{\sqrt{2}}\frac{x\,dx}{\sqrt{5x^2-1}}$; л) $\int\limits_{0}^{2}\frac{(2x+1)dx}{x^2+x+1}$; м) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x}\,dx$;

н) $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}\frac{\operatorname{arctg} x\,dx}{1+x^2}$; о) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{\arcsin x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$; п) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x}\,dx$;

р) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}$; с) $\int\limits_{0}^{\sqrt{2}}\frac{x^2\,dx}{16+x^6}$; т) $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$;

у) $\int\limits_{1}^{e}\frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$; ф) $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}\frac{x\,dx}{1+x^2}$; х) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{4-x^2}$;

ц) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x\,dx}{1+4\sin^2 x}$; ч) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\,dx}{2+\sin^2 x}$; ш) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{16+9x^2}}$;

щ) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{2-\cos^2 x}}$; э) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{3+\sin^2 x}}$.

2. Вычислите интеграл:

а) $\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)dx$; б) $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{x-1}{x^2}\right)dx$;

в) $\int\limits_{0}^{1}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-2}\right)dx$; г) $\int\limits_{1}^{2}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{x-1}{x^3}\right)dx$;

д) $\int\limits_{-1}^{1}\left(1-\frac{2}{x+2}\right)dx$; е) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4(1+4x^2)}+\frac{x}{1+4x^2}\right)dx$;

ж) $\int\limits_{0}^{1}\left(1-\frac{2x+3}{x^2+3x+4}\right)dx$; з) $\int\limits_{0}^{1}\left(\frac{1}{3x+6}+\frac{1}{6x+3}\right)dx$.

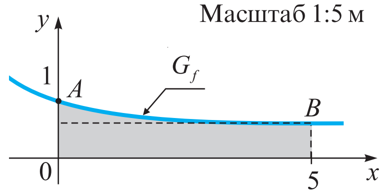
3. Найдите площадь подграфика функции:

а) $f:\left[\frac{1}{2}, 2\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x}$;

б) $f:[1, 8]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[3]{x}$;

в) $f:[-\ln 3, \ln 4]\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{-x}$.

4. Для постройки жилого дома следует вырыть котлован под фундамент на склоне возвышенности. Поперечное сечение этого котлована изображено на рисунке. Склон возвышенности представлен дугой AB, заданной функцией: $f:[0, 5]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{275}(2x^2-32x+275)$.



а) Найдите площадь (в квадратных метрах) поперечного сечения котлована.
б) Найдите объем (в кубических метрах) вывезенного грунта со строительной площадки, если длина жилого дома будет приблизительно равна 110 м.
в) Оцените затраты строительной фирмы, если для выполнения всего технологического процесса (рытье, транспортировка и т. п.) по проекту запланировано до 5 леев за 1 $м^3$ грунта.

5. Применяя определения 5 и 6 и используя метод, примененный при решении задания **2** (с. 38), докажите, что функция интегрируема, и вычислите определенный интеграл от этой функции, если:

а) $f:[a, b]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x},\ b>a>0$;

б) $f:[a, b]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin x$;

в) $f:[a, b]\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x$.

6. Докажите, что функция f не интегрируема:

а) $f:[1, 2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x=1,\\ \frac{1}{x-1}, & \text{если } 1<x\le 2;\end{cases}$

б) $f:[0, e]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x=0,\\ \ln x, & \text{если } 0<x\le e.\end{cases}$

$$\mathcal{A}=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{k=2}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k=\int\limits_a^b f(x)dx$$

§ 2 ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Сформулируем и докажем основные свойства определенного интеграла. Эти свойства можно установить для общего случая интегрируемых функций на отрезке, однако соответствующие доказательства этих свойств требуют значительных усилий, поскольку они основаны на более глубоких понятиях и следствиях. В доказательствах свойств, которые приведены ниже, предполагается, что ***функции, указанные в условиях свойств, являются непрерывными***, а значит, и интегрируемыми. Это предположение существенно упрощает доказательство свойств, поскольку для непрерывных функций существуют первообразные.

Свойства определенного интеграла от непрерывной функции, сформулированные посредством теорем 1 и 2 и следствий 1 и 2 (раздел 1.2), справедливы и для функций, интегрируемых на отрезке. Дополним список этих свойств.

Теорема 6 **(свойство аддитивности определенного интеграла)**

Пусть $f\colon I \to \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$, где I – промежуток) – некоторая функция и $a, b, c \in I$, $a \le c \le b$. Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема и на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$ и справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Доказательство:

Пусть функция f непрерывна на промежутке I и $a \le c \le b$. Тогда функция f интегрируема на каждом из отрезков $[a, b]$, $[a, c]$, $[c, b]$ (теорема 5) и для нее существуют первообразные на промежутке I (в силу теоремы 2, модуль 2). Пусть $F\colon I \to \mathbb{R}$ – одна из первообразных функции f на промежутке I. По формуле Ньютона–Лейбница,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

и, тем самым, равенство, указанное в условии теоремы, доказано.

Задание с решением

Вычислим определенный интеграл от функции:

а) $f\colon [-1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } -1 \le x \le 1, \\ 2 - x, & \text{если } 1 < x \le 2; \end{cases}$

б) $f\colon [-2, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x - 1| + |x + 1|$;

в) $f\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \max\{\sin x, \cos x\}$.

Решение:

а) Функция $f\colon [-1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } -1 \le x \le 1, \\ 2 - x, & \text{если } 1 < x \le 2, \end{cases}$ непрерывна на отрезке $[-1, 2]$, а значит, и интегрируема. По теореме 6 и по формуле Ньютона–Лейбница,

$$\int_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 x^2\mathrm{d}x + \int_1^2 (2 - x)\mathrm{d}x = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^1 + \left.\left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\right|_1^2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}.$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

б) Функция $f\colon [-2, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x - 1| + |x + 1|$, непрерывна, а значит, и интегрируема, и ее можно записать в виде: $f\colon [-2, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{если } -2 \le x \le -1, \\ 2, & \text{если } -1 < x < 1, \\ 2x, & \text{если } 1 \le x \le 3. \end{cases}$

Дважды применив свойство аддитивности определенного интеграла, получим:

$$\int_{-2}^3 f(x)\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1} (-2x)\mathrm{d}x + \int_{-1}^1 2\mathrm{d}x + \int_1^3 2x\mathrm{d}x = -x^2\Big|_{-2}^{-1} + 2x\Big|_{-1}^1 + x^2\Big|_1^3 = 3 + 4 + 8 = 15.$$

в) Функция $f\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \max\{\sin x, \cos x\}$, непрерывна на отрезке $[0, \pi]$ и ее можно записать в следующем виде: $f\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{если } 0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}, \\ \sin x, & \text{если } \dfrac{\pi}{4} < x \le \pi. \end{cases}$

Из свойства аддитивности определенного интеграла следует, что:

$$\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + (-\cos x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + \sqrt{2}.$$

Теорема 7 **(свойство инвариантности знака определенного интеграла)**

Если функция $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $a \le b$, интегрируема на отрезке $[a, b]$ и $f(x) \ge 0$ для любого $x \in [a, b]$, то $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \ge 0$.

Доказательство:

Для любого разбиения $T = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ отрезка $[a, b]$ и любого выбора промежуточных точек $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$, так как $f(\xi_k) \ge 0$, $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k > 0$, получим, что $\sigma(T, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k \ge 0$. Переходя к пределу в последнем неравенстве при $\|T\| \to 0$, получим $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\|T\| \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k \ge 0$.

Теорема 8 **(свойство монотонности определенного интеграла)**

Если функции $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $a \le b$, интегрируемы на отрезке $[a, b]$ и $f(x) \le g(x)$ для любого $x \in [a, b]$, то $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Доказательство:

По условию теоремы, $g(x) - f(x) \ge 0$ для любого $x \in [a, b]$. В силу свойств линейности и инвариантности знака интеграла, получим:

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b (g(x) - f(x))\mathrm{d}x \ge 0.$$

Следовательно, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Теорема 9 **(интегрируемость модуля функции)**

Если функция $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $a \le b$, интегрируема на отрезке $[a, b]$, то функция $|f|\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $|f|(x) = |f(x)|$, также интегрируема на этом отрезке и имеет место неравенство:

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Теорема 10 **(оценка сумм Римана)**

Если функция $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $a \le b$, ограничена на отрезке $[a, b]$ и $m \le f(x) \le M$ для любого $x \in [a, b]$, то для любого разбиения T отрезка $[a, b]$ и любой системы промежуточных точек ξ справедливо двойное неравенство: $m(b-a) \le \sigma(T, \xi) \le M(b-a)$.
В частности, если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le M(b-a).$$

Теорема 11 **(теорема о среднем значении для случая интегрируемых функций)**

Если функция $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и $m \le f(x) \le M$ для любого $x \in [a, b]$, то существует число $\mu \in [m, M]$ такое, что $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \mu(b-a)$.

Теорема 12 **(теорема о среднем значении для случая непрерывных функций)**

Если функция $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a, b)$ такая, что $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(c)(b-a)$.

Доказательство:

Если $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ – одна из первообразных непрерывной функции f, то $F'(x) = f(x)$, $x \in [a, b]$. Применив теорему Лагранжа о конечных приращениях к функции F (см. Учебник математики для XI класса, модуль 5, раздел 6.3), получим, что существует хотя бы одна точка $c \in (a, b)$ такая, что $F(b) - F(a) = F'(c)(b-a) = f(c)(b-a)$.

Значит, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = f(c)(b-a)$.

Замечания

1. Число $M[f] = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ называется ***средним значением*** функции f на отрезке $[a, b]$. Теорема 12 показывает, что для непрерывных функций среднее значение достигается функцией f в некоторой точке $c \in (a, b)$.

2. *Теоремы о среднем значении имеют следующий геометрический смысл*: площадь подграфика непрерывной и положительной функции $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ равна площади прямоугольника, основание которого $b-a$ и высота $\mu = f(c)$, то есть $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \mu(b-a)$.

Иначе говоря, площади закрашенных фигур равны (рис. 3.5).

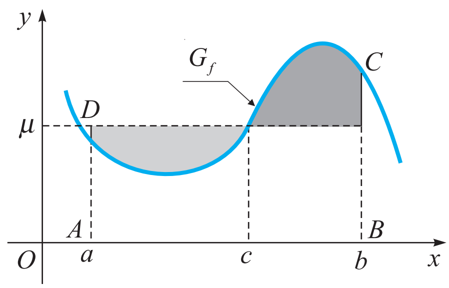


Рис. 3.5

Задания с решением

1 Вычислим определенный интеграл:

а) $\int_1^{\sqrt[5]{2}}\left(x^4 + \frac{1}{x^6}\right)\mathrm{d}x$; б) $\int_{-1}^{1}\frac{4e^{2x}-9}{2e^x+3}\mathrm{d}x$; в*) $\int_1^2\sqrt{9x^2 + \frac{4}{x^2} + 12}\,\mathrm{d}x$.

Решение:

а) Применив свойство линейности определенного интеграла (теорема 2) и формулу Ньютона–Лейбница, получим:

$$\int_1^{\sqrt[5]{2}}\left(x^4 + \frac{1}{x^6}\right)\mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt[5]{2}}x^4\mathrm{d}x + \int_1^{\sqrt[5]{2}}\frac{\mathrm{d}x}{x^6} = \frac{x^5}{5}\bigg|_1^{\sqrt[5]{2}} + \frac{x^{-6+1}}{-6+1}\bigg|_1^{\sqrt[5]{2}} = \frac{x^5}{5}\bigg|_1^{\sqrt[5]{2}} - \frac{1}{5x^5}\bigg|_1^{\sqrt[5]{2}} =$$

$$= \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{10}.$$

б) Так как $4e^{2x}-9=(2e^x)^2-3^2=(2e^x-3)(2e^x+3)$, получим:

$$\int_{-1}^{1}\frac{4e^{2x}-9}{2e^x+3}dx=\int_{-1}^{1}\frac{(2e^x-3)(2e^x+3)}{2e^x+3}dx=\int_{-1}^{1}(2e^x-3)dx=2\int_{-1}^{1}e^x dx-3\int_{-1}^{1}dx=2e^x\Big|_{-1}^{1}-3x\Big|_{-1}^{1}=$$

$$=2(e-e^{-1})-3(1+1)=2e-\frac{2}{e}-6=\frac{2(e^2-3e-1)}{e}.$$

в*) Очевидно, что $9x^2+12+\frac{4}{x^2}=\left(3x+\frac{2}{x}\right)^2$, и если $x\in[1,\,2]$, то $3x+\frac{2}{x}>0$.

Следовательно, $\sqrt{9x^2+\frac{4}{x^2}+12}=\sqrt{\left(3x+\frac{2}{x}\right)^2}=\left|3x+\frac{2}{x}\right|=3x+\frac{2}{x}$. Тогда

$$\int_{1}^{2}\sqrt{9x^2+\frac{4}{x^2}+12}\,dx=\int_{1}^{2}\left(3x+\frac{2}{x}\right)dx=3\int_{1}^{2}xdx+2\int_{1}^{2}\frac{dx}{x}=\frac{3x^2}{2}\Bigg|_{1}^{2}+2\ln x\Big|_{1}^{2}=$$

$$=\frac{3}{2}(2^2-1)+2(\ln 2-\ln 1)=\frac{9}{2}+2\ln 2.$$

2 Определим знак интеграла:

а) $\int_{0}^{\sqrt{3}}\sin x^2dx$;   б) $\int_{\frac{1}{2}}^{1}x^{10}\ln x\,dx$.

Решение:

а) Если $x\in(0,\,\sqrt{3})$, то $x^2\in(0,\,3)\subset(0,\,\pi)$, а значит, $\sin x^2>0$. Применив теорему о среднем значении к непрерывной функции $f\colon[0,\,\sqrt{3}]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x^2$, получим, что существует точка $c\in(0,\,\sqrt{3})$ такая, что $\int_{0}^{\sqrt{3}}\sin x^2dx=\sqrt{3}\sin c^2>0$.

б) Для любого $x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ имеем $x^{10}\ln x<0$. Поскольку функция $f\colon\left[\frac{1}{2},1\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{10}\ln x$, непрерывна, то согласно теореме 12, найдется точка $c\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ такая, что $\int_{\frac{1}{2}}^{1}x^{10}\ln x\,dx=(c^{10}\ln c)\left(1-\frac{1}{2}\right)<0$.

3 Сравним интегралы $I_1=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{100}x\,dx$ и $I_2=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{10}x\,dx$.

Решение:

Рассмотрим функцию $f\colon\left[0,\,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin^{10}x-\sin^{100}x$.

Так как $\sin^{10}x>\sin^{100}x$, $x\in\left(0,\,\frac{\pi}{2}\right)$, и равенство $\sin^{10}x=\sin^{100}x$ на отрезке $\left[0,\,\frac{\pi}{2}\right]$ возможно лишь при $x=0$ и $x=\frac{\pi}{2}$, то $f(x)>0$, $x\in\left(0,\,\frac{\pi}{2}\right)$. Из теоремы 12, примененной к непрерывной функции $f\colon\left[0,\,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, следует, что существует точка $c\in\left(0,\,\frac{\pi}{2}\right)$ такая, что $I_2-I_1=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^{10}x-\sin^{100}x)\,dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,dx=\frac{\pi}{2}f(c)>0$. Следовательно, $I_2>I_1$.

4 Определим среднее значение функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=5-2\sin x+3\cos x,$ на отрезке $[\pi, 2\pi]$.

Решение:

$$M[f]=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi-\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(5-2\sin x+3\cos x)\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{1}{\pi}(5x+2\cos x+3\sin x)\Big|_{\pi}^{2\pi}=\frac{1}{\pi}(10\pi+2)-\frac{1}{\pi}(5\pi-2)=5+\frac{4}{\pi}.$$

5 Найдем точку c из теоремы о среднем значении для случая непрерывных функций, примененной к функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2$, на отрезке $[-2, 4]$.

Решение:

Поскольку функция f непрерывна, то, согласно теореме 12, найдется хотя бы одна точка $c\in(-2, 4)$ такая, что $\int_{-2}^{4}x^2\mathrm{d}x=6c^2$. Так как $\int_{-2}^{4}x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3\Big|_{-2}^{4}=\frac{64}{3}+\frac{8}{3}=24,$ то есть $6c^2=24\Leftrightarrow c^2=4,$ то $c\in\{-2, 2\}$. Точка $c=2$ является решением задачи, поскольку принадлежит промежутку $(-2, 4)$.

6 Дана непрерывная функция $f\colon [0, 2]\to\mathbb{R}$ и $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2$. Докажем, что найдется точка $x_0\in(0, 2)$ такая, что $f(x_0)=x_0$.

Решение:

$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x-2=0\Leftrightarrow\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x-\frac{x^2}{2}\Big|_0^2=0\Leftrightarrow\int_0^2(f(x)-x)\mathrm{d}x=0.$ Из теоремы о среднем значении вытекает, что найдется точка $x_0\in(0, 2)$ такая, что $(f(x_0)-x_0)(2-0)=0$. Значит, $f(x_0)=x_0$.

Упражнения и задачи

А

Вычислите интеграл:

1. а) $\int_1^4(x^2-2\sqrt{x})\mathrm{d}x$; б) $\int_0^1(3\sqrt{x}+x)\mathrm{d}x$;

в) $\int_{-1}^0(2x-\sqrt[3]{x})\mathrm{d}x$; г) $\int_1^9\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$;

д) $\int_{-1}^1(x^2-8\sqrt[3]{x})\mathrm{d}x$; е) $\int_9^1\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\sqrt{x}}{13}\right)\mathrm{d}x$;

ж) $\int_{-2}^{-1}\left(\frac{3}{x^4}-\frac{2}{x^3}\right)\mathrm{d}x$; з) $\int_1^{16}\left(\frac{8}{x^2}+\frac{3}{\sqrt[4]{x}}\right)\mathrm{d}x$.

2. а) $\int_1^2\left(\frac{1-x}{x}\right)^2\mathrm{d}x$; б) $\int_{-8}^{-1}\frac{(1-x)^2}{x\cdot\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$;

в) $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{(1+x)^3}{x^4}\mathrm{d}x$; г) $\int_1^{16}\frac{x-1}{x^2}\sqrt{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$;

д) $\int_{-1}^1(1+x)(1+2x)(1-x)\mathrm{d}x$; е) $\int_{-1}^0(x^2-x-1)(x^2+x-1)\mathrm{d}x$;

ж) $\int_{-4}^5(\sqrt{x+20}-\sqrt{x+4})\mathrm{d}x$; з) $\int_{-9}^0(\sqrt{25+x}+\sqrt{9+x})\mathrm{d}x$;

и) $\int_{-3}^{13} \frac{dx}{\sqrt{x+12}-\sqrt{x+3}}$; к) $\int_{-5}^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt{10-3x}+\sqrt{1-3x}}$;

л) $\int_{0}^{1} (3e^{3x}-4e^{2x})dx$; м) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (e^{2x}-e^{-2x})^2 dx$;

н) $\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \frac{e^{-x}(e^{5x}+e^{-x})}{e^{2x}}dx$; о) $\int_{0}^{4} \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{x}+e^{-x}}dx$;

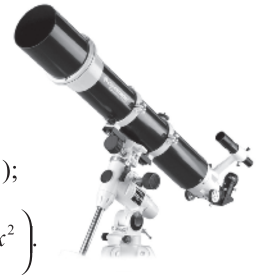
п) $\int_{0}^{1} \frac{e^{3x}+1}{e^{x}+1}dx$; р) $\int_{2}^{3} \sqrt{x^4+x^{-4}+2}\,dx$;

с) $\int_{0}^{1} 2^x(3^x+1)dx$; т) $\int_{0}^{1} (3^x-1)^2 dx$.

3. а) $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{10}} \left(\frac{3}{\cos^2 3x}+\frac{2}{\sin^2 2x}\right)dx$;

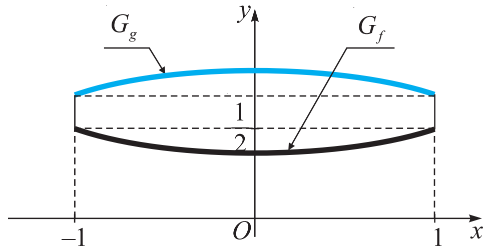
б) $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{10}} \left(\frac{3}{\cos^2 3x}-\frac{8}{\sin^2 8x}+\frac{60}{\pi}\right)dx$.

4. На рисунке изображена линза телескопа, масштаб 1:1 м. Дуги, ограничивающие поверхность линзы, задаются функциями:



$f: [-1, 1] \to \mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{20}(9+x^2)$;

$g: [-1, 1] \to \mathbb{R},\ g(x)=\frac{1}{20}\left(\frac{59}{5}-x^2\right)$.



а) Найдите диаметр линзы.
б) Определите толщину края линзы.
в) Какова толщина в центре линзы?
г) Найдите площадь поперечного сечения линзы.

Б

1. Покажите, что функция f непрерывна, и вычислите определенный интеграл от этой функции:

а) $\int_{-1}^{4} f(x)dx$, где $f: [-1, 4] \to \mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} -x, \text{ если } x\in[-1, 0), \\ \sqrt{x}, \text{ если } x\in[0, 4]; \end{cases}$$

б) $\int_{-8}^{4} f(x)dx$, где $f: [-8, 4] \to \mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x}, \text{ если } x\in[-8, 0), \\ 3\sqrt{x}, \text{ если } x\in[0, 4]; \end{cases}$$

в) $\int_{-1}^{3} f(x)dx$, $f: [-1, 3] \to \mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} x^3, \text{ если } x\in[-1, 1], \\ x^2, \text{ если } x\in(1, 2), \\ 4, \text{ если } x\in[2, 3]. \end{cases}$$

г) $\int_{-1}^{1} f(x)dx$, где $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x, \text{ если } x\in[-1, 0], \\ x^3-x, \text{ если } x\in(0, 1]; \end{cases}$$

д) $\int_{0}^{2} f(x)dx$, где $f: [0, 2] \to \mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} 4(1-x)^3, \text{ если } x\in[0, 1), \\ 3\sqrt{x-1}, \text{ если } x\in[1, 2]; \end{cases}$$

е) $\int_{-1}^{2\sqrt[3]{6}} f(x)dx$, где $f: [-1, 2\sqrt[3]{6}] \to \mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sqrt{1+x^3}, \text{ если } x\in[-1, 2], \\ \frac{9x^2}{\sqrt{1+x^3}}, \text{ если } x\in(2, 2\sqrt[3]{6}]; \end{cases}$$

ж) $\int_{1}^{4} f(x)dx$, где $f: [1, 4] \to \mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} 2, \text{ если } x=1, \\ \frac{x-1}{x-\sqrt{x}}, \text{ если } x\in(1, 4]; \end{cases}$$

з) $\int_{0}^{\pi} f(x)dx$, где $f: [0, \pi] \to \mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} \frac{\cos^2 x}{1-\sin x}, \text{ если } x\in[0, \pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}, \\ 2, \text{ если } x=\frac{\pi}{2}; \end{cases}$$

и) $\int_{-1}^{1} f(x)dx$, где $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} 1-2x+3x^2, \text{ если } x\in[-1, 0], \\ 1+2x-3x^2, \text{ если } x\in(0, 1]; \end{cases}$$

к) $\int_{-1}^{1} f(x)dx$, где $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x}{1+x^2}, \text{ если } x\in[-1, 0), \\ \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}, \text{ если } x\in[0, 1]; \end{cases}$$

л) $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$, где $f\colon [0, 2]\to\mathbb{R}$,

$f(x)=\min\{x, 2-x\}$, $\forall x\in[0, 2]$;

м) $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$, где $f\colon [0, 2]\to\mathbb{R}$,

$f(x)=\max\{x, 2-x\}$, $\forall x\in[0, 2]$.

2. Вычислите:

а) $\int\limits_0^2 |1-x|\,\mathrm{d}x$; б) $\int\limits_{-1}^1 |2x+1|\,\mathrm{d}x$;

в) $\int\limits_0^1 |1-3x|\,\mathrm{d}x$; г) $\int\limits_{-1}^1 |x^3|\,\mathrm{d}x$;

д) $\int\limits_{-2}^2 |x^2-1|\,\mathrm{d}x$; е) $\int\limits_{-2}^3 |x^2-x-2|\,\mathrm{d}x$;

ж) $\int\limits_{-1}^2 (x^2-|x|)\mathrm{d}x$; з) $\int\limits_{-1}^2 (|x|+|1-x|)\mathrm{d}x$;

и) $\int\limits_0^4 (|1+x|-|2-x|)\mathrm{d}x$; к) $\int\limits_0^2 |1-x^3|\,\mathrm{d}x$;

л) $\int\limits_{-1}^2 |x-x^3|\,\mathrm{d}x$; м) $\int\limits_0^3 \left|\frac{2-x}{1+x}\right|\mathrm{d}x$;

н) $\int\limits_0^{\pi} |\cos x|\,\mathrm{d}x$; о) $\int\limits_{-1}^1 \sqrt{e^{2x}+e^{-2x}-2}\,\mathrm{d}x$;

п) $\int\limits_{-1}^1 \sqrt{9^x-2\cdot 3^x+1}\,\mathrm{d}x$; р) $\int\limits_{-1}^2 (|2-2^x|-|2^x-1|)\,\mathrm{d}x$;

с) $\int\limits_{-1}^2 \max\{x, x^2\}\,\mathrm{d}x$; т) $\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\,\mathrm{d}x$.

3. Не вычисляя интеграл, определите его знак:

а) $\int\limits_{-1}^0 \sqrt{4+x^2}\,\mathrm{d}x$; б) $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \arcsin(\sin x)\,\mathrm{d}x$;

в) $\int\limits_2^{\frac{3}{2}} \log_2(x-1)\,\mathrm{d}x$; г) $\int\limits_{-2}^{-1} (\pi^x-e^x)\mathrm{d}x$.

4. Сравните определенные интегралы:

а) $I_1=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{tg}^5 x\,\mathrm{d}x$ и $I_2=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{ctg}^{10} x\,\mathrm{d}x$;

б) $I_1=\int\limits_0^1 e^{-x}\mathrm{d}x$ и $I_2=\int\limits_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x$;

в) $I_1=\int\limits_0^1 \cos x^2\mathrm{d}x$ и $I_2=\int\limits_0^1 \cos x^5\mathrm{d}x$.

5. Найдите среднее значение функции:

а) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3\cos 3x-4\cos^2 2x$, на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;

б) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^x(4^x-2^x+1)$, на отрезке $[-1, 1]$.

6. Найдите значение точки c из теоремы 12 о среднем значении для определенного интеграла:

а) $\int\limits_1^3 x^3\,\mathrm{d}x$; б) $\int\limits_0^{2\pi} (2+3\sin x)\mathrm{d}x$;

в) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,\mathrm{d}x$; г) $\int\limits_1^3 (3x^2-2x-1)\,\mathrm{d}x$.

7. Пусть $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – непрерывная функция такая, что $\int\limits_1^4 f(x)\mathrm{d}x=6$ и $\int\limits_1^5 f(x)\mathrm{d}x=8$.

Вычислите $\int\limits_4^5 (3f(x)+2x)\mathrm{d}x$.

8. Пусть $f\colon [2, 5]\to\mathbb{R}$ – непрерывная функция, для которой $\int\limits_2^5 f(x)\mathrm{d}x=39$. Докажите, что существует точка $c\in(2, 5)$ такая, что $f(c)=c^2$.

9. Рыночная цена товара, в зависимости от спроса и предложения, задается функцией $f\colon [1, 12]\to\mathbb{R}$,

$f(t)=\int\limits_1^2 (12s^5-6ts^2+t^2-2)\mathrm{d}s$, где t – номер месяца в году, а $y=f(t)$ – цена товара (в леях).

а) Определите функцию f.

б) Найдите цену товара в январе и декабре.

в) В каком месяце цена товара минимальна?

г) Найдите минимальную цену товара.

§ 3 МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

В этом параграфе при вычислении определенного интеграла применим методы, изученные в модуле 2 (Первообразная и неопределенный интеграл).

3.1. Интегрирование по частям

В этом разделе найдем первообразную функции f методом интегрирования по частям, изученным в модуле 2. Напомним формулу интегрирования по частям: $\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$, где u и v – дифференцируемые функции, производные которых u' и v' – непрерывные на промежутке.

Задания с решением

1 Вычислим интеграл $\int\limits_0^1 (x+1)e^{2x}\mathrm{d}x$.

Решение:

Для нахождения первообразной для непрерывной функции $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x)=(x+1)e^{2x}$, вычислим неопределенный интеграл от функции f, применяя метод интегрирования по частям. Обозначим $u = x+1$, $\mathrm{d}v = e^{2x}\mathrm{d}x$. Тогда $\mathrm{d}u = (x+1)'\mathrm{d}x = \mathrm{d}x$ и $v = \int e^{2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x}$. Согласно формуле интегрирования по частям для неопределенного интеграла, имеем:

$$\int (x+1)e^{2x}\mathrm{d}x = uv - \int v\mathrm{d}u = \frac{1}{2}(x+1)e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}(x+1)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C = \frac{1}{4}(2x+1)e^{2x} + C.$$

Итак, одна из первообразных для функции $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x)=(x+1)e^{2x}$, есть функция $F\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{4}(2x+1)e^{2x}$. Так как $F(1) = \frac{3}{4}e^2$, $F(0) = \frac{1}{4}$, из формулы Ньютона–Лейбница следует:

$$\int\limits_0^1 (x+1)e^{2x}\mathrm{d}x = F(1) - F(0) = \frac{1}{4}(3e^2 - 1).$$

2 Вычислим интеграл $I = \int\limits_0^{\pi} (x^2+x+1)\cos x\,\mathrm{d}x$.

Решение:

Применив дважды метод интегрирования по частям, получим, что одной из первообразных функции $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2+x+1)\cos x$, является функция $F\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int (x^2+x+1)\cos x\,\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{ll} u = x^2+x+1 & \mathrm{d}v = \cos x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = (x^2+x+1)'\mathrm{d}x & v = \int \cos x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = (2x+1)\mathrm{d}x & v = \sin x \end{array} \right\} =$$

$$= uv - \int v\mathrm{d}u = (x^2+x+1)\sin x - \int (2x+1)\sin x\,\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{ll} u = 2x+1, & \mathrm{d}v = \sin x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = (2x+1)'\mathrm{d}x & v = \int \sin x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = 2\mathrm{d}x & v = -\cos x \end{array} \right\} =$$

$$= (x^2+x+1)\sin x - (uv - \int v\mathrm{d}u) = (x^2+x+1)\sin x - [-(2x+1)\cos x + 2\int \cos x\,\mathrm{d}x] =$$

$$= (x^2+x+1)\sin x + (2x+1)\cos x - 2\sin x = (x^2+x-1)\sin x + (2x+1)\cos x.$$

Так как $F(\pi) = (\pi^2+\pi-1)\sin\pi + (2\pi+1)\cos\pi = -(2\pi+1)$, $F(0) = -\sin 0 + \cos 0 = 1$, из формулы Ньютона–Лейбница следует: $I = F(\pi) - F(0) = -2(\pi+1)$.

3 Вычислим интеграл $\int_1^e (3x^2+1)\ln x\,\mathrm{d}x$.

Решение:

Чтобы получить первообразную $F(x)=\int (3x^2+1)\ln x\,\mathrm{d}x$, применим формулу интегрирования по частям. Укажем способ применения этой формулы, в котором не используются соответствующие обозначения для u и $\mathrm{d}v$. Этот метод применяется в тех случаях, когда одну из подынтегральных функций можно записать при помощи дифференциала. Выражение $3x^2+1$ запишем в виде: $(3x^2+1)\mathrm{d}x=\mathrm{d}(x^3+x)$.

Применим формулу интегрирования по частям для неопределенного интеграла и получим:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$F(x)=\int \ln x\;\mathrm{d}(x^3+x)=(x^3+x)\ln x-\int (x^3+x)\mathrm{d}(\ln x)=(x^3+x)\ln x-\int (x^3+x)\frac{\mathrm{d}x}{x}=$$

$$=(x^3+x)\ln x-\int (x^2+1)\mathrm{d}x=(x^3+x)\ln x-\left(\frac{x^3}{3}+x\right).$$

Согласно формуле Ньютона–Лейбница имеем,

$$\int_1^e (3x^2+1)\ln x\,\mathrm{d}x=F(x)\Big|_1^e=F(e)-F(1)=\left[(e^3+e)\ln e-\left(\frac{e^3}{3}+e\right)\right]-\left[(1+1)\ln 1-\left(\frac{1}{3}+1\right)\right]=$$

$$=e^3+e-\frac{e^3}{3}-e-2\ln 1+\frac{4}{3}=\frac{2}{3}e^3+\frac{4}{3}=\frac{2}{3}(e^3+2).$$

4 Вычислим интеграл $I=2\int_0^{\sqrt{3}} x\ \mathrm{arctg}\,x\,\mathrm{d}x$.

Решение:

Вычислим неопределенный интеграл от непрерывной функции $f\colon [0,\sqrt{3}]\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x\,\mathrm{arctg}\,x$. Применим формулу интегрирования по частям и получим первообразную:

$$F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int \mathrm{arctg}\,x\,\mathrm{d}(x^2)=x^2\mathrm{arctg}\,x-\int x^2\mathrm{d}(\mathrm{arctg}\,x)=x^2\mathrm{arctg}\,x-\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}\mathrm{d}x=$$

$$=x^2\mathrm{arctg}\,x-\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=(x^2+1)\ \mathrm{arctg}\,x-x,\ \ x\in[0,\sqrt{3}].$$

Поскольку $F(0)=0,\ F(\sqrt{3})=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$, из формулы Ньютона–Лейбница следует:

$$I=F(\sqrt{3})-F(0)=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}.$$

Определенный интеграл можно вычислить методом интегрирования по частям, используя формулу, приведенную в следующей теореме:

Теорема 13 **(формула интегрирования по частям)**

Пусть $u\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ и $v\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ – дифференцируемые функции на отрезке $[a,b]$, имеющие непрерывные производные $u'\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ и $v'\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ на этом отрезке. Тогда имеет место формула:

$$\int_a^b u(x)\mathrm{d}(v(x))=u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)\mathrm{d}(u(x)),$$

называемая ***формулой интегрирования по частям*** определенного интеграла.

Решим задание **3** с использованием метода интегрирования по частям:

$$\int_1^e (3x^2+1)\ln x\,\mathrm{d}x=\int_1^e \ln x\,\mathrm{d}(x^3+x)=(x^3+x)\ln x\Big|_1^e-\int_1^e (x^3+x)\mathrm{d}(\ln x)=$$

$$=e^3+e-\int_1^e (x^3+x)\frac{\mathrm{d}x}{x}=e^3+e-\int_1^e (x^2+1)\mathrm{d}x=e^3+e-\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Bigg|_1^e=\frac{2}{3}(e^3+2).$$

3.2. Замена переменной или метод подстановки

В этом разделе первообразную для функции f вычислим с помощью метода замены переменной для неопределенных интегралов.

Задания с решением

1 Вычислим интеграл $I=\int_0^1 x(2x-1)^5\,\mathrm{d}x$.

Решение:

Выполним подстановку $t=2x-1$. Выразив x через t, получим замену переменной $x=\frac{1}{2}(t+1)$ и поэтому имеем $\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(t+1)'\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\mathrm{d}t$.

Подставляя x и $\mathrm{d}x$ в неопределенный интеграл $\int x(2x-1)^5\,\mathrm{d}x$, получим

$$\int \frac{1}{2}(t+1)\cdot t^5\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int(t^6+t^5)\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\left(\frac{t^7}{7}+\frac{t^6}{6}\right).$$

Вернувшись к исходной переменной x посредством подстановки $t=2x-1$, получим, что одной из первообразных для функции $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x(2x-1)^5$, является функция $F:[0,1]\to\mathbb{R}$,

$$F(x)=\int x(2x-1)^5\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\left(\frac{(2x-1)^7}{7}+\frac{(2x-1)^6}{6}\right)=$$

$$=\frac{1}{168}(12x+1)(2x-1)^6.$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$$

Согласно формуле Ньютона–Лейбница имеем:

$$I=F(1)-F(0)=\frac{13}{168}-\frac{1}{168}=\frac{1}{14}.$$

2 Вычислим интеграл $I=\int_1^{27}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[6]{x}(1+\sqrt[3]{x})}$.

Решение:

Выберем такую замену для переменной x, чтобы можно было извлечь оба корня. Положим $x=t^6$. Тогда $\mathrm{d}x=(t^6)'\mathrm{d}t=6t^5\mathrm{d}t$. Очевидно, что $x=t^6$ принадлежит отрезку $[1, 27]$ при t, принадлежащем отрезку $[1,\sqrt{3}]$ или отрезку $[-\sqrt{3},-1]$. Рассмотрим положительные значения t, $t\in[1,\sqrt{3}]$. Тогда $\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{t^6}=t^2$ и $\sqrt[6]{x}=\sqrt[6]{t^6}=|t|=t$. Заменив x и $\mathrm{d}x$ в неопределенном интеграле и вернувшись к исходной переменной x, получим, что одной из первообразных для подынтегральной функции на отрезке $[1, 27]$ есть функция $F:[1,27]\to\mathbb{R}$,

$$F(x)=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[6]{x}(1+\sqrt[3]{x})}=6\int\frac{t^5\mathrm{d}t}{t(1+t^2)}=6\int\frac{t^4-1+1}{1+t^2}\mathrm{d}t=6\int\left(t^2-1+\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t=$$

$$=6\left(\frac{t^3}{3}-t+\operatorname{arctg}t\right)=6\left(\frac{\sqrt{x}}{3}-\sqrt[6]{x}+\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}\right).$$

Применив формулу Ньютона–Лейбница, получим:

$$I=F(27)-F(1)=6(\sqrt{3}-\sqrt{3}+\operatorname{arctg}\sqrt{3})-6\left(\frac{1}{3}-1+\operatorname{arctg}1\right)=$$

$$=6\cdot\frac{\pi}{3}-6\left(-\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}+4.$$

3 Вычислим интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\sin^2 x}\cos x\,\mathrm{d}x$.

Решение:

Внесем $\cos x$ под знак дифференциала. Получим, что одной из первообразных для функции $f\colon \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{\sin^2 x}\cos x$, есть функция $F\colon \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int \sqrt[3]{\sin^2 x}\cos x\,\mathrm{d}x = \int \sin^{\frac{2}{3}} x\,\mathrm{d}(\sin x) = \frac{\sin^{\frac{2}{3}+1} x}{\frac{2}{3}+1} = \frac{3}{5}\sin^{\frac{5}{3}} x.$$

Значит, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\sin^2 x}\cos x\,\mathrm{d}x = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = \frac{3}{5}\sin^{\frac{5}{3}}\frac{\pi}{2} - \frac{3}{5}\sin^{\frac{5}{3}} 0 = \frac{3}{5} - 0 = \frac{3}{5}.$

4 Вычислим интеграл $\int\limits_0^1 x(3x^2-1)^5\,\mathrm{d}x$.

Решение:

Поскольку $\mathrm{d}(3x^2-1) = 6x\,\mathrm{d}x$, получим $x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\mathrm{d}(3x^2-1)$.

Внесем переменную x под знак дифференциала. Получим:

$$F(x) = \int x(3x^2-1)^5\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\int (3x^2-1)^5\,\mathrm{d}(3x^2-1) = \frac{1}{6}\cdot\frac{(3x^2-1)^6}{6} = \frac{1}{36}(3x^2-1)^6.$$

Итак, $\int\limits_0^1 x(3x^2-1)^5\,\mathrm{d}x = F(1) - F(0) = \frac{1}{36}\cdot 2^6 - \frac{1}{36} = \frac{7}{4}$.

5 Вычислим интеграл $I = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos x}$.

Решение:

Первообразную определим следующим образом:

$$F(x) = \int \frac{1\cdot\mathrm{d}x}{\sin x\cdot\cos x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x\cdot\cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\cos x} + \int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sin x} =$$

$$= -\int \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos x} + \int \frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\sin x} = -\ln|\cos x| + \ln|\sin x| = \ln|\operatorname{tg} x|.$$

Следовательно, $I = F\left(\frac{\pi}{3}\right) - F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right| - \ln\left|\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right| = \ln\sqrt{3} - \ln\frac{\sqrt{3}}{3} = \ln 3.$

Определенный интеграл можно вычислить методом подстановки согласно формуле, приведенной в следующей теореме:

Теорема 14

(формула замены переменной)

Пусть $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ и $\varphi\colon [\alpha, \beta] \to [a, b]$ – функции, удовлетворяющие свойствам:

а) функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$;

б) функция φ дифференцируема и имеет непрерывную производную φ', отличную от нуля, на отрезке $[\alpha, \beta]$ и $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Тогда имеет место формула:

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t,$$

называемая ***формулой замены переменной***.

Приведем пример вычисления определенного интеграла, используя дважды формулу замены переменной (условия теоремы 14 выполняются).

$$\int_{\frac{a}{\sqrt{3}}}^{a} \frac{dx}{x^4\sqrt{a^2+x^2}} = \left\{ \begin{matrix} x = a\,\mathrm{tg}\,t, & x = \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow \mathrm{tg}\,t = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6} \\ dx = \frac{a\,dt}{\cos^2 t}, & x = a \Rightarrow \mathrm{tg}\,t = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} \end{matrix} \right\} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{a\,dt}{\cos^2 t}}{a^4\,\mathrm{tg}^4 t\,\frac{a}{\cos t}} =$$

$$= \frac{1}{a^4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 t\,dt}{\sin^4 t} = \frac{1}{a^4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1-\sin^2 t)\cos t\,dt}{\sin^4 t} = \left\{ \begin{matrix} s = \sin t & t = \frac{\pi}{6} \Rightarrow s = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ ds = \cos t\,dt & t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow s = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{1}{a^4}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{(1-s^2)ds}{s^4} = \frac{1}{a^4}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (s^{-4} - s^{-2})ds = \frac{1}{a^4}\left(-\frac{1}{3s^3} + \frac{1}{s}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} =$$

$$= \frac{1}{a^4}\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3} + \sqrt{2}\right) - \frac{1}{a^4}\left(-\frac{8}{3} + 2\right) = \frac{\sqrt{2}}{3a^4}(1+\sqrt{2}).$$

Задание с решением

Вычислим интеграл: а) $I_1 = \int_0^{\pi} e^{2x}\sin 3x\,dx$; б) $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x\,dx}{\sin x + \cos x}$.

Решение:

а) Применим дважды метод интегрирования по частям для неопределенного интеграла и получим первообразную для функции $f\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x}\sin 3x$.

Имеем:

$$F(x) = \int e^{2x}\sin 3x\,dx = \frac{1}{2}\int \sin 3x\,d(e^{2x}) = \frac{1}{2}[e^{2x}\sin 3x - \int e^{2x}d(\sin 3x)] =$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}\cdot\sin 3x - \frac{3}{2}\int e^{2x}\cos 3x\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cdot\sin 3x - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \cos 3x\,d(e^{2x}) =$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{4}[e^{2x}\cos 3x - \int e^{2x}d(\cos 3x)] = \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{4}e^{2x}\cos 3x - \frac{3}{4}\cdot 3\int e^{2x}\sin 3x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{4}e^{2x}\cos 3x - \frac{9}{4}\cdot F(x).$$

Перенесем последнее слагаемое в левую часть равенства и получим:

$$\frac{13}{4}F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{4}e^{2x}\cos 3x,$$

или

$$F(x) = \frac{1}{13}e^{2x}(2\sin 3x - 3\cos 3x).$$

Поскольку $F(0) = \frac{1}{13}(2\sin 0 - 3\cos 0) = -\frac{3}{13}$, $F(\pi) = \frac{1}{13}e^{2\pi}(2\sin 3\pi - 3\cos 3\pi) = \frac{3}{13}e^{2\pi}$, из формулы Ньютона–Лейбница следует:

$$I_1 = F(\pi) - F(0) = \frac{3}{13}(e^{2\pi} + 1).$$

б) Для вычисления интеграла I_2 рассмотрим интеграл $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x\,dx}{\sin x + \cos x}$. При сложении и вычитании интегралов I_2 и I_3 получим соответственно:

$$I_2 + I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\sin x + \cos x)dx}{\sin x + \cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = \frac{\pi}{4};$$

$$I_2 - I_3 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\sin x - \cos x)\mathrm{d}x}{\sin x + \cos x} = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} = -\ln|\sin x + \cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2}\ln 2.$$

Из системы уравнений $\begin{cases} I_2 + I_3 = \dfrac{\pi}{4} \\ I_2 - I_3 = -\dfrac{1}{2}\ln 2 \end{cases}$ следует, что $I_2 = \dfrac{1}{8}(\pi - 2\ln 2)$, $I_3 = \dfrac{1}{8}(\pi + 2\ln 2)$.

Упражнения и задачи

Б

1. Применив метод интегрирования по частям для нахождения одной из первообразных, вычислите интеграл:

а) $\int\limits_0^{\pi} x\cos x\,\mathrm{d}x$; б) $\int\limits_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x$;

в) $\int\limits_0^{2\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x$; г) $\int\limits_1^e x^2\ln x\,\mathrm{d}x$;

д) $\int\limits_1^4 \sqrt{x}\ln x\,\mathrm{d}x$; е) $\int\limits_1^e \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$;

ж) $\int\limits_0^{\pi} (x+1)\cos 2x\,\mathrm{d}x$; з) $\int\limits_{-1}^1 xe^{-x}\mathrm{d}x$;

и) $\int\limits_{-\frac{3}{2}}^0 (3x+1)e^{-2x}\mathrm{d}x$; к) $\int\limits_{\pi}^{2\pi} (1-2x)\sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x$;

л) $\int\limits_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x$; м) $\int\limits_1^2 \log_2 x\,\mathrm{d}x$;

н) $\int\limits_0^1 x^2e^x\mathrm{d}x$; о) $\int\limits_0^1 x\cdot 2^x\,\mathrm{d}x$.

2. Используя указанную подстановку для нахождения одной из первообразных, вычислите интеграл:

а) $\int\limits_{-1}^1 x(1+x)^4\mathrm{d}x,\ 1+x=t$; б) $\int\limits_{-1}^0 \frac{x\,\mathrm{d}x}{(2+x)^3},\ 2+x=t$;

в) $\int\limits_1^4 \frac{\mathrm{d}x}{2x+1},\ 2x+1=t$; г) $\int\limits_0^1 \sqrt{4+5x}\,\mathrm{d}x,\ 4+5x=t$;

д) $\int\limits_0^{\frac{1}{3}} 2^{1-3x}\mathrm{d}x,\ 1-3x=t$; е) $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1+7x}},\ 1+7x=t$;

ж) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x,\ \frac{x}{2}=t$; з) $\int\limits_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2\frac{x}{3}},\ \frac{x}{3}=t$.

3. Применив метод интегрирования по частям для нахождения одной из первообразных, вычислите определенный интеграл:

а) $\int\limits_2^4 (2x-1)\ln x\,\mathrm{d}x$; б) $\int\limits_0^2 x\ln(2+x)\mathrm{d}x$;

в) $\int\limits_0^1 \ln(1+x^2)\mathrm{d}x$; г) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$;

д) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \arccos x\,\mathrm{d}x$; е) $\int\limits_0^1 x\operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$;

ж) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$; з) $\int\limits_1^{\sqrt{3}} x^3e^{x^2}\mathrm{d}x$;

и) $\int\limits_0^{\sqrt{2}} x^5e^{-x^2}\mathrm{d}x$; к) $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (\arcsin x)^2\mathrm{d}x$;

л) $\int\limits_1^e \frac{\ln^2 x}{x^3}\mathrm{d}x$; м) $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^3}\mathrm{d}x$;

н) $\int\limits_1^e \ln^3 x\,\mathrm{d}x$; о) $\int\limits_0^1 x^3e^{-x}\mathrm{d}x$;

п) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} (3x^2-5x-2)e^{2x}\mathrm{d}x$; р) $\int\limits_{-2}^0 (1-3x-x^2)\sin\frac{\pi x}{2}\mathrm{d}x$;

с) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1)\cos^2 x\,\mathrm{d}x$; т) $\int\limits_0^{\pi} e^x\cos x\,\mathrm{d}x$;

у) $\int\limits_e^{e^2} \ln x\,\mathrm{d}x$; ф) $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arcsin x\,\mathrm{d}x$.

4. Используя формулу замены переменной для нахождения одной из первообразных, вычислите определенный интеграл:

а) $\int\limits_1^9 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$; б) $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x}}$;

в) $\int\limits_1^{64} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}}$; г) $\int\limits_1^2 x^2\sqrt{2-x}\,\mathrm{d}x$;

д) $\int\limits_0^1 x\sqrt[3]{1-2x}\,\mathrm{d}x$; е) $\int\limits_0^1 \frac{x^2\mathrm{d}x}{1+x^6}$;

ж) $\int\limits_0^2 x^2\sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x$; з) $\int\limits_0^1 x^9\sqrt{1+3x^5}\,\mathrm{d}x$;

и) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos^3 x\,\mathrm{d}x$;

к) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sin^4 x}$;

л) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\,\mathrm{d}x$;

м) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\sin^3 x\,\mathrm{d}x$;

н) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\sin^3 x\,\mathrm{d}x$;

о) $\int\limits_e^{e^2} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^3}$;

п) $\int\limits_{e^e}^{e^{\sqrt{e}}} \frac{\mathrm{d}x}{x\cdot\ln x\cdot\ln(\ln x)}$;

р) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x$;

с) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x-\sin x}{1+\sin 2x}\mathrm{d}x$;

т) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\sin x}}\mathrm{d}x$.

5. Выполните подходящую замену переменной для нахождения одной из первообразных, а затем вычислите определенный интеграл:

а) $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x-1}}{x}\mathrm{d}x$;

б) $\int\limits_{\ln 3}^{3\ln 2} \sqrt{1+e^x}\,\mathrm{d}x$;

в) $\int\limits_0^7 \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}{x+1}\mathrm{d}x$;

г) $\int\limits_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$;

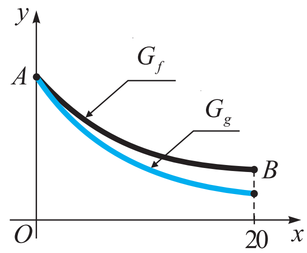
д) $\int\limits_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^3}$;

е) $\int\limits_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$;

ж) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2\mathrm{d}x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$;

з) $\int\limits_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}x}{1+e^{x+1}}$.

6. На рисунке точки A и B расположены на склоне горы (масштаб 1:100 м). Дуга AB задана функцией $f\colon [0, 20]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{288}{(x+6)^2}$.



В точке A расположен источник, который протекает по склону горы и впадает в море, образуя водопад. На протяжении лет вода образовала каньон, который сейчас задается функцией $g\colon [0, 20]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{200}{(x+5)^2}$.

а) Найдите высоту точек A и B над уровнем моря, заданным осью Ox.

б) Какова высота водопада?

в) Найдите площадь сечения каньона на протяжении всей длины ручья.

г) Найдите количество горной породы, вымытой водой при образовании каньона, если его ширина равна 3 м.

7. Докажите, что значения $a\in\mathbb{R}$, $a\geq 2$, удовлетворяют неравенству $\int\limits_1^a (a-4x)\,\mathrm{d}x\leq -4$.

Упражнения и задачи на повторение

A

1. Вычислите определенный интеграл:

а) $\int\limits_{-1}^2 (x-6x^2)\mathrm{d}x$;

б) $\int\limits_0^1 (2x+1)(3x-2)\mathrm{d}x$;

в) $\int\limits_{-1}^0 (1-3x)^2\,\mathrm{d}x$;

г) $\int\limits_1^4 (\sqrt{x}-3x^2)\mathrm{d}x$;

д) $\int\limits_0^1 (6\sqrt[5]{x}+4\sqrt[3]{x})\mathrm{d}x$;

е) $\int\limits_1^9 \frac{1+x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;

ж) $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \left(2\sin x-\cos\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$;

з) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{3}{\cos^2 x}-\frac{2}{\sin^2 2x}\right)\mathrm{d}x$;

и) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$;

к) $\int\limits_{-1}^1 (e^{x+1}-2e^{2x})\mathrm{d}x$;

л) $\int\limits_0^1 (2\cdot 4^x-3\cdot 2^{x+1})\mathrm{d}x$;

м) $\int\limits_0^2 (e^x-1)^2\,\mathrm{d}x$;

н) $\int\limits_0^2 \left(x-\frac{8}{4x+1}\right)\mathrm{d}x$;

о) $\int\limits_0^4 (\sqrt{2x+1}+2\sqrt{x})\mathrm{d}x$;

п) $\int\limits_0^1 \left(\frac{4}{1+2x}-\frac{5}{\sqrt{4+5x}}\right)\mathrm{d}x$.

2. Вычислите площадь подграфика функции f:

а) $f: \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos x$;

б) $f: [0, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = x + x^2$.

3. Найдите точку $a \in [1, 6]$ такую, чтобы вертикальная прямая, проведенная через эту точку, разделила бы участок земли, заданный подграфиком функции $f: [1, 6] \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x - 1$, на две части одинаковой площади. Вычислите площадь участка, если масштаб на каждой координатной оси равен 1:10 м. Найдите приближенное значение расстояния между точкой деления $a \in [1, 6]$ и левым краем участка.

Б

1. Вычислите определенный интеграл:

а) $\int\limits_{-1}^{1}(8x^3 - x^2 + 4x - 3)\mathrm{d}x$; б) $\int\limits_{0}^{9}(4\sqrt[3]{3x} - 6\sqrt{x})\mathrm{d}x$;

в) $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{1}\left(\frac{6}{3x+1} - 2x^2\right)\mathrm{d}x$; г) $\int\limits_{0}^{1}\left(5x\sqrt{x} - \frac{14}{\sqrt[3]{7x-8}}\right)\mathrm{d}x$;

д) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{4}{\cos^2 2x} - \sin 3x\right)\mathrm{d}x$; е) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}}(3\sin^2 x\cos x + \cos 2x)\,\mathrm{d}x$;

ж) $\int\limits_{-1}^{0} x\sqrt{4-5x}\,\mathrm{d}x$; з) $\int\limits_{-2}^{5}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{3+x}}$;

и) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{11\sin x + 25}\cos x\mathrm{d}x$; к) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x\mathrm{d}x}{\sqrt{3\cos 2x + 1}}$;

л) $\int\limits_{-1}^{0} xe^{-3x}\mathrm{d}x$; м) $\int\limits_{1}^{e} x^3\ln x\mathrm{d}x$;

н) $\int\limits_{0}^{1}(x^2 + x)e^{2x}\mathrm{d}x$; о) $\int\limits_{-1}^{1}(x^2 - x)\cos\pi x\mathrm{d}x$;

п) $\int\limits_{-1}^{1}|2 - 3x|\,\mathrm{d}x$; р) $\int\limits_{-1}^{2}(|x| + |1 - x|)\mathrm{d}x$.

2. Вычислите определенный интеграл:

а) $\int\limits_{-2}^{3} f(x)\mathrm{d}x,\ f: [-2, 3] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ если } x \in [-2, 0], \\ x^3, \text{ если } x \in (0, 1), \\ x, \text{ если } x \in [1, 3]; \end{cases}$$

б) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x,\ f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x}{1 - \sin^2 x}, \text{ если } x \in \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right], \\ \dfrac{\sin x}{1 + 4\cos^2 x}, \text{ если } x \in \left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

3. Докажите, что если функция $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывная, то:

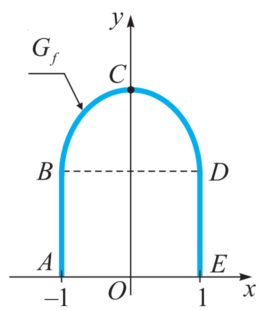
$$\int\limits_{a}^{b}[f(a + b - x) - f(x)]\mathrm{d}x = 0.$$

4. Найдите экстремумы функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int\limits_{x}^{2x+1}(1 + 2t)\mathrm{d}t.$$

5. На рисунке изображено дворцовое окно, где дуга BC задается функцией $f: [-1, 0] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{5}(25 + 8x - 2x^2).$$



а) Найдите размеры AE, AB и OC окна, если масштаб на каждой координатной оси равен 1:1 м.

б) Найдите площадь окна.

в) Сколько стекла необходимо для всех 15 дворцовых окон, если известно, что 90% поверхности окна остеклено?

г) Какова стоимость необходимого стекла, если цена 1 м² витражного стекла 500 леев?

Проверочная работа

Время выполнения работы: 90 минут

А

1. Используя формулу Ньютона–Лейбница, вычислите интеграл: 3

а) $\int_{-2}^{2}(x-2)(x+1)\mathrm{d}x$; б) $\int_{1}^{4}\frac{(x+1)}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$; в) $\int_{\frac{1}{4}}^{1}(128x^3-3\sqrt{x})\mathrm{d}x$.

2. Используя формулу Ньютона–Лейбница, вычислите интеграл: 3

а) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(4\cos 2x-\frac{1}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x$; б) $\int_{0}^{1}(2^{x+2}+4^{x+1})\mathrm{d}x$; в) $\int_{0}^{1}\left(\frac{2}{x+1}-3\sqrt{1+8x}\right)\mathrm{d}x$.

3. Изобразите плоскую фигуру, площадь которой задается интегралом $\mathcal{A}=\int_{-1}^{1}2^{-x}\mathrm{d}x$. 1

4. Дуга AB, заданная графиком функции $f\colon[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, представляет собой форму трассы для соревнования скейбордистов (масштаб на каждой координатной оси равен 1:4 м). Подграфик функции f представляет собой поперечное сечение трассы. 3

а) Найдите площадь поперечного сечения спортивной трассы.

б) Какое количество бетона потребовалось для заливки этой трассы, если ее длина равна 9 м?

Б

1. Используя формулу Ньютона–Лейбница, вычислите интеграл: 2

а) $\int_{-1}^{1}(x-2)(x-1)^2\mathrm{d}x$; б) $\int_{0}^{2}(5\sqrt[4]{8x}-3\sqrt{2x})\mathrm{d}x$.

2. Методом интегрирования по частям, вычислите интеграл: 2

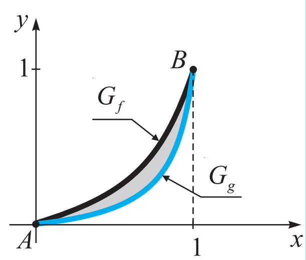
а) $\int_{0}^{1}x\ln(x+1)\mathrm{d}x$; б) $\int_{-1}^{0}(x^2-x-2)e^{-2x}\mathrm{d}x$.

3. Методом замены переменной или выполнив соответствующие преобразования, или раскрыв модуль, вычислите интеграл: 3

а) $\int_{-1}^{6}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{2+x}}$; б) $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos^3 x\,\mathrm{d}x}{1-\sin^4 x}$; в) $\int_{-1}^{1}|x-x^2|\,\mathrm{d}x$.

4. Пусть $f\colon[1,2]\to\mathbb{R}$ – непрерывная функция такая, что $\int_{1}^{2}f(x)\mathrm{d}x=\frac{15}{4}$. Докажите, что существует $c\in(1,2)$, при котором $f(c)=c^3$. 1

5. На рисунке изображено поперечное сечение санной трассы (масштаб 1:100 м на каждой координатной оси). Дуги, соединяющие точки A и B, задаются функциями $f, g\colon[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, $g(x)=x^{\frac{21}{10}}$. 2



а) Найдите площадь поперечного сечения трассы.

б) Какое количество снега разбросали с трассы, если ее ширина варьируется от 1,5 м до 2 м?

Определенный интеграл

Отрезок
$[a, b],\ a, b \in \mathbb{R}$

Разбиение отрезка
$T = (x_0, x_1, \ldots, x_n),\ n \geq 1,$
$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$

Норма разбиения
$\| T \| = \max\limits_{0 \leq k \leq n-1} \Delta x_k$, где
$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$

Функция
$f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$

Система промежуточных точек
$\xi = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$
$\xi_k \in [x_k, x_{k+1}],\ k = \overline{0, n-1}$

Интегральная сумма
$\sigma(T, \xi) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$

Предел интегральной суммы
$I = \lim\limits_{\|T\| \to 0} \sigma(T, \xi)$

Интегрируемая функция
$f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$
$\lim\limits_{\|T\| \to 0} \sigma(T, \xi) = I,\ I \in \mathbb{R}$

Определенный интеграл от функции f на отрезке $[a, b]$
$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = I = \lim\limits_{\|T\| \to 0} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k,\ I \in \mathbb{R}$

Геометрический смысл
$\mathcal{A} = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ – площадь подграфика функции $f\colon [a, b] \to \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$

Необходимое условие интегрируемости
f – ограниченная на отрезке $[a, b]$

Классы интегрируемых функций на отрезке $[a, b]$
а) непрерывные функции;
б) монотонные функции.

Свойства определенного интеграла

1° а) $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x$; б) $\int\limits_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$.

2° $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x$ – свойство аддитивности определенного интеграла.

3° $\int\limits_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\mathrm{d}x = \lambda\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x + \mu\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$ – свойство линейности определенного интеграла.

4° Если $f(x) \geq 0,\ x \in [a, b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$.

5° Если $f(x) \leq g(x),\ x \in [a, b]$, то
$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

6° $\left|\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

7° Если $m \leq f(x) \leq M,\ x \in [a, b]$, то
$m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a)$.

8° Если $m \leq f(x) \leq M,\ (x \in [a, b])$, то
$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \mu(b-a)$, где $\mu \in [m, M]$
(теорема о среднем значении для интегрируемых функций).

9° Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(c)(b-a)$, где $c \in (a, b)$
(теорема о среднем значении для непрерывных функций).

10° Число $M[f] = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ называется средним значением функции f на отрезке $[a, b]$.

Формулы и методы вычисления определенного интеграла

а) Формула Ньютона–Лейбница:
$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, где $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ – первообразная для функции f.

б) Метод интегрирования по частям:
$\int\limits_a^b u\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\mathrm{d}u$.

в) Метод замены переменной:
$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_\alpha^\rho f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$.

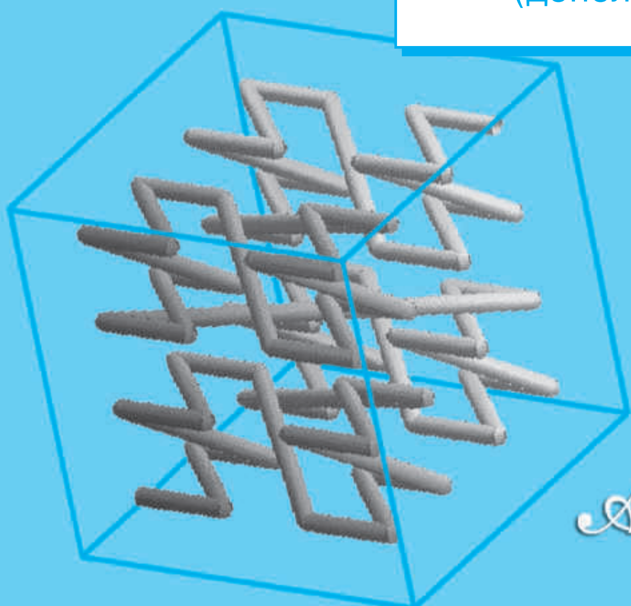
Модуль 4

Приложения определенного интеграла

Цели модуля

- приложение определенного интеграла при вычислении площади подграфика функции;
- *применение определенного интеграла при вычислении объема тела вращения;
- **применение определенного интеграла при вычислении длины графика функции и площади поверхности вращения.

1. Площадь подграфика функции
2. Объем тела вращения
3. Вычисление длины графика функции и площади поверхности вращения (дополнительный материал)



$$\mathscr{A}(\Gamma_f) = \int_a^b f(x)dx$$

Анри Леон Лебег (1875–1941) – французский математик

Задачи нахождения площадей плоской фигуры и поверхности вращения, длины графика функции или объема тела вращения способствовали развитию интегрального исчисления.

О. Л. Коши и Б. Риман являются основателями классической теории интегрального исчисления для действительной функции от действительной переменной. Позднее А. Л. Лебег основал современную теорию интегрального исчисления и меры (длины и площади).

Для определения площади геометрической фигуры или геометрического тела, объема геометрического тела или длины графика функции будем использовать известные геометрические фигуры и тела: прямоугольник и усеченный конус (для площади), цилиндр (для объема), отрезок (для длины).

§ 1 ПЛОЩАДЬ ПОДГРАФИКА ФУНКЦИИ

В модуле 3 мы установили, что определенный интеграл $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ геометрически представляет собой площадь плоской фигуры, ограниченной графиком непрерывной положительной функции $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, осью абсцисс и прямыми $x = a$, $x = b$. Множество точек такой плоской фигуры называется ***подграфиком функции f*** (или ***криволинейной трапецией***). Обозначают:

$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}$, $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (рис. 4.1). Это множество имеет площадь, которую находят по формуле:

$$\boxed{\mathscr{A}(\Gamma_f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x}. \qquad (1)$$

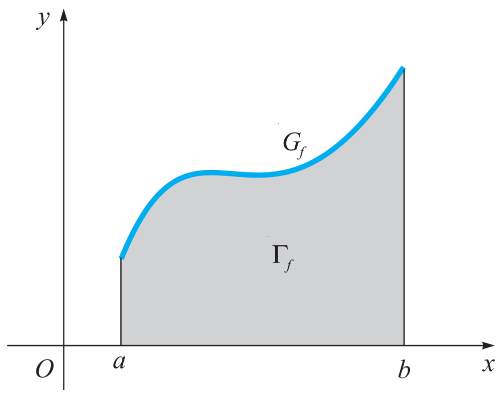


Рис. 4.1

Сначала изложим интуитивный метод вывода формулы (1).

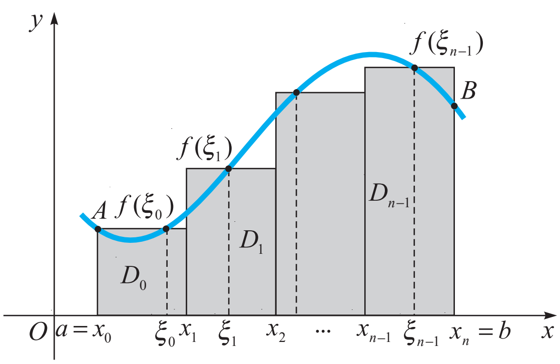


Рис. 4.2

Рассмотрим график функции $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, положительной на отрезке $[a, b]$ (рис. 4.2). Разобьем отрезок $[a, b]$ на n отрезков (необязательно конгруэнтных) при помощи точек деления $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Обозначим это разбиение через $T = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$. На каждом частичном отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ длины $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ зафиксируем произвольную точку ξ_k, $k = \overline{0, n-1}$. Обозначим через D_k прямоугольник с основанием $[x_k, x_{k+1}]$ и высотой $f(\xi_k)$, $k = \overline{0, n-1}$. Тогда, с геометрической точки зрения, действительное число $\sigma(T,\xi)=\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$ является суммой площадей прямоугольников D_k. Интуитивно, если разбиение T выбрано достаточно мелким, то соответствующая интегральная сумма $\sigma(T,\xi)$ будет сколь угодно мало отличаться от площади множества Γ_f. Поскольку $\sigma(T,\xi)$ является суммой Римана, а f – непрерывная функция, а значит, интегрируема, то вышесказанное в некоторой степени обосновывает то, что площадь множества Γ_f можно найти по формуле (1).

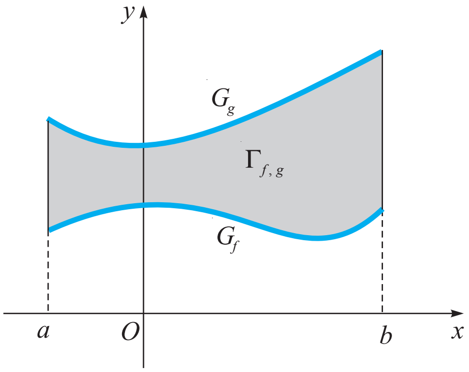


Рис. 4.3

1. Рассмотрим непрерывные функции $f, g: [a, b]\to\mathbb{R}$ такие, что $0\le f(x)\le g(x),\ \forall x\in[a, b]$.
Тогда множество $\Gamma_{f,g}=\{(x, y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x\le b,\ f(x)\le y\le g(x)\}$ (рис. 4.3), ограниченное графиками функций f, g и прямыми $x=a,\ x=b$, параллельными оси Oy, имеет площадь и

$$\boxed{\mathscr{A}(\Gamma_{f,g})=\int_a^b (g(x)-f(x))\mathrm{d}x}. \qquad (2)$$

Формулу (2) можно получить непосредственно из (1), используя соотношение:

$$\mathscr{A}(\Gamma_{f,g})=\mathscr{A}(\Gamma_g)-\mathscr{A}(\Gamma_f).$$

Замечание

Если непрерывная функция f отрицательна $(f(x)<0,\ \forall x\in[a, b])$, то ее график расположен под осью Ox (рис. 4.4). Обозначим подграфик этой функции через $\Gamma_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \big|\ a\le x\le b,\ f(x)\le y\le 0\}$. График функции $-f$ расположен над осью Ox, так как $-f(x)=|f(x)|>0$. Графики функций f и $-f$ симметричны относительно оси Ox, значит, площади поверхностей $abBA$ и соответственно $abB'A'$ равны. Но поверхность $abB'A'$ является подграфиком функции $-f=|f|$ и его площадь равна интегралу от этой функции:

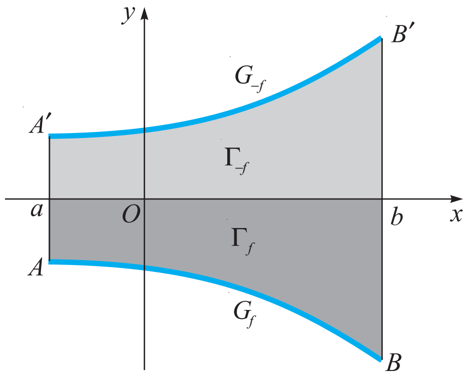


Рис. 4.4

$$\mathscr{A}(\Gamma_{-f})=\int_a^b[-f(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Следовательно,

$$\boxed{\mathscr{A}(\Gamma_f)=\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}.$$

2. Рассмотрим случай, когда хотя бы одна из этих двух функций отрицательна. Пусть, например, $f(x)<0,\ g(x)\ge 0,\ \forall x\in[a, b]$ (рис. 4.5).

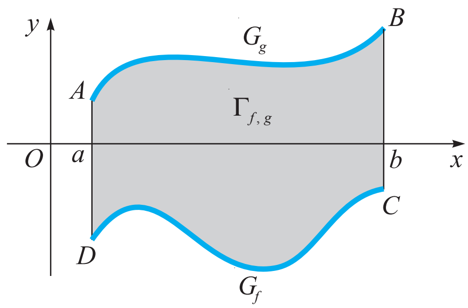


Рис. 4.5

Заметим, что площадь фигуры $ABCD$ равна сумме площадей

$$\mathscr{A}(abBA)=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \text{ и } \mathscr{A}(DCba)=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Следовательно, $\mathscr{A}(\Gamma_{f,g})=\int_a^b (g(x)-f(x))\,\mathrm{d}x.$

Таким образом, формула (2) справедлива и в этом случае.

Аналогично рассматривается случай, когда обе функции отрицательны. При этом площадь множества $\Gamma_{f,g}$ вычисляется по формуле (2) при $g(x)\geq f(x)$, $\forall x\in[a, b]$.

Следствие

Если пренебречь условием $g(x)\geq f(x)$, $\forall x\in[a, b]$, то площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций f, g и прямыми $x=a$, $x=b$ (рис. 4.6), выражается формулой

$$\boxed{\mathscr{A}(\Gamma_{f,g})=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x}. \qquad (3)$$

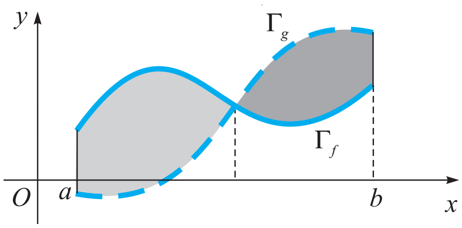


Рис. 4.6

Задания с решением

1 Найдем площадь треугольника OAB с вершинами $O(0, 0)$, $A(a, b)$ и $B(a, b')$, $b'>b$.

Решение:

Заметим, что прямая OA является графиком функции $f\colon [0, a]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{b}{a}x$, а прямая OB – графиком функции $g\colon [0, a]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{b'}{a}x$ (рис. 4.7).

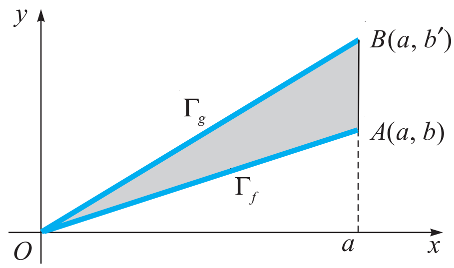


Рис. 4.7

В силу формулы (2) получим: $\mathscr{A}(\Delta OAB)=\int_0^a\left(\frac{b'}{a}x-\frac{b}{a}x\right)\mathrm{d}x=\frac{b'-b}{a}\cdot\frac{a^2}{2}=\frac{b'-b}{2}a.$

2 Вычислим площадь фигуры, ограниченной прямыми $y=0$, $y=\frac{1}{3}x$, $x=1$ и $x=3$.

Решение:

Полученная фигура $ABCD$ является трапецией, у которой $BC=1$, $AD=\frac{1}{3}$, $AB=2$ (рис. 4.8). Площадь трапеции $ABCD$ равна $\mathscr{A}=\int_1^3 \frac{1}{3}x\,\mathrm{d}x=\left.\frac{x^2}{3\cdot 2}\right|_1^3=\frac{4}{3}.$

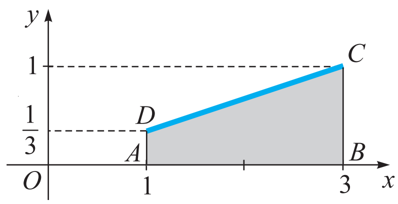


Рис. 4.8

3 Вычислим площадь поверхности, заключенной между графиками функций $f, g\colon [0, 2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, $g(x)=2$ (рис. 4.9).

Решение:

Решим систему уравнений $\begin{cases} y=x^2 \\ y=2 \end{cases}$ и найдем координаты точки пересечения этих графиков: $M(\sqrt{2}, 2)$.

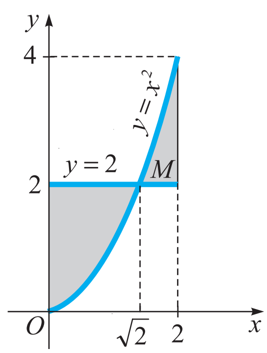


Рис. 4.9

По формуле (3): $\mathscr{A}=\int\limits_0^2|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\sqrt{2}}(2-x^2)\mathrm{d}x+\int\limits_{\sqrt{2}}^2(x^2-2)\mathrm{d}x=$

$$=2x\Big|_0^{\sqrt{2}}-\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\sqrt{2}}+\frac{x^3}{3}\Big|_{\sqrt{2}}^2-2x\Big|_{\sqrt{2}}^2=\frac{4}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

4 Найдем площадь круга радиуса r $(r>0)$.

Решение:

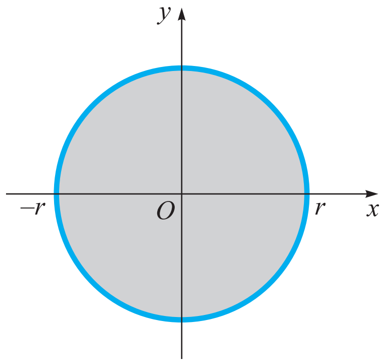


Рис. 4.10

Рассмотрим прямоугольную систему координат xOy, начало которой совпадает с центром заданного круга (рис. 4.10). Окружность, ограничивающая этот круг, есть объединение графиков функций:

$f,\ g\colon[-r,\ r]\to\mathbb{R},\ \ f(x)=\sqrt{r^2-x^2},\ \ g(x)=-\sqrt{r^2-x^2}.$

Тогда площадь круга равна:

$$\mathscr{A}=\int\limits_{-r}^{r}[\sqrt{r^2-x^2}-(-\sqrt{r^2-x^2})]\mathrm{d}x=2\int\limits_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Посредством замены переменной $x=r\sin t,\ \mathrm{d}x=r\cos t\,\mathrm{d}t,\ t\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$, получим:

$$\mathscr{A}(\Gamma_{f,g})=\int\limits_a^b[g(x)-f(x)]\mathrm{d}x$$

$$\mathscr{A}=2r\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}r\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t=2r^2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=2r^2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t=$$

$$=r^2\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=r^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\pi r^2.$$

5 Вычислим площадь фигуры, ограниченной графиками функций $f,\ g\colon[0,\ 2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2,\ \ g(x)=x^3-x^2+x-1.$

Решение:

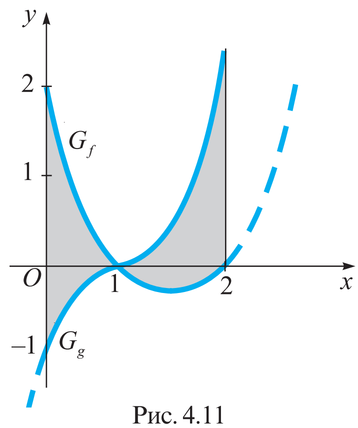


Рис. 4.11

Сначала найдем абсциссы точек пересечения этих графиков и установим интервалы, на которых $f(x)>g(x)$, и интервалы, на которых $f(x)<g(x),\ x\in[0,\ 2]$ (рис. 4.11).

Решим уравнение $x^2-3x+2=x^3-x^2+x-1$, $x\in[0,\ 2]$, и получим решение $x=1$.

Из рисунка 4.11 можно заключить, что $f(x)>g(x)$ на интервале $(0,\ 1)$ и $f(x)<g(x)$ на интервале $(1,\ 2)$. Следовательно,

$$\mathscr{A}=\int\limits_0^2[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x=\int\limits_0^1[(x^2-3x+2)-(x^3-x^2+x-1)]\mathrm{d}x+$$

$$+\int\limits_1^2[(x^3-x^2+x-1)-(x^2-3x+2)]\mathrm{d}x=$$

$$=\int\limits_0^1(2x^2-x^3-4x+3)\mathrm{d}x+\int\limits_1^2(x^3-2x^2+4x-3)\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{2}{3}x^3\Big|_0^1-\frac{x^4}{4}\Big|_0^1-2x^2\Big|_0^1+3x\Big|_0^1+\frac{x^4}{4}\Big|_1^2-\frac{2}{3}x^3\Big|_1^2+2x^2\Big|_1^2-3x\Big|_1^2=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}.$$

Замечание

Если плоская однородная пластинка (тело, масса которого пропорциональна его площади и толщина которого игнорируется) определена графиком функции $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ (совпадает с подграфиком Γ_f), то координаты центра тяжести (x_0, y_0) этой пластинки (рис. 4.12) равны:

$$\boxed{x_0=\frac{1}{\mathcal{A}}\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x,\ \ y_0=\frac{1}{2\mathcal{A}}\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}, \quad (4)$$

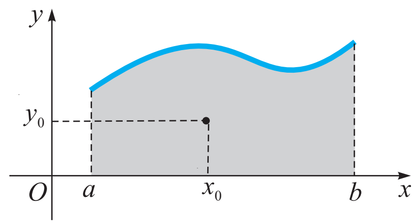


Рис. 4.12

где $\mathcal{A}$ – площадь подграфика функции f:

$$\mathcal{A}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

6 Найдем координаты центра тяжести плоской однородной пластинки, совпадающей с подграфиком функции $f:[0,a]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{ax}\ (a>0)$ (рис. 4.13).

Решение:

Вычислим площадь подграфика функции f:

$$\mathcal{A}=\int_0^a\sqrt{ax}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a=\frac{2}{3}a^2.$$

Вычислим интегралы :

$$\int_0^a xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^a x\sqrt{ax}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{5}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^a=\frac{2}{5}a^3;$$

$$\int_0^a f^2(x)\mathrm{d}x=\int_0^a ax\,\mathrm{d}x=\frac{a}{2}x^2\Big|_0^a=\frac{a^3}{2}.$$

Применим формулы (4):

$$x_0=\frac{\frac{2}{5}a^3}{\frac{2}{3}a^2}=\frac{3}{5}a,\ \ y_0=\frac{\frac{a^3}{2}}{2\cdot\frac{2}{3}a^2}=\frac{3}{8}a.$$

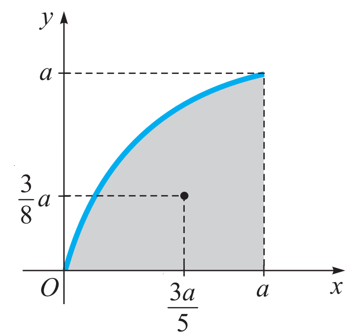


Рис. 4.13

Ответ: $\left(\frac{3}{5}a,\ \frac{3}{8}a\right)$

Упражнения

A

1. Найдите площадь подграфика функции:
   а) $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-2x+4$;
   б) $f:[0,\pi]\to\mathbb{R},\ f(x)=x+\cos x$;
   в) $f:\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin 2x$;
   г) $f:[1,e]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x}$;
   д) $f:[0,\pi]\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos x+3e^x$;
   е) $f:[1,4]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x}$;
   ж) $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=(x-1)^2+1$;
   з) $f:[1,4]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x+1}{x\sqrt{x}}$.

2. Найдите действительное число $a,\ a>0$, такое, чтобы площадь подграфика функции $f:[0,a]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+3$, была равна 4.

3. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $\int_0^t (x^3 - x + 2)\mathrm{d}x = 2t \ \ (t > 0)$;

б) $\int_1^t \left(x^2 - \frac{8}{3}x + 1\right)\mathrm{d}x = t \ \ (t > 1)$.

4. Покажите, что площадь подграфика функции $f\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x + e^x$, больше площади подграфика функции $g\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 2x + 9$.

5. Дана функция $f\colon [0, 30] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{x^2}{40} + \frac{3}{4}x + 20$.

а) Постройте график функции f.

б) Заштрихуйте подграфик функции f.

в) Вычислите площадь (в квадратных метрах) земельного участка, умеющего форму подграфика функции f.

г) Какова стоимость этого участка, если известно, что цена одной сотки равна 30 000 леев?

Б

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

а) $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 16 - x^2$, $g(x) = 0$;

б) $f, g\colon [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$, $g(x) = 0$;

в) $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 7 - x^2$, $g(x) = x^2 - 1$;

г) $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 5 - x$;

д) $f, g\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = e^{2x}$;

е) $f, g\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, $g(x) = 1$.

2. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

а) $f, g\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2$;

б) $f, g\colon \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$, $g(x) = 3\sqrt{\frac{x}{\pi}}$;

в) $f, g\colon [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $g(x) = 3^x$.

3. Дан квадрат P со стороной $2a$, $a > 0$. Стороны квадрата параллельны осям координат, а его диагонали пересекаются в начале прямоугольной системы координат xOy. Парабола $y = x^2$ делит квадрат P на две части: R_1 и R_2.

а) Найдите площади частей R_1 и R_2.

б) Докажите, что не существуют значения переменной a, при которых площади частей R_1 и R_2 равны.

4. Внутренняя область подграфика функции $f\colon [0, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, разбита графиком функции $g\colon [2, 3] \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2\sqrt{2x}$, на две части. Найдите площадь каждой из этих частей.

5. Найдите координаты центра тяжести плоской однородной пластинки, совпадающей с подграфиком функции:

а) $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x}$;

б) $f\colon \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$;

в) $f\colon [-2, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

6. Докажите, что площадь подграфика функции $f\colon \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x + e^x$, равна площади подграфика функции $g\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sin x + e^{x - \frac{\pi}{2}}$.

7. Дана функция $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \frac{1}{x}$. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции f, наклонной асимптотой графика функции f и прямыми $x = 1$, $x = 2$.

8. Дана функция $f\colon [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - x^2$. Найдите $m \in \mathbb{R}$, при котором прямая $y = mx$ делит площадь подграфика функции f на две части одинаковой площади.

$$\mathcal{A}(\Gamma_{f,g}) = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx$$

§ 2 ОБЪЕМ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Тело вращения задается осью вращения и образующей. Далее рассмотрим тела вращения, для которых осью вращения является ось Ox, а образующей – график некоторой функции $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$.

Определение

Пусть $f\colon [a, b] \to [0, +\infty)$ – непрерывная функция. Множество

$$C_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 \le f^2(x),\ a \le x \le b\}$$

называется **телом вращения, определенным функцией f**, или **телом, полученным при вращении подграфика функции f вокруг оси Ox** (рис. 4.14).

Замечание

Любая точка $(x, f(x))$ графика функции f описывает окружность с центром в точке x и радиусом $f(x)$ (рис. 4.14).

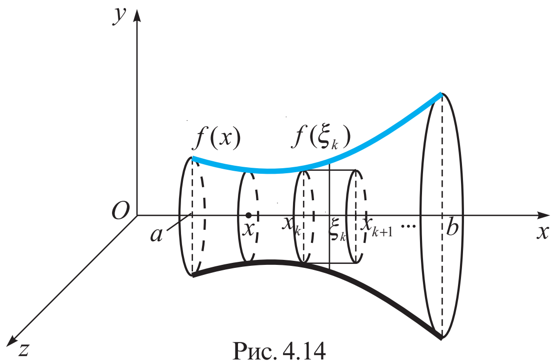


Рис. 4.14

Пусть $T = (x_0, x_1, ..., x_n)$ – произвольное разбиение отрезка $[a, b]$, и на каждом частичном отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ возьмем некоторую точку ξ_k, $k = \overline{0, n-1}$. Тогда прямоугольник с основанием $[x_k, x_{k+1}]$ и высотой $f(\xi_k)$ при вращении вокруг оси Ox образует цилиндр. Объем этого цилиндра равен $\pi f^2(\xi_k)\Delta x_k$, где $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$. Сумма объемов полученных цилиндров равна $\sigma(T, \xi) = \pi \sum_{k=0}^{n-1} f^2(\xi_k)\Delta x_k$ и является суммой Римана, соответствующей функции πf^2, разбиению T и системе промежуточных точек $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$. Интуитивно, если норма разбиения T стремится к нулю, то число $\sigma(T, \xi)$ будет сколь угодно мало отличаться от объема тела вращения C_f. Таким образом, вышесказанное в некоторой степени обосновывает вывод о том, что ***объем тела вращения C_f можно найти по формуле***:

$$\boxed{\mathcal{V}(C_f) = \pi \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}. \qquad (1)$$

Задания с решением

1 Найдем объем шара радиуса r $(r > 0)$.

Решение:

Рассмотрим функцию $f\colon [-r, r], \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$.

При вращении подграфика G_f функции f вокруг оси Ox получим шар радиуса r и с центром в начале прямоугольной системы координат xOy (рис. 4.15). Очевидно, что функция f непрерывна, а значит, интегрируема. Тогда в силу формулы (1),

$$\mathcal{V}(C_f) = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\mathrm{d}x = \pi\left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-r}^{r} =$$

$$= \pi\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) - \pi\left(-r^3 + \frac{r^3}{3}\right) = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

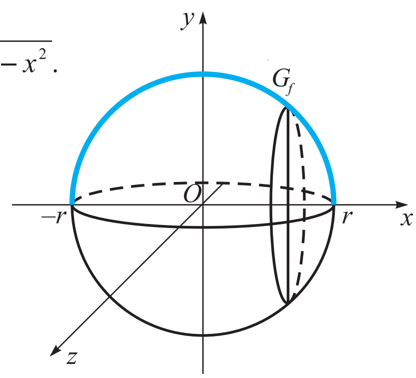


Рис. 4.15

2 Найдем объем усеченного конуса с радиусами оснований r и R и высотой H.

Решение:

Усеченный конус с радиусами оснований r и R и высотой H получим при вращении отрезка AB вокруг оси Ox (рис. 4.16). Так как прямая AB задается уравнением $y=\dfrac{R-r}{H}x+r$, то усеченный конус – это тело вращения, определенное графиком функции $f\colon [0, H]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{R-r}{H}x+r$.

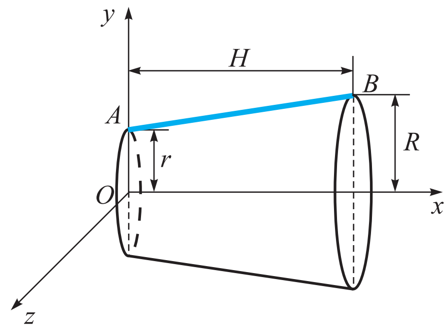


Рис. 4.16

Следовательно, объем полученного тела вращения равен:

$$\mathscr{V}=\pi\int_0^H\left(\frac{R-r}{H}x+r\right)^2\mathrm{d}x=\left\{\begin{matrix}\dfrac{R-r}{H}x=t,\ x=\dfrac{H}{R-r}t,\ x=0\Rightarrow t=0\\ \mathrm{d}x=\dfrac{H}{R-r}\mathrm{d}t,\ x=H\Rightarrow t=R-r\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{\pi H}{R-r}\int_0^{R-r}(t+r)^2\mathrm{d}t=\frac{\pi H}{(R-r)^3}(t+r)^3\Big|_0^{R-r}=\frac{\pi H}{3(R-r)}(R^3-r^3)=\frac{\pi H}{3}(R^2+Rr+r^2).$$

Замечание

Если в последней формуле положить $r=0$, то получим объем конуса радиуса основания R и высоты H, то есть $\mathscr{V}=\dfrac{\pi R^2H}{3}$, а если $r=R$, то получим объем цилиндра радиуса основания R и высоты H, то есть $\mathscr{V}=\pi R^2H$.

3 Цилиндрический котел дополнен внизу частью тела вращения, полученного при вращении параболы $y=\dfrac{h}{d^2}x^2$ $\left(x=d\sqrt{\dfrac{y}{h}}\right)$ вокруг оси Oy.

Осевое сечение этого котла изображено на рисунке 4.17.

Найдем:

а) длину a цилиндрической части котла;

б) площадь осевого сечения S этого котла;

в) объем котла,

при $h=4$ м и $d=1$ м.

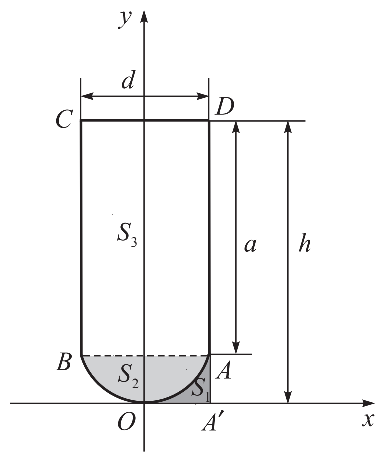


Рис. 4.17

Решение:

а) Значение a получаем из уравнения параболы $y=\dfrac{h}{d^2}x^2$, зная, что точка A принадлежит этой параболе:

$$A'A=\frac{h}{d^2}\cdot\frac{d^2}{4}=\frac{h}{4},\ a=h-\frac{h}{4}=\frac{3h}{4}.$$

б) Площадь фигуры S_1 – это площадь подграфика функции $f\colon\left[0,\dfrac{d}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{h}{d^2}x^2$:

$$\mathscr{A}(S_1)=\int_0^{\frac{d}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{d}{2}}\frac{h}{d^2}x^2\mathrm{d}x=\frac{h}{3d^2}x^3\Big|_0^{\frac{d}{2}}=\frac{hd}{24}.$$

Найдем площадь фигуры S_2, ограниченной дугой параболы AOB и прямой AB:

$$\mathscr{A}(S_2)=AB\cdot AA'-2\mathscr{A}(S_1)=d\cdot\frac{h}{4}-2\frac{hd}{24}=\frac{hd}{6}.$$

Найдем площадь прямоугольника $ABCD$: $\mathcal{A}(S_3)=d\left(h-\frac{h}{4}\right)=\frac{3hd}{4}$.

Итак, площадь осевого сечения S котла равна:

$$\mathcal{A}(S)=\mathcal{A}(S_2)+\mathcal{A}(S_3)=\frac{hd}{6}+\frac{3hd}{4}=\frac{11}{12}hd.$$

в) Обозначим через $\mathcal{V}_1$ и $\mathcal{V}_2$ объемы нецилиндрической части и цилиндрической части котла соответственно. $\mathcal{V}_1$ – объем тела, полученного при вращении подграфика функции $\varphi\colon\left[0, \frac{h}{4}\right]\to\mathbb{R}$, $\varphi(y)=d\sqrt{\frac{y}{h}}$, вокруг оси Oy.

Следовательно, $\mathcal{V}_1=\pi\int_0^{\frac{h}{4}}\varphi^2(y)dy=\frac{\pi d^2}{h}\int_0^{\frac{h}{4}}ydy=\frac{\pi d^2h}{32}$, $\mathcal{V}_2=\frac{3\pi d^2h}{16}$, а

$$\mathcal{V}=\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2=\frac{\pi d^2h}{32}+\frac{3\pi d^2h}{16}=\frac{7\pi d^2h}{32}.$$

При $h=4$ м и $d=1$ м получим: $a=3$ м, $\mathcal{A}(S)=\frac{11}{3}$ м^2 и $\mathcal{V}\approx 2{,}747$ м^3.

Ответ: а) 3 м; б) $\frac{11}{3}$ м^2; в) $\approx 2{,}747$ м^3.

Упражнения

Б

1. Найдите объем тела вращения C_f, определенного функцией:

а) $f\colon[0,\pi]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin^2 x$;

б) $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-\sqrt{x}$;

в) $f\colon[-1,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+1)e^x$;

г) $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}_+$, $f(x)=e^x\cdot\sqrt{x}$;

д) $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\arcsin x$;

е) $f\colon[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+1}, & \text{если } -1\le x\le 0\\ \sin\pi x, & \text{если } 0<x\le 1;\end{cases}$

ж) $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^{\operatorname{arctg}x}}{\sqrt{1+x^2}}$;

з) $f\colon[0,4]\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x^2-4x+3|$;

и) $f\colon[0,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^{-|x-1|}$;

к) $f\colon[1,e]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x$.

2. Найдите натуральное число n, при котором объем тела вращения G_f, определенного функцией $f\colon[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos(n\arccos x)$, равен $\frac{2\pi}{3}$.

3. Найдите объем тела вращения $G_{f,g}$, определенного функцией:

а) $f,g\colon[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, $g(x)=\sqrt{x}$;

б) $f,g\colon[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+1$, $g(x)=\frac{1}{2}(x+1)^2$;

в) $f,g\colon\left[0,\frac{\pi}{3}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{tg}x$, $g(x)=3\sqrt{\frac{x}{\pi}}$.

4. Дана функция $f\colon[0,4]\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}x+3, & 0\le x\le 2\\ -\frac{5}{2}x+10, & 2\le x\le 4.\end{cases}$$

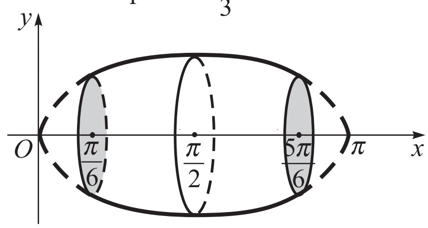
а) Постройте график функции f.

б) Заштрихуйте подграфик функции f.

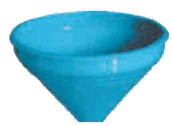
в) Определите, какое геометрическое тело получается при вращении подграфика функции f вокруг оси Ox.

г) Найдите объем полученного тела вращения.

5. Найдите объем бочки, полученной при вращении дуги синусоиды $y=a\sin x$ $(a>0)$ вокруг оси Ox, если длина бочки равна $\frac{2\pi}{3}$.



6. Найдите объем (вместимость) лейки, которая порождена вращением вокруг оси Ox подграфика функции $f\colon[1,e]\to\mathbb{R}_+$, $f(x)=x\ln x$.



$$\mathcal{V}(C_f)=\pi\int_a^b f^2(x)dx$$

§ 3 ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЛИНЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ И ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ (дополнительный материал)

3.1. Длина графика дифференцируемой функции, производная которой – непрерывная функция

Пусть $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ – дифференцируемая функция, производная f' которой тоже непрерывна, и пусть $G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x),\ x \in [a, b]\}$ – график функции f. В этом случае можно доказать, что график G_f имеет длину, которую находят по формуле:

$$\boxed{l(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x}. \qquad (1)$$

Задания с решением

1 Найдем длину окружности радиуса r.

Решение:

Рассмотрим окружность радиуса r с центром в начале прямоугольной системы координат xOy (рис. 4.18), то есть окружность, заданную уравнением $x^2 + y^2 = r^2$. Поскольку функция $g\colon [-r, r] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, недифференцируема в точках $-r$ и r, то формулу (1) нельзя применить.

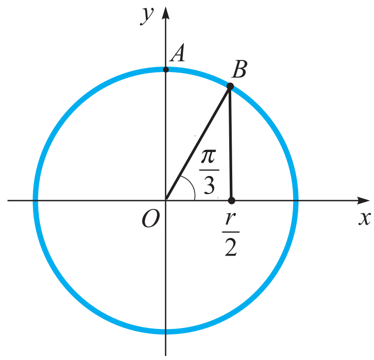


Рис. 4.18

Используя обозначения рисунка 4.18, найдем длину меньшей дуги AB, которая равна двенадцатой части длины окружности. Дуга AB является графиком функции $f\colon \left[0, \dfrac{r}{\sqrt{2}}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Так как $f'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$, то длина окружности равна:

$$\mathscr{L} = 12l(f) = 12\int_0^{\frac{r}{2}} \sqrt{1 + (f'(x)^2}\,\mathrm{d}x = 12\int_0^{\frac{r}{2}} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x = 12r\int_0^{\frac{r}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{r^2 - x^2}} =$$

$$= 12r \arcsin\frac{x}{r}\Big|_0^{\frac{r}{2}} = 12r \arcsin\frac{1}{2} = 2\pi r.$$

2 Вычислим длину графика функции $f\colon \left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(\sin x)$ (рис. 4.19).

Решение:

Поскольку функция f дифференцируема, а ее производная $f'(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ является непрерывной функцией на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, то

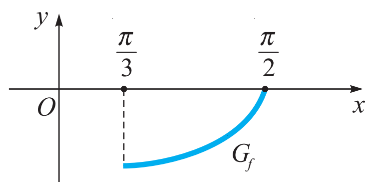


Рис. 4.19

$$l(G_f) = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \ln \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \ln \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = -\ln\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\ln 3.$$

3 Вычислим длину графика функции $f:[\sqrt{3}, \sqrt{8}] \to \mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$ (рис. 4.20).

Решение:

Очевидно, что функция f дифференцируема, а ее производная $f'(x)=\frac{1}{x}$ – непрерывная функция. В этом случае $l(G_f)=\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x$.

Сделаем замену переменной $t=\sqrt{1+x^2}$. Тогда $t=2$ при $x=0$ и $t=3$ при $x=3$, а $x=\sqrt{t^2-1}$, $\mathrm{d}x=\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\mathrm{d}t$.

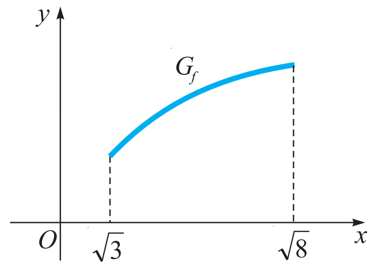


Рис. 4.20

Длина графика функции f равна:

$$l(G_f)=\int\limits_2^3\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\mathrm{d}t=\int\limits_2^3\frac{t^2\mathrm{d}t}{t^2-1}=\int\limits_2^3\mathrm{d}t+\int\limits_2^3\frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}=1+\ln\frac{t-1}{t+1}\bigg|_2^3=1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

3.2. Площадь поверхности вращения

Пусть $f:[a, b]\to\mathbb{R}$ – непрерывная положительная функция. При вращении графика функции f вокруг оси Ox получаем поверхность вращения S_f (рис. 4.21).

Аналитически эта поверхность определяется следующим образом:

$$S_f=\{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3 \mid \sqrt{y^2+z^2}=f(x),\ \ x\in[a, b]\}.$$

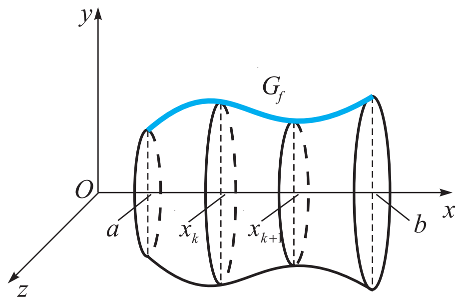


Рис. 4.21

Приводим без доказательства формулу вычисления площади поверхности вращения.

Теорема 1

Пусть $f:[a, b]\to[0, +\infty)$ – дифференцируемая функция, производная которой непрерывна. Тогда поверхность вращения, полученная при вращении вокруг оси Ox графика функции f, имеет площадь, которую можно найти по формуле:

$$\boxed{\mathscr{A}(f)=2\pi\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x}\,. \qquad (2)$$

Задания с решением

1 Найдем площадь поверхности вращения, полученной при вращении графика функции $f:[0, 1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$, вокруг оси Ox (рис. 4.22).

Решение:

Поскольку функция f дифференцируема и ее производная $f'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$, то согласно формуле (2) имеем:

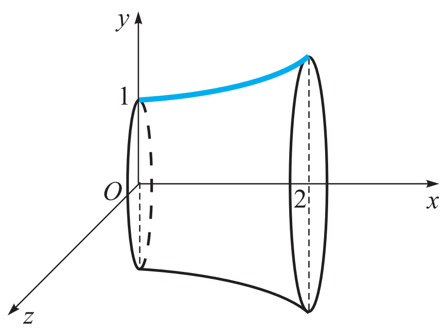


Рис. 4.22

$$\mathscr{A}(f)=2\pi\int_0^1\frac{e^x+e^{-x}}{2}\sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^1(e^x+e^{-x})^2\,\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^1(e^{2x}+2+e^{-2x})\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}+2x-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Bigg|_0^1=\pi+\frac{\pi(e^4-1)}{4e^2}.$$

2 Найдем площадь параболического зеркала, полученного при вращении параболы $y^2=\frac{9}{4}x,\ x\in[0,1]$, вокруг оси Ox (рис. 4.23).

Решение:

Имеем $f(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x},\ x\in[0,1];\ f'(x)=\frac{3}{4\sqrt{x}}$ и $\sqrt{1+(f'(x))^2}=\sqrt{1+\frac{9}{16\cdot x}}$.

Найдем площадь полученного параболического зеркала:

$$\mathscr{A}(f)=2\pi\int_0^1 f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{4}\int_0^1\sqrt{16x+9}\,\mathrm{d}x=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}16x+9=t\\ x=\dfrac{t-9}{16},\ x=0\Rightarrow t=9\\ \mathrm{d}x=\dfrac{1}{16}\mathrm{d}t,\ x=1\Rightarrow t=25\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{3\pi}{4}\cdot\frac{1}{16}\int_9^{25}t^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t=\frac{3\pi\cdot 2}{4\cdot16\cdot3}t^{\frac{3}{2}}\Bigg|_9^{25}=\frac{\pi}{32}(5^3-3^3)=\frac{49}{16}\pi.$$

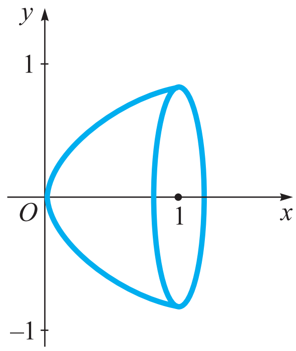


Рис. 4.23

Упражнения

Б

1*. Найдите длину графика функции:

а) $f\colon[-1,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2$;

б) $f\colon[1,e]\to\mathbb{R},\ f(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^2-\ln\sqrt{x}$;

в) $f\colon[0,3]\to\mathbb{R},\ f(x)=x+1$;

г) $f\colon[\sqrt{8},\sqrt{24}]\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln x$;

д) $f\colon[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$;

е) $f\colon\left[0,\frac{1}{2}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln(1-x^2)$;

ж) $f\colon[0,3]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$;

з) $f\colon[3,6]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{2}{3}(x-3)^{\frac{3}{2}}$;

и) $f\colon[0,2\sqrt{2}-1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln(1+x)$;

к) $f\colon\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln\cos x$.

$$l(f)=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

2*. Найдите площадь поверхности вращения, полученной при вращении вокруг оси Ox графика функции:

а) $f\colon[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3$;

б) $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}_+,\ f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$.

3*. Найдите площадь поверхности вращения, полученной вращением вокруг оси Ox дуги кривой $y=e^{-x}$, заключенной между прямыми $x=0$ и $x=a,\ a>0$.

4*. Дана функция $f\colon[0,4]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^{\frac{3}{2}}\sqrt{x}$.

а) Найдите длину графика функции f.

б) Найдите площадь поверхности вращения, определенной графиком функции f.

5*. Найдите площадь полной поверхности прямого кругового усеченного конуса с радиусами оснований r и R и высотой H.

$$\mathscr{A}(f)=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

Упражнения и задачи на повторение

А

1. Найдите площадь подграфика функции:

$$\mathscr{A}(\Gamma_f)=\int_a^b f(x)dx$$

а) $f:[0, 1]\to\mathbb{R},\ f(x)=x-x^2$;

б) $f:\left[0, \frac{\pi}{3}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin 3x$;

в) $f:[0, 1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x}$;

г) $f:[0, e-1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x+1}$.

2. Покажите, что площади подграфиков функции $f:[0, 2]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+1$, и $g:[-1, 1]\to\mathbb{R},\ g(x)=x^2-2x+2$, равны.

3. Даны функции $f, g:[0, 1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+x^2$, $g(x)=1+ax$, $a>0$. Найдите действительное число a, при котором площади подграфиков функций f и g равны.

4. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

а) $\int_0^t (2x+1)dx>2t\ \ (t>0)$; б) $\int_1^t (2x+1)dx\le t\ \ (t>1)$;

в) $\int_0^t \left(3\frac{x^2}{t}+2x-1\right)dx\ge t^2\ \ (t>0)$.

5. Покажите, что площадь подграфика функции $f:[0, 2]\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x+x$, больше, чем площадь подграфика функции $g:\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R},\ g(x)=e^x+\cos x$.

6. Дана функция $f:[-1, 1]\to\mathbb{R},\ f(x)=-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}$.

а) Постройте график функции f.

б) Заштрихуйте подграфик функции f.

в) Найдите площадь поверхности стола, имеющего форму подграфика функции f.

Б

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функции f, g, если:

а) $f, g: [1, 3]\to\mathbb{R},\ f(x)=x,\ g(x)=x^2-x$;

б) $f, g: [0, 2]\to\mathbb{R},\ f(x)=x,\ g(x)=e^x$;

в) $f, g: [0, 1]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2,\ g(x)=2^x$.

2. Дана функция $f:[0, 2]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+1$. Найдите $m\in[0, 2]$, при котором прямая $y=mx$ делит подграфик функции f на две части равной площади.

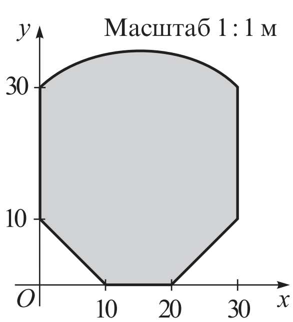
3. Найдите значение $a\in\mathbb{R}_+$, при котором площадь подграфика функции $f:[0, a]\to\mathbb{R},\ f(x)=3x^3+2x$, равна 1.

4. Дана функция. $f:[0, \lambda]\to\mathbb{R}$, $\lambda>0$, $f(x)=xe^{-x}$. Найдите площадь $\mathscr{A}(\lambda)$ подграфика функции f и $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\mathscr{A}(\lambda)$.

5. Участок земли имеет форму фигуры, ограниченной графиками функции $f, g: [0, 30]\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=-\frac{1}{20}x^2+\frac{3}{2}x+30,$$

$$g(x)=\begin{cases}-x+10, & 0\le x\le 10,\\ 0, & 10<x\le 20,\\ x-20, & 20<x\le 30.\end{cases}$$



Найдите площадь этого участка и его стоимость, если известно, что цена одной сотки 30 000 леев.

6. Дана функция $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-3x$. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции f и прямой, проходящей через точки $M_1(x_1, f(x_1))$ и $M_2(x_2, f(x_2))$, где x_1 – точка максимума для функции f, а x_2 – ее точка минимума.

7. Найдите координаты центра тяжести плоской однородной пластинки, определенной подграфиком функции $f: [0, 1]\to\mathbb{R},\ f(x)=xe^x$.

8. Найдите объем тела вращения, определенного функцией:

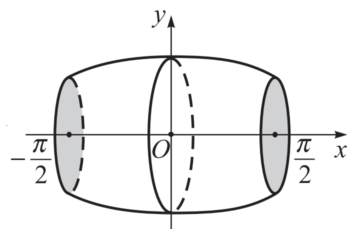
а) $f: [0, \pi]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin x$;

б) $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos\frac{x}{2}$;

в) $f: [-1, 2]\to\mathbb{R},\ f(x)=|x|$;

г) $f: [0, 2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\le x\le 1\\ \frac{x}{2}, & 1<x\le 2.\end{cases}$

9. Вычислите объем бочки, полученной при вращении вокруг оси Ox подграфика функции $f:\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=a\cos x+b\ (a, b>0)$.



Проверочная работа

Время выполнения работы: 90 минут

А

1. Найдите площадь подграфика функции: 4

а) $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x^2 + 2x - 1$; б) $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x+1}$;

в) $f\colon \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos 2x$; г) $f\colon [0, \ln 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = e^x$.

2. Дана функция $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + x + 1,\ a \in \mathbb{R}$. Найдите действительные значения a, при которых площадь подграфика функции f равна 3. 2

3. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство: 4

а) $\int\limits_0^a (2x+1)\mathrm{d}x > 2\ \ (a > 0)$; б) $\int\limits_0^a (2x-3)\mathrm{d}x \le -2\ \ (a > 0)$; в) $\int\limits_1^{2a} (x-1)\mathrm{d}x < \dfrac{9}{2}\ \left(a > \dfrac{1}{2}\right)$.

Б

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций: 3

а) $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3 - x^2,\ g(x) = 0$;

б) $f, g\colon [0, \sqrt{2}] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3,\ g(x) = 0$;

в) $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3 - x,\ g(x) = x^2 + x$.

2. Найдите координаты центра тяжести плоской однородной пластинки, определенной подграфиком функции: 2

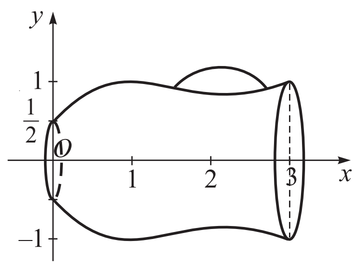
а) $f\colon [1, e] \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln x$; б) $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 2$.

3. Найдите объем тела вращения, определенного функцией: 2

а) $g\colon \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R},\ g(x) = \sin 2x$; б) $g\colon [1, e] \to \mathbb{R},\ g(x) = \sqrt{x}\ln x$.

4. Вычислите объем кувшина, который получается при вращении вокруг оси Ox подграфика функции $f\colon [0, 3] \to \mathbb{R}$, 3

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2} + x + \dfrac{1}{2}, & \text{если } 0 \le x \le 2, \\ \dfrac{3}{2}x^2 - 7x + \dfrac{17}{2}, & \text{если } 2 \le x \le 3. \end{cases}$$

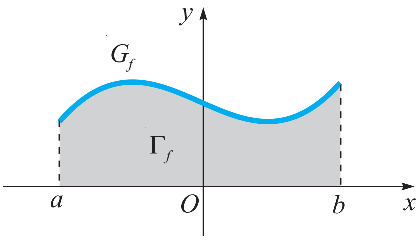


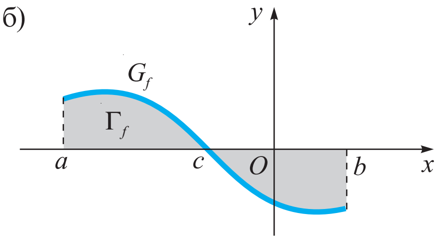
$$\mathscr{A}(\Gamma_f) = \int\limits_a^b f(x)dx$$

$$\mathscr{V}(C_f) = \pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$$

Непрерывная функция $f: [a, b] \to \mathbb{R}$

Подграфик функции f

а) 

б) 

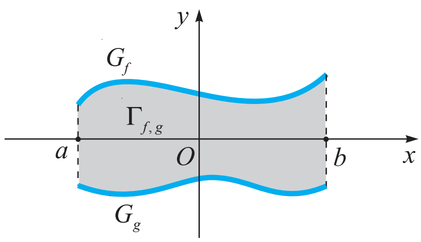
Площадь подграфика функции f

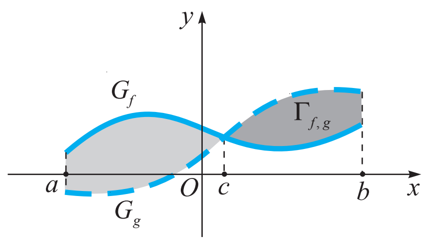
а) $\mathcal{A}(\Gamma_f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

б) $\mathcal{A}(\Gamma_f) = \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x - \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$

$f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ **– непрерывная функция на** $[a, b]$

Фигуры, ограниченные графиками двух функций и прямыми $x = a$, $x = b$

а) 

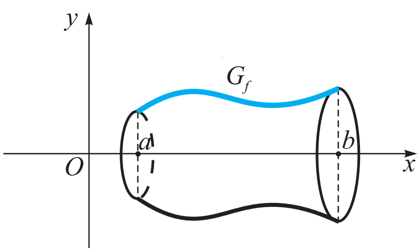
б) 

Площадь фигуры, ограниченной графиками двух функций и прямыми $x = a$, $x = b$

а) $\mathcal{A}(\Gamma_{f,g}) = \int_a^b (f(x) - g(x))\mathrm{d}x$

б) $\mathcal{A}(\Gamma_{f,g}) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x =$

$= \int_a^c (f(x) - g(x))\mathrm{d}x - \int_c^b (f(x) - g(x))\mathrm{d}x$

Тело вращения	**Объем тела**
	$\mathcal{V} = \pi \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$

Модуль

5

Элементы теории вероятностей

Цели модуля

- применение понятий *элементарные события* и *случайные события*, соответствующих некоторому эксперименту;
- использование классического определения при вычислении вероятности;
- *применение понятия *дискретная случайная величина* и вычисление ее математического ожидания.

Введение

Краткая историческая справка


Блез Паскаль (1623–1662) – французский математик, писатель и философ


Пьер Ферма (1601–1665) – французский математик

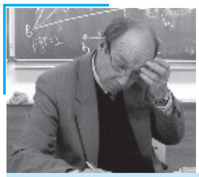
Основы теории вероятностей были заложены в XVII веке математиками Б. Паскалем и П. Ферма. Любитель азартных игр, кавалер де Мере, предложил Паскалю две задачи, которые не укладывались в рамки математики того времени. Решение этих задач, а также переписка Паскаля с Ферма по поводу найденных решений положили начало исследованиям, заложившим основы теории вероятностей. Среди крупнейших математиков, содействующих развитию теории вероятностей в XIX–XX столетиях, особо отметим К. Ф. Гаусса, С. Д. Пуассона, А. Маркова, А. Колмогорова.

Сегодня теория вероятностей представляет собой один из важнейших разделов современной математики. Предмет исследований теории вероятностей – закономерности, проявляющиеся в случайных явлениях.


Карл Фридрих Гаусс (1777–1855) – немецкий математик, физик и астроном


Симеон Дени Пуассон (1781–1840) – французский математик


Андрей А. Марков (1856–1922) – русский математик

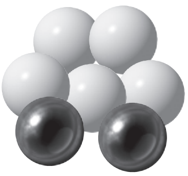

Андрей Н. Колмогоров (1903–1987) – русский математик

Мы уже встречались с понятием *событие*, которое означает результат некоторого *эксперимента* или *наблюдения*. Термин *эксперимент* применяется для описания любого действия, которое можно повторить, не изменяя его условий.

Примеры

1 Подбрасывая монету, мы проводим эксперимент. Возможные результаты – выпадение герба или цифры – это два случайных события.

2 Нагревание воды до 100 °С – это эксперимент. Результат – закипание воды – событие.



3 Из урны, содержащей 5 белых и 2 черных шара, наугад извлекается один шар. Это – эксперимент. Извлечение белого шара является событием, так же как и извлечение черного шара. Извлечение шара другого цвета также является событием.

Заметим, что события можно разбить на три класса: ***достоверные***, ***невозможные*** и ***случайные***. Закипание воды при температуре 100 ° С (при нормальном атмосферном давлении – 760 мм ртутного столба) является достоверным событием. Извлечение шара цвета, отличного от белого и черного, является невозможным событием (пример **3**), равно как и одновременное выпадение герба и цифры при бросании монеты.

Достоверным называется событие, которое обязательно происходит (или наступает) в результате эксперимента (обозначается через E).

Невозможным называется событие, которое в результате эксперимента не может произойти (обозначается через $\varnothing$).

При бросании монеты герб может выпасть, но может и не выпасть. Таким образом, появление герба является случайным событием, равно как и появление цифры.

Случайным называется событие, которое может произойти, а может и не произойти в результате эксперимента.

В примере **3** выбор белого шара и выбор черного шара являются случайными событиями.

§ 1 КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

1.1. Равновозможные события

Определение Несколько событий называются **несовместимыми**, если любые два из них не могут произойти одновременно при проведении одного и того же эксперимента. В противном случае события называются **совместимыми**.

Примеры

1 Выигрыш, проигрыш и ничья в шахматной партии для каждого из двух игроков – это три несовместимых события.

2 Бросается игральная кость и рассматриваются события:

$A_i = \{$выпадает i очков$\}$, $i = \overline{1, 6}$; $B_1 = \{$выпадает нечетное число очков$\}$;

$B_2 = \{$выпадает четное число очков$\}$; $B_3 = \{$выпадает не более трех очков$\}$.

Несовместимыми являются случайные события: $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$; B_1, B_2; B_3, A_4, A_5, A_6.

События B_2, B_3 являются совместимыми, так как выпадение двух очков будет означать наступление обоих событий. Совместимыми являются также события: B_1, B_3; A_1, B_1, B_3; A_1, B_1, B_2, B_3.

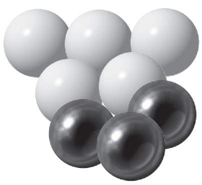
Результаты эксперимента считаются ***равновозможными***, если из соображений симметрии можно утверждать, что все они имеют одинаковые шансы произойти.

Примеры

1 При бросании монеты, если она симметрична, не существует никаких оснований считать, что у одной стороны шансов выпасть больше, чем у другой. Следовательно, выпадение герба или цифры – равновозможные события.

2 Бросается симметричная кость. В этом случае у всех граней одинаковые шансы выпасть. Таким образом, здесь имеются 6 равновозможных событий.

3 Из урны, содержащей 5 белых и 3 черных шара, наугад извлекается один шар. Если шары идентичны по форме, величине и массе, то можно считать, что у всех восьми шаров есть одинаковые шансы быть извлеченными, то есть здесь имеются 8 равновозможных событий.



Понятие равновозможности событий позволяет судить о том, какое из двух данных случайных событий является более возможным. Вернемся к примеру **3** и рассмотрим событие A, состоящее в извлечении белого шара, и событие B, состоящее в извлечении черного шара. Событие A более возможно, чем B. Действительно, каждый из восьми шаров имеет одинаковые шансы быть извлеченным, но в урне белых шаров больше, чем черных. В таком случае говорят, что у события A имеется 5 ***благоприятствующих исходов***, а у B – лишь 3.

В примере с бросанием игральной кости событие, состоящее в выпадении не менее двух очков, более возможно, чем событие, состоящее в выпадении не более трех очков. Для первого события имеется 5 благоприятствующих исходов, а для второго – лишь 3.

1.2. Классическое определение вероятности

Определим понятие *вероятность* для случайных событий, связанных с экспериментом, имеющим *конечное число несовместимых равновозможных исходов*.

Определение

Вероятностью события A называется отношение ***числа m равновозможных исходов, благоприятствующих A***, к ***общему числу n всех равновозможных исходов эксперимента***.

Вероятность события A обозначается через $P(A)$. Согласно определению,

$$\boxed{P(A)=\frac{m}{n}}. \qquad (1)$$

Формула (1) представляет собой ***классическое определение вероятности***.

Из этого определения следуют ***свойства вероятности***:

1° Вероятность достоверного события E равна 1.

Действительно, так как $m=n$, то $P(E)=\frac{n}{n}=1$.

2° Вероятность невозможного события $\varnothing$ равна 0.

Действительно, так как $m=0$, то $P(\varnothing)=\frac{0}{n}=0$.

3° Вероятность случайного события A есть положительное число меньше единицы.

В самом деле, число m равновозможных исходов, благоприятствующих случайному событию A, удовлетворяет двойному неравенству $0<m<n$ и, следовательно, $0<\frac{m}{n}<1$. Значит, $0<P(A)<1$.

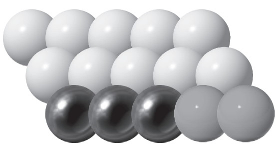
Из этих свойств следует, что вероятность любого события A удовлетворяет двойному неравенству $0\le P(A)\le 1$.

Задачи с решением

1 Бросается монета. Вычислим вероятность выпадения герба (событие A).

Решение:

Число всех равновозможных исходов равно 2. Событию A благоприятствует один из них. Следовательно, $n=2$, $m=1$ и $P(A)=\frac{1}{2}$. Очевидно, вероятность выпадения цифры также равна $\frac{1}{2}$.



2 В урне 10 белых, 3 черных и 2 красных шара. Вынимают наугад один шар. Вычислим вероятность того, что этот шар будет белым (событие A).

Решение:

Общее число равновозможных исходов равно 15. Число благоприятствующих исходов равно 10. Таким образом, $n=15$, $m=10$ и $P(A)=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$.

3 В урне 4 белых шара ($б_1, б_2, б_3, б_4$) и 2 черных ($ч_1, ч_2$). Извлекают сразу два шара. Определим вероятности случайных событий:

$A_1=\{$извлеченные шары разного цвета$\}$; $A_2=\{$извлеченные шары одного цвета$\}$.

Решение:

Обозначив через $(б_1, б_2)$ случай выбора шаров $б_1$ и $б_2$, через $(б_1, б_3)$ случай выбора шаров $б_1$ и $б_3$ и т. д., равновозможные исходы эксперимента суть:

$$\begin{array}{lllll}(б_1, б_2), & (б_1, б_3), & (б_1, б_4), & (б_1, ч_1), & (б_1, ч_2),\\ (б_2, б_3), & (б_2, б_4), & (б_2, ч_1), & (б_2, ч_2), & \\ (б_3, б_4), & (б_3, ч_1), & (б_3, ч_2), & & \\ (б_4, ч_1), & (б_4, ч_2), & & & \\ (ч_1, ч_2). & & & & \end{array}$$

Заметим, что $n = 15$. Так как событию A_1 благоприятствуют 8 исходов, событию A_2 благоприятствуют 7, то в соответствии с определением, $P(A_1) = \frac{8}{15}$, $P(A_2) = \frac{7}{15}$.

Замечание

При решении более сложных задач нужны методы подсчета чисел n и m без перечисления возможных исходов. Подобные методы изучаются в *комбинаторике*.

Широко применяется ***правило произведения*** (основной принцип комбинаторики). Пусть выбираются два элемента x_1 и x_2 (шары, числа, книги, ученики и т. д.). Если x_1 можно выбрать n_1 способами, а x_2 – n_2 способами, то всего существует $n_1 \cdot n_2$ возможностей образования пары (x_1, x_2). В общем случае, если выбираются k элементов $x_1, x_2, ..., x_k$, тогда можно образовать всего $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$ комбинаций вида $(x_1, x_2, ..., x_k)$ (где n_i – число способов выбора элемента x_i, $i = \overline{1, k}$).

Задачи с решением

1 Берется наудачу пятизначное натуральное число. Найдем вероятность того, что оно не содержит цифру 9 (событие A).

Решение:

Возможные исходы – все натуральные пятизначные числа. Их первая цифра должна быть отличной от нуля. Остальные четыре цифры могут быть любыми из десяти цифр: 0, 1, 2, …, 9. Следовательно, каждую можно выбрать десятью способами. Согласно правилу произведения, число возможных исходов равно $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$, т. е. равно $9 \cdot 10^4$.

Благоприятствующими исходами являются пятизначные натуральные числа, не содержащие цифру 9. Первая цифра такого числа отлична от 0 и 9, а последующие четыре цифры отличны только от цифра 9. По правилу произведения, число благоприятствующих исходов равно $8 \cdot 9^4$.

Таким образом, согласно классическому определению, $P(A) = \frac{8 \cdot 9^4}{9 \cdot 10^4} = 0{,}5832.$

2 Из урны, содержащей n шаров, занумерованных числами 1, 2, ..., n, выбирается k раз по одному шару с возвращением каждого выбранного шара обратно в урну (коротко скажем, что выбираются k шаров ***с возвращением***). Найдем вероятность того, что выбраны k разных шаров (событие A), $k \le n$.

Решение:

Возможные исходы – это все комбинации вида $(x_1, x_2, ..., x_k)$, составленные из номеров шаров, выбранных из урны с возвращением. Номер x_1, а также любой другой x_i, может быть любым из чисел 1, 2, ..., n и, таким образом, может быть выбран n способами. По правилу умножения, число всех возможных исходов равно n^k. Из них благоприятствующими событию A являются комбинации $(x_1, x_2, ..., x_k)$, составленные из попарно различных чисел. Количество этих комбинаций можно подсчитать следующим образом: представим себе, что выбираем k раз по одному шару без возвращения шара в урну после выбора (коротко – шары выбираются ***без возвращения***). Опять применим правило умножения и получим, что искомое число комбинаций есть $n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))$.

Таким образом, $P(A) = \frac{n(n-1)...(n-(k-1))}{n^k}$.

Замечание

Задача **2** допускает многочисленные интерпретации. К примеру, пусть в классе k учеников. Будем считать продолжительность года равной 365 дням и что день рождения каждого ученика с одинаковой вероятностью приходится на любой из этих дней. Какова вероятность того, что все ученики класса родились в разные дни года (событие A)? Представим себе урну, содержащую 365 шаров, занумерованных числами 1, 2, 3, ..., 365. Дни рождения учеников соответствуют номерам k шаров, извлеченных с возвращением из урны. Таким образом, ответ следует, очевидно, из результата, полученного в задаче 2:

$$P(A)=\frac{365\cdot 364\cdot\ldots\cdot(365-(k-1))}{365^k}.$$

В принципе, для всякого случайного эксперимента можно найти урновую такую схему, что каждое случайное событие аналогично определенному выбору шаров из некоторой урны. Например, бросание симметричной монеты равносильно выбору одного шара из урны, содержащей два шара, помеченных буквами *г* и *ц* (герб, цифра). Бросание игральной кости можно интерпретировать как выбор одного шара из урны с шестью шарами, помеченными цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6.

3 Жюри из 5 членов выбирается наудачу из группы, состоящей из 10 мужчин и 5 женщин. Найдем вероятность того, что жюри будет составлено из 3 мужчин и 2 женщин (событие A).

Решение:

Каждый возможный исход означает 5 лиц из 15. Следовательно, имеется столько возможных исходов, сколько подмножеств по 5 элементов можно составить из 15 элементов. Их число равно C_{15}^5. Из них событию A благоприятствуют те, которые состоят из 3 мужчин и 2 женщин. Для выбора 3 мужчин из 10 имеется C_{10}^3 возможностей, а для выбора 2 женщин из 5 – C_5^2 возможностей. По правилу произведения, для выбора жюри из 3 мужчин и 2 женщин имеется $C_{10}^3\cdot C_5^2$ возможностей. Таким образом,

$$P(A)=\frac{C_{10}^3\cdot C_5^2}{C_{15}^5}=\frac{400}{1001}\approx 0{,}40.$$

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

4 К Новому году четырем детям Дед Мороз подготовил по подарку. Но он перепутал подарки и вручил их детям случайным образом. Найдем вероятность того, что каждый ребенок получит свой подарок.

Решение:

Пусть A, B, C, D – начальные буквы имен детей и a, b, c, d – подарки, подготовленные Дедом Морозом для A, B, C и D соответственно. Применим классическое определение вероятности: $P=\frac{m}{n}$.

Каждый возможный результат означает некоторый вариант вручения подарков и может быть описан некоторой перестановкой букв a, b, c, d. Например, перестановка $bacd$ означает, что A получит подарок, предназначенный для B, B получит подарок, предназначенный для A, а C и D получают свои подарки. Число всех возможных результатов равно числу перестановок букв a, b, c, d, т. е. $4!$. Таким образом, $n=24$.

Очевидно, имеется один-единственный благоприятствующий результат, задаваемый перестановкой $abcd$: $m=1$. Итак, искомая вероятность равна:

$$P=\frac{m}{n}=\frac{1}{24}.$$

Упражнения и задачи

А

1. Из множества {1, 2, …, 100} выбирается наугад число. Являются ли несовместимыми события:
{выбранное число делится на 10},
{выбранное число делится на 11}?

2. Из множества {1, 2, 3, 4} выбираются по одному все числа. Найдите вероятность события:
а) A = {числа выбраны в порядке возрастания: 1, 2, 3, 4};
б) B = {первым выбрано число 1};
в) C = {первым выбрано число 1, вторым – число 2}.

3. Урна содержит 20 шаров, занумерованных числами 1, 2, …, 20. Какова вероятность того, что номер случайно выбранного шара является точным квадратом?

4. Игральная кость бросается 4 раза. Найдите вероятность того, что при первом и последнем бросаниях выпадет четное число очков.

5. Из урны, содержащей 3 белых и 5 черных шаров, извлекают одновременно 3 шара. Найдите вероятность события:
а) A = {извлечены 3 белых шара};
б) B = {извлечены 3 шара одинакового цвета};
в) C = {извлечены 2 белых шара и 1 черный шар};
г) D = {извлечены шары разного цвета}.

Б

1. Из урны, содержащей 3 белых шара и 1 черный шар, случайно без возвращения последовательно извлекаются 3 шара. Рассматриваются события:

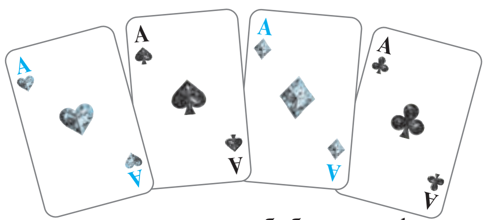
A_i = {при i-ом извлечении получен белый шар},
B_i = {при i-ом извлечении получен черный шар}, $i=\overline{1,3}$.
Какие из следующих пар составлены из несовместимых событий:
A_1 и A_2; B_1 и B_2; B_2 и B_3;
A_1 и B_1; A_1 и B_2?

2. Из множества {1, 2, …, 20} случайно выбирается число k. Найдите вероятность события:
а) $A=\{k>10\}$; б) $B=\{5<k\le 13\}$; в) $C=\{k^2>20\}$.

3. Каждая из букв слова *АНАНАС* написана на одной из шести одинаковых карточек. Карточки раскладываются наугад в ряд. Какова вероятность получить слово *АНАНАС*?

4. В лотерее 96 билетов, из которых 8 выигрышных. Участник лотереи купил 12 билетов. Найдите вероятность события:
а) A = {2 купленных билета оказались выигрышными};
б) B = {не менее 3 купленных билетов оказались выигрышными}.

5. Из колоды, насчитывающей 36 карт, наудачу выбрана карта. Чему равна вероятность события:
а) A_1 = {выбранная карта – туз};
б) A_2 = {выбрана дама пик или выбрана карта треф};
в) A_3 = {выбрана карта пик или выбран король}?
(Напомним, колода содержит 4 типа игральных карт (черви, пики, бубны, трефы), причем все типы представлены одинаковым числом карт.)



черви пики бубны трефы

6. В поезд, состоящий из трех вагонов, садятся 9 пассажиров, каждый их них выбирает вагон случайным образом. Найдите вероятность случайного события:
а) A = {в первый вагон сядут 3 пассажира};
б) B = {в каждый вагон сядут по 3 пассажира};
в) C = {в первый вагон сядут 4 пассажира, во второй – 3 и в третий вагон – 2 пассажира}.

§ 2 СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ. ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

2.1. Пространство элементарных событий эксперимента

В данном параграфе *случайное событие* и *вероятность* как математические понятия будут уточнены, то есть „формализованы". Вместе с тем, будут рассматриваться и эксперименты с конечным числом исходов, не обязательно равновозможных. С этой целью во множестве случайных событий, связанных с некоторым экспериментом, будут выделены „элементарные" события, из которых могут быть составлены все остальные случайные события.

Определение

Пространством элементарных событий эксперимента называется любое множество $E = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ возможных исходов эксперимента, удовлетворяющих условиям:

1) в результате эксперимента происходит один и только один из исходов $e_1, e_2, ..., e_n$;
2) по исходу e_i эксперимента для любого результата можно установить, появился он или нет.

Примеры

1 Бросается монета. В качестве элементарных событий можно выбрать события *г* (выпал герб) и *ц* (выпала цифра). Таким образом, $E = \{г,\ ц\}$.

2 Бросаются две монеты. Для этого эксперимента можно выбрать следующее пространство элементарных событий: $E = \{гг,\ гц,\ цг,\ цц\}$, где, к примеру, *цг* означает, что первая монета падает цифрой вверх, а вторая – гербом.

3 Дважды бросается игральная кость. В качестве элементарных событий можно рассматривать упорядоченные пары чисел *ij*, где $i, j = \overline{1, 6}$. Следовательно, E будет множество:

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

Для этого же эксперимента можно построить другое пространство элементарных событий. Например, $E' = \{e_1, e_2, ..., e_{11}\}$, где $e_i = \{$в сумме выпало $i+1$ очко$\}$, $i = \overline{1, 11}$. Какое пространство элементарных событий выбрать зависит от решаемой задачи.

2.2. Случайные события

Эксперименту с бросанием игральной кости соответствуют не только 6 элементарных событий $e_i = \{$выпадают i очков$\}$, $i = \overline{1, 6}$, но и другие события (неэлементарные). Например:

$A = \{$выпадает четное число очков$\}$ или

$B = \{$выпадают не менее двух и не более пяти очков$\}$.

Как A, так и B, происходят при одних элементарных событиях и не происходят при других. Следовательно, каждому из них соответствует некоторое подмножество пространства элементарных событий $E = \{e_1, e_2, ..., e_6\}$. Например, для A – это подмножество $\{e_2, e_4, e_6\}$, а для B – это подмножество $\{e_2, e_3, e_4, e_5\}$.

Определение

Случайным событием называется любое подмножество $A \subseteq E$ пространства элементарных событий E эксперимента.

В соответствии с определением, E и $\varnothing$ также являются случайными событиями. Для них удобно сохранить соответствующие названия ***достоверного события*** и ***невозможного события***.

Говоря об элементарных событиях, из которых состоит событие A, скажем, что они ***благоприятствуют событию A***.

Заметим, если в результате эксперимента произошло некоторое элементарное событие из A, мы скажем, что ***произошло*** или ***наступило*** случайное событие A.

Пример

Рассмотрим снова эксперимент с бросанием двух монет.

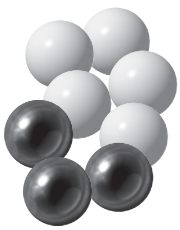
Мы установили, что $E = \{гг,\ гц,\ цг,\ цц\}$. Множества $A = \{гг,\ гц,\ цг\}$, $B = \{гг,\ цц\}$ и $C = \{гц,\ цг\}$, будучи подмножествами E, являются случайными событиями. A состоит в выпадении по крайней мере одного герба, B – в выпадении одинаковых сторон, C – в выпадении разных сторон монеты.

Замечание

Случайное событие может быть задано не только в виде подмножества пространства элементарных событий, но и словесным описанием.

Задача с решением

Из урны, содержащей 5 белых и 3 черных шара, наугад извлекается один шар. Построим пространство элементарных событий E эксперимента и опишем в виде подмножеств множества E события: A = {извлечен белый шар}, B = {извлечен черный шар}.



Решение:

Очевидно, существуют 8 возможных исходов, каждый из которых состоит в извлечении из урны одного из 8 имеющихся там шаров. Для простоты пронумеруем шары, считая, что номера 1, 2, 3, 4, 5 соответствуют белым, а 6, 7, 8 – черным шарам.

Тогда $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$, где e_i означает выбор шара с номером i.

Очевидно, $A = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ и $B = \{e_6, e_7, e_8\}$.

2.3. Операции над случайными событиями

Определения

- **Объединением** событий A и B называется событие, обозначаемое $A \bigcup B$, которое состоит в осуществлении *хотя бы одного* из данных событий.
- **Пересечением** событий A и B называется событие, обозначаемое $A \bigcap B$, которое состоит в осуществлении *обоих* данных событий.

Аналогичным образом эти операции определяются для любого конечного числа событий. Например, $A \bigcup B \bigcup C$ состоит в осуществлении хотя бы одного из событий A, B, C.

Определения

- События A и B называются **несовместимыми** (или **несовместными**), если $A \bigcap B = \varnothing$.
- **Событием, противоположным** событию A, называется событие, обозначаемое $\overline{A}$, которое происходит тогда и только тогда, когда A не происходит.
- **Разностью событий A и B** называется событие, обозначаемое $A \setminus B$, которое состоит в появлении A и не появлении B.
- Говорят, что **событие A влечет событие B** (обозначают $A \subseteq B$), если всякий раз, когда происходит A, происходит и B.

Задачи с решением

1 Из множества чисел {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} случайно одновременно выбирают два числа. Рассматриваются следующие случайные события:

A = {выбрано ровно одно четное число},
B = {выбраны два четных числа},
C = {выбрано хотя бы одно четное число},
D = {выбраны числа одинаковой четности}.

а) Запишите словами, в чем состоят события: $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A}$, $\overline{C}$.
б) Как связаны между собой события B и D?

Решение:

а) $A \cup B$ = {выбрано хотя бы одно четное число}, следовательно, $A \cup B = C$;
$A \cap B$ – невозможное событие, следовательно, $A \cap B = \varnothing$;
$\overline{A}$ = {выбранные числа оба четные, либо оба нечетные}, следовательно, $\overline{A} = D$;
$\overline{C}$ = {не выбрано ни одного четного числа}.

б) $B \subseteq D$.

2 Из урны, содержащей 5 белых и 3 черных шара, наудачу последовательно без возвращения извлекается по одному шару до первого появления белого шара. Рассматриваются события A_i = {при i-ом извлечении получен белый шар}, $i \geq 1$. Через эти события выразим с помощью операций следующие события:
а) B = {придется произвести два извлечения};
б) C = {придется произвести не более двух извлечений};
в) D = {придется произвести не более трех извлечений}.

Решение:

С учетом определений операций над событиями получим:
а) $B = \overline{A_1} \cap A_2$; б) $C = A_1 \cup \overline{A_1} \cap A_2$; в) $D = A_1 \cup \overline{A_1} \cap A_2 \cup \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3$.

2.4. Формулы для вычисления некоторых вероятностей

1. Если A и B – несовместимые события, то $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$.

Доказательство:

Пусть n – число всех равновозможных исходов рассматриваемого эксперимента. Предположим, что из них событию A благоприятствуют m_A, а событию B – m_B исходов. Значит, $P(A) = \frac{m_A}{n}$, $P(B) = \frac{m_B}{n}$. Так как A и B несовместимы, то не существует ни одного исхода, благоприятствующего одновременно обоим событиям A и B. Следовательно, событию $A \cup B$ благоприятствуют $m_A + m_B$ исходов и таким образом:

$$P(A \cup B) = \frac{m_A + m_B}{n} = \frac{m_A}{n} + \frac{m_B}{n} = P(A) + P(B).$$

Доказанную формулу можно обобщить: если $A_1, A_2, \ldots, A_k$ – несовместимые события, то $\boxed{P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_k)}$.

2. Если A и B – совместимые события, то $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$.

Доказательство:

Воспользуемся введенными ранее обозначениями n, m_A, m_B. Так как события A и B – совместимые, то существует некоторое число исходов $s \neq 0$, благоприятствующих одновременно обоим событиям. Вследствие этого, объединению $A \cup B$ благоприятствуют

$m_A + m_B - s$, а не $m_A + m_B$ исходов, так как в таком случае упомянутые s исходов учитывались бы дважды (один раз для A и один раз для B).

Далее имеем $P(A)=\frac{m_A}{n}$, $P(B)=\frac{m_B}{n}$, $P(A\cap B)=\frac{s}{n}$.

Следовательно, $P(A\cup B)=\frac{m_A+m_B-s}{n}=\frac{m_A}{n}+\frac{m_B}{n}-\frac{s}{n}=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

3. $\boxed{P(A)=1-P(\overline{A})}$.

Доказательство:

Заметим, что $A\cup\overline{A}=E$ и $A\cap\overline{A}=\varnothing$. Следовательно, $P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})=1$. Значит, $P(A)=1-P(\overline{A})$.

4. Если $A\subseteq B$, то $\boxed{P(A)\le P(B)}$.

5. Если $A\subseteq B$, то $\boxed{P(B\setminus A)=P(B)-P(A)}$.

Упражнение. Докажите формулы **4**, **5**.

Задачи с решением

1 На референдум были вынесены два вопроса, каждый с двумя вариантами ответа: „да“ и „нет“. На первый вопрос 65% участников референдума ответили „да“, на второй вопрос ответили „да“ 51% участников и 45% участников ответили „да“ на оба вопроса. Какова вероятность того, что выбранный наудачу участник референдума ответил „да“ по крайней мере на один из вопросов (событие A)?

Решение:

Рассмотрим случайные события:

A_1 = {выбранный участник референдума ответил „да“ на первый вопрос};

A_2 = {выбранный участник референдума ответил „да“ на второй вопрос}.

Очевидно, $A=A_1\cup A_2$. Задача сводится к нахождению вероятности $P(A_1\cup A_2)$.

Применим формулу $P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cap A_2)$.

Из условий задачи следует, что $P(A_1)=0{,}65$, $P(A_2)=0{,}51$, $P(A_1\cap A_2)=0{,}45$.

Итак, $P(A)=0{,}65+0{,}51-0{,}45=0{,}71$.

2 В столовой гимназии 20 столов. В течение недели ученик обедает здесь 5 раз. Чему равна вероятность того, что по крайней мере дважды он сядет за один и тот же стол (событие A)?

$P(A)=1-P(\overline{A})$

Решение:

В данном случае проще найти вероятность события, противоположного A: $\overline{A}$ = {ученик 5 дней обедает за пятью разными столами}. Чтобы вычислить $P(\overline{A})$, представим себе урну, содержащую 20 шаров, из которой извлекается последовательно по одному 5 шаров. Число исходов, благоприятствующих событию $\overline{A}$, можно получить по схеме выбора без возвращения, а число всех возможных исходов – если 5 шаров извлекать с возвращением из урны.

Таким образом, $P(\overline{A})=\frac{m}{n}=\frac{20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16}{20^5}=0{,}5814$, а значит, $P(A)=0{,}4186$.

3 Рассмотрим случайные события A, B и пусть $P(A)=0{,}5$, $P(B)=0{,}4$, $P(A\cap B)=0{,}2$. Найдем вероятность события:

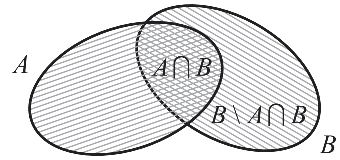
а) $A\cup B$; б) $\overline{A}$; в) $\overline{B}$; г) $\overline{A}\cap B$.

Решение:

а) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}5 + 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}7.$

б) $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5.$

в) $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6.$



г) Чтобы найти $P(\overline{A} \cap B)$, заметим, что

$\overline{A} \cap B = B \setminus A \cap B$ (что проверяется просто).

Следовательно, $P(\overline{A} \cap B) = P(B \setminus A \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}2.$

Упражнения и задачи

А

1. Наугад берется двузначное натуральное число. Для данного эксперимента укажите некоторое пространство элементарных событий E и опишите в виде подмножества множества E случайное событие:
а) $A = \{$выбранное число делится на 3$\}$;
б) $B = \{$выбранное число делится по крайней мере на одно из чисел 3 и 7$\}$;
с) $C = \{$выбранное число является точным квадратом$\}$.

2. Монета брошена три раза. Рассматриваются события $A_i = \{$при i-ом бросании выпал герб$\}$, $i = \overline{1, 3}$.
При помощи соответствующих операций выразите через A_1, A_2 и A_3 событие:
а) $B = \{$герб выпал 2 раза$\}$;
б) $C = \{$герб выпал не менее 2 раз$\}$;
в) $D = \{$герб выпал не более 2 раз$\}$.

3. 22% учеников XII класса не справились с тестом по математике, 18% учеников не справились с тестом по физике и 9% учеников не справились ни с одним из этих тестов. Какова вероятность того, что ученик, выбранный наудачу из данного класса, не справился по крайней мере с одним из этих тестов?

4. Известно, что курс евро к молдавскому лею возрастает с вероятностью 0,55, курс доллара к молдавскому лею возрастает с вероятностью 0,35, а вероятность того, что возрастут оба курса, равна 0,3. Найдите вероятность того, что по отношению к лею возрастет курс хотя бы одной из валют.

5. Игральная кость брошена 4 раза. Найдите вероятность того, что по крайней мере один раз выпало одно очко.

Б

1. Из множества $\{1, 2, 3, 4\}$ выбирается наугад число и после его возвращения обратно снова выбирается число. Для данного эксперимента укажите некоторое пространство элементарных событий E и опишите в виде подмножества множества E случайное событие:
а) $A = \{$наименьшее выбранное число равно 3$\}$;
б) $B = \{$наибольшее выбранное число равно 3$\}$;
в) $C = \{$выбрано хотя бы одно четное число$\}$.

2. Рассматриваются случайные события $A, B \subset E$, для которых $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}3$, $P(A \cap B) = 0{,}2$. Чему равна вероятность случайного события:

а) $A \cup B$; б) $\overline{A}$; в) $\overline{B}$;
г) $\overline{A} \cap B$; д) $A \cup \overline{B}$; е) $\overline{A} \cup \overline{B}$?

3. Из урны, содержащей 5 белых шаров, 2 черных, 4 красных и один зеленый шар, наудачу одновременно извлекают 4 шара. Найдите вероятность того, что будут извлечены шары по крайней мере двух цветов.

4. Игральная кость бросается до тех пор, пока не выпадет грань с шестью очками. Найдите вероятность того, что потребуется не более трех бросаний.

5. Партия из 100 деталей подвергается выборочному контролю. Условием непригодности всей партии является наличие хотя бы одной бракованной детали среди пяти, выбранных наудачу из данной партии. Какова вероятность, что партия не будет принятой, если известно, что она содержит 4% бракованных деталей?

6. В чулане находится n различных пар ботинок. Из них наугад выбирают n ботинок. Найдите вероятность того, что среди выбранных ботинок имеется хотя бы одна пара (событие A).

§ 3 УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

Проиллюстрируем смысл данного понятия посредством примера. Рассмотрим эксперимент бросания монеты три раза. Вероятность события A = {герб выпадет хотя бы дважды} равна $\frac{1}{2}$, так как из 8 равновозможных элементарных событий событию A благоприятствуют четыре: *ггг*, *ггц*, *гцг*, *цгг*. Как изменится этот результат, если бы стал известен результат первого бросания? Чему окажется равной вероятность события A, если, например, нам станет известно, что при первом бросании выпал герб (событие B)? Подобную вероятность назовем ***вероятностью А при условии В*** и обозначим через $P(A/B)$, или $P_B(A)$.

В рассматриваемом примере вычислим вероятность $P(A/B)$, посчитав число возможных и число благоприятствующих исходов.

Рассуждаем так: событие B состоит из 4 элементарных событий: *гцц*, *гцг*, *ггц*, *ггг*. Три из них принадлежат A. В рамках классической схемы, естественно, „новую“ вероятность A следует положить равной $\frac{3}{4}$.

Подобные рассуждения применимы ко всякому эксперименту с конечным числом равновозможных исходов.

Определение

Условной вероятностью события A, при условии, что произошло событие B, называется величина $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$.
(Предполагается, что $P(B)>0$.)

Из этого определения следует равенство

$$P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A/B),$$

называемое ***формулой умножения вероятностей***.

Поменяв ролями события A и B, получим равенство: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A)$.

Эта формула допускает следующее обобщение:

$$P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1\cap A_2)\ldots P(A_n/A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1}).$$

Задачи с решением

1 Брошены две игральные кости. Найдем вероятность того, что в сумме получено 6 очков (событие A), если известно, что полученная сумма – четное число (событие B).

Решение:

Нам следует найти условную вероятность $P(A/B)$. Бросание двух игральных костей – эксперимент с 36 равновозможными исходами, причем 18 из них приводят к четной сумме. Следовательно, $P(B)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$.

С другой стороны, заметим, что $A\cap B=A$, так как условия „сумма равна 6“ и „сумма – четное число“ означают, попросту, что сумма равна 6.

Итак, $A\cap B=\{(5,1),(4,2),(3,3),(2,4),(1,5)\}$.

Таким образом, $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{5}{36}:\dfrac{18}{36}=\dfrac{5}{18}$.

2 В классе 35 учеников и каждый изучает хотя бы один из языков – французский, английский: 20 учеников изучают французский и 25 изучают английский. Из данного класса выбирается случайным образом некоторый ученик. Найдем вероятность того, что он изучает французский язык (событие A), если известно, что он изучает английский (событие B).

Решение:

В задаче требуется найти условную вероятность $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}.$

Знаменатель находится по классическому определению: $P(B)=\dfrac{25}{35}=\dfrac{5}{7}.$

Чтобы найти числитель, необходимо знать число исходов, благоприятствующих событию $A\cap B$, то есть знать, сколько учеников изучают оба языка. Однако вероятность $P(A\cap B)$ проще найти из формулы:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B). \qquad (1)$$

Для этого заметим, что объединение $A\cup B$ означает, что ученик изучает французский язык или английский язык, а это, по условию задачи, является достоверным событием: $P(A\cup B)=1.$ Далее $P(A)=\dfrac{20}{35}=\dfrac{4}{7}.$

Следовательно, из формулы (1) заключаем: $P(A\cap B)=\dfrac{4}{7}+\dfrac{5}{7}-1=\dfrac{2}{7}.$

Таким образом, $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{2}{7}:\dfrac{5}{7}=\dfrac{2}{5}.$

Аналогично вычисляется вероятность $P(B/A)$.

Упражнения и задачи

Б

1. В классе 25 учеников: 10 девушек и 15 юношей. 20 учеников увлекаются спортом, причем 6 из них – девушки. Из класса случайным образом был выбран ученик, и оказалось, что он спортом не увлекается. Какова вероятность, что был выбран юноша?

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

2. Найдите вероятность того, что число, выбранное наудачу из множества $\{1, 2, 3, ..., 100\}$, делится на 2, если известно, что оно делится на 3.

3. Из множества семей с пятью детьми случайным образом выбрана одна. Предположим, что все возможные комбинации числа девочек и мальчиков равновозможны. Найдите вероятность того, что в семье 4 девочки и один мальчик, при условии, что в этой семье по крайней мере 2 девочки.

4. Опрос, проведенный среди учеников лицея, выявил следующие факты: 65% лицеистов предпочитают телевизионные каналы со спортивной тематикой, 40% – с развлекательной тематикой и 25% предпочитают обе тематики. Какова вероятность того, что лицеист, выбранный случайным образом, предпочитает развлекательные программы, если известно, что ему нравятся спортивные программы?

5. 25% учеников XII класса не справились с контрольной работой по математике, 15% не справились с контрольной работой по химии и 10% не справились ни с одной из контрольных работ. Из класса случайным образом выбирается ученик.

а) При условии, что ученик не справился с контрольной работой по химии, какова вероятность, что он не справился с контрольной работой по математике?

б) При условии, что ученик не справился с контрольной работой по математике, какова вероятность, что он не справился с контрольной работой по химии?

в) Какова вероятность, что ученик не справился по крайней мере с одной из двух контрольных работ?

6. В каждом из 20 билетов содержится по одному вопросу. Студент вытягивает наудачу один билет и, если знает ответ, получает положительную оценку. В противном случае студент имеет право на второй билет; если теперь знает ответ, он получает положительную оценку. Какова вероятность, что студент получит положительную оценку (событие A), если из 20 вопросов он знает ответы на 10?

7. На 10 карточках написаны буквы слова

МАТЕМАТИКА.

Карточки помещаются в урну, затем извлекаются по одной без возвращения и выкладываются в ряд. Какова вероятность, что получится слово *МАТЕМАТИКА*?

§ 4 НЕЗАВИСИМЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

Событие A не зависит от события B, если вероятность A не зависит от того, произошло B или оно не произошло, то есть, если $P(A/B)=P(A)$.

В случае, когда событие A не зависит от события B, из формулы умножения вероятностей $P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A/B)$ получаем равенство $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

К тому же равенству мы придем, когда событие B не зависит от события A. Из этого следует, что если A не зависит от B, то и B не зависит от A. Поэтому в основу понятия независимости случайных событий нужно положить указанное выше равенство.

Определение

Случайные события A и B называются **независимыми**, если

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B).$$

Задача с решением

Бросается игральная кость и рассматриваются случайные события:
$A=\{$выпало не более трех очков$\}$, $B=\{$выпало 3 или 6 очков$\}$.
Являются ли независимыми эти события?

Решение:

Сначала вычислим $P(A)$, $P(B)$ и $P(A\cap B)$:

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},\quad P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},\quad P(A\cap B)=\frac{1}{6}.$$

Так как $P(A\cap B)=\frac{1}{6}=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$, то в соответствии с определением события A и B являются независимыми.

Замечание

Естественно ожидать, что события A и B, относящиеся к разным экспериментам, независимы. Как следствие, вероятность их совместного осуществления равна произведению $P(A)\cdot P(B)$.

Задача с решением

В одной урне 3 белых и 2 черных шара, а в другой – 4 белых и 3 черных шара. Из первой урны извлекают наугад два шара (одновременно), а из второй – один шар. Найдем вероятность того, что все 3 шара будут белыми.

Решение:

Введем случайные события:
$A=\{$шары, извлеченные из первой урны, – белые$\}$,
$B=\{$шар, извлеченный из второй урны, – белый$\}$.

Событие, состоящее в том, что все 3 шара будут белыми, задается пересечением $A\cap B$. Далее, очевидно, $P(A)=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10}$, $P(B)=\frac{4}{7}$.

События A и B независимы, так как они относятся к разным экспериментам.

Таким образом, вероятность того, что все 3 извлеченных шара окажутся белыми, равна $\frac{3}{10}\cdot\frac{4}{7}=\frac{12}{70}=\frac{6}{35}$.

Определение

События A, B, C, ... называются **независимыми (в совокупности)**, если вероятность пересечения любых из них равна произведению вероятностей пересеченных событий.

Например, события A, B и C независимы, если:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B),\ P(A\cap C)=P(A)\cdot P(C),\ P(B\cap C)=P(B)\cdot P(C),$$
$$P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C).$$

Упражнения и задачи

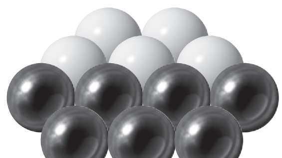
А

1. Дважды бросается монета. Покажите, что события:
A = {при первом бросании появляется герб},
B = {при втором бросании появляется цифра}
являются независимыми.

2. Бросают две игральные кости. Рассматриваются события:
A = {на первой кости выпадает не более пяти очков};
B = {на второй кости появляется не более двух очков};
C = {сумма выпавших очков будет больше четырех}.
Какие из пар событий A и B, A и C, B и C являются независимыми?

3. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по цели по одному разу. Вероятность попадания первого стрелка в цель равна 0,8, второго – 0,75. Найдите вероятность того, что в цель попадет хотя бы один стрелок.

4. Из урны, содержащей 5 белых и 7 черных шаров, выбирается случайным образом шар и из оставшихся шаров выбирается еще один шар. Являются ли независимыми события:

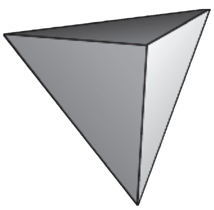


A = {первый выбранный шар белый},
B = {выбраны два шара одинакового цвета}?

5. В трех партиях изделий имеется 4%, 3% и соответственно 8% дефектных изделий. Из каждой партии случайным образом берется по одному изделию. Найдите вероятность события:
а) A = {из трех изделий одно дефектное};
б) B = {из трех изделий одно без дефекта};
в) C = {все три изделия дефектны}.

Б

1. На плоскость бросается тетраэдр, грани которого окрашены соответственно: первая – в белый, вторая – в черный, третья – в красный цвета́, а на четвертую грань нанесены все три цвета. Рассматриваются случайные события:



A_1 = {выпала грань, содержащая белый цвет};
A_2 = {выпала грань, содержащая черный цвет};
A_3 = {выпала грань, содержащая красный цвет}.
Докажите, что:
а) любые два из событий A_1, A_2, A_3 независимы;
б) события A_1, A_2, A_3 не являются независимыми (в совокупности).

2. Две кости бросаются до тех пор, пока в сумме не выпадет 5 очков. Найдите вероятность того, что:
а) кости брошены два раза;
б) кости брошены не более двух раз.

3. Отдел технического контроля проверяет качество изделий. Вероятность, что наугад выбранное изделие будет дефектным, равна 0,1. Найдите вероятность того, что:
а) из трех выбранных изделий одно будет дефектным;
б) из трех выбранных изделий имеется не более одного дефектного.

4. Два футбольных клуба, F_1 и F_2, располагают соответственно 18 и 15 игроками для формирования команд к предстоящему матчу. Игрок X является членом клуба F_1, игрок Y – членом клуба F_2. Найдите вероятность того, что в будущей игре двух команд X будет играть против Y (напомним, что футбольная команда состоит из 11 игроков).

5. На заводе производство изделий поставлено на поток. При изготовлении каждого изделия может быть допущен дефект типа a (событие A) и независимым образом может быть допущен дефект типа b (событие B). 2% изготовляемых изделий имеют дефект a и 10% – дефект b. Берется наудачу одно изделие, изготовленное на заводе. Найдите вероятность события:

а) D_0 = {изделие не имеет дефектов};
б) D_1 = {изделие имеет в точности один дефект}.

6. Стрелки t_1, t_2 и t_3 поражают мишень с вероятностями $P_1 = 0{,}6$, $P_2 = 0{,}5$ и $P_3 = 0{,}4$ соответственно. Стрелки дали залп по мишени, и две пули попали в мишень. Что вероятнее, стрелок t_3 попал в мишень или не попал?

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

§ 5 ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

5.1. Понятие дискретной случайной величины

Встречаются ситуации, когда некоторая величина принимает различные значения под влиянием случайных факторов. Например, невозможно знать заранее, сколько вызовов примет телефонная станция за определенный промежуток времени или сколько дорожно-транспортных происшествий произойдет завтра в Кишинэу. Также мы не сможем предсказать число мальчиков среди 100 новорожденных в некотором роддоме.

Величины, подобные количеству телефонных вызовов, дорожных происшествий и т.п., зависят от случайных обстоятельств или, по терминологии теории вероятностей, от результатов некоторых экспериментов.

Определение

Случайной (дискретной) величиной называется любая числовая функция, заданная на пространстве элементарных событий некоторого эксперимента.

Будем рассматривать только случайные величины с *конечным числом* возможных значений.

Определение

Совокупность всех возможных значений $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ случайной величины ξ и вероятностей $p_1 = P(\xi = x_1),\ \ p_2 = P(\xi = x_2),\ \ldots,\ p_n = P(\xi = x_n)$ называется **распределением случайной величины** ξ.

Распределение случайной величины ξ задается в виде таблицы, первая строка которой содержит возможные значения ξ, а вторая – вероятности, соответствующие этим значениям.

ξ	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Легко доказать, что $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.

Задачи с решением

1 Из урны, содержащей 4 белых и 2 черных шара, наугад одновременно извлекают 2 шара. Найдем распределение случайной величины ξ, равной числу извлеченных белых шаров.

Решение:

ξ может принимать значения 0, 1, 2. Вычислим вероятности, соответствующие этим значениям. При выборе двух шаров элементарными событиями являются неупорядоченные пары шаров, число которых равно $C_6^2 = 15$.

$$P(\xi = 0) = P\,(\text{извлечены два черных шара}) = \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15};$$

$$P(\xi = 1) = P\,(\text{извлечены один белый и один черный шар}) = \frac{C_4^1 \cdot C_2^1}{C_6^2} = \frac{8}{15};$$

$$P(\xi = 2) = P\,(\text{извлечены два белых шара}) = \frac{C_4^2}{C_6^2} = \frac{6}{15}.$$

Таким образом, получили распределение ξ:

ξ	0	1	2
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{6}{15}$

2 Из множества {1, 2, 3} дважды наугад берется по одному числу с возвращением первого числа обратно в заданное множество. Пусть ξ – наибольшее выбранное число. Найдем распределение ξ.

Решение:

Элементарными событиями являются упорядоченные пары: E = {11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33}.

Следовательно: $P(\xi=1)=\frac{1}{9}$, $P(\xi=2)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$, $P(\xi=3)=\frac{5}{9}$.

Итак, ξ имеет следующее распределение:

ξ	1	2	3
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{9}$

Замечание

В некоторых случаях распределение можно найти без перечисления элементарных событий E.

5.2. Математическое ожидание случайной величины

Определение

Математическим ожиданием случайной величины ξ с распределением

ξ	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

называется число $M(\xi)=x_1p_1+x_2p_2+...+x_np_n$.

Задачи с решением

1 Пусть ξ – случайная величина с распределением, задаваемым таблицей:

ξ	–1	1	3	5
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

Вычислим математическое ожидание случайных величин ξ и $\eta=2\xi$.

Решение:

$M(\xi)=-1\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{2}=3.$

Чтобы найти $M(\eta)$, сначала найдем распределение η:

η	–2	2	6	10
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

Итак, $M(\eta)=-2\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}+10\cdot\frac{1}{2}=6.$

2 Стрелок, имея в запасе 3 патрона, ведет стрельбу по мишени до первого попадания или до полного израсходования всех патронов. Вероятность попадания при отдельном выстреле равна 0,8. Найдем распределение случайной величины ξ, равной числу израсходованных патронов, и вычислим математическое ожидание $M(\xi)$.

Решение:

Если стрелок попадает в цель при первом выстреле (что произойдет с вероятностью 0,8), то $\xi=1$ и, значит, $P(\xi=1)=0,8$. Если же стрелок при первом выстреле промахнется (событие A), но попадет при втором выстреле (событие B), то израсходовано два патрона и $\xi=2$. Далее, $P(\xi=2)=P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=0,2\cdot0,8=0,16$ (A и B – независимые события). Если стрелок промахнется и в первый, и во второй раз, то производится третий выстрел, и в этом случае $\xi=3$.

Вероятность $P(\xi=3)$ можно найти из условия $P(\xi=1)+P(\xi=2)+P(\xi=3)=1$: $P(\xi=3)=1-0,8-0,16=0,04$.

Таким образом, найдено распределение случайной величины ξ:

ξ	1	2	3
P	0,8	0,16	0,04

Вычислим математическое ожидание:
$M(\xi)=1\cdot0,8+2\cdot0,16+3\cdot0,04=1,24.$

Упражнения и задачи

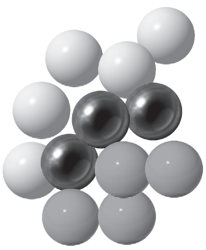
Б

1. Из множества $\{1, 2, \ldots, 10\}$ берется наугад число. Пусть ξ – число его делителей. Найдите распределение ξ.
2. Брошены две игральные кости. Пусть ξ – сумма выпавших очков. Найдите распределение случайной величины ξ и ее математическое ожидание $M(\xi)$.
3. В урне 5 белых и 3 черных шара. Одновременно наугад извлекаются 3 шара. Пусть ξ – число белых извлеченных шаров. Найдите распределение случайной величины ξ и ее математическое ожидание $M(\xi)$.
4. Производится два независимых выстрела по мишени. Вероятность попадания при отдельном выстреле равна 0,8. Обозначим через ξ число попаданий в мишень. Найдите математическое ожидание случайной величины ξ.
5. В ящике содержатся 5 изделий, одно из которых с дефектом. Из ящика извлекается по одному изделию без возвращения, пока не будет извлечено дефектное изделие. Найдите распределение случайной величины ξ, равной числу извлеченных изделий, и вычислите математическое ожидание $M(\xi)$.
6. На пути движения автомобиля 4 светофора, каждый из них или разрешает, или запрещает дальнейшее движение с вероятностью 0,5. Найдите распределение случайной величины ξ, равной числу светофоров, пройденных автомобилем до первой остановки. Вычислите $M(\xi)$.
7. Из множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ выбираются наугад одновременно 3 числа, которые записываются в порядке возрастания: $x_1 < x_2 < x_3$.
   а) Найдите распределения случайных величин x_1, x_2, x_3.
   б) Вычислите математические ожидания $M(x_1)$, $M(x_2)$, $M(x_3)$.

Упражнения и задачи на повторение

А

1. В урне 5 белых, 3 черных и 4 красных шара. Одновременно наугад извлекаются 4 шара. Рассматриваются события:



$A_1 = \{$извлечены шары двух цветов$\}$,
$A_2 = \{$извлечены по крайней мере 2 белых шара$\}$,
$A_3 = \{$извлечены 3 красных шара$\}$,
$A_4 = \{$извлечены 1 черный и по крайней мере 1 красный шар$\}$.
а) Укажите пары несовместимых и пары совместимых событий.
б) Что представляют собой события $A_2 \cap A_3$, $A_3 \cap A_4$?
2. Дважды бросается игральная кость. Найдите вероятность события:
   а) $A = \{$число очков, выпавших в первый раз, больше числа очков, выпавших во второй раз$\}$;
   б) $B = \{$сумма очков, выпавших в первый раз и во второй раз, меньше 5$\}$.
3. Предположим, что вы забыли последние две цифры телефонного номера и набираете их наудачу, помня лишь о том, что эти цифры нечетные и различные. Найдите вероятность того, что номер будет набран верно.
4. Известно, что 5 из 40 пассажиров самолета причастны к похищению крупной денежной суммы. К трапу самолета подошел инспектор уголовного розыска и заявил, что для обнаружения хотя бы одного преступника ему достаточно произвести обыск у шести наугад выбранных пассажиров. Что руководило инспектором: трезвый расчет или риск?
5. Из множества чисел $\{1, 2, 3, ..., 350\}$ выбирается наудачу одно. Найдите вероятность, что это число делится хотя бы на одно из чисел 5 и 13.
6. Дважды бросается монета. Рассматриваются события:
   $A = \{$при первом бросании выпал герб$\}$,
   $B = \{$выпало 2 герба$\}$.
   Являются ли независимыми эти события?

7. Даны возможные значения случайной величины ξ: $-2, 4, a$.
   Найдите a, если известно, что
   $P(\xi = -2) = 0{,}2;\ P(\xi = 4) = 0{,}3;\ M(\xi) = 4{,}8.$

Б

1. A, B и C – случайные события. Дано:
$P(A)=0{,}5$; $P(B)=0{,}1$; $P(C)=0{,}7$;
$P(B\cup C)=0{,}8$; $P(A\cap B)=0{,}3$.
а) Являются ли несовместимыми события A и B? Независимы ли они?
б) Являются ли несовместимыми события B и C? Независимы ли они?
в) Являются ли несовместимыми события A и C?

2. Из множества $\{1, 2, ..., n\}$ случайно выбирается число. Найдите вероятность случайного события:
а) $A_1=\{$выбранное число делится на число $k\}$;
б) $A_2=\{$выбранное число при делении на число k дает остаток $r\}$,
k и r – фиксированные натуральные числа; $r<k\le n$.
(Найдите пределы этих вероятностей при $n\to\infty$.)

3. На пятиместную скамейку случайным образом сядутся 5 человек. Какова вероятность того, что 3 определенных лица окажутся рядом?

4. В урне содержатся n белых $(n\ge 2)$, 5 черных и 2 зеленых шара. Одновременно наугад извлекаются 2 шара. Обозначим через $P(n)$ вероятность того, что извлечены 2 одноцветных шара.
а) Докажите, что $P(n)=\dfrac{n^2-n+22}{(n+7)(n+6)}$.
б) Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty}P(n)$. Прокомментируйте результат.

5. Мастер обслуживает 2 станка, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение смены станки не потребуют внимания мастера, равна 0,95 для первого станка и 0,90 – для второго станка. Найдите вероятность того, что в течение смены хотя бы один станок не потребует внимания мастера.

6. В семье четверо детей. Известно, что в семье есть мальчик (то есть, хотя бы один мальчик). Найдите вероятность, что в семье все дети – мальчики (полагаем, что рождение мальчика и девочки – независимые и равновероятные события).

7. Предлагается следующая игра. Вы ставите 6 леев и бросаете игральную кость. Если выпадает 6, 5 или 4 очка, то вы получаете соответственно 18 леев, 6 леев или 1 лей. В других случаях вы ничего не получаете.

а) Пусть ξ – случайная величина, равная выигрышу в одной партии (разность между полученной суммой и ставкой). Найдите распределение ξ и математическое ожидание $M(\xi)$.
б) В кармане игрока 10 леев. Какова вероятность того, что он сможет сыграть две партии?

Проверочная работа

Время выполнения работы: 45 минут

А

1. Из урны, содержащей 15 шаров с номерами $1, 2, ..., 15$, вынимают наудачу шар. **2**
а) Постройте пространство элементарных событий E; опишите в виде подмножества E событие:
$A=\{$номер вынутого шара кратен 4$\}$;
$B=\{$номер вынутого шара кратен 5$\}$;
$C=\{$номер вынутого шара кратен 12$\}$;
$B\cap C$; $B\cap\overline{C}$; $A\cap B$.
б) Какие из пар A и B, A и C, B и C являются несовместимыми событиями?

2. Из 25 лотерейных билетов – 5 выигрышные. Куплено 6 билетов. Найдите вероятность события: **3**
а) $A=\{$один и только один купленный билет выигрышный$\}$;
б) $B=\{$не более двух купленных билетов являются выигрышными$\}$;
в) $C=\{$по крайней мере один купленный билет выигрышный$\}$.

3. Игральная кость брошена 2 раза. Пусть x_1 и x_2 – число очков, выпавших при первом и втором бросаниях соответственно. **3**
Докажите, что случайные события $A_1 = \{$число $x_1 + x_2$ является четным$\}$ и $A_2 = \{$ число $x_1 + x_2$ кратно 3$\}$ являются независимыми, а события $A_3 = \{$число $x_1 + x_2$ является нечетным$\}$ и $A_4 = \{$число x_1 является кратным $x_2\}$ являются зависимыми.

4. Берется наудачу двузначное натуральное число. Рассматриваются случайные события: **2**
A = {взятое число кратно 5},
B = {взятое число кратно 13}.
Найдите вероятность $P(A \cup B)$.

Время выполнения работы: **90 минут**

Б

1. Из множества {1, 2, 3} берется наугад некоторое число (a); из оставшихся чисел берется наугад еще одно число (b) и записывается упражнение $x^2 + ax + b = 0$. **2**
а) Постройте пространство элементарных событий эксперимента.
б) Найдите вероятности случайных событий:
A = {решения уравнения – действительные числа};
B = {решения уравнения – целые числа}.

2. В чулане имеются 5 одинаковых пар ботинок. Из них выбирают 5 ботинок. Найдите вероятность события A = {среди выбранных ботинок найдется хотя бы одна пара}. **2**

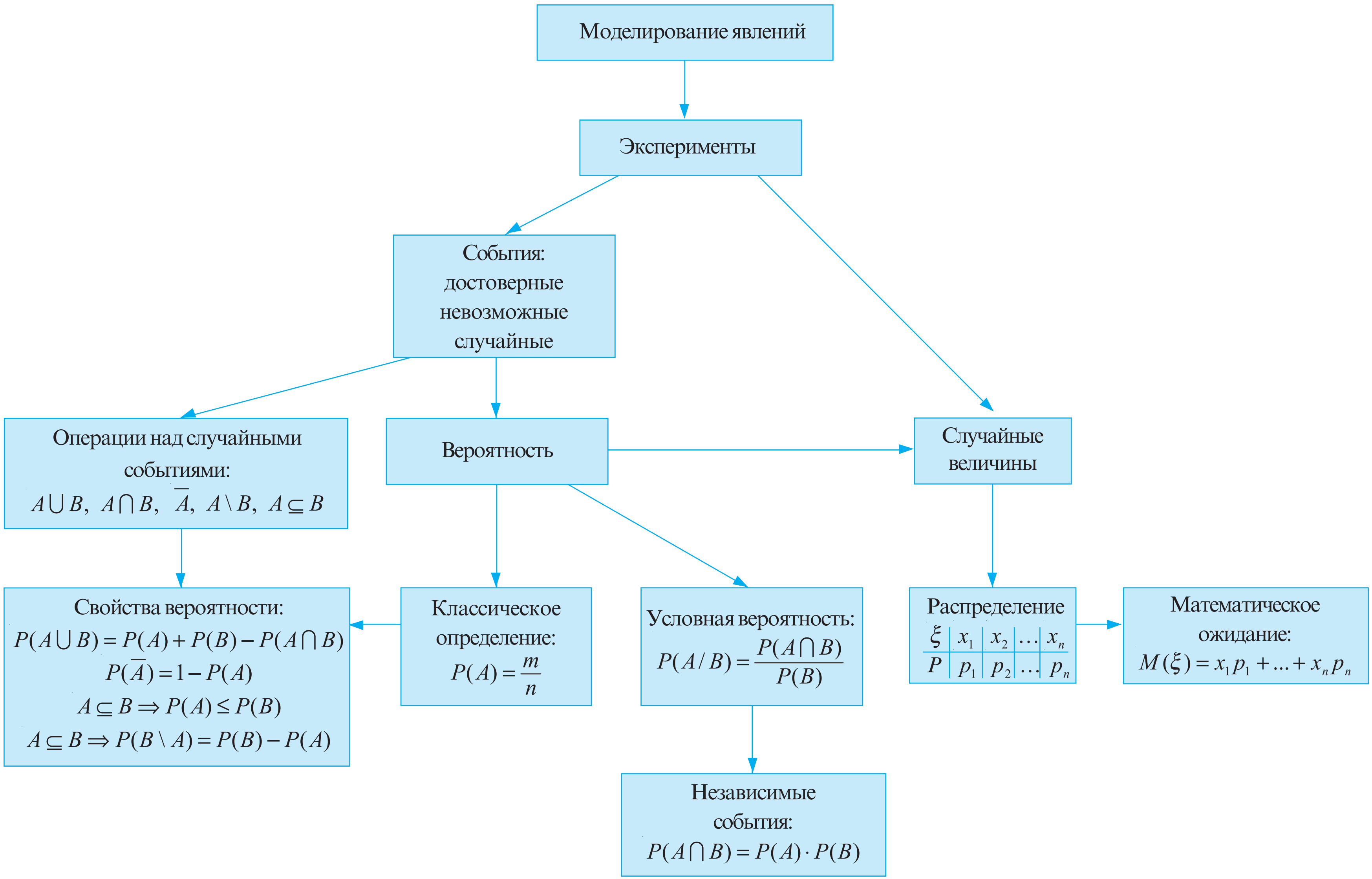
3. Ученик должен вытянуть 3 вопроса из 20: 8 по алгебре, 7 по геометрии и 5 по тригонометрии. Он тянет вопросы последовательно по одному (без возвращения). **2**
Найдите вероятность события:
а) A_1 = {вытянуты 3 вопроса по алгебре};
б) A_2 = {вытянут один вопрос по алгебре (в точности)};
в) A_3 = {вытянуты 3 вопроса в следующей последовательности: вопрос по алгебре, вопрос по геометрии, вопрос по тригонометрии}.

4. Молодой специалист – экономист – ищет работу. Он прошел собеседование в банке и страховой компании. Вероятность своего успеха в банке он оценивает как равную 0,5, а в страховой компании – как равную 0,6. Кроме того, он рассчитывает, что с вероятностью 0,3 ему поступят предложения от обеих организаций. Найдите вероятность того, что молодой специалист получит хотя бы одно предложение работы. **2**

5. В семье четверо детей. Предположим, что рождение мальчика и девочки – независимые равновероятные события. Пусть ξ – число девочек в семье. Найдите распределение случайной величины ξ и математическое ожидание $M(\xi)$. **2**

$$M(\xi) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n$$

Элементы теории вероятностей



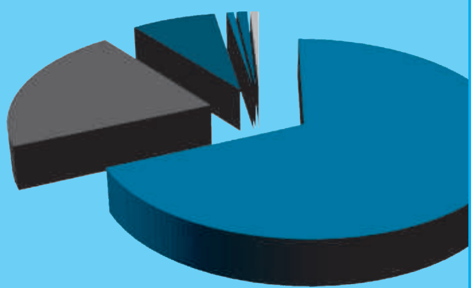
Модуль 6

Элементы математической статистики и финансовой математики

Цели модуля

- представление результатов наблюдений при помощи рисунков и таблиц, построение и интерпретация статистических диаграмм;
- определение средней арифметической, моды и медианы статистического ряда;
- применение элементов финансовой математики.

1. **Основные понятия**
2. **Учет и группировка данных**
3. **Графическое изображение статистических данных**
4. **Средние величины статистических рядов**
5. **Элементы финансовой математики**



§ 1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Статистика – это наука, занимающаяся *сбором*, *регистрацией*, *группировкой*, *анализом* и *интерпретацией результатов* наблюдений над некоторым явлением, а также *выдвижением некоторых предположений* относительно развития в будущем данного явления.

Статистическая совокупность – относительно однородная группа объектов или явлений, характеризующихся наличием некоторых общих черт и подвергающихся статистическому анализу.

Элементы статистической совокупности называются ***статистическими единицами***. Число статистических единиц называется ***объемом статистической совокупности***, а общая черта статистических единиц называется ***статистическим признаком***.

Примеры

1 Предположим, что нас интересуют результаты тестирования по математике учащихся XII класса. В этом случае статистическая совокупность – это множество учащихся класса. Ученики класса – статистические единицы, а число учеников – объем совокупности. Оценка по математике представляет собой статистический признак.

2 Пусть нас интересует численность жителей в населенных пунктах Республики Молдова. Тогда:

- статистическая совокупность – это множество всех населенных пунктов Республики Молдова (1 681 населенный пункт);
- статистические единицы – это населенные пункты;
- объем совокупности равен 1 681;
- статистический признак – это численность жителей в населенных пунктах.

Измеряемый признак (оценка, рост, масса тела и т. д.) называется ***количественным признаком*** (***числовым***).

Неизмеряемый признак (цвет глаз, профессия, пол и т. д.) называется ***качественным признаком***.

Количественный признак называется ***непрерывным***, если может принимать в определенных пределах любые числовые значения (рост, масса тела и т. д.).

Количественный признак называется ***дискретным***, если может принимать лишь изолированные значения, отличающиеся друг от друга на некоторую конечную величину (оценка, количество членов в семье и т. д.).

Статистические признаки называются также ***статистическими величинами***. Значения, принимаемые признаком у статистических единиц совокупности, называются ***вариантами***.

Первым этапом любого статистического исследования является ***сбор данных*** и называется ***статистическим наблюдением***. Обычно прибегают к выборочному наблюдению: из статистической совокупности случайным образом берут n статистических единиц и подвергают их изучению. Это подмножество статистической совокупности называют ***выборкой***.

Для того чтобы по данным выборки можно было достаточно уверенно судить об интересующем признаке статистической совокупности, необходимо, чтобы выборка была ***репрезентативной*** (представительной), то есть она должна правильно отражать структуру статистической совокупности.

§ 2 УЧЕТ И ГРУППИРОВКА ДАННЫХ

С целью проверки успеваемости по математике каждому из 50 учеников предложили по 20 задач. Количество решенных учениками задач дано в порядке, в котором они сдали работы:

11, 14, 11, 12, 8, 17, 11, 14, 10, 12, 12, 10, 12, 8, 17, 11, 10,
11, 12, 10, 10, 11, 8, 11, 12, 11, 11, 17, 16, 10, 12, 8, 16, 12,
10, 11, 16, 10, 11, 12, 8, 10, 11, 12, 11, 11, 17, 11, 10, 12.

Эти числа составляют ***таблицу статистических данных***. В таком виде таблица представляет собой некоторую массу трудно обозримых результатов. Необходимо ***сгруппировать*** эти данные. Первичный способ группировки приводит к таблице 1.

Таблица 1

Число решенных задач	Число учеников
8	5
10	10
11	15
12	11
14	2
16	3
17	4

Анализируя данные таблицы 1, можем сделать некоторые выводы: большинство учеников решили 10–12 задач, что составляет 50–60% от числа предложенных задач; 4 ученика решили 17 задач, что составляет 85% от числа всех задач. Такая таблица позволяет сравнивать успеваемость подобных групп учеников.

Таблица 1 отражает ***группировку данных по вариантам***.

В результате группировки по вариантам получаем ряд пар значений, который называется ***статистическим рядом*** (для одного признака).

В общем виде статистический ряд представлен в таблице 2.

Таблица 2

Вариант признака x_i	Число единиц n_i
x_1	n_1
x_2	n_2
…	…
x_r	n_r
Всего	$n=\sum_{i=1}^{r} n_i$

Здесь предполагается, что $x_1 < x_2 < \ldots < x_r$.

Элементы таблицы 2 означают следующее: x_i – это i-й вариант признака X; n_i – это количество статистических единиц, у которых зарегистрирован вариант x_i, и называется ***абсолютной частотой*** варианта x_i.

Таблицу 2 можно представить также в виде таблицы с двумя строками:

Вариант признака, x_i	x_1	x_2	…	x_r	Всего
Число единиц, n_i	n_1	n_2	…	n_r	$n = \sum_{i=1}^{r} n_i$

Если число вариантов количественного признака большое (особенно при непрерывном признаке), производится ***группировка данных по интервалам*** (***классам***).

Пример

Зарегистрировав продолжительность работы 65 электронных ламп, получили результаты (в часах), приведенные в таблице 3:

Таблица 3

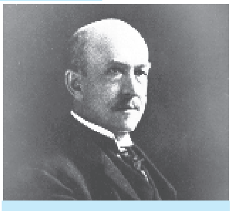
13,4	14,7	15,2	15,1	13,0	8,8	14,0	17,9	15,1	16,5	16,6
14,2	16,3	14,6	11,7	16,4	15,1	17,6	14,1	18,8	11,6	13,9
18,0	12,4	17,2	14,5	16,3	13,7	15,5	16,2	8,4	14,7	15,4
11,3	10,7	16,9	15,8	16,1	12,3	14,0	17,7	14,7	16,2	17,1
10,1	15,8	18,3	17,5	12,7	20,7	13,5	14,0	15,7	21,9	14,3
17,7	15,4	10,9	18,2	17,3	15,2	16,7	17,3	12,1	19,2	

Группируя эти данные по интервалам, получаем таблицу 4:

Таблица 4

Номер интервала	Границы интервала	Середина интервала	Частота n_i
1	8,4 – 10,4	9,4	3
2	10,4 – 12,4	11,4	7
3	12,4 – 14,4	13,4	13
4	14,4 – 16,4	15,4	21
5	16,4 – 18,4	17,4	17
6	18,4 – 20,4	19,4	2
7	20,4 – 22,4	21,4	2

При выборе интервалов точка отсчета определяется подходящим образом: берется 0, либо наименьший вариант, либо число, несколько меньше наименьшего варианта. Условимся считать, что верхняя граница интервала (за исключением, быть может, последнего) не принадлежит этому интервалу. Так, в нашем примере, интервал 8,4–10,4, который можно записать как $[8,4; 10,4)$, содержит варианты x_i такие, что $8,4 \le x_i < 10,4$.



Чарльз Х. Стерджес (1846–1926) – американский статистик

В данном примере все интервалы имеют одинаковую длину, что не обязательно. Первый и последний интервалы могут иметь длины, отличные от остальных интервалов, особенно в случае непрерывного признака.

Для определения числа интервалов рекомендуется формула ***Стерджеса***:

$$r \approx 1 + 3{,}322 \lg n,$$

где n – объем выборки.

Длина интервала h вычисляется по формуле:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{r},$$

где $x_{\max}$ и $x_{\min}$ – соответственно максимальный и минимальный варианты выборки, а n – объем выборки.

Если длина интервала должна быть целым числом, то h округляется с избытком до целого.

В нашем примере, $1 + 3{,}322\lg 65 \approx 7{,}02$, то есть $r = 7$;

$$x_{\max} = 21{,}9, \quad x_{\min} = 8{,}4, \quad \frac{x_{\max} - x_{\min}}{r} = \frac{21{,}9 - 8{,}4}{7} \approx 1{,}9, \text{ то есть } h = 2.$$

Замечание

Для вычисления r, кроме формулы Стерджеса, существуют и другие, более обоснованные формулы. Вообще, выбор числа интервалов – неэлементарная задача. В дальнейшем будем придерживаться общего правила, согласно которому r выбирается между 5 и 20.

Число n_i вариантов, попавших в i-й интервал, называется ***абсолютной частотой интервала***, а $f_i = \frac{n_i}{n}$ – ***относительной частотой***. ***Накопленной абсолютной частотой*** i-го интервала называется величина $F_i = \sum_{j=1}^{i} n_j$, а ***накопленной относительной частотой*** i-го интервала – величина $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{i} n_j$.

Аналогично определяются понятия ***абсолютная частота***, ***относительная частота*** и ***накопленные (абсолютная** и **относительная) частоты отдельного варианта*** x_i.

Замечание

Значение относительной частоты можно выразить в процентах.

Таблица статистического ряда может быть дополнена этими частотами.

Дополнение таблицы 1 приводит к таблице 5.

Таблица 5

Число решенных задач x_i	Абсолютная частота n_i	Накопленная абсолютная частота F_i	Относительная частота f_i	Накопленная относительная частота
8	5	5	0,10	0,10
10	10	15	0,20	0,30
11	15	30	0,30	0,60
12	11	41	0,22	0,82
14	2	43	0,04	0,86
16	3	46	0,06	0,92
17	4	50	0,08	1,00

Проанализировав данные таблицы 5, сделаем вывод, что из 50 учеников 41 решил не более 12 задач каждый (из 20 предложенных). Заметим также, что накопленная относительная частота варианта $x_3 = 11$ равна 0,60. Это означает, что 60% учеников решили не более 11 задач каждый.

Отметим, что понятия случайной величины и вероятности являются теоретическими моделями понятий признака и соответственно относительной частоты.

Упражнения и задачи

А

1. Рассматривается выборка объема $n = 20$ из множества значений некоторого статистического признака (то есть из некоторой статистической совокупности):

30, 100, 70, 60, 40, 30, 60, 40, 40, 70, 60, 40, 70, 60, 70, 60, 60, 70, 60, 60.

Укажите вариант, накопленная относительная частота которого равна 0,7.

2. Месячное потребление электроэнергии (в квт · ч) в некотором жилом доме по квартирам отражено в следующей таблице:

16	27	87	98	58	69	29	40	19	71
82	42	53	17	24	84	95	55	66	54
75	45	66	36	57	27	48	18	39	9
30	9	21	91	18	82	8	73	94	58
85	66	96	77	9	88	19	99	29	10

Сгруппируйте эти данные по 10 интервалам: [0, 10), [10, 20), ..., [80, 90), [90, 100].

3. Рассматриваются таблицы данных:

1)

97	63	84	82	77	58	59	70	101	75
115	55	81	76	85	83	92	86	80	78
119	90	82	68	69	101	88	72	93	100
114	59	61	86	62	86	97	84	56	74

2)

47,0	50,4	52,1	54,3	55,4	58,3	60,0	60,1	62,9	63,5
64,3	65,2	65,4	67,0	67,4	68,2	69,0	69,3	70,0	70,4
70,5	71,3	71,4	72,5	73,3	73,6	74,5	74,8	75,1	75,7
76,2	77,1	79,8	79,9	81,7	83,7	84,4			

а) Сгруппируйте эти данные по интервалам, выбрав их число по формуле Стерджеса. Величину интервалов выберите, округляя с избытком до целого (для таблицы 1) и с избытком до десятых (для таблицы 2).

б) Дополните построенные таблицы относительными частотами и накопленными относительными частотами.

Б

1. Рассматривается выборка объема $n = 20$ из множества значений некоторого статистического признака (то есть из некоторой статистической совокупности): 5, 8, 3, 6, 7, 4, 3, 3, 4, 5, 4, 6, 7, 4, 5, 6, 8, 4, 5, 8.
Укажите вариант, накопленная относительная частота которого равна 0,75.

2. Часы, выставленные в витрине магазина, показывают случайное время. Записав показания 50 часов, получили следующие результаты:

00:39	03:05	07:13	09:04	02:34	04:35	11:05	05:16	10:33	06:50
11:32	04:19	10:19	00:27	06:08	01:56	09:37	02:28	03:49	11:21
01:07	06:41	11:04	02:07	04:42	08:06	00:09	04:30	07:16	08:39
05:44	09:21	01:25	10:52	09:40	02:41	10:11	03:18	10:14	00:41
08:43	02:14	04:05	05:07	03:27	06:20	04:15	07:01	00:53	02:30

Сгруппируйте эти данные по 12 интервалам: [0, 1), [1, 2), ..., [11, 12].

3. На консервном заводе банки заполняют на автоматизированной линии. Для проверки работы линии взвешивают наугад содержимое 75 банок. Результаты представлены в следующей таблице:

Масса (г) интервал	[730, 740)	[740, 750)	[750, 760)	[760, 770)	[770, 780]
Число банок	5	7	52	9	2

а) Укажите изучаемую статистическую совокупность.
б) Укажите изучаемый статистический признак и его тип.
в) Каков процент банок, масса которых меньше 750 г?

4. Известны данные о возрасте актеров (таблица 1) и актрис (таблица 2), в котором они были удостоены премии „Оскар“:

1)

32	51	35	76	32	48	62	41	31	46
37	53	45	37	60	48	43	56	47	40
36	33	55	42	38	40	42	39	45	36
32	61	39	40	56	43	44	46	60	

2)

50	44	35	74	31	37	35	34	31	26
80	41	38	30	35	26	26	24	27	25
26	21	49	31	41	34	61	30	39	33
28	61	33	41	42	34	60	37	34	

а) Сгруппируйте эти данные по интервалам, выбрав их число по формуле Стерджеса. Величину интервалов выберите, округляя с избытком до целого.
б) Дополните построенные таблицы относительными и накопленными относительными частотами.
в) Проанализируйте дополненные таблицы.

5. В таблице приводится вес новорожденных (в килограммах) в некотором роддоме:

3,9	2,6	3,7	3,4	2,0	3,5	3,2	3,8	3,0	4,2
3,8	3,7	2,1	3,8	2,9	3,7	2,6	3,5	2,4	3,6
3,0	5,2	2,7	3,5	3,0	2,5	4,1	3,3	3,8	3,1
3,6	3,8	2,5	4,2	3,3	4,0	3,8	2,5	3,5	3,0
3,3	2,2	4,2	4,6	2,9	3,9	2,8	3,4	4,0	2,6
4,8	3,3	3,5	3,0	4,5	3,1				

а) Сгруппируйте эти данные по интервалам:

$$[2{,}0; 2{,}4), [2{,}4; 2{,}8), [2{,}8; 3{,}2), [3{,}2; 3{,}6), [3{,}6; 4{,}0), [4{,}0; 4{,}4), [4{,}4; 4{,}8), [4{,}8; 5{,}2].$$

Дополните построенную таблицу относительными и накопленными относительными частотами.

б) Сгруппируйте эти же данные, выбрав число интервалов по формуле Стерджеса.

Указание. $n = 56$, $\lg 56 \approx 1{,}748$, $r = 6$, $h \approx 0{,}533...$; полагаем $h = 0{,}6$ (округляем с избытком до десятых).

§ 3 ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ

Чтобы придать бóльшую наглядность статистическим данным, их изображают в виде графиков (диаграмм).

3.1. Гистограмма и полигон частот

Гистограмма применяется в случае, когда данные сгруппированы по интервалам. Для построения гистограммы частот на оси абсцисс откладываем интервалы. На каждом из них строим прямоугольник, высота которого пропорциональна частоте (абсолютной или относительной) данного интервала.

Гистограмма абсолютных частот, соответствующая статистическому ряду таблицы 4, изображена на рисунке 6.1.

Полигон абсолютных частот – это ломаная, соединяющая точки (x_i^*, n_i), где x_i^* – середина i-го интервала, $i=\overline{1, r}$. Статистическому ряду таблицы 4 соответствует полигон, изображенный на рисунке 6.2. ***Полигон относительных частот*** – это ломаная, соединяющая точки (x_i^*, f_i), $i=\overline{1, r}$.

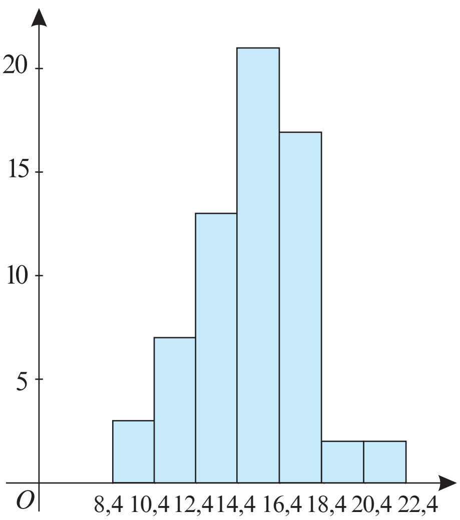


Рис. 6.1

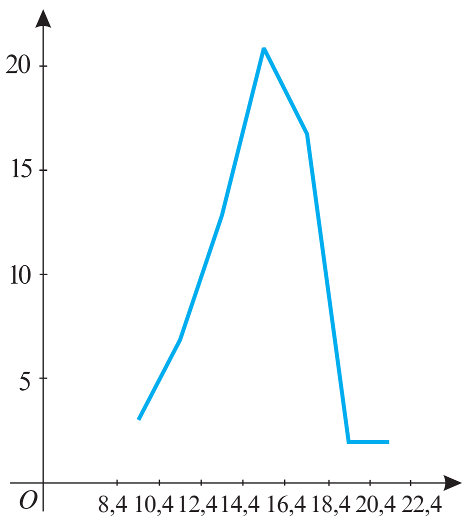


Рис. 6.2

Абрахам Муавр (1667–1754) – французский математик

А. Муавр измерил рост 1 375 женщин, выбранных случайным образом. Гистограмма, соответствующая данным, сгруппированным по интервалам, изображена на рисунке 6.3.

Если бы мы воспользовались данными измерений не 1375, а миллиона женщин и измерения были бы проведены с точностью до миллиметра, то гистограмма была бы неотличима от колоколообразной кривой (рис. 6.3).

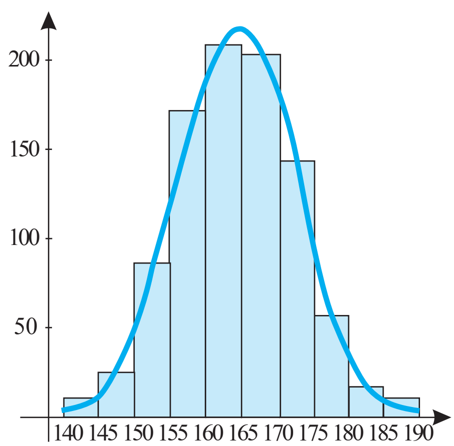


Рис. 6.3

3.2. Диаграммы в виде вертикальных отрезков и полосовые диаграммы

Диаграмма в виде вертикальных отрезков применяется для дискретных признаков, принимающих небольшое число значений. Она строится следующим образом: на оси абсцисс откладываются значения x_i признака X и из каждой полученной точки восстанавливается перпендикуляр, длина которого пропорциональна абсолютной либо относительной частоте, соответствующей варианту x_i. Масштабы по осям координат могут быть разные.

Задача с решением

Счетчик Гейгера в течение 25 периодов по 7,5 секунды каждый регистрировал число излучаемых α-частиц. Получены следующие результаты:

3, 0, 4, 6, 3, 5, 4, 4, 2, 3, 1, 5, 3, 4, 2, 5, 6, 4, 1, 2, 7, 6, 5, 3, 4.

Пусть x_i – число α-частиц, зафиксированных в i-ом периоде, и n_i – абсолютная частота варианта x_i. Представим эти данные в виде статистического ряда и построим диаграмму вертикальных отрезков.

Решение:

Группировка по вариантам приводит к статистическому ряду таблицы 6. Диаграмма в виде отрезков этого ряда изображена на рисунке 6.4.

Таблица 6

x_i	n_i
0	1
1	2
2	3
3	5
4	6
5	4
6	3
7	1

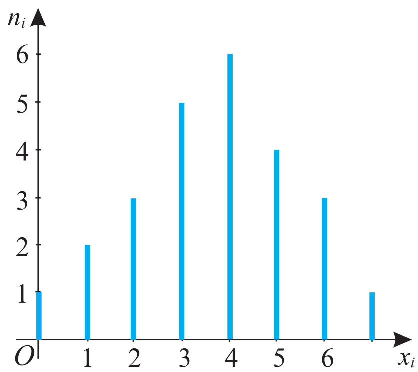


Рис. 6.4

Полосовые диаграммы применяются, в принципе, для качественных статистических признаков, а также для дискретных количественных признаков с небольшим числом вариантов. Эти диаграммы используются для наглядного сравнения вариантов одного и того же статистического ряда или нескольких статистических рядов.

Полосовая диаграмма состоит из горизонтальных полос в виде прямоугольников. Каждому варианту статистического признака соответствует прямоугольник. Основания прямоугольников одинаковой длины размещаются на оси ординат. Высота каждого прямоугольника равна частоте (абсолютной или относительной) соответствующего варианта либо пропорциональна частоте. Расстояния между прямоугольниками должны быть одинаковыми.

Задачи с решением

1 В классе провели опрос среди учащихся о любимом занятии в свободное время. Результаты представлены в виде статистического ряда:

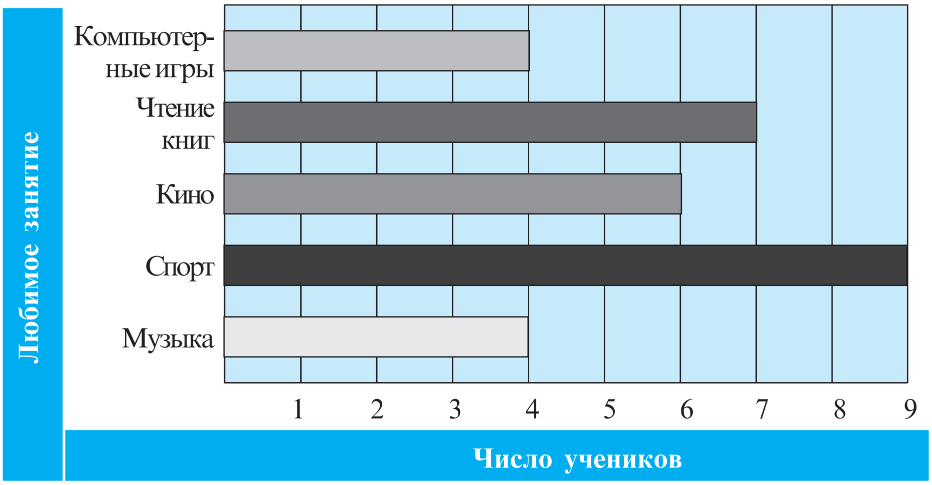
    

Любимое занятие	музыка	спорт	кино	чтение книг	компьютерные игры	**Всего**
Число учеников	4	9	6	7	4	**30**

Укажем статистический признак и его варианты. Построим полосовую диаграмму признака.

Решение:

Качественный статистический признак – „любимое занятие“, вариантами являются: музыка, спорт, кино, чтение книг, компьютерные игры.
С помощью построенной диаграммы можно наглядно сравнивать варианты (по частотам).



Посредством данной диаграммы можно провести анализ предпочтений учащихся. Например, можно отметить, что одинаковое число учащихся отдает предпочтение музыке и компьютерным играм, а наиболее предпочтительным является спорт.

2 В условиях задачи **1**, с учетом пола учащихся, результаты, представленные в виде двух статистических рядов, оказались следующими:

Любимое занятие	музыка	спорт	кино	чтение книг	компьютерные игры	Всего
Девушки	3	4	3	4	1	**15**
Юноши	1	5	3	3	3	**15**
Всего	**4**	**9**	**6**	**7**	**4**	**30**

Построим полосовую диаграмму.

Решение:

Получаем следующую диаграмму:

Посредством данной диаграммы предпочтения юношей при выборе занятия в свободное время сравниваются с предпочтениями их коллег-девушек.
Проанализировав диаграмму, заключаем, например, что:
1) юноши предпочитают больше всего спорт;
2) девушки выбирают музыку и чтение книг чаще юношей;
3) девушки и юноши в равной мере предпочитают кино;
4) юноши в равной мере выбирают кино и чтение книг.

Задание. Проведите социологический опрос среди учащихся класса относительно проведения свободного времени. Постройте соответствующую полосовую диаграмму и проанализируйте результаты опроса.

3.3. Изображение структуры качественной совокупности

Для изображения структуры (состава) статистической совокупности с качественным признаком используются ***плоскостные секторные диаграммы*** (круговые, квадратные и т. п.). Площади соответствующих фигур представляют 100%, а площади их частей пропорциональны вариантам признака.

Пример

Рассмотрим следующий статистический ряд (таблица 7):

Таблица 7

Состав населения Республики Молдова по национальностям
(перепись населения, 2014 г.)

Национальность	%
молдаване (румыны)	82,1
украинцы	6,6
гагаузы	4,6
русские	4,1
болгары	1,9
другие национальности	0,7

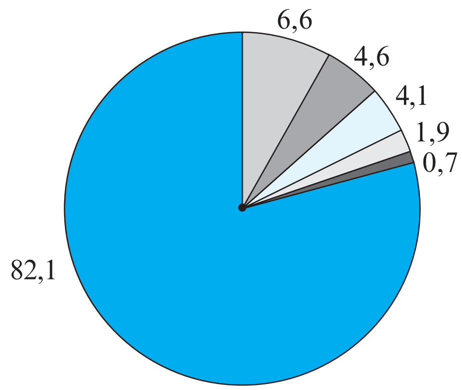


Рис. 6.5

На рисунке 6.5 эти данные представлены при помощи структурного круга.

Квадратные и ***круговые диаграммы*** помогают легче ориентироваться в тенденциях явлений. Квадраты и круги строятся так, что их площади пропорциональны значениям (вариантам) соответствующих признаков.

Задача с решением

В таблице 8 дана численность населения (в тысячах) муниципия Кишинэу.

Таблица 8

Год	1939	1950	1965	1989	2016
Численность населения	112,0	134,0	279,2	661,4	746,8

Представим эти данные с помощью:
а) квадратной диаграммы;
б) круговой диаграммы.

Решение:

а) Представляем численность населения в 2016 году в виде квадрата со стороной 27 единиц ($\sqrt{746,8} \approx 27$), а численность населения в 1939, 1950, 1965 и 1989 годах – в виде квадратов со сторонами соответственно 11, 12, 17 и 26 единиц ($\sqrt{112} \approx 11$, $\sqrt{134} \approx 12, \ldots$). Получаем диаграмму, изображенную на рисунке 6.6 (единицу можно выбрать равной $\frac{n}{27}$ см, где n – натуральное число, выбранное в зависимости от предполагаемых размеров диаграммы; в нашем случае $n = 4$).

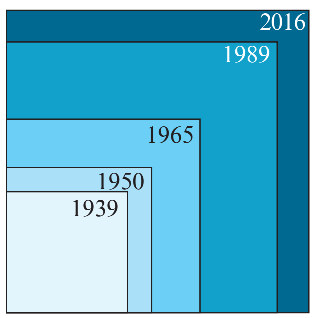


Рис. 6.6

б) Для круговой диаграммы сначала вычисляем радиусы кругов. Начинаем с наибольшего круга, т. е. с круга, соответствующего численности населения 2016 года. Его площадь должна быть пропорциональна численности населения (в тыс.): $\pi r^2 \approx 746{,}8$ (без потери общности, коэффициент пропорциональности выберем равным 1). Отсюда следует, что $r \approx 16$ единиц. Для остальных кругов аналогично получаем радиусы: 6, 7, 10 и 15 единиц. Остается выбрать значение единицы. Оно может быть любым, но достаточной величины для того, чтобы можно было провести и малые круги. Мы выберем значение единицы из условия: 16 единиц = 2 см.

Получаем диаграмму, изображенную на рисунке 6.7.

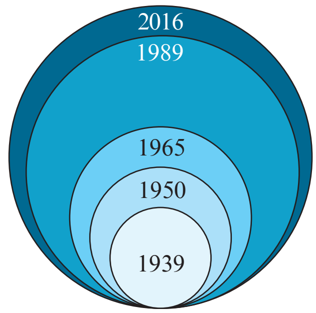


Рис. 6.7

Упражнения и задачи

А

1. 3 монеты одновременно бросили 20 раз. Число выпавших гербов задано последовательностью:

1 0 1 3 2 3 2 0 3 2 0 2 2 0 3 2 1 2 1 1.

а) Сгруппируйте данные по вариантам (или по интервалам).

б) Дополните построенную таблицу абсолютными, относительными и накопленными частотами.

в) Постройте гистограмму и полигон частот (или диаграмму в виде вертикальных отрезков).

2. Спортивный клуб лицея насчитывает 30 членов. Цвета спортивных форм отражены следующим статистическим рядом:

Цвет	Число спортсменов
красный	4
синий	10
желтый	1
зеленый	8
фиолетовый	7
Всего	**30**

Постройте круговую диаграмму.

3. По контрольной работе по математике ученики XII класса получили следующие оценки:

10, 9, 4, 5, 8, 3, 7, 8, 9, 5, 8, 7, 5, 7,
9, 8, 6, 7, 8, 6, 8, 5, 7, 6, 5, 8, 4, 3.

Изобразите эти данные при помощи диаграммы в виде вертикальных отрезков.

4. Проведите среди учеников своего класса опрос: из скольких человек состоит твоя семья? Результаты сгруппируйте по вариантам и постройте соответствующую диаграмму вертикальных отрезков.

5. В старших классах провели опрос: как вы думаете, почему некоторые дети издеваются над сверстниками? Результаты представлены в виде статистического ряда:

Номер варианта	Причина	Относительная частота (%)
1	Хотят казаться „крутыми“	35%
2	Не уверены в себе	25%
3	Неблагополучие в семье	12%
4	Завистливы	10%
5	Это приносит им „удовольствие“	10%
6	Вредны	5%
7	Со скуки	3%

Постройте соответствующую полосовую диаграмму. Проведите анализ диаграммы.

Б

1. Даны значения коэффициента интеллектуальности учеников из некоторого класса: 75, 85, 87, 90, 94, 96, 97, 99, 100, 100, 102, 102, 102, 103, 104, 104, 105, 105, 106, 107, 108, 108, 111, 112, 114, 114, 114, 114, 116, 124.
а) Сгруппируйте эти данные по интервалам: [75, 85), [85, 95), [95, 105), [105, 115), [115, 125].
б) Постройте гистограмму и полигон относительных частот.

2. Выясните у своих одноклассников, сколько времени (в минутах) занимает у них дорога в школу, и зарегистрируйте эти данные.
а) Сгруппируйте данные по вариантам (или по интервалам).
б) Дополните таблицу абсолютными, относительными и накопленными частотами.
в) Постройте гистограмму и полигон частот (или диаграмму в виде вертикальных отрезков).

3. Подбрасывайте монету до тех пор, пока два раза подряд не выпадет герб, и зарегистрируйте число бросаний. Повторите эксперимент 20 раз. Изобразите полученные данные диаграммой в виде вертикальных отрезков.

4. После экзамена по математике, где участвовали 100 учащихся, провели опрос. Учащихся попросили высказать свое мнение относительно поставленной им оценки, выбрав один из следующих вариантов:
1) решительно не согласен („решительно нет“);
2) не согласен („нет“);
3) в принципе, согласен („в принципе да“);
4) согласен („согласен“);
5) полностью согласен („полностью да“).
Результаты опроса представлены в виде статистического ряда:

Номер варианта i	Мнение	Число учащихся n_i
1	решительно нет	1
2	нет	9
3	в принципе да	40
4	согласен	35
5	полностью да	15
	Всего	**100**

Постройте круговую диаграмму.

5. 1. Проведите среди одноклассников опрос, каким образом добираетесь в школу: пешком, общественным транспортом, на маршрутном такси, на велосипеде, на автомобиле, другим транспортным средством.
2. По результатам постройте статистический ряд.
3. Представьте статистический ряд с помощью полосовой диаграммы.
4. Проведите анализ диаграммы:
а) Каким транспортным средством пользуется наибольшее число учеников?
б) Каким транспортным средством пользуется наименьшее число учеников?

6. Постройте полосовую диаграмму и сравните возраст выхода на пенсию по странам и полу.
Возраст выхода на пенсию в Республике Молдова и в некоторых европейских странах представлен следующими статистическими рядами:

Страна	Женщины	Мужчины
Респ. Молдова	57	62
Румыния	63	65
Германия	65	65
Франция	60	60
Украина	55	60
Рос. Федерация	55	60

7. Рассмотрим фразу „Полосовая диаграмма состоит из горизонтальных полос“.
а) Определите абсолютные и относительные частоты букв из этой фразы; результаты представьте в виде статистического ряда. Сравните относительные частоты букв в этой фразе с относительными частотами этих же букв в русском языке (для этого приведем относительные частоты в русском языке некоторых букв (в процентах): п – 2,3; о – 9,0; л – 3,5; с – 4,5; в – 3,8; а – 6,2; я – 1,8; д – 2,5; и – 6,2; г – 1,3; р – 4,0; м – 2,6; т – 5,3; з – 1,6; н – 5,3; ь – 0,014; ы – 1,6; х – 0,9).
б) Представьте с помощью диаграммы в виде вертикальных отрезков статистический ряд абсолютных частот гласных из данной фразы.

§ 4 СРЕДНИЕ ВЕЛИЧИНЫ СТАТИСТИЧЕСКИХ РЯДОВ

4.1. Средняя арифметическая

Пусть X – статистический признак, и рассмотрим выборку n различных его значений: $x_1, x_2, ..., x_n$. Величина $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ называется ***средней арифметической*** (простой) признака X.

Если ***данные выборки сгруппированы по вариантам***, то средняя арифметическая определяется формулой: $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}x_i n_i$, где $\sum_{i=1}^{r}n_i=n$.

Если ***данные выборки сгруппированы по интервалам***, то средняя арифметическая определяется формулой: $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}x_i^* n_i$, где x_i^* середина i-го интервала.

В последних двух случаях $\overline{x}$ называют ***взвешенной средней арифметической статистического признака*** X.

Роль средней арифметической состоит в том, чтобы дать определенное представление о среднем значении признака.

Примеры

1 Для данных таблицы 1 (с. 99) имеем:

$$\overline{x}=\frac{5\cdot 8+10\cdot 10+15\cdot 11+11\cdot 12+2\cdot 14+3\cdot 16+4\cdot 17}{50}=11{,}62 \text{ (задач)},$$

и это означает, что среднее число задач, решенных одним учеником, равно 11,62. Можно сделать вывод, что у 30 из 50 учеников результаты ниже среднего.

2 Для данных таблицы 4 (с. 100) имеем:

$$\overline{x}=\frac{9{,}14\cdot 3+11{,}4\cdot 7+13{,}4\cdot 13+15{,}4\cdot 21+17{,}4\cdot 17+19{,}4\cdot 2+21{,}4\cdot 2}{65}\approx 15{,}11.$$

Средняя арифметическая отражает типичное значение статистического признака и позволяет перейти к последующим этапам статистического исследования, в первую очередь, к сравнениям (сравнение средней арифметической некоторого признака в двух статистических совокупностях).

Иногда средняя арифметическая может скрывать реальную действительность. Пусть, например, 8, 2, 7, 7, 1 – оценки 5 учеников, полученные по контрольной работе. Здесь $\overline{x}=5$ и, таким образом, в среднем, каждый ученик получил положительную оценку, что не соответствует действительности.

Помимо средней арифметической, для изучения статистических рядов используются значения некоторых конкретных вариантов признака, занимающих в ранжированном (построенном в порядке возрастания или убывания) ряду определенное положение. В первую очередь, здесь имеются в виду *медиана* и *мода статистического ряда*.

4.2. Медиана

4.2.1. Медиана конечного набора чисел

Медианой конечного набора чисел называется число, ***которое находится в середине набора*** указанных чисел, расположенных в порядке возрастания или убывания.

Если набор содержит нечетное число элементов, то медианой является элемент, занимающий центральное положение. Для ряда с четным числом элементов имеются два „срединных“ элемента и медиана равна их полусумме. Например, для ряда 2, 3, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 10 имеем $Me=6$, а для ряда 1, 2, 2, 4, 7, 9, 9, 10 имеем $Me=\frac{4+7}{2}=5{,}5$.

4.2.2. Медиана статистического ряда

Медиана (***Me***) статистического ряда признака X – это число, которое разделяет ранжированный ряд (то есть, упорядоченный по возрастанию или убыванию) на две равные по числу элементов части. Медиана статистического ряда может не совпадать ни с одним из вариантов статистического признака.

В случае, когда ***данные сгруппированы по вариантам***, медиана находится следующим образом:

1) вычисляем накопленные абсолютные частоты;

2) находим первую накопленную абсолютную частоту, бóльшую $\frac{n+1}{2}$, где n – число вариантов признака; она указывает ***место медианы***: Me равна значению соответствующего варианта признака X.

Задача с решением

Найдем медиану статистического ряда, сгруппированного по вариантам:

x_i	n_i	Накопленная абсолютная частота
2	3	3
5	7	10
6	2	12
7	9	21
10	4	25
Всего	**25**	

Решение:

$\frac{n+1}{2}=\frac{25+1}{2}=13.$

Первая накопленная абсолютная частота, бóльшая 13, равна 21, и она указывает место медианы: строка варианта $x_i=7$. Следовательно, $Me=7$.

Для статистических ***данных, сгруппированных по интервалам***, медиана содержится в первом интервале, накопленная абсолютная частота которого превышает величину $\frac{n+1}{2}$, где n – число вариантов признака. Этот интервал называется ***медианным интервалом***.

Как найти само значение медианы, мы продемонстрируем на примере следующей задачи.

Задача с решением

Найдем медиану статистического ряда, сгруппированного по интервалам:

Интервал	Абсолютная частота n_i	Накопленная абсолютная частота
[4, 8)	7	7
[8, 12)	3	10
[12, 16)	8	18
[16, 20]	7	25
Всего	**25**	**25**

Решение:

У нас $n=25$, $\frac{n+1}{2}=13$. Интервал $[12, 16)$ – первый интервал, накопленная абсолютная частота которого больше 13: $18>13$. Следовательно, медиана содержится в этом интервале. Далее, если представить себе, что все 25 вариантов признака записаны в порядке возрастания, то медианой окажется 13-й из них, и он заключен в интервале $[12, 16)$. Но в этом интервале находятся 8 вариантов. В статистике предполагают, что они возрастают равномерно от 12 до 16, с приращением $\frac{16-12}{8}=0{,}5$. С другой стороны, 13-й вариант статистического ряда – это 3-й из 8 вариантов, принадлежащих интервалу $[12, 16)$ (так как слева от этого интервала имеются 10 вариантов).

Таким образом, 13-й вариант равен $12+(13-10)\cdot\frac{16-12}{8}=13{,}5$, то есть $Me=13{,}5$.

4.3. Мода

Модой (Mo) статистического ряда называется значение признака, встречающееся с наибольшей частотой.

Если ***данные сгруппированы по вариантам***, то мода находится непосредственно по определению.

Задача с решением

Найдем моду статистического ряда, сгруппированного по вариантам:

а)

x_i	0	3	5	6	7
n_i	3	2	4	7	4

б)

x_i	0	1	3	4	8
n_i	3	5	4	5	3

Решение:

а) $Mo = 6$, так как частота значения 6, равная 7, наибольшая.

б) $Mo = 1$; $Mo = 4$. Здесь имеются два модальных значения (две моды). Подобный ряд является ***бимодальным***.

Замечание

Если у всех вариантов одинаковая частота, соответствующий ряд не имеет моды.

Если ***данные сгруппированы по интервалам***, для нахождения моды сначала определяют интервал с наибольшей частотой (который называется ***модальным интервалом***), в котором содержится мода. Затем мода рассчитывается по формуле:

$$Mo = x_{\inf} + h\frac{n_2' - n_1'}{(n_2' - n_1') + (n_2' - n_3')},$$

где $x_{\inf}$ – нижняя граница модального интервала, h – величина модального интервала, n_1', n_2', n_3' – – частоты соответственно интервалов: предшествующего модальному, модального и следующего за модальным.

Задача с решением

Банк зарегистрировал суммы, снятые со счетов 100 клиентами. Результаты были сгруппированы по интервалам.

Номер интервала	Снятая сумма (в евро) интервал	Число клиентов n_i
1	$[0,\ 200)$	5
2	$[200,\ 400)$	20
3	$[400,\ 600)$	28
4	$[600,\ 800)$	25
5	$[800,\ 1000)$	18
6	≥ 1000	4
	Всего	**100**

Найдем моду снятой суммы.

Решение:

Модальным интервалом является интервал $[400, 600)$, так как его частота, равная 28, – наибольшая. При этом $x_{\inf} = 400$, $h = 200$, $n_1' = 20$, $n_2' = 28$, $n_3' = 25$.
Следовательно,

$$Mo = 400 + 200\frac{28-20}{(28-20)+(28-25)} = 400 + 200 \cdot \frac{8}{11} \approx 545{,}4.$$

Замечание

Медиана и мода – важные характеристики статистического ряда, которые дополняют среднюю арифметическую. Вместе с тем, можно привести примеры, которые показывают, что в некоторых случаях медиана и мода в качестве характеристик являются более эффективными, чем средняя арифметическая. Например, почтовый ящик или таксофон следует разместить не на середине улицы, а в том месте, где численность населения, проживающего в районе данной улицы, разбивается на две равные части (приблизительно равные).

Упражнения и задачи

A

1. Владелец фирмы заинтересован в информации о продолжительности разговоров сотрудников по телефону в рабочее время. Были зарегистрированы следующие данные (в минутах):

3, 1, 4, 2, 5, 1, 1, 2, 7, 10, 5, 10, 1, 4, 5, 2, 3, 5, 4, 4,

2, 1, 7, 8, 10, 5, 1, 2, 7, 5.

Сгруппировав эти данные по вариантам, найдите среднюю арифметическую, медиану и моду статистического ряда из построенной таблицы.

2. В таблице дано число браков, зарегистрированных в Республике Молдова с 2000 по 2015 год (по годам):

Число браков (Δ_i)	Абсолютная частота (n_i)
[21 000, 23 000)	3
[23 000, 25 000)	4
[25 000, 27 000)	6
[27 000, 29 000]	2
[29 000, 31 000]	1
Всего	**16 лет**

Найдите среднюю арифметическую, медиану и моду соответствующего статистического ряда.

3. Рассматривается выборка n различных значений статистического признака X: $x_1, x_2, ..., x_n$. Покажите, что сумма алгебраических отклонений вариантов от средней математической равна нулю: $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

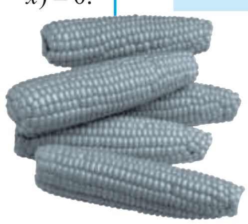
4. Рабочий стаж сотрудников фирмы отражен в следующей таблице:

Стаж (в годах)	Число сотрудников (n_i)
[0, 5)	3
[5, 10)	8
[10, 15)	10
[15, 20)	15
[20, 25)	19
[25, 30)	18
[30, 35)	5
[35, 40]	2
Всего	**80**

Найдите среднюю арифметическую, медиану и моду статистического ряда.

5. В таблице даны результаты измерения длины 60 кукурузных початков (в сантиметрах).

Длина початка (см)	Число початков (n_i)
19,5	2
20,0	4
20,5	5
21,0	7
21,5	16
22,0	15
22,5	8
23,0	3
Всего	**60**



а) Найдите среднюю арифметическую, медиану и моду длины кукурузного початка.
б) Каков процент кукурузных початков, длины которых отличаются от средней арифметической $\bar{x}$ не более, чем на 5 мм?

Б

1. Время, проведенное перед телевизором 100 лицами, приведено в следующей таблице:

Время (мин.)	Число лиц (n_i)
До 30	24
[30, 60)	25
[60, 90)	39
[90, 120)	10
[120, 150]	2
Всего	**100**

Найдите среднюю арифметическую, медиану и моду соответствующего статистического ряда.

2. Рассматривается рост учеников гимназических классов, сгруппированный по интервалам.

Рост (см)	Число учеников (n_i)
[150, 155)	12
[155, 160)	28
[160, 165)	51
[165, 170)	46
[170, 175]	13
Всего	**150**

а) Постройте гистограмму относительных частот.

б) Найдите среднюю арифметическую, медиану и моду статистического ряда.

3. Обоснуйте следующую формулу расчета медианы статистического ряда, сгруппированного по интервалам:

$$Me = x_{\inf}(Me) + h(Me)\cdot\frac{\frac{n+1}{2} - \sum чипм}{n_{Me}},$$

где $x_{\inf}(Me)$ – нижняя граница медианного интервала, $h(Me)$ – величина медианного интервала, $\sum чипм$ – сумма абсолютных **ч**астот **и**нтервалов, **п**редшествующих **м**едианному интервалу, n_{Me} – абсолютная частота медианного интервала.

4. Выбраны наудачу 50 колосьев ячменя. Подсчитав число зерен, содержащихся в каждом колосе, получили следующие результаты:

Число зерен	Число колосьев
[8, 11)	2
[11, 14)	3
[14, 17)	12
[17, 20)	14
[20, 23)	12
[23, 26)	6
[26, 29]	1
Всего	**50**

Найдите среднюю арифметическую, медиану и моду статистического ряда.

5. 60 учеников II класса были протестированы на скорость чтения (число слов, прочитанных за одну минуту). Результаты, упорядоченные по возрастанию, оказались следующими:

25	26	28	30	30	33	33	34	35	35	35	35	35	36	37
39	41	41	42	43	45	45	49	50	50	50	50	52	53	53
54	56	57	57	57	57	58	58	61	62	62	67	67	68	70
74	75	75	78	78	78	80	85	85	87	87	94	102	102	112

а) Составьте статистический ряд этой таблицы данных и найдите его среднюю арифметическую, медиану и моду.
б) Сгруппируйте данные таблицы по интервалам:
[25; 35), [35; 45), [45; 55), [55; 65), [65; 75), [75; 85), [85; 95), [95; 105), [105; 115].
Найдите среднюю арифметическую, медиану и моду после группирования данных по указанным интервалам и сравните их значения со значениями, найденными в пункте а).

6. Распределение земной суши, составляющей около 150 миллионов км², между шестью частями света показано на круговой диаграмме. Найдите:
а) площадь поверхностей частей света: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ (записанных в порядке возрастания);
б) среднюю площадь поверхностей частей света;
в) медиану набора чисел $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$.

§ 5 ЭЛЕМЕНТЫ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

5.1. Проценты

Напоминаем

Один процент – это одна сотая часть некоторой основной величины G.
Для вычисления числа T, составляющего $p\%$ от G, применяем формулу:

$$T = \frac{G}{100} \cdot p.$$

Задача с решением

Из 800 учащихся лицея 40% добираются до этого учебного заведения пешком. Сколько учащихся ежедневно отправляется в лицей пешком?

Решение:

Основная величина $G = 800$, число процентов $p = 40$ и поэтому:

$$T = \frac{800}{100} \cdot 40 = 320 \text{ (учеников).}$$

Ответ: 320 учеников.

Напоминаем

Для того чтобы вычислить проценты p, которые составляет число T от основной величины G, применяем формулу:

$$p\% = \frac{T}{G} \cdot 100\%.$$

Задача с решением

Из 800 учеников 56 приезжают в лицей на автомобилях (с родителями). Сколько процентов учеников приезжают в лицей на автомобилях?

Решение:

Дано $G = 800$, $T = 56$. Следовательно, $p\% = \frac{56}{800} \cdot 100\% = 7\%$.

Ответ: 7%.

Напоминаем

Для вычисления неизвестной (основной) величины G, зная, что число T составляет $p\%$ от G, применяем формулу:

$$G = \frac{T}{p} \cdot 100,$$

Замечание

Можно решать такие задачи (соответственно запоминать данные формулы), используя схему:

G – 100%

T – $p\%$,

которая отражает тот факт, что величины T и p – прямо пропорциональны, т. е. верна пропорция: $\frac{G}{T} = \frac{100}{p}$.

Используя основное свойство пропорции: $G \cdot p = T \cdot 100$, можно найти одну из величин, если известны другие две.

Задача с решением

В начальных классах гимназии обучается 210 учеников, что составляет 35% от общего числа учащихся гимназии. Сколько учеников учится в гимназии?

Решение:

$T = 210$, $p\% = 35\%$.

Следовательно, $G = \frac{210}{35} \cdot 100 = 600$ (учеников).

Ответ: 600 учеников.

Проценты широко применяют в финансовой области. В частности, они используются при определении суммы, оплачиваемой за использование капитала K, взятого в долг. Эта сумма S зависит от величины капитала и вычисляется, обычно, как некоторая его доля: например, $S=\frac{1}{10}K$. На практике устанавливается процент, который составляет выплачиваемая сумма от используемого капитала: $p\%=\frac{S}{K}\cdot 100=\frac{\frac{1}{10}K}{K}\cdot 100=10\%$.

Процентные деньги D (***проценты***) – это денежная сумма, которую необходимо выплатить за пользование капиталом K, взятым в долг (кредит).

Под ***процентной ставкой*** понимают отношение процентных денег (как правило, за год) к сумме долга. Полученное отношение умножают на 100, чтобы определить количество процентов.

Зачастую физические лица (экономические агенты) предоставляют свои деньги банкам в долг на определенное время. В таких случаях оформляют ***депозитные счета***. В договорах определяются основные параметры, среди которых: первоначальная сумма, срок договора (счета), размер годовой процентной ставки, обязанности сторон и др.

Задача с решением

Клиент открывает в банке два депозитных счета по 5 тысяч леев каждый под 12% годовых: один счет на 1 год, а другой – на 1,5 года. Какую сумму должен вернуть банк клиенту в каждом случае?

Решение:

Основная величина $G=5\,000$, $p=12\%$, поэтому в первом случае процентные деньги составляют $D_1=\frac{5\,000}{100}\cdot 12=600$. Через 1 год банк должен вернуть клиенту первоначальную сумму и соответствующие процентные деньги, т. е. $5\,000+600=5\,600$ (леев).

Во втором случае проценты составят $D_2=\frac{5\,000}{100}\cdot 12\cdot 1{,}5=600\cdot 1{,}5=900$. Поэтому банк выплатит клиенту $5\,000+900=5\,900$ (леев).

Ответ: 5 600 леев; 5 900 леев.

Процентные деньги (проценты), вычисленные описанным выше способом, называются ***простыми процентами***.

Проценты за используемый капитал банки выплачивают периодически – в конце определенного договором периода (месяц, квартал, год). Поэтому клиент должен периодически являться в банк, чтобы либо получить начисленный доход, либо положить его на тот же счет (с тем, чтобы получить еще больший доход).

Найдем сумму, которая будет на счету при применении указанной процедуры последовательно t раз (периодов). Пусть первоначальная сумма равна S_0, процентная ставка для каждого периода равна p. Обозначим также $i=\frac{p}{100}$, S_k – сумму, которая будет на счету в конце периода k, $k=\overline{1,t}$, (прибавляя каждый раз проценты к предыдущей сумме). Имеем:

$$S_1=S_0+S_0\cdot\frac{p}{100}=S_0(1+i),\ S_2=S_1+S_1\cdot i=S_1(1+i)=S_0(1+i)^2,\ \ldots,$$
$$S_{t-1}=S_{t-2}+i\cdot S_{t-2}=S_{t-2}(1+i)=S_0(1+i)^{t-2}\cdot(1+i)=S_0(1+i)^{t-1},$$
$$S_t=S_{t-1}(1+i)=S_0(1+i)^t.$$

Следовательно, если к концу каждого периода проценты прибавлены к сумме, накопленной до предыдущего периода, процентная ставка фиксирована и равна p, первоначальная сумма составляет S_0, то к концу периода t получим сумму $S_t=S_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^t$.

Проценты (процентные деньги), определенные описанным выше способом (когда проценты, вычисленные на каждом этапе, прибавлены к основной сумме, что ведет к бо́льшим процентам в следующем периоде), называются ***сложными процентами***. Ясно, что это больше, чем $S_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot t$ – сумма t простых процентов.

Чтобы банковские услуги были выгодными и привлекательными, банки предлагают депозитные вклады, при которых проценты присовокупляют к основной сумме по мере их накопления ежемесячно, ежеквартально, ежегодно. Эта процедура называется ***капитализацией процентов***, и этот факт оговаривается в договоре.

Задачи с решением

1 В банке открыт счет на сумму 10 000 леев на 2 года под 7% годовых. Какая сумма будет на счету в конце периода, если:
а) начислять простые проценты;
б) проценты начислять с ежегодной капитализацией?
В каком случае сумма будет большей и на сколько?

Решение:

а) $S_2 = 10\,000\left(1 + 2 \cdot \frac{7}{100}\right) = 11\,400$ (леев).

б) $\widetilde{S}_2 = 10000\left(1 + \frac{7}{100}\right)^2 = 11\,449$ (леев).

Таким образом, $11\,449 - 11400 = 49$ (леев).

Ответ: а) 11 400 леев; б) 11 449 леев.
В случае б) сумма будет больше на 49 леев.

Замечание

Промежуточные вычисления рекомендуется выполнять с точностью до 4 десятичных знаков.

2 Сохранив условия предыдущего примера, вычислим сумму, которая будет на счету в конце периода, если капитализация осуществляется ежемесячно.

Решение:

Всего получается 24 периода с ежемесячной процентной ставкой $\frac{7}{12}$%.

Следовательно, $\widetilde{S}_{24} = 10000\left(1 + \frac{7}{1200}\right)^{24} \approx 11\,498{,}06$ (леев).

Ответ: 11 498,06 лея.

Замечания

1. Если процентная ставка по депозиту с начальной суммой S_0 меняется с течением времени t (плавающая процентная ставка) $\left(t = \sum_{k=1}^{n} t_k\right)$ и для каждого периода t_k процентная ставка составляет p_k (простого процента), то общий доход можно вычислить по формуле: $D_t = S_0 \cdot \sum_{k=1}^{m} \frac{p_k}{100} \cdot t_k$.

2. Если промежуточные периоды являются частями (долями) года – четверти, месяцы, дни, то t_k имеет соответственно вид: $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \ldots; \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \ldots; \frac{1}{360}, \frac{2}{360}, \ldots$ В договоре уточняется число дней в банковском году: 360 или 365 (возможно 366) дней.

Задача с решением

В банке открыли счет под простые проценты на сумму 54 000 д. е. с процентными ставками в 10%, 12%, 13% на сроки 200, 150, 100 дней соответственно. Вычислим общие процентные деньги, если в банковском году 360 дней.

$$D_t = S_0 \cdot \sum_{k=1}^{m} \frac{p_k}{100} \cdot t_k$$

Решение:

В данном случае имеем $p_1 = \frac{10}{360}$, $t_1 = 200$; $p_2 = \frac{12}{360}$, $t_2 = 150$; $p_3 = \frac{13}{360}$, $t_3 = 100$.

Следовательно, $D_t = 54\,000 \cdot \frac{10 \cdot 200 + 12 \cdot 150 + 13 \cdot 100}{100 \cdot 360} = 7\,650$ (д. е.).

Ответ: 7 650 д. е.

5.2. Бюджет. Прибыль. Цены

Жизнедеятельность каждой семьи, каждого человека связана с различными затратами (покупка продуктов, оплата услуг, транспорта и др.) и доходами (заработная плата, стипендия, проценты от вкладов и др.). Во избежание ситуации, когда можно оказаться без средств к существованию, или при планировании дорогостоящей покупки (приобретение дорогого предмета, подготовка к путешествию и др.) необходимо быть рачительным хозяином: вести учет всех расходов и доходов, планировать предстоящие затраты. В таких случаях говорят, что необходимо формировать бюджет семьи или личный бюджет.

Бюджет – это совокупность предстоящих доходов (с указанием источника) и расходов (с указанием цели) на определенный период.

Необходимо так формировать бюджет, чтобы в нем были предусмотрены не только обязательные расходы (продукты питания, транспорт, коммунальные услуги и др.), но и остались некоторые средства, которые будут пополнять сбережения на случай предстоящей крупной покупки или для непредвиденных затрат.

Примеры

Примеры месячных бюджетов (в леях)

Бюджет Петра (студент)

Доход	
1. Резерв	500
2. Стипендия	700
3. Помощь (от родителей)	2 100
	3 300

Расходы	
1. Транспорт	70
2. Оплата квартиры	600
3. Учебники, ксерокопирование, интернет	300
4. Продовольственные, непродовольственные товары	2 100
5. Отдых и досуг (кино, дискотека и др.)	200
	3 270

Бюджет семьи Петровых

Доход	
1. Зарплаты	14 200
2. Процентные деньги	200
	14 400

Расходы	
1. Коммунальные услуги, квартплата	1 610
2. Абонемент TV, интернет	200
3. Одежда	510
4. Продовольственные, непродовольственные товары	6 000
5. Транспорт, бензин	890
6. Отдых (кино, театр и др.)	650
7. Карманные деньги	500
8. Обслуживание кредита	450
	10 810

Для успешного управления собственными фондами (средствами) необходимо знать: возможности пополнения доходов, возможности сокращения расходов, правила грамотного и выгодного оформления кредита, условия формирования цен и многое другое.

Себестоимость – это совокупность затрат на производство одной единицы товара.

Себестоимость включает затраты на оплату рабочей силы, средств производства (сырье, электроэнергия, оборудование, обслуживание, аренда помещений и т. д.).

Любой производитель стремится, чтобы дело, которым он занимается, было прибыльным, т. е., чтобы после продажи были восполнены не только затраты, но и получена как можно бóльшая прибыль.

Общая прибыль P некоего предприятия – это разность между полученным доходом D и совокупными затратами C в определенный период времени:

$$P = D - C.$$

Степень рентабельности предприятия, т. е. его возможность (потенциал) создавать прибыль определяется ***экономической рентабельностью***:

$$R_{эк.} = \frac{P}{K}, \qquad (1)$$

где P – общая прибыль, K – величина всего капитала.

Задача с решением

Предприятие за год получило 2 000 000 д. е. дохода, а общие расходы составили 1 100 000 д. е. Вычислим экономическую рентабельность предприятия, если известно, что капитал предприятия составляет 9 миллионов д. е.

Решение:

Общая прибыль, полученная предприятием, составляет:

$$P = 2\,000\,000 - 1\,100\,000 = 900\,000 \text{ (д. е.)}.$$

В соответствии с формулой (1) имеем $R_{эк.} = \dfrac{900\,000}{9\,000\,000} = 0{,}1.$

Ответ: 0,1.

Необходимо знать, что не все деньги, которыми покупатель расплачивается за приобретаемый в магазине товар, достаются (перечисляются) производителю товара. В общих чертах ценообразование происходит по следующей схеме:

Себестоимость
\+
Прибыль (надбавка) производителя
\+
НДС
\+
Торговая надбавка
\+
НДС

Общая сумма, полученная производителем от продаж, или цена покупки торговой сетью.

Сумма, полученная магазином, при продаже (окончательная цена).

НДС (***налог на добавленную стоимость***) – это налог (в пользу государства), устанавливаемый при смене собственника товара или же при предоставлении услуг (выполнении профессиональных обязанностей).

Величина НДС зависит от величины суммы, которую желает получить собственник товара. При каждой смене собственника товара в госбюджет перечисляется сумма, составляющая разность $T_1 - T_2$, где T_1 – НДС, вычисленный при текущей операции (сделки), а T_2 – НДС, вычисленный при предыдущей операции (и оплаченный предыдущим собственником). Следовательно, в госбюджет перечисляется только налог на добавленную каждым собственником стоимость (т. е. на его прибыль). Этот налог каждый раз прибавляется к стоимости товара (услуги) и оплачивается покупателем (потребителем).

Задачи с решением

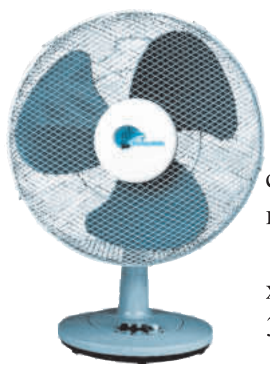
1 Вычислим прибыль от производства одного литра молока, если известно, что его себестоимость составляет 6 леев, НДС – 8% и магазин перечисляет производителю по 7,2 лея за каждый литр молока.

Решение:

Для вычисления прибыли от производства 1 л молока нужно найти доход x, полученный производителем. Зная, что магазин оплачивает этот доход и НДС, получим уравнение $x + x\dfrac{8}{100} = 7{,}2$, которое имеет решение $x \approx 6{,}67$.

Таким образом, за каждый 1 л молока производитель получает 6,67 лея. Прибыль от производства одного литра молока составляет разность $6{,}67 - 6 = 0{,}67$ (лея).

Ответ: 67 банов.



2 Магазин перечисляет производителю 360 д. е. за один вентилятор, включая – 20% НДС. Какова будет цена вентилятора в магазине, если торговая надбавка составляет 75 д. е.?

Решение:

Сумма 360 состоит из дохода x производителя и НДС (T_2), поэтому верно равенство $x + x \cdot 0{,}2 = 360$, откуда $x = 300$. Таким образом, доход производителя от производства данного вентилятора составляет 300 д. е.

Окончательная цена P_f (оплачиваемая покупателем) состоит из: 300 д. е. – доход производителя, 75 д. е. – торговая надбавка и НДС (T_1), исчисляемый от суммы 375 (д. е.) и составляющий $375 \cdot 0{,}2 = 75$ (д. е.).

Таким образом, $P_f = 300 + 75 + 75 = 450$ (д. е.).

Ответ: 450 д. е.

Для увеличения потока посетителей коммерческие организации предоставляют ***скидки*** (по различным поводам). Этот факт необходимо принимать во внимание, особенно, если сформированный бюджет является дефицитным.

Задача с решением

Студент запланировал приобрести футболку по цене 110 леев. По случаю рождественских праздников магазин предоставил скидки в размере 15%. Сколько денег сэкономил студент?

Решение:

15% от 110 составляет $\dfrac{110}{100} \cdot 15 = 16{,}5$ (леев).

Ответ: 16,5 лея.

Для большинства граждан основным источником дохода является зарплата. Следует знать, что размер (величина) заявленной заработной платы некоторой должности (выполнения определенного объема работ) отличается от фактически выплачиваемой работнику. ***Начисленная заработная плата*** – это сумма, которую выделяет предприятие за выполнение определенного объема работы. Из этой суммы производится ряд отчислений:

обязательное медицинское страхование, в фонд социального страхования, подоходный налог и др. Оставшаяся после этих отчислений сумма и есть ***выданная заработная плата*** – та, что составляет доход работника.

Задача с решением

Начисленная заработная плата врача Марии Ивановой составляет 3 800 леев. Какую зарплату получит врач „на руки“ (выданная заработная плата), если сумма всех отчислений составила 27% от начисленной ей зарплаты?

Решение:

Выданная зарплата составляет 73% от начисленной, поэтому ее размер (величина) составит $\frac{3\,800}{100}\cdot 73 = 2\,774$ (леев).

Ответ: 2 774 лея.

Возвращаясь к вопросу о формировании личного или семейного бюджета, следует отметить, что для пополнения дохода существуют как минимум еще две возможности из области финансов. Об одной из них – относительно открытия банковских депозитных счетов – уже сказано выше. По этим счетам банки выплачивают проценты, которые пока что не облагаются налогом.

Другая возможность пополнения дохода или решения финансовых проблем – ***кредит***, т. е. сумма, взятая в долг на определенное время. Лицо (экономический агент), предоставляющее (дающее) капитал в долг, называется ***кредитором***, одалживаемая сумма – ***кредитом***, а лицо (экономический агент), берущее в долг, – ***дебитором***.

Кредитом пользуются при крупных покупках (сделках): значительную финансовую сумму получают единовременно, а возвращают частями. При оформлении кредита оговариваются и фиксируются в договоре сроки его погашения, процентная ставка, размер возвращаемых частичных сумм, обязанности сторон и т. д.

Кредиты классифицируются в зависимости от:

- ***вида кредита*** – *банковский, коммерческий, инвестиционный*, …;
- ***срока кредитования*** – *краткосрочный* (до одного года), *среднесрочный* (сроком от года до пяти лет) и *долгосрочный* (свыше 5 лет);
- ***места нахождения кредитора*** – *внутренний* или *международный* (если дебитор и кредитор находятся в разных странах).

Задача с решением

Предприниматель выдает кредит в сумме 16 000 д. е. сроком на 1,5 года под 18% годовых (в режиме простого процента). Вычислим сумму, которую он получит в конце срока кредитования.

Решение:

Вычислим простой процент $(S_0 = 16\,000)$:

$$D_t = \frac{p}{100}\cdot S_0 \cdot t = \frac{18}{100}\cdot 16\,000 \cdot 1{,}5 = 4\,320\,(\text{д. е.}).$$

Следовательно, в конце срока предприниматель получит сумму:

$$S_t = S_0 + D_t = 16\,000 + 4\,320 = 20\,320\ (\text{д. е.}).$$

Ответ: 20 320 д. е.

Краткосрочный кредит может быть погашен единовременно в конце оговоренного срока. В таких случаях применяется простая процентная ставка. Погашение долгосрочного кредита может осуществляться по различным схемам. Например, первоначальная сумма делится на равные части, которые дебитор выплачивает периодически, наряду с процентами за неоплаченный кредит, или первоначальную сумму и все процентные деньги делят на число периодов и дебитор выплачивает равные суммы в каждый оговоренный договором срок.

Упражнения и задачи

А

1. Годовой доход семьи составляет 120 000 леев.
а) В годовом бюджете семьи для летнего отдыха предусмотрено 16 000 леев. Какой процент составляет эта сумма от годового дохода?
б) В предыдущем году на продукты питания израсходовали 22% от годового дохода семьи. Какую сумму необходимо предусмотреть на продукты питания в этом году, если их доля в семейном бюджете остается прежней?

2. В прошлом году один литр молока стоил 8 леев, а в текущем – 8,3 лея. На сколько процентов повысилась цена молока?

3. Клиент открыл счет в банке с простой процентной ставкой в 9%. Какова первоначальная сумма, если после 1 года клиенту выдали 2 452,5 лея?

4. В банке открыт счет на 1000 леев с процентной ставкой в 4,5%.
Какую сумму получит клиент по истечении 4 лет:
а) при обыкновенном простом проценте;
б) при сложном проценте с годовой капитализацией;
в) при сложном проценте с месячной капитализацией?

5. Дима открыл счет в банке на 4 500 леев под 7% сложных годовых процентов. Какую сумму получит Дима через 2 года:
а) при годовой капитализации;
б) при ежемесячной капитализации?

6. Клиент открыл депозитный счет в банке под 6,5% сложных годовых процентов с годовой капитализацией. Какова была первоначальная сумма, если через 2 года клиент получил 3 970 леев?

7. За компьютер заплатили в магазине 2500 д. е., в том числе 20% НДС и 31% – торговая надбавка. Какова себестоимость компьютера (у производителя)?

8. В семейном годовом бюджете на продукты питания первоначально запланировали 20% от общего дохода. Удалось сэкономить 8% от этих расходов, что составляет 400 леев. Сколько средств предусмотрено на отдых, если они составляют 5% от общего дохода?

Б

1. Банк предлагает 3 вида депозитных счетов:
а) под 9% простых годовых процентов;
б) под 8% сложных годовых процентов с ежегодной капитализацией;
в) под 8% сложных годовых процентов с ежемесячной капитализацией.
Какой депозит принесет больший доход за 1,5 года?

2. На производство 15 самокатов всего было израсходовано 2 040 д. е., а в результате их реализации получена прибыль в 244,8 д. е.
а) Какова цена одного самоката, если НДС составляет 10%?
б) Найдите цену самоката в магазине (при том же НДС), если торговая надбавка составляет 15 д. е. на один самокат.

3. Клиент хочет открыть счет в банке на 10 000 д. е. на 2 года и должен выбрать из следующих двух видов депозитов:
а) первый год под 5% простых годовых процентов, второй год – под 7% простых годовых процентов (от накопленной за первый год суммы);
б) под 6,1% сложных годовых процентов с ежегодной капитализацией.
Какой из этих вариантов выгоднее?

4. На покупку одежды семья затрачивает 8% от общего годового дохода, а на отдых – 6%. Если бы затраты на покупку одежды сократились на 40%, а на отдых – на 25%, то было бы сэкономлено 114,24 д. е. Определите годовой доход семьи.

5. По истечении 3 лет на депозитном счете под r сложных годовых процентов с ежегодной капитализацией оказалось 5 788,125 д. е. Найдите величину r, если первоначальная сумма на счете составляла:
а) 5 000 д. е.;
б) 4 500 д. е.

6. Кредит в сумме 10 000 д. е. необходимо погасить через 10 лет. Какую общую сумму должен вернуть дебитор, если процентные деньги исчисляются в виде сложных годовых процентов с ежегодной капитализацией под:
а) 10%; б) 16%?

7. Фабрика изготовила 200 костюмов и магазин перечислил ей 90 д. е. за каждый костюм. Найдите общую прибыль фабрики, если сырье стоит 10 000 д. е., производственные затраты составляют 30% от стоимости сырья и НДС равен 20%.

Упражнения и задачи на повторение

А

1. Определите, какие из следующих примеров задают некоторый статистический признак:

а) количество дней в ноябре;

б) возраст студентов, принятых в 2017 г. на первый курс Государственного Университета Молдовы;

в) расход топлива (в литрах) на 100 км пути для автомобилей определенной марки;

г) возраст, который дает право гражданину Республики Молдова впервые принять участие в выборах.

2. Дано расстояние, пройденное 50 автомобилями определенной марки при расходе 10 л бензина.

Расстояние (км) интервал	Число автомобилей (n_i)
[85, 90)	2
[90, 95)	8
[95, 100)	18
[100, 105)	14
[105, 110)	5
[110, 115]	3
Всего	**50**

а) Постройте гистограмму и полигон абсолютных частот.

б) Найдите среднюю арифметическую, медиану и моду данного статистического ряда.

3. Елена Петрова имеет месячную начисленную зарплату 2700 леев. Из этой суммы отчисляются в фонд социального страхования, в фонд обязательного медицинского страхования и др. всего 37% (от начисленной зарплаты). Ее коллега Анна Лукьян имеет начисленную зарплату 2550 леев, из которой отчисляются 32%. У кого больше и на сколько выданная зарплата?

4. Известно количество братьев и сестер каждого из 30 учеников класса, что отражено в виде статистического ряда.

Количество братьев и сестер	Число учеников
0	7
1	12
2	6
3	2
4	2
5	1

а) Найдите среднее количество братьев и сестер у одного ученика.

б) Укажите количество братьев и сестер, накопленная относительная частота которого больше 0,8, но меньше 0,9.

в) Постройте полосовую диаграмму данного статистического ряда.

5. Иван Носов работает неполный рабочий день и его начисленная месячная зарплата составляет 1 770 леев. В конце месяца ему выдали зарплату 1 221,3 лея. Чему равен процент всевозможных отчислений из его начисленной зарплаты?

6. За прохождение технической ревизии автомобиля заплатили (в том числе НДС – 20%): стоимость техосмотра – 230 леев; стоимость необходимых материалов (масло, фильтр и др.) – 340 леев. Найдите стоимость техосмотра и материалов без НДС.

Б

1. В классе 35 учеников, 14 из них – юноши. Средний рост учеников равен 1,64 м, средний рост девушек 1,6 м. Найдите средний рост юношей.

2. Спортивная школа намерена приобрести 150 спортивных костюмов по 110 леев каждый. Поскольку объем покупки большой, то магазин предоставляет скидку в размере 15%. Сколько всего будет уплачено денег, если НДС составляет 10% от реальной цены (после понижения)?

3. Приготовили 70%-ный раствор азотной кислоты (HNO_3). При проверке в результате 60 измерений получили следующие значения концентрации:

70,4	71,3	70,1	69,9	70,6	69,8
68,4	70,9	69,8	69,3	70,9	71,9
69,2	70,3	69,7	68,2	69,1	70,9
71,5	70,5	69,4	70,5	72,2	71,7
70,4	68,1	67,6	70,3	68,7	71,1
69,7	70,4	67,3	68,4	70,2	69,6
70,1	67,7	68,9	70,9	69,9	72,4
70,6	69,8	70,1	72,5	70,3	71,8
70,4	69,2	70,2	71,6	70,5	72,3
70,8	70,6	68,9	70,4	71,6	70,9

а) Сгруппируйте эти данные по интервалам: [67, 68), [68, 69), [69, 70), [70, 71), [71, 72), [72, 73).

б) Постройте гистограмму относительных частот.

в) Найдите среднюю арифметическую, медиану и моду концентрации раствора.

4. Продажи автомобилей специализированным магазином отражены в следующей таблице:

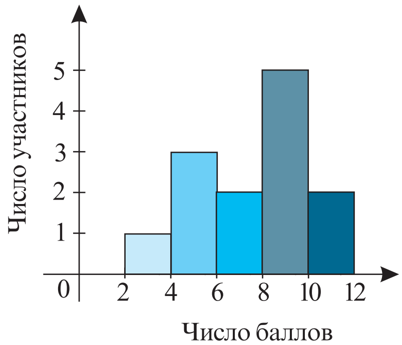
Марка	Продано автомобилей n_i
Рено	27
Пежо	25
Ситроен	22
БМВ	7
Мерседес	6
Тойота	3
Всего	**90**

а) Что является здесь статистическим признаком? Является ли он количественным или качественным? Если он количественный, то является дискретным или непрерывным?

б) Постройте круговую диаграмму данного статистического ряда.

5. Телевизор стоит в магазине 2900 леев, а склад предлагает его со скидкой в 25%. Поскольку нужно заплатить (на складе) и НДС – 16%, то покупатель рассудил, что окончательную цену можно определить, если вычесть из первоначальной цены сумму, составляющую 9% от нее. Прав ли покупатель?

6. Число баллов, набранных участниками некоторого конкурса, задано с помощью следующей гистограммы абсолютных частот:



а) Найдите среднюю арифметическую, медиану и моду соответствующего статистического ряда.

б) Каков процент участников конкурса, набравших меньше 6 баллов?

7. После проверки контрольных работ по математике оказалось, что средняя оценка учеников класса равна 6,9 (баллов).

а) Если бы оценка каждой работы была на 1,1 балла больше, то какая будет средняя оценка?

б) Если бы оценка каждой работы была на 10% больше, то какая будет средняя оценка?

$$M_0 = x_{\inf} + h\frac{n_2' - n_1'}{(n_2' - n_1') + (n_2' - n_3')}$$

Проверочная работа

Время выполнения работы: **90 минут**

A

1. Даны первые 40 десятичных знаков числа π:

14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41972.

Сгруппируйте эти данные по вариантам.

Найдите абсолютные и относительные частоты вариантов. **2**

2. В таблице приводятся самые популярные имена для мальчиков, появившихся на свет в Республике Молдова в 2016 году: 2

Имя	Абсолютная частота
Давид	992
Максим	859
Александр	727
Ион	603
Артем	598

Постройте полосовую диаграмму.

3. Оформляется кредит в сумме 6000 д. е. сроком на 2 года. Какую сумму должен вернуть дебитор, если: 2
а) кредит выдан под 20% простых процентов;
б) кредит выдан под 18% сложных процентов с ежегодной капитализацией?

4. Дано число ураганов, пронесшихся по западному побережью США с 1930 по 1954 год (по годам): 4
2, 2, 6, 10, 5, 5, 5, 2, 4, 2, 4, 4, 2, 5, 6, 4, 2, 4, 5, 8, 11, 8, 6, 5, 6.
а) Сгруппируйте данные по вариантам.
б) Дополните таблицу абсолютными, относительными и накопленными частотами.
в) Изобразите данные диаграммой в виде вертикальных отрезков.
г) Вычислите среднюю арифметическую, медиану и моду соответствующего ряда.

Б

1. В таблице задано распределение работников фирмы по уровню заработной платы: 2

Зар. плата (тыс. леев)	Число работников (n_i)
[3,0; 3,5)	4
[3,5; 4,0)	6
[4,0; 4,5)	16
[4,5; 5,0)	10
[5,0; 5,5]	4
[5,5; 6,0]	3
Всего	**43**

Найдите медиану и моду статистического ряда.

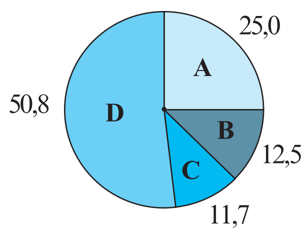
2. В таблице приводятся самые популярные имена для девочек, появившихся на свет в Республике Молдова в 2016 году: 2

Имя	Абсолютная частота
София	1015
Анастасия	749
Дарья	706
Мария	661
Виктория	635

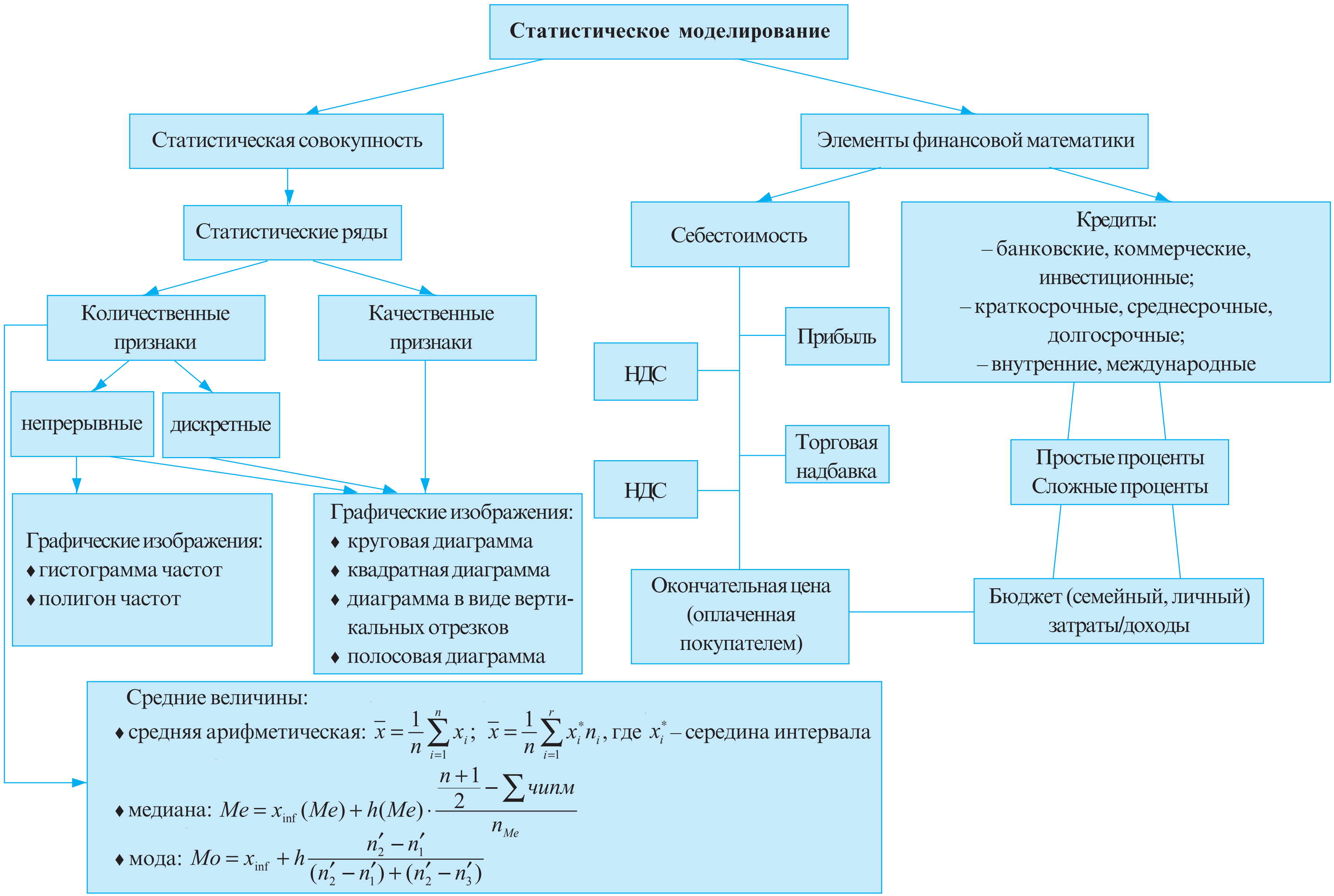
Постройте полосовую диаграмму.

3. Кредит в сумме 10000 д. е. возвращают через 10 лет. Какую сумму должен вернуть дебитор, если: 2
а) кредит выдан под 19% простых процентов;
б) кредит выдан под 16% сложных процентов с ежегодной капитализацией?

4. Рассматривается статистический ряд объема 120, представленный круговой диаграммой. Найдите абсолютную частоту значения **B** соответствующего статистического признака. 4



Элементы математической статистики и финансовой математики



Модуль

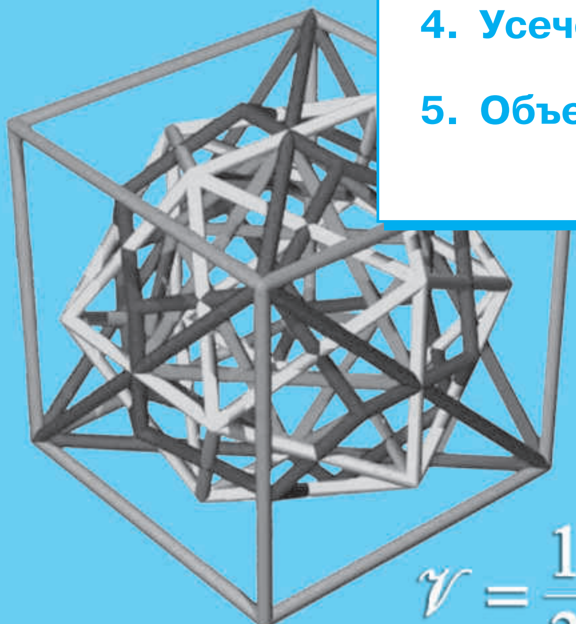
7

Многогранники. Повторение и дополнения

Цели модуля

- распознавание многогранников и их классификация по разным критериям;
- построение сечений многогранников плоскостями;
- распознавание в многогранниках плоских геометрических фигур;
- применение свойств многогранников в различных контекстах;
- применение формул вычисления площадей и объемов многогранников в различных контекстах.

1. **Понятие многогранника**
2. **Призма**
3. **Пирамида**
4. **Усеченная пирамида**
5. **Объемы многогранников**



$$\mathcal{V}=\frac{1}{3}H\left(\mathcal{A}_o+\sqrt{\mathcal{A}_o\mathcal{A}_O}+\mathcal{A}_O\right)$$

§ 1 ПОНЯТИЕ МНОГОГРАННИКА

Напомним, что в геометрии под фигурой понимают некоторое множество точек. Простейшие геометрические фигуры: точки, прямые, полупрямые, отрезки, плоскости, полуплоскости – это *плоские геометрические фигуры*. Куб, прямоугольный параллелепипед, двугранный угол являются *пространственными геометрическими фигурами*, так как они содержат и некомпланарные точки.

Определения

• **Сферой** с центром O и радиусом $R > 0$ называется множество точек пространства, находящихся на расстоянии R от точки O. Отрезок, соединяющий точку O с произвольной точкой сферы, называется **радиусом** сферы.

• **Открытым (замкнутым) сферическим телом** или **открытым (замкнутым) шаром** с центром O и радиусом $R > 0$ называется геометрическое место точек пространства, расстояние от каждой из которых до точки O меньше, чем число R (не больше числа R).

• Точка пространственной фигуры называется **внутренней точкой** фигуры, если существует открытое сферическое тело, все точки которого принадлежат данной фигуре. Множество внутренних точек фигуры называется **внутренней областью** этой фигуры.

• Точка пространства называется **внешней точкой** фигуры, если существует такое открытое сферическое тело с центром в этой точке, которое не содержит точек данной фигуры.

• Геометрическая фигура называется **областью**, если все ее точки являются внутренними и любые две из них можно соединить ломаной, состоящей из точек данной фигуры.

• Точка пространства называется **граничной точкой** фигуры, если любое открытое сферическое тело с центром в этой точке содержит как точки, принадлежащие фигуре, так и точки, не принадлежащие этой фигуре. Множество всех граничных точек данной фигуры называется **границей** фигуры.

• Фигура называется **ограниченной** или **конечной**, если существует сферическое тело, содержащее ее.

• **Геометрическим телом** (**телом**) называется конечная область вместе с ее границей.

• Граница тела называется **поверхностью** тела.

Примеры

1 Замкнутое сферическое тело с центром O и радиусом R является геометрическим телом (рис. 7.1). Сфера с центром O и радиуса R является поверхностью этого тела. Множество всех точек, расположенных на расстоянии, меньшем, чем R от центра O, образует внутреннюю часть сферического тела и является областью. Точки A и C – граничные точки, точка B – внутренняя точка.

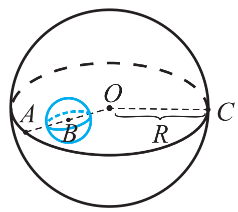


Рис. 7.1

2 На рисунке 7.2 изображен двугранный угол. Эта фигура не является ограниченной и образована только из граничных точек. Двугранный угол не является геометрическим телом.

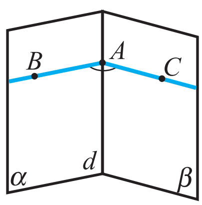


Рис. 7.2

3 Пусть A, B, C, D – некомпланарные точки. Фигура, образованная объединением отрезков AB, AC, AD, BD, BC, DC, называется ***прозрачным тетраэдром***. Прозрачный тетраэдр не является геометрическим телом, так как состоит только из граничных точек (рис. 7.3).

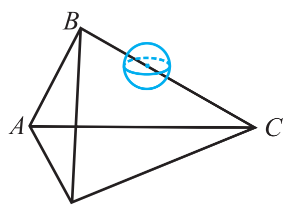


Рис. 7.3

4 Напоминаем, что фигура, состоящая из конечной части плоскости, ограниченной многоугольником, называется ***плоским многоугольником***. Пусть A, B, C, D – некомпланарные точки. Фигура, образованная объединением плоских треугольников ABC, DBC, ADC, DAB, называется ***непрозрачным тетраэдром*** (рис. 7.4). Эта фигура не имеет внутренних точек, поэтому не является геометрическим телом.

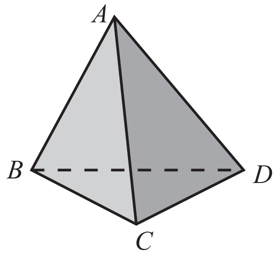


Рис. 7.4

5 Пусть A, B, C, D – некомпланарные точки. Фигура, образованная объединением всех отрезков DM, где точка M принадлежит плоскому треугольнику ABC, называется ***тетраэдром*** или ***треугольной пирамидой*** (рис. 7.5).

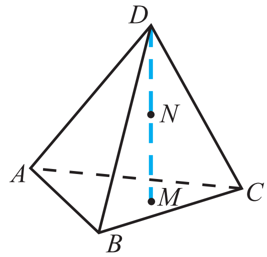


Рис. 7.5

Эта фигура является геометрическим телом, так как она ограничена и состоит только из внутренних и граничных точек. Точки плоских треугольников ABC, ABD, ACD, BCD являются граничными точками, а все точки $N \in (DM)$ являются внутренними (рис. 7.5).

Действительно, пусть R – кратчайшее расстояние от точки N до плоскостей ABC, ABD, ACD, BCD. Тогда сферическое тело с центром N и радиусом $\frac{R}{2}$ состоит только из точек тетраэдра.

Примем без доказательства следующую теорему:

Теорема 1

Любая полупрямая, началом которой является внутренняя точка геометрического тела, пересекает границу тела хотя бы в одной точке.

Определения

- **Многогранником** называется ограниченное тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников.
- Плоские многоугольники, ограничивающие многогранник, называются **гранями** многогранника, стороны граней называются **ребрами**, а концы ребер – **вершинами** многогранника. Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани, называется **диагональю** многогранника.

Замечание

В дальнейшем грань многогранника будет именоваться так же, как и многоугольник, ограничивающий эту грань.

Определения

- Многогранник называется **выпуклым многогранником**, если он находится по одну сторону каждой плоскости, содержащей грань многогранника.
- Выпуклый многогранник называется **правильным многогранником**, если его грани – конгруэнтные правильные многоугольники, и в каждой его вершине сходится одно и то же число ребер.

Существуют только пять типов правильных многогранников: правильный тетраэдр, куб, правильный октаэдр, правильный додекаэдр, правильный икосаэдр (см. *Понятийную карту*, с. 150).

Определения

- Тело T **конгруэнтно** телу T', если существует такая изометрия f пространства, что $f(T) = T'$.
- Тело T называется **подобным** телу T', если существует преобразование подобия f пространства с коэффициентом λ такое, что $f(T) = T'$. Число λ называется **коэффициентом подобия** тел T и T'.

§ 2 ПРИЗМА

Говорим, что ***точка C расположена между различными параллельными плоскостями*** α и β, если существует отрезок AB, содержащий точку C, концы которого принадлежат данным плоскостям (рис. 7.6).

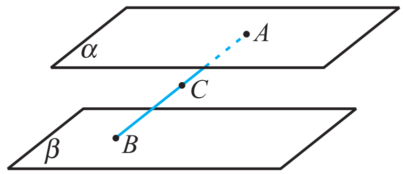


Рис. 7.6

Заметим, что множество точек, находящихся между параллельными плоскостями α и β, является областью, а данные плоскости образуют ее границу.

Определение

Слоем, определенным параллельными плоскостями α и β, называется объединение множества всех точек, расположенных между этими плоскостями, и плоскостей α и β.

Определение

Пусть $A_1A_2...A_n$ – плоский многоугольник на плоскости α, g – прямая, непараллельная плоскости α, и β – плоскость, параллельная плоскости α, $\beta \neq \alpha$. Многогранник, образованный пересечением слоя, определенного плоскостями α и β, с объединением прямых, параллельных прямой g и проходящих через каждую точку плоского многоугольника $A_1A_2...A_n$, называется **призмой** (рис. 7.7).

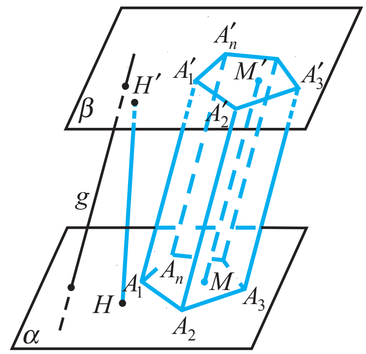


Рис. 7.7

Параллельный перенос в направлении прямой g отображает плоскость α на плоскость β, многоугольник $A_1A_2...A_n$ – на многоугольник $A'_1A'_2...A'_n$. Следовательно, эти многоугольники конгруэнтны.

Грани $A_1A_2...A_n$ и $A'_1A'_2...A'_n$ называются ***основаниями призмы***.

Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема 2

Основания призмы являются конгруэнтными многоугольниками.

Остальные грани призмы ($A_1A_2A'_2A'_1$, $A_2A_3A'_3A'_2$, ...) называются ***боковыми гранями***; ребра, параллельные прямой g ($A_1A'_1$, $A_2A'_2$, ...), называются ***боковыми ребрами***.

Отрезок HH', концы которого принадлежат плоскостям оснований α и β, перпендикулярный этим плоскостям, называется ***высотой*** призмы (рис. 7.7). Расстояние между плоскостями оснований призмы также называется ***высотой*** призмы.

Из определения следует, что боковые ребра призмы параллельны и конгруэнтны. Из этого заключаем, что боковые грани призмы являются параллелограммами.

Призма называется ***треугольной*** (***четырехугольной*** или ***n-угольной***), если ее основание – треугольник (четырехугольник или n-угольник).

Поверхность n-угольной призмы состоит из двух n-угольников (основания призмы) и n параллелограммов (боковые грани призмы).

Определения

• Сумма площадей всех граней призмы называется **площадью полной поверхности** призмы.

• Сумма площадей боковых граней призмы называется **площадью боковой поверхности** призмы.

Если обозначим: $\mathcal{A}_{\text{полн.}}$ – площадь полной поверхности, $\mathcal{A}_{\text{бок.}}$ – площадь боковой поверхности, $\mathcal{A}_{\text{осн.}}$ – площадь основания призмы, то:

$$\boxed{\mathcal{A}_{\text{полн.}} = \mathcal{A}_{\text{бок.}} + 2\mathcal{A}_{\text{осн.}}}.$$

Определения

• Призма называется **прямой призмой**, если ее боковые ребра перпендикулярны основаниям (рис. 7.8).

• Призма называется **наклонной призмой**, если ее боковые ребра не перпендикулярны основаниям (рис. 7.7).

Заметим, что боковые грани прямой призмы являются прямоугольниками, а боковое ребро совпадает с высотой призмы. Если обозначим длину бокового ребра прямой призмы через l, а периметр многоугольника основания через $\mathcal{P}$, то ***площадь боковой поверхности прямой призмы*** вычисляется по формуле:

$$\boxed{\mathcal{A}_{\text{бок.}} = \mathcal{P} \cdot l}.$$

Определение

Прямая призма, основание которой – правильный многоугольник, называется **правильной призмой**.

Если обозначим радиус окружности, вписанной в основание правильной призмы, через r, получим ***формулу вычисления площади полной поверхности правильной призмы***:

$$\boxed{\mathcal{A}_{\text{полн.}} = \mathcal{P} \cdot l + \mathcal{P} \cdot r}, \quad \text{или} \quad \boxed{\mathcal{A}_{\text{полн.}} = \mathcal{P}(l + r)}.$$

Определение

Параллелепипедом называется призма, основание которой – параллелограмм.

Все грани параллелепипеда являются параллелограммами (рис. 7.8).

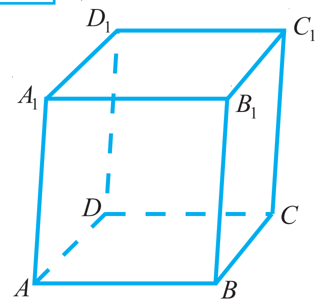


Рис. 7.8

Определение

Прямой параллелепипед, основанием которого является прямоугольник, называется **прямоугольным параллелепипедом**.

Теорема 3

Квадрат длины диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов длин трех его ребер, исходящих из одной вершины.

Задание. Докажите теорему 3.

Определение

Прямоугольный параллелепипед, все ребра которого конгруэнтны, называется **кубом**.

Очевидно, что все грани куба являются конгруэнтными квадратами. У куба девять плоскостей симметрии.

Задача с решением

Картонная коробка имеет вид и размеры, указанные на рисунке 7.9 а). Она открывается вращением крышки $ABB_1A_1D_1C_1$ вокруг прямой AB (рис. 7.9 б)).

а) Вычислим длину липкой ленты, необходимой для заклеивания коробки по ломаной линии AD_1C_1B, если известно, что все грани коробки являются прямоугольниками.

б) Можно ли упаковать в эту коробку саблю длиной 72 см?

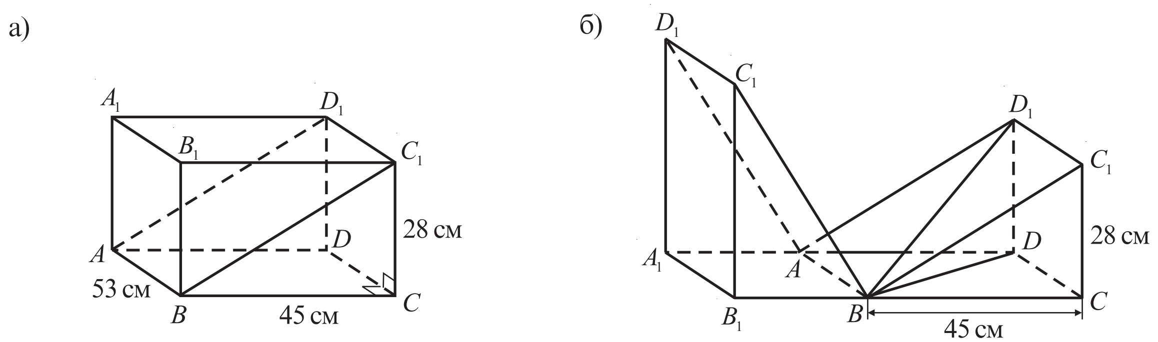


Рис. 7.9

Решение:

а) Коробка является прямоугольным параллелепипедом. Так как $AD_1 = BC_1 = \sqrt{45^2 + 28^2} = \sqrt{2\,809} = 53$ (см), то длина липкой ленты равна $AD_1 + D_1C_1 + C_1B = 159$ см.

б) Согласно теореме 3, диагональ

$$AC_1 = \sqrt{45^2 + 28^2 + 53^2} =$$

$$= 53\sqrt{2} \approx 74{,}9 \text{ (см)}.$$

Следовательно, саблю длиной 72 см можно упаковать в коробку, укладывая ее по диагонали коробки (рис. 7.10).

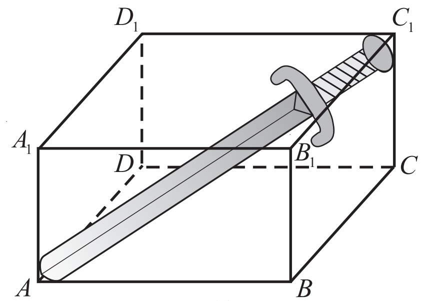


Рис. 7.10

Определение

Непустое пересечение многогранника и плоскости называется **сечением** многогранника данной плоскостью. В этом случае говорим, что плоскость пересекает многогранник и называется **секущей плоскостью**.

Сечения многогранника плоскостью могут быть:

а) точками; б) отрезками; в) многоугольниками.

Рассмотрим только сечения-многоугольники, так как остальные случаи тривиальны.

Построить сечение многогранника данной плоскостью – значит, указать точки пересечения секущей плоскости с ребрами многогранника и соединить эти точки отрезками, принадлежащими граням многогранника. Вообще, точки пересечения секущей плоскости с ребрами многогранника являются вершинами многоугольника, полученного при пересечении многогранника данной плоскостью, а отрезки, принадлежащие граням, являются сторонами этого многоугольника.

Для построения сечения многогранника данной плоскостью поступаем следующим образом:

1) на плоскости каждой грани, пересеченной секущей плоскостью, отмечаем две точки, принадлежащие сечению;
2) находим точки пересечения ребер многогранника с прямыми, проходящими через отмеченные точки;
3) соединяем эти точки и выделяем сечение.

Секущая плоскость может быть определена разными способами (тремя неколлинеарными точками, точкой и прямой и др.).

Примеры

1 Сечение призмы плоскостью, проходящей через два боковых ребра, не принадлежащих одной грани, является параллелограммом. Это сечение называется ***диагональным сечением*** призмы.

2 Сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через диагональ параллелепипеда, является параллелограммом. В этом случае секущая плоскость определяется концами диагонали и точкой на грани (или на ребре).

Задачи с решением

1 Построим сечение четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки A_1, C_1, перпендикулярной основаниям, зная, что точка E является ортогональной проекцией вершины B_1 на плоскости основания $ABCD$ (рис. 7.11).

Решение:

Плоскость BB_1E перпендикулярна основаниям и параллельна боковым ребрам призмы. Сечение можно построить, выполняя следующие шаги:

1. Находим точку L пересечения прямых BE и AD (может быть CD).
2. Проводим прямую $LM \parallel DD_1$, $M \in A_1D_1$.
3. Находим точку P пересечения прямых A_1C_1 и B_1M.
4. Через точку P проводим прямую $PQ \parallel B_1E$, $Q \in BL$.
5. Через точку Q проводим прямую ST, параллельную A_1C_1, $S \in AD$, $T \in CD$.
6. Трапеция A_1C_1TS является сечением призмы плоскостью, проходящей через точки A_1, C_1 и перпендикулярной основаниям.

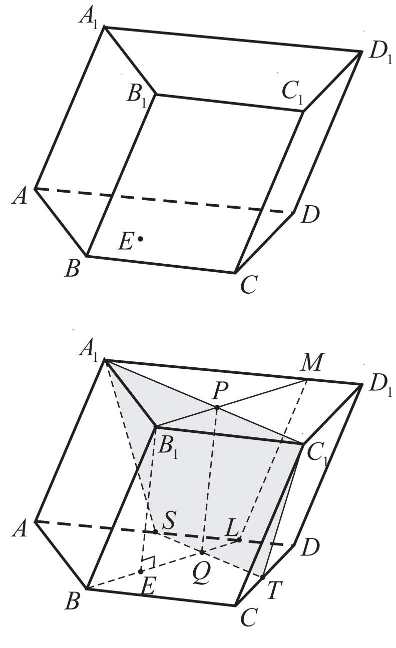


Рис. 7.11

2 В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагональ AC_1 пересекает плоскость BDA_1 в точке M (рис. 7.12). Найдем $AM : MC_1$.

Решение:

Точка M является точкой пересечения медиан треугольника BA_1D. Действительно, плоскость BA_1D пересечена плоскостями AA_1C_1, ABC_1, ADC_1, определяемыми диагональю AC_1 и ребрами AA_1, AB, AD соответственно, по прямым, содержащим медианы треугольника BA_1D.

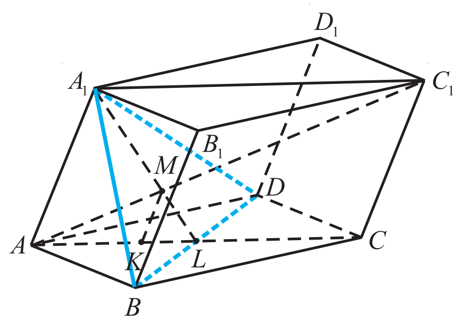


Рис. 7.12

Рассмотрим сечение параллелепипеда плоскостью AA_1C_1. Пусть $[A_1L]$ – медиана стороны BD треугольника BA_1D, а $[MK] \parallel [AA_1]$, $K \in [AC]$. Из того, что $\Delta AA_1L \sim \Delta KML$, $\Delta AKM \sim \Delta ACC_1$ и так как M – центр тяжести треугольника BA_1D, получаем:

$$1:3 = ML : LA_1 = KM : AA_1 = KM : CC_1 = AM : AC_1.$$

Откуда получаем: $AM : MC_1 = 1:2$.

$\mathscr{A}_{\text{бок.}} = \mathscr{P} \cdot l$

3 Длина бокового ребра призмы равна l, а периметр многоугольника, вершины которого являются точками пересечения боковых ребер с перпендикулярной им плоскостью (сечение, перпендикулярное боковым ребрам), равен $\mathscr{P}$. Вычислим площадь боковой поверхности призмы.

Решение:

Рассмотрим призму $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ и сечение $FGHKL$, перпендикулярное боковым ребрам (рис. 7.13). Площадь боковой поверхности призмы:

$$\mathscr{A}_{\text{бок.}} = AA_1 \cdot FG + BB_1 \cdot GH + \ldots + EE_1 \cdot FL =$$
$$= l(FG + GH + \ldots + FL) = l \cdot \mathscr{P}.$$

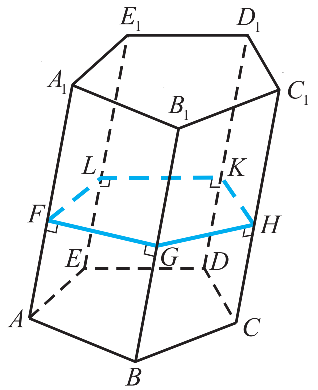


Рис. 7.13

Итак, площадь боковой поверхности призмы равна произведению длины бокового ребра и периметра сечения, перпендикулярного боковому ребру призмы.

Упражнения и задачи

A

1. Основание прямой призмы – ромб с острым углом в 30°. Все ребра призмы равны 4 см. Найдите площадь полной поверхности призмы.

2. Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник, длина гипотенузы которого в два раза больше длины одного катета. Найдите величины двугранных углов, образованных боковыми гранями.

3. Найдите площадь полной поверхности правильной четырехугольной призмы, если длина диагонали призмы равна 13 см, а длина диагонали боковой грани 12 см.

4. Основание прямой призмы – ромб со стороной 6 см и острым углом 60°. Бóльшая диагональ призмы образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите:
а) диагонали призмы;
б) площадь полной поверхности призмы.

5. Все ребра правильной шестиугольной призмы равны 6 см. Найдите:
а) диагонали призмы;
б) площади диагональных сечений;
в) площадь полной поверхности призмы.

$$\mathscr{A}_{\text{полн.}} = \mathscr{A}_{\text{бок.}} + 2\mathscr{A}_{\text{осн.}}$$

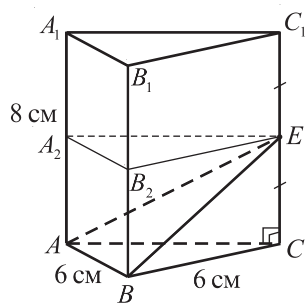
6. В правильной треугольной призме длина стороны основания равна 6 см, а высота призмы 8 см. Найдите углы, образованные:
а) двумя диагоналями боковых граней, исходящих из одной вершины;
б) двумя скрещивающимися диагоналями боковых граней призмы.

7. Стороны основания прямого параллелепипеда равны 6 см и 8 см и образуют угол в 60°. Длина бокового ребра 8 см. Найдите:
а) длины диагоналей параллелепипеда;
б) площадь полной поверхности параллелепипеда.

8. Площадь полной поверхности куба равна 96 см^2. Найдите длину:
а) диагонали куба;
б) диагонали грани куба.

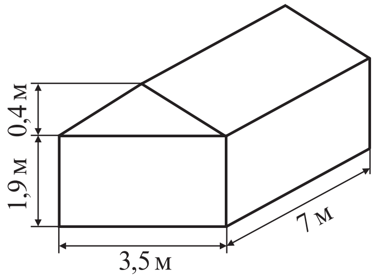
9. Основание прямой призмы – равнобедренная трапеция с основаниями 10 см и 4 см. Острый угол трапеции конгруэнтен углу, образованному диагональю призмы с плоскостью основания, и равен 45°. Найдите длину:
а) бокового ребра призмы;
б) диагонали призмы.

10. Через сторону основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ проведена плоскость, которая пересекает противоположное боковое ребро в его середине (точка E). Длина стороны основания призмы равна 6 см, а длина бокового ребра 8 см.
Найдите:
а) площадь треугольника ABE;
б) площадь полной поверхности многогранника $EABB_2A_2$, где A_2B_2E является сечением, параллельным основаниям.



11. Длины ребер прямоугольного параллелепипеда 2 см, 3 см, 6 см. Найдите:
а) длины диагоналей параллелепипеда;
б) величину угла, образованного диагональю и гранями параллелепипеда;
в) величину двугранного угла, образованного основанием и плоскостью, проходящей через сторону основания и центр симметрии параллелепипеда.

12. Сколько краски потребуется для покраски внешней поверхности гаража, размеры которого даны на рисунке, если на покраску 1 м^2 идет 40 г краски?



Б

1. Основание треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ – правильный треугольник со стороной 6 см. Боковое ребро AA_1 образует с плоскостью основания угол 60°. Известно, что проекцией точки A_1 на плоскость основания является середина стороны BC. Найдите:
а) высоту призмы;
б) расстояние от точки A до середины стороны B_1C_1.

2. Основание треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ – правильный треугольник со стороной 6 см. Боковое ребро AA_1 образует с плоскостью основания угол 60°. Известно, что проекция точки A_1 на плоскость основания является центром окружности, вписанной в треугольник ABC. Найдите:
а) высоту призмы;
б) расстояние от точки A_1 до середины стороны BC;
в) расстояние от точки A до середины стороны B_1C_1;
г) площадь боковой поверхности призмы.

3. Основание треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ – правильный треугольник со стороной a. Боковое ребро AA_1 образует со сторонами основания AB и AC конгруэнтные углы, равные α. Известно, что $AA_1 = b$. Найдите:
а) площадь боковой поверхности призмы;
б) высоту призмы.

4. Основание прямого параллелепипеда – ромб со стороной 6 см и острым углом 60°. Площадь боковой поверхности параллелепипеда равна 144 см^2. Найдите длины диагоналей параллелепипеда.

5. Основание прямоугольного параллелепипеда – квадрат со стороной 10 см, боковое ребро равно 12 см. Найдите:
а) площадь полной поверхности призмы;
б) расстояние от центра одного основания до прямой, проходящей через вершину этого основания и центр другого основания.

$\mathcal{A}_{\text{полн.}} = \mathcal{P}(l+r)$

6. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ $AB = a$, $AA_1 = h$.
а) Найдите величину угла, образованного прямыми A_1B и B_1C.
б) При каком соотношении a и h указанные прямые будут взаимно перпендикулярными?

7. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = a$, $AA_1 = h$. Найдите величину угла, образованного прямыми: а) AB_1 и BC_1; б) A_1C_1 и AB_1.

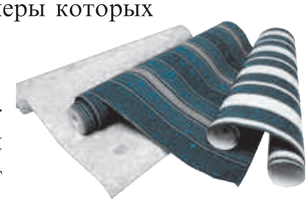
$\mathcal{A}_{\text{бок.}} = \mathcal{P} \cdot l$

8. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра конгруэнтны. Найдите величину угла, образованного прямыми:
а) AB_1 и BC; б) AB_1 и CD_1;
в) AB_1 и DE_1; г) AB_1 и EF_1;
д) AB_1 и BD_1; е) AB_1 и BE_1.

9. Основание призмы – равнобедренная трапеция, основания которой равны 88 см и 56 см, а боковые ребра равны 34 см. Одно из диагональных сечений призмы перпендикулярно основаниям и является ромбом с острым углом 30°. Найдите высоту призмы.

10. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна d и образует с плоскостью основания угол, равный φ. Найдите:
а) площадь боковой поверхности призмы;
б) площадь диагонального сечения призмы.

11. Стены двух комнат, размеры которых 4 м × 5 м × 2,6 м и 3 м × 4 м × 2,6 м, необходимо оклеить обоями. Поверхность дверей и окон составляет 10% от полной поверхности стен. Сколько рулонов обоев нужно купить, если лист рулона имеет размеры 0,5 м × 10 м?



§ 3 ПИРАМИДА

Определение Пусть $A_1A_2...A_n$ – плоский многоугольник, V – точка, не принадлежащая плоскости многоугольника. Объединение всех отрезков VA, где A принадлежит многоугольнику $A_1A_2...A_n$, называется **пирамидой** с вершиной V и основанием $A_1A_2...A_n$ (рис. 7.14).

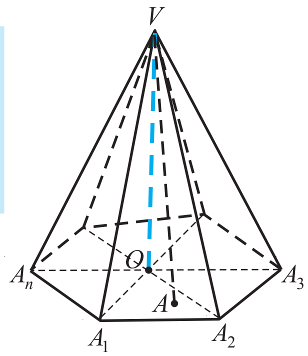


Рис. 7.14

Пирамида с вершиной V и основанием $A_1A_2...A_n$ обозначается $VA_1A_2...A_n$. Точки $A_1, A_2, ..., A_n$ называются ***вершинами основания***, отрезки $VA_1, VA_2, ..., VA_n$ называются ***боковыми ребрами***, треугольники $VA_1A_2, VA_2A_3, ..., VA_{n-1}A_n$ называются ***боковыми гранями пирамиды***, углы $A_1VA_2, A_2VA_3, ..., A_nVA_1$ называются ***плоскими углами при вершине пирамиды*** (рис. 7.14).

Рассмотрим прямую, проходящую через вершину V пирамиды, перпендикулярную плоскости основания и пересекающую это основание в точке O. Отрезок VO называется ***высотой*** пирамиды (рис. 7.14). Длина этого отрезка также называется ***высотой*** пирамиды.

Напомним, что пирамиды можно классифицировать по числу сторон многоугольника основания: треугольные, четырехугольные, пятиугольные и т. д.

Определение Пирамида называется **правильной**, если ее основанием является правильный многоугольник и проекция вершины на плоскость основания является центром симметрии основания.

Все боковые грани правильной пирамиды являются конгруэнтными равнобедренными треугольниками.

Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная к стороне основания, называется ***апофемой*** этой пирамиды.

Площадь полной поверхности пирамиды (обозначают $\mathcal{A}_{\text{полн.}}$) равна сумме площадей всех граней пирамиды.

Площадь боковой поверхности (обозначают $\mathcal{A}_{\text{бок.}}$) равна сумме площадей боковых граней.

Если обозначить площадь основания через $\mathcal{A}_{\text{осн.}}$, то

$$\boxed{\mathcal{A}_{\text{полн.}} = \mathcal{A}_{\text{бок.}} + \mathcal{A}_{\text{осн.}}}\ .$$

Если в правильной пирамиде известны длина апофемы h, полупериметр основания p и длина радиуса окружности, вписанной в основание пирамиды r, то:

$$\boxed{\mathcal{A}_{\text{бок.}} = h \cdot p},\quad \boxed{\mathcal{A}_{\text{осн.}} = r \cdot p} \quad \text{и} \quad \boxed{\mathcal{A}_{\text{полн.}} = p(h+r)}\ .$$

Теорема 4 Если боковые ребра пирамиды конгруэнтны, то многоугольник основания является вписываемым и высота пирамиды проходит через центр окружности, описанной около основания.

Доказательство:

Пусть $A_1A_2...A_n$ – основание пирамиды, V – ее вершина, O – основание высоты (рис. 7.14).

Получаем $\Delta A_1VO \equiv \Delta A_2VO \equiv ... \equiv \Delta A_nVO$ как прямоугольные треугольники с общим катетом и конгруэнтными гипотенузами. Из конгруэнтности названных треугольников следует, что $OA_1 = OA_2 = ... = OA_n$, то есть вершины многоугольника основания находятся на равном расстоянии от точки O. Итак, точка O является центром окружности, описанной около основания.

Следствие

Если углы, образованные высотой пирамиды и боковыми ребрами (или углы, образованные боковыми ребрами с плоскостью основания) конгруэнтны, то многоугольник основания является вписываемым и высота проходит через центр окружности, описанной около основания.

Теорема 5

Если боковые грани пирамиды образуют с плоскостью основания двугранные конгруэнтные углы, то в многоугольник основания можно вписать окружность и высота пирамиды проходит через центр этой окружности.

Отметим, что двугранные углы, образованные боковыми гранями пирамиды с ее основанием, называются ***двугранными углами при основании пирамиды***.

Задание. Докажите теорему 5.

Следствие 1

Если высота пирамиды образует с боковыми гранями конгруэнтные углы, то в многоугольник основания можно вписать окружность, а высота пирамиды проходит через центр этой окружности.

Следствие 2

Если высоты боковых граней пирамиды, проведенные из ее вершины, конгруэнтны, то в многоугольник основания можно вписать окружность и высота пирамиды проходит через центр этой окружности.

Сечение пирамиды плоскостью строят так же, как и сечение призмы плоскостью.

Задача с решением

Основание пирамиды $SABCD$ – параллелограмм $ABCD$ со сторонами $AB = 6$ см и $AD = 10$ см. Боковые грани SAB и SAD перпендикулярны плоскости основания и образуют двугранный угол в $120°$. Наибольшее боковое ребро пирамиды равно 14 см (рис. 7.15). Построим сечения пирамиды плоскостями, проходящими через ее высоту SA и через высоты основания, проведенные из вершины A. Вычислим площади построенных сечений.

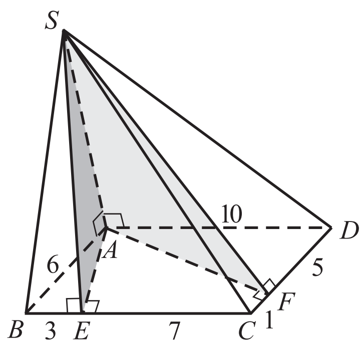


Рис. 7.15

Решение:

Пусть $[AE]$ и $[AF]$ – высоты параллелограмма $ABCD$, проведенные из A, $E \in BC$, $F \in CD$. Из того, что $m(\angle B) = m(\angle D) = 60°$, получаем $BE = 3$ см и $FD = 5$ см. Таким образом, точки E и F определяются из условия $BE : EC = 3 : 7$ и $CF : FD = 1 : 5$. Следовательно, искомыми сечениями являются треугольники SAE и SAF. Из треугольника ABC по теореме косинусов получаем $AC = \sqrt{76}$ см.

Так как $[AB]$, $[AC]$ и $[AD]$ являются проекциями наклонных, проведенных из точки S к плоскости ABC, то $[SD]$ является наибольшей наклонной (она имеет наибольшую проекцию).

Таким образом, $SD = 14$ см.

Вычислим высоту SA и высоты AE и AF основания пирамиды:

$$SA = \sqrt{14^2 - 10^2} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6};$$

$$AE = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}; \quad AF = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}.$$

Следовательно, $\mathscr{A}_{\Delta SAE} = \frac{1}{2} SA \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{3} = 18\sqrt{2}$ (см^2),

$$\mathscr{A}_{\Delta SAF} = \frac{1}{2} SA \cdot AF = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{6} \cdot 5\sqrt{3} = 30\sqrt{2} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Теорема 6 Если пирамида высоты H пересечена плоскостью, параллельной основанию пирамиды, и расстояние от вершины пирамиды до секущей плоскости равно h, то сечение пирамиды этой плоскостью является многоугольником, подобным основанию, с коэффициентом подобия, равным $\dfrac{h}{H}$.

Доказательство:

Пусть плоскость α, параллельная основанию пирамиды $VA_1A_2...A_n$, пересекает ребро VA_1 в точке A_1' (рис. 7.16). Рассмотрим гомотетию с центром V и коэффициентом $k=\dfrac{h}{H}=\dfrac{VO'}{VO}$.

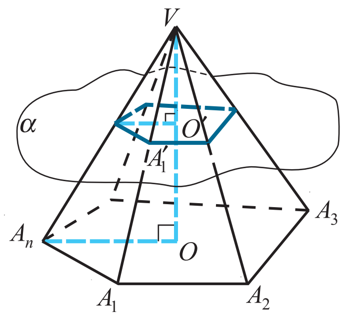


Рис. 7.16

Эта гомотетия отображает точку A_1 на точку A_1', а плоскость основания – на плоскость, параллельную основанию, проходящую через точку A_1', то есть на плоскость α. Так как гомотетия – это преобразование подобия, получаем, что сечение пирамиды плоскостью α является многоугольником, подобным основанию.

Следствие $\mathcal{A}_{\text{сеч.}} : \mathcal{A}_{\text{осн.}} = h^2 : H^2 = k^2$, где $\mathcal{A}_{\text{сеч.}}$ – площадь сечения, $\mathcal{A}_{\text{осн.}}$ – площадь основания.

Упражнения и задачи

A

1. Основание пирамиды – равнобедренный треугольник со сторонами 12 см, 10 см, 10 см. Боковые грани образуют с плоскостью основания двугранные конгруэнтные углы в 60°. Найдите:
а) высоту пирамиды;
б) площадь полной поверхности пирамиды;
в) площади сечений пирамиды плоскостями, проходящими через ее высоту и боковые ребра.

2. Основание пирамиды – прямоугольный треугольник, длины катетов которого равны 5 см и 12 см. Боковые ребра образуют с плоскостью основания конгруэнтные углы в 45°. Найдите высоту пирамиды.

3. Основание пирамиды – прямоугольник, длины сторон которого равны 3 см и 4 см. Длина каждого бокового ребра пирамиды равна 6,5 см. Найдите площадь диагонального сечения пирамиды.

4. Основание пирамиды – прямоугольный треугольник, длины катетов которого равны 12 см и 16 см. Все двугранные углы при основании пирамиды равны 45°.
Найдите:
а) высоту пирамиды;
б) боковую поверхность пирамиды.

$\mathcal{A}_{\text{полн.}} = \mathcal{A}_{\text{бок.}} + \mathcal{A}_{\text{осн.}}$

5. Основание пирамиды – правильный треугольник со стороной 6 см. Одно из боковых ребер пирамиды перпендикулярно плоскости основания и конгруэнтно стороне основания. Найдите боковую поверхность пирамиды.

6. Основание пирамиды – прямоугольник, длины сторон которого 6 см и 8 см. Высота пирамиды равна 10 см и проходит через точку пересечения диагоналей основания. Найдите величину угла, образованного боковым ребром с плоскостью основания.

7. Длина стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равна 8 см, а высота пирамиды 7 см. Найдите:
а) длину бокового ребра;
б) величину двугранного угла, образованного плоскостью основания и боковой гранью.

8. Площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды равна 140 см², а площадь ее полной поверхности 165 см². Найдите:
а) длину стороны основания пирамиды;
б) высоту пирамиды;
в) расстояние от вершины пирамиды до секущей плоскости, параллельной основанию, если площадь сечения равна $\dfrac{1200}{253}$ см^2.

Б

1. Основание пирамиды – ромб. Проекция вершины пирамиды на плоскость основания совпадает с точкой пересечения диагоналей основания. Докажите, что двугранные углы при основании пирамиды конгруэнтны.

2. Основание пирамиды – равнобокая трапеция. Проекция вершины пирамиды на плоскость основания совпадает с точкой пересечения серединных перпендикуляров боковых сторон трапеции.
Докажите, что:
а) углы, образованные боковыми ребрами с плоскостью основания, конгруэнтны;
б) боковые ребра конгруэнтны.

3. Основание пирамиды – прямоугольный треугольник, длины катетов которого равны a и b. Боковые ребра образуют с плоскостью основания конгруэнтные углы, равные α. Найдите высоту пирамиды.

4. Найдите длину бокового ребра и площадь боковой поверхности правильной пирамиды, у которой длина стороны основания равна a, и величина двугранного угла при основании равна φ, если пирамида:
а) треугольная;
б) четырехугольная;
в) шестиугольная;
г) n-угольная, $n \geq 3$.

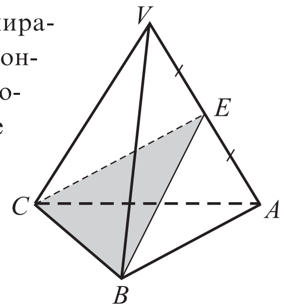
$$\mathcal{A}_{\text{бок}} = h \cdot p$$

5. Основание пирамиды $VABC$ – равносторонний треугольник ABC со стороной a. Боковая грань VCB перпендикулярна плоскости ABC.
Известно, что $m(\angle VAB) = m(\angle VAC) = \alpha$. Найдите:
а) длины боковых ребер пирамиды;
б) площадь боковой поверхности пирамиды;
в) величину φ двугранного угла, образованного гранями VAB и CAB.

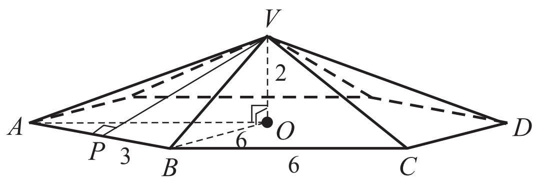
6. Основание пирамиды – параллелограмм, длины диагоналей которого равны d_1 и d_2. Величины двугранных углов при основании равны φ. Найдите:
а) площадь боковой поверхности пирамиды;
б) площади диагональных сечений пирамиды.

7. Основание пирамиды – равнобедренная трапеция, длины оснований которой равны a и b. Высоты боковых граней, проведенные из вершины пирамиды, равны h. Найдите:
а) высоту пирамиды;
б) боковую поверхность пирамиды;
в) величины двугранных углов при основании пирамиды;
г) площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середину высоты пирамиды, и которая параллельна ее основанию.

8. Основание правильной пирамиды $VABC$ – равносторонний треугольник ABC со стороной, равной a. Боковое ребро равно b. Найдите площадь треугольника BCE, где E – середина бокового ребра VA.



9. Крыша резервуара имеет форму правильной шестиугольной пирамиды высотой 2 м и стороной основания 6 м. Найдите, сколько листов жести прямоугольной формы размера 0,7 м × 1,4 м потребуется для изготовления крыши, если на швы используется 10% необходимой площади жести?



$$\mathcal{A}_{\text{полн.}} = p(h + r)$$

§ 4 УСЕЧЕННАЯ ПИРАМИДА

Если пирамиду пересечь плоскостью, параллельной основанию, то эта плоскость отсечет от пирамиды два тела, расположенных в разных полупространствах, разграниченных этой плоскостью. Одно из этих тел – пирамида, а другое тело называется ***усеченной пирамидой*** (рис. 7.17).

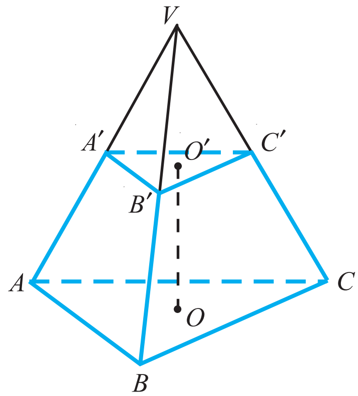
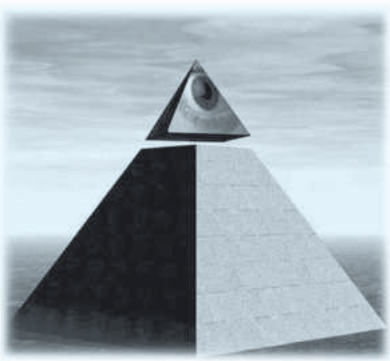


Рис. 7.17

Многоугольник сечения и многоугольник основания пирамиды называются соответственно ***верхним основанием*** и ***нижним основанием*** усеченной пирамиды, остальные грани усеченной пирамиды являются трапециями и называются ***боковыми гранями***. Непараллельные стороны боковых граней называются ***боковыми ребрами***. Отрезок, концы которого принадлежат плоскостям оснований усеченной пирамиды, перпендикулярный им, называется ***высотой*** усеченной пирамиды ($[OO']$, рис. 7.17). Длина этого отрезка также называется ***высотой*** усеченной пирамиды.



Площадь полной поверхности усеченной пирамиды обозначается $\mathscr{A}_{\text{полн.}}$ и равна сумме площадей всех граней усеченной пирамиды. Сумма площадей боковых граней называется ***площадью боковой поверхности*** и обозначается $\mathscr{A}_{\text{бок.}}$. Если площадь меньшего основания – $\mathscr{A}_o$, а площадь большего основания – $\mathscr{A}_O$, то:

$$\boxed{\mathscr{A}_{\text{полн.}} = \mathscr{A}_{\text{бок.}} + \mathscr{A}_o + \mathscr{A}_O}.$$

Усеченная пирамида, полученная из правильной пирамиды, называется ***правильной усеченной пирамидой***. Высота боковой грани правильной усеченной пирамиды называется ***апофемой***. Если длина апофемы правильной усеченной пирамиды равна h, длины сторон оснований равны a и b, то $\boxed{\mathscr{A}_{\text{бок.}} = n\dfrac{a+b}{2}h}$, где n – число сторон основания.

Задание с решением

Вытяжка камина имеет размеры, указанные на рисунке. Сколько квадратных метров жести потребуется для изготовления вытяжки, если на швы используется 10% необходимой площади жести (рис. 7.18 а))?

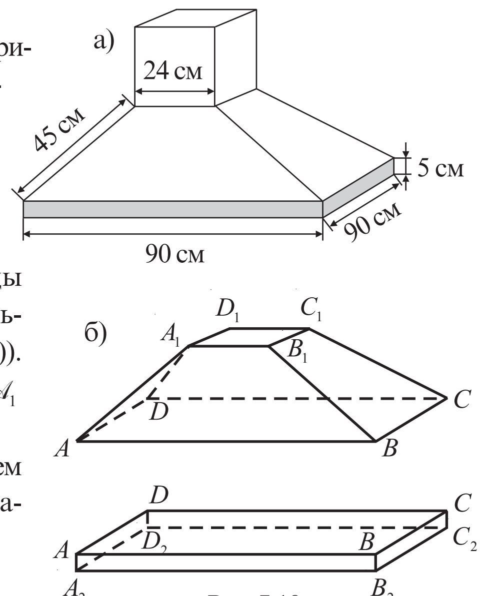


Рис. 7.18

Решение:

Вытяжка имеет форму усеченной пирамиды $ABCDA_1B_1C_1D_1$, к которой примыкает прямоугольный параллелепипед $A_2B_2C_2D_2ABCD$ (рис. 7.18 б)).

Вычислим площадь боковой поверхности $\mathscr{A}_1$ параллелепипеда: $\mathscr{A}_1 = 4 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}05 = 0{,}18$ (м^2).

Находим высоту h трапеции ABB_1A_1 и вычисляем площадь боковой поверхности $\mathscr{A}_2$ усеченной пирамиды: $h = \sqrt{0{,}45^2 - 0{,}33^2} \approx 0{,}306$ (м),

$$\mathscr{A}_2 = 4 \cdot \frac{0{,}9 + 0{,}24}{2} \cdot 0{,}306 \approx 0{,}70 \text{ (м}^2\text{)}.$$

Вычисляем площадь вытяжки: $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2 = 0{,}18 + 0{,}70 = 0{,}88$ (м^2).

Таким образом, потребуется: $0{,}88 + 0{,}1 \cdot 0{,}88 = 0{,}968 \approx 1$ м^2 жести.

Упражнения и задачи

А

1. Длины сторон оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 4 см и 14 см, а длина бокового ребра 13 см. Найдите:
а) площадь боковой поверхности усеченной пирамиды;
б) высоту усеченной пирамиды;
в) площади диагональных сечений усеченной пирамиды.

2. Длины сторон оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны 4 см и 10 см, а длина бокового ребра 5 см. Найдите:
а) площадь боковой поверхности усеченной пирамиды;
б) высоту усеченной пирамиды;
в) площадь сечения усеченной пирамиды плоскостью, проходящей через середину высоты, и которая параллельна основаниям усеченной пирамиды.

3. Длины сторон оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 6 см и 16 см, а ее высота 10 см.
Найдите:
а) длину бокового ребра усеченной пирамиды;
б) площадь боковой поверхности усеченной пирамиды.

4. Длины сторон оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны 2 см и 8 см, а ее высота 6 см. Найдите:
а) длину бокового ребра усеченной пирамиды;
б) площадь полной поверхности усеченной пирамиды.

5. Глубина ямы, вырытой в виде правильной усеченной четырехугольной пирамиды, равна 1,5 м. Длина стороны нижнего основания равна 0,8 м, а верхнего основания – 1,6 м. Найдите длину бокового ребра усеченной пирамиды (ямы).

$$\mathcal{A}_{\text{полн.}} = \mathcal{A}_{\text{бок.}} + \mathcal{A}_o + \mathcal{A}_o$$

Б

1. Длины сторон оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны a и b $(a < b)$, а величина двугранного угла при большем основании равна φ.
Найдите:
а) высоту усеченной пирамиды;
б) апофему усеченной пирамиды;
в) площадь боковой поверхности усеченной пирамиды.

2. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $A_1B_1 = a$, $AB = b$ $(a < b)$ и угол, образованный боковым ребром с плоскостью большего основания, равен α.
Найдите:
а) площадь треугольника AB_1D_1;
б) косинус двугранного угла, образованного плоскостью AB_1D_1 и плоскостью основания $ABCD$;
в) площади диагональных сечений.

$$\mathcal{A}_{\text{бок.}} = n\frac{a+b}{2}h$$

3. Основания усеченной пирамиды – прямоугольники. Длины сторон меньшего основания равны 3 см и 4 см, а большего основания – 9 см и 12 см. Длина бокового ребра равна 13 см. Найдите:
а) площади диагональных сечений усеченной пирамиды;
б) площадь боковой поверхности усеченной пирамиды.

4. Гранитный постамент имеет вид правильной четырехугольной усеченной пирамиды. Стороны оснований равны 2,8 м и 2 м. Длина бокового ребра равна 3,64 м. Найдите высоту постамента с точностью до 0,01 м.

§ 5 ОБЪЕМЫ МНОГОГРАННИКОВ

5.1. Понятие объема тела

В предыдущих классах мы уже вычисляли объемы некоторых тел, но соответствующие формулы не были доказаны.

В дальнейшем они будут доказаны. Будем рассматривать только ***простые тела***, то есть тела, которые можно разбить на конечное число тетраэдров, не имеющих общих внутренних точек.

Определение

Функцией объема называется функция $f\colon K \to \mathbb{R}_+$, $f = \mathcal{V}(K)$, где K – множество тел, которая каждому простому телу T ставит в соответствие действительное неотрицательное число $\mathcal{V}(T)$, называемое **объемом данного тела** и обладающее следующими свойствами:

1° если тела T_1 и T_2 конгруэнтны, то $\mathcal{V}(T_1) = \mathcal{V}(T_2)$;

2° если тело T является объединением тел T_1 и T_2, которые не имеют общих внутренних точек, то $\mathcal{V}(T) = \mathcal{V}(T_1) + \mathcal{V}(T_2)$ (*свойство аддитивности*);

3° существует тело T_0, объем которого равен единице объема, то есть $\mathcal{V}(T_0) = 1$.

В качестве единицы объема, как правило, берут объем куба, длина ребра которого равна 1, без уточнения единицы измерения длины стороны. Таким образом, если сторона куба 1 мм, 1 см, 1 м и т. д., то соответствующая единица объема будет 1 мм^3, 1 см^3, 1 м^3 и т. д.

Из свойства 2° функции объема получаем следующее следствие:

Следствие

Если тело T_1 содержится в теле T_2, то есть $T_1 \subseteq T_2$, то:

$$\mathcal{V}(T_1) \le \mathcal{V}(T_2).$$

Для упрощения вычислений объемов тел, примем без доказательства следующую теорему:

Теорема 7

Принцип Кавальери

Пусть T_1 и T_2 – простые тела и α – плоскость. Если тела T_1 и T_2 расположены относительно плоскости α так, что для любой плоскости $\beta \parallel \alpha$ сечения тел T_1 и T_2 плоскостью β имеют равные площади, то $\mathcal{V}(T_1) = \mathcal{V}(T_2)$.

Бонавентура Франческо Кавальери (1598–1647) – итальянский математик

Для иллюстрации этой теоремы рассмотрим две пирамиды, T_1 и T_2, имеющие равные высоты: основание пирамиды T_1 – равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами, равными $\sqrt{2}a$, а основание пирамиды T_2 – квадрат со стороной, равной a (рис. 7.19).

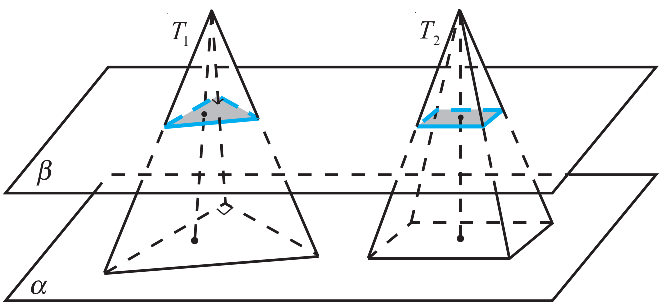


Рис. 7.19

Пусть α – произвольная фиксированная плоскость. Расположим пирамиды так, чтобы их основания лежали на плоскости α, а вершины находились в одном и том же полупространстве, ограниченном плоскостью α (рис. 7.19).

Пусть плоскость $\beta \parallel \alpha$ пересекает пирамиды T_1 и T_2.

Если площадь сечения пирамиды T_1 плоскостью β равна $\mathscr{A}_1$, а площадь сечения пирамиды T_2 плоскостью β равна $\mathscr{A}_2$, то можно показать, что $\frac{\mathscr{A}_1}{a^2} = \frac{\mathscr{A}_2}{a^2}$ (следствие из теоремы 6 (§3), площади оснований пирамид равны a^2), откуда $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2$.

Следовательно, $\mathscr{V}(T_1) = \mathscr{V}(T_2)$.

Замечание

Из изложенного следует, что пирамиды (соответственно призмы), площади оснований которых равны, а высоты конгруэнтны, имеют равные объемы.

5.2. Объем параллелепипеда

Теорема 8

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению длин ребер, исходящих из одной его вершины.

Замечание

В этой и следующих теоремах будем считать, что длины ребер выражены в одинаковых единицах измерения.

Доказательство:

Пусть в прямоугольном параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ длины ребер, исходящих из вершины A, равны a, b, c. Обозначим через $\mathscr{V}$ объем этого параллелепипеда.

1) Рассмотрим сначала случай, когда a, b, c – положительные рациональные числа и представим их в виде дробей с одинаковыми знаменателями: $a = \frac{m}{n}$, $b = \frac{p}{n}$, $c = \frac{q}{n}$, где n, m, p, q – ненулевые натуральные числа.

Проведя плоскости, параллельные граням, разделим данный параллелепипед на кубы, конгруэнтные (без общих внутренних точек) кубу $ARSTA''R'S'T'$, длина ребра которого равна $\frac{1}{n}$ единицы длины (рис. 7.20).

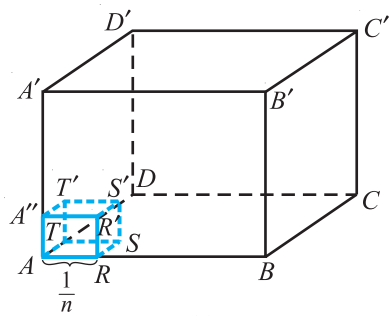


Рис. 7.20

По свойствам 1°, 2° из определения функции объема получаем, что объем куба $ARSTA''R'S'T'$ равен $\frac{1}{n^3}$ единицы объема.

Общее число кубов, на которые разбит параллелепипед, равно $m \cdot p \cdot q$ и, применив свойства 1°, 2° (из определения функции объема), получим:

$$\mathscr{V} = m \cdot p \cdot q \cdot \frac{1}{n^3} = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{n} \cdot \frac{q}{n} = a \cdot b \cdot c.$$

2) Рассмотрим теперь случай, когда длины a, b, c являются положительными иррациональными числами. Обозначим через a_n, b_n, c_n приближенные значения чисел a, b, c по недостатку с погрешностью $\frac{1}{10^n}$, а через a_n^+, b_n^+, c_n^+ – приближенные значения чисел a, b, c по избытку с погрешностью $\frac{1}{10^n}$, где a_n, b_n, c_n, a_n^+, b_n^+, $c_n^+ \in \mathbb{Q}$.

Построим параллелепипед $AB_nC_nD_nA_n'B_n'C_n'D_n'$, длины ребер которого равны a_n, b_n, c_n (рис. 7.21). Обозначим его объем через $\mathcal{V}_n$ и заметим, что построенный параллелепипед содержится в данном параллелепипеде. Согласно следствию из определения функции объема получаем, что $\mathcal{V}_n \le \mathcal{V}$, где $\mathcal{V}_n = a_n \cdot b_n \cdot c_n$.

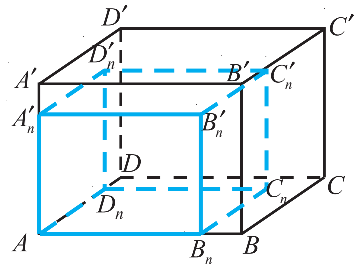


Рис. 7.21

Построим параллелепипед $A\overline{B}_n\overline{C}_n\overline{D}_nA_n''B_n''C_n''D_n''$, длины сторон которого равны a_n^+, b_n^+, c_n^+ (рис. 7.22). Обозначим его объем через $\mathcal{V}_n^+$ и заметим, что данный параллелепипед содержится в построенном параллелепипеде. Из сказанного выше получаем:

$$\mathcal{V} \le \mathcal{V}_n^+, \text{ где } \mathcal{V}_n^+ = a_n^+ \cdot b_n^+ \cdot c_n^+.$$

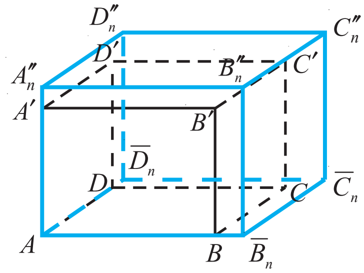


Рис. 7.22

Из последних двух неравенств получаем:

$$a_n \cdot b_n \cdot c_n \le \mathcal{V} \le a_n^+ \cdot b_n^+ \cdot c_n^+.$$

С другой стороны, из определения произведения действительных чисел имеем: $a_nb_nc_n \le abc \le a_n^+b_n^+c_n^+$.

Таким образом, приближенные значения чисел $\mathcal{V}$ и abc, взятые с одной и той же погрешностью, равны. Так как это верно для любого n, $n \in \mathbb{N}^*$, то равны и сами числа. Итак: $\mathcal{V} = \lim\limits_{n\to\infty} a_nb_nc_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^+b_n^+c_n^+ = abc$.

Следствие Объем куба, ребра которого равны a, вычисляется по формуле: $\boxed{\mathcal{V} = a^3}$.

5.3. Объем призмы

Теорема 9 Объем призмы равен произведению площади ее основания на высоту.

Доказательство:

Пусть α – плоскость, на которой расположено основание данной призмы, H – высота призмы, $\mathcal{A}_{\text{осн.}}$ – площадь основания призмы. Построим прямоугольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$, одно из оснований которого находится в плоскости α, а параллелепипед расположен в том же полупространстве, ограниченном плоскостью α, что и данная призма. Измерения параллелепипеда: $AB = a = \sqrt[3]{\mathcal{A}_B \cdot H}$, $BC = \dfrac{a^2}{H}$, $AA' = H$ (рис. 7.23).

Итак, площадь основания параллелепипеда равна:

$$AB \cdot BC = a \cdot \frac{a^2}{H} = \frac{a^3}{H} = \frac{\mathcal{A}_{\text{осн.}} \cdot H}{H} = \mathcal{A}_{\text{осн.}}.$$

Сечения данной призмы и построенного параллелепипеда плоскостью, параллельной плоскости α, имеют площади, равные $\mathcal{A}_{\text{осн.}}$, потому что многоугольники, полученные в сечении, конгруэнтны соответственно основаниям призмы. Из теоремы 8 следует, что объем построенного параллелепипеда $\mathcal{V}_{\text{пар.}} = a \cdot \dfrac{a^2}{H} \cdot H = a^3 = \mathcal{A}_{\text{осн.}} \cdot H$, а из теоремы 7 следует, что $\mathcal{V}_{\text{призмы}} = \mathcal{V}_{\text{пар.}} = \mathcal{A}_{\text{осн.}} \cdot H$, то есть $\boxed{\mathcal{V}_{\text{призмы}} = \mathcal{A}_{\text{осн.}} \cdot H}$.

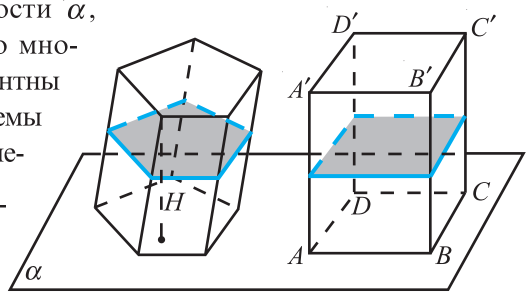


Рис. 7.23

5.4. Объем пирамиды

Пусть $ABCA_1$ – треугольная пирамида. Дополним пирамиду до треугольной призмы с основаниями ABC и $A_1B_1C_1$ и боковым ребром AA_1 (рис. 7.24). В пирамидах $ABCA_1$ и $A_1B_1C_1B$ площади оснований равны, а высоты конгруэнтны, следовательно, $\mathcal{V}_{ABCA_1} = \mathcal{V}_{A_1B_1C_1B}$. С другой стороны, плоскость A_1BC_1 делит пирамиду $A_1BCC_1B_1$ с вершиной в точке A_1 на две треугольные пирамиды, BCC_1A_1 и $BC_1B_1A_1$, с общей вершиной A_1 и основаниями BCC_1 и BC_1B_1 соответственно. Эти пирамиды имеют одну и ту же высоту (проведенную из общей вершины A_1) и основания равных площадей ($\mathcal{A}_{\Delta BCC_1} = \mathcal{A}_{\Delta BB_1C_1}$), следовательно $\mathcal{V}_{B_1C_1BA_1} = \mathcal{V}_{BC_1CA_1}$ (см. примечание раздела 5.1).

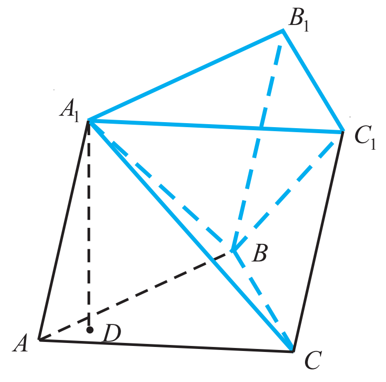


Рис. 7.24

Построенная призма разбита на три треугольные пирамиды ($ABCA_1, A_1B_1C_1B, BC_1CA_1$), которые не имеют общих внутренних точек и объемы которых равны. Если обозначим объем одной пирамиды через $\mathcal{V}_{\text{пир.}}$, то $3\mathcal{V}_{\text{пир.}} = \mathcal{V}_{\text{призмы}} = \mathcal{A}_{\text{осн.}} \cdot H$, где $\mathcal{A}_{\text{осн.}}$ – площадь треугольника ABC, а H – общая высота призмы и пирамиды.

Следовательно, ***объем треугольной пирамиды*** вычисляется по формуле:

$$\boxed{\mathcal{V}_{\text{пир.}} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_{\text{осн.}} \cdot H}\,.$$

Если основание пирамиды – выпуклый n-угольник, то в многоугольнике основания проведем все его диагонали и рассмотрим плоскости, определенные этими диагоналями и боковым ребром, соединяющим вершину пирамиды с общей вершиной проведенных диагоналей. Эти плоскости разбивают данную пирамиду на $n-2$ треугольные пирамиды, которые имеют одну и ту же высоту и площади оснований которых равны $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_{n-2}$ (рис. 7.25, $n = 5$). Согласно свойству аддитивности функции объема, делаем вывод, что объем данной пирамиды равен сумме объемов треугольных пирамид, на которые разбита данная пирамида, то есть:

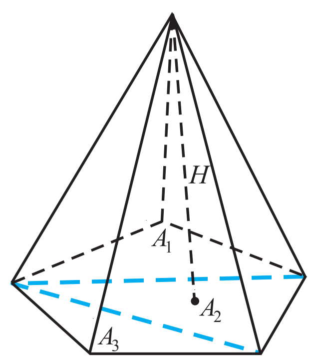


Рис. 7.25

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_1 \cdot H + \frac{1}{3}\mathcal{A}_2 \cdot H + \ldots + \frac{1}{3}\mathcal{A}_{n-2} \cdot H =$$

$$= \frac{1}{3}H(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \ldots + \mathcal{A}_{n-2}) = \frac{1}{3}H \cdot \mathcal{A}_{\text{осн.}},$$

где $\mathcal{A}_{\text{осн.}}$ – площадь основания данной пирамиды.

Теорема 10

Если H – высота пирамиды, а $\mathcal{A}_{\text{осн.}}$ – площадь основания этой пирамиды, то объем пирамиды вычисляется по формуле:

$$\mathcal{V}_{\text{пир.}} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_{\text{осн.}} \cdot H.$$

5.5. Объем усеченной пирамиды

Дана усеченная пирамида, высота которой равна H, а $\mathcal{A}_o$ и $\mathcal{A}_O$ $(\mathcal{A}_o < \mathcal{A}_O)$ – площади оснований.

Дополним усеченную пирамиду до полной пирамиды, вершина которой – пересечение прямых, содержащих боковые ребра (на рис. 7.26 рассмотрен случай $n = 4$).

Таким образом, получаем две пирамиды с общей вершиной, а основания усеченной пирамиды являются основаниями этих двух пирамид. Обозначим через h высоту пирамиды, площадь основания которой $\mathcal{A}_o$. Тогда объем усеченной пирамиды равен разности объемов построенных пирамид. Получаем:

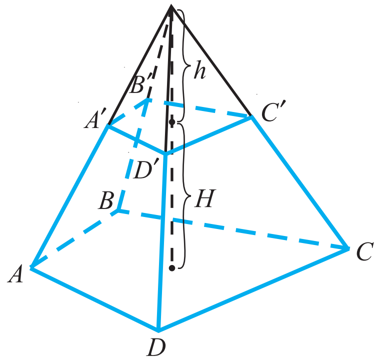


Рис. 7.26

$$\mathcal{V}_{\text{усеч. пир.}} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_O(h+H) - \frac{1}{3}\mathcal{A}_o \cdot h = \frac{1}{3}H\left[\mathcal{A}_O\left(\frac{h}{H}+1\right) - \mathcal{A}_o \cdot \frac{h}{H}\right] = \frac{1}{3}H\left[\frac{h}{H}(\mathcal{A}_O - \mathcal{A}_o) + \mathcal{A}_O\right]. \quad (1)$$

Меньшее основание усеченной пирамиды может быть рассмотрено как сечение построенной пирамиды плоскостью, параллельной плоскости основания. Знаем (следствие теоремы 6, §3), что отношение площадей сечений, параллельных основанию, равно квадрату отношения расстояний от этих сечений до вершины пирамиды, то есть $\frac{\mathcal{A}_o}{\mathcal{A}_O} = \left(\frac{h}{h+H}\right)^2$, откуда $\frac{h}{h+H} = \frac{\sqrt{\mathcal{A}_o}}{\sqrt{\mathcal{A}_O}}$, или $\frac{h}{H} = \frac{\sqrt{\mathcal{A}_o}}{\sqrt{\mathcal{A}_O} - \sqrt{\mathcal{A}_o}}$.

После подстановки этого выражения $\frac{h}{H}$ в (1) получим:

$$\mathcal{V}_{\text{усеч. пир.}} = \frac{1}{3}H\left[\frac{\sqrt{\mathcal{A}_o}}{\sqrt{\mathcal{A}_O} - \sqrt{\mathcal{A}_o}}(\mathcal{A}_O - \mathcal{A}_o) + \mathcal{A}_O\right] = \frac{1}{3}H[\sqrt{\mathcal{A}_o}(\sqrt{\mathcal{A}_O} + \sqrt{\mathcal{A}_o}) + \mathcal{A}_O], \text{ или}$$

$$\boxed{\mathcal{V}_{\text{усеч. пир.}} = \frac{1}{3}H(\mathcal{A}_o + \sqrt{\mathcal{A}_o\mathcal{A}_O} + \mathcal{A}_O)}\,.$$

Упражнения и задачи

A

1. Диагональ куба равна 8 см. Найдите объем куба.
2. Площадь одной грани куба равна 16 см². Найдите объем куба.

$$\mathcal{V} = a^3$$

3. Длины ребер прямоугольного параллелепипеда относятся как 2 : 3 : 5. Известно, что длина большего ребра равна 15 см. Найдите:
   а) длину диагонали параллелепипеда;
   б) площадь полной поверхности параллелепипеда;
   в) объем параллелепипеда.
4. Длины сторон оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 5 см и 12 см. Величина угла, образованного диагональю усеченной пирамиды и плоскостью большего основания, равна 60°. Найдите:
   а) площадь диагонального сечения усеченной пирамиды;
   б) объем усеченной пирамиды.

$$\mathcal{V} = a \cdot b \cdot c$$

5. Основание прямой призмы – треугольник, две стороны которого равны 7 см и 8 см, а угол между ними – $60°$. Длина бокового ребра равна 6 см. Найдите:
а) площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через боковое ребро и медиану основания, проведенную к неизвестной стороне;
б) объем призмы.

6. Длина каждого ребра треугольной пирамиды равна 6 см.

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_{осн.}\cdot H$$

Найдите:
а) площадь полной поверхности пирамиды;
б) объем пирамиды.

7. Куб с ребром 4 см и прямоугольный параллелепипед с ребрами 8 см, 14 см, 4 см сделаны из свинца. Их расплавили и выплавили куб. Найдите длину ребра полученного куба.

8. Для строительства стены понадобилось 5286 котельцовых блоков, имеющих вид прямоугольного параллелепипеда.

Размеры каждого котельца
20 см × 20 см × 40 см.
Найдите объем построенной стены с точностью до 0,1 м^3, если известно, что раствор увеличил объем стены на 12%.

9. Длина деревянной балки 235 см, ее поперечное сечение является равнобедренной трапецией, длины оснований которой равны 12 см и 30 см, а боковая сторона – 15 см. Грузоподъемность машины 3,5 т. Какое максимальное число балок может перевезти машина, если плотность дерева равна 0,7 г/см^3?

$$\mathcal{V}_{призмы} = \mathcal{A}_{осн.}\cdot H$$

Б

1. Основание призмы – равнобедренная трапеция с основаниями 8 см и 16 см и острым углом $45°$. Проекцией одного бокового ребра на плоскость основания является боковая сторона трапеции. Найдите объем призмы, если величина угла между боковым ребром и плоскостью основания равна $60°$.

2. Основание призмы – равнобедренная трапеция с основаниями 28 см и 44 см, боковая сторона – 17 см. Проекцией одного бокового ребра на плоскость основания является радиус окружности, описанной около основания призмы. Найдите объем призмы, если длина бокового ребра равна 32 см.

3. Основание призмы – трапеция, основания которой 8 см и 16 см, а длина одной из боковых сторон – 10 см. Одна из вершин одного основания находится на расстоянии 15 см от всех сторон другого основания. Найдите объем призмы.

4. Грани параллелепипеда – конгруэнтные ромбы. Длина стороны ромба равна a, острый угол ромба равен α. Найдите:
а) площадь полной поверхности параллелепипеда;
б) объем параллелепипеда.

5. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, $AC=b$, $CB=a$, $CC_1=l$, $\mathrm{m}(\angle ACB)=\gamma$, $\angle BCC_1 \equiv \angle ACC_1$. Найдите объем призмы, если высота призмы, проведенная из вершины C_1, пересекает сторону AB.

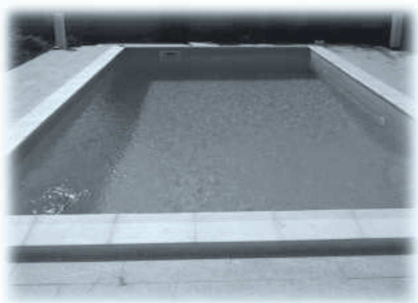
6. Основания наклонной призмы – правильные n-угольники. Длина каждого ребра призмы равна a. Найдите величину угла, образованного боковым ребром с плоскостью основания, если объем призмы равен $\mathcal{V}$.

7. Основание пирамиды – равнобедренный треугольник со сторонами 10 см, 10 см, 12 см. Длина каждого бокового ребра равна 14 см. Вычислите объем пирамиды.

8. Основание пирамиды – трапеция, длины оснований которой равны 4 см и 10 см, а длина одной из боковых сторон 5 см. Двугранные углы при основании пирамиды конгруэнтны и равны $60°$.
Найдите:
а) площадь боковой поверхности пирамиды;
б) объем пирамиды.

$$\mathcal{A}_{полн.} = \mathcal{A}_{бок.} + \mathcal{A}_{осн.}$$

9. Бассейн имеет форму прямоугольного параллелепипеда, размеры которого 4 м, 6 м и 0,9 м. Бассейн наполняется водой через две трубы. За какое время бассейн наполнится водой, если через одну из труб поступает 60 л воды в минуту, а через другую – 40 л в минуту?



10. Длины ребер, исходящих из одной вершины прямоугольного параллелепипеда, образуют арифметическую прогрессию. Их сумма равна 18 см. Площадь полной поверхности параллелепипеда равна 198 см^2. Найдите обьем параллелепипеда.

11. Длина стороны основания правильной треугольной пирамиды равна 8 см, а угол, образованный боковым ребром и плоскостью основания, равен 60°. Вычислите:
а) площадь боковой поверхности пирамиды;
б) объем пирамиды.

12. Длины сторон основания правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 4 см и 10 см. Величина двугранного угла при большем основании равна 60°. Вычислите:
а) площадь полной поверхности усеченной пирамиды;
б) объем усеченной пирамиды.

13. Высота правильной треугольной пирамиды конгруэнтна стороне основания. Вычислите величину угла, образованного боковым ребром с плоскостью основания.

Упражнения и задачи на повторение

А

1. В классе решили покрасить стены и потолок двумя слоями краски одного и того же цвета. При нанесении первого слоя расход краски составляет 1 кг на каждые 8 м^2 поверхности, а при нанесении второго слоя – 1 кг на каждые 11 м^2 поверхности. Какое количество краски потребуется для выполнения этой работы, если класс имеет форму прямоугольного параллелепипеда длиной 14 м, шириной 7 м, высотой 3,5 м и площадь окон и двери составляет $\frac{1}{10}$ окрашиваемой поверхности?

2. В классе из задачи **1** – 40 учеников и учитель проводит урок математики. Известно, что в помещении воздух становится вредным для здоровья, если в каждом кубическом метре содержится 4 дм^3 двуокиси углерода. Известно также, что каждый человек выдыхает 16 раз в минуту, а объем выдыхаемого воздуха равен 0,5 дм^3 и содержит 5% двуокиси углерода. Какое максимальное время можно находиться в классе без проветривания?

3. В прямоугольной коробке длиной 51 см, шириной 24 см и высотой 15 см плотно упакованы кубики. Ребра кубиков равны 3 см. Сколько кубиков в коробке?

4. Разность длин ребер двух кубов равна d, а разность их объемов равна $37d^3$. Найдите длины ребер кубов.

5. Ребра прямоугольного параллелепипеда конгруэнтны сторонам прямоугольного треугольника, сумма длин которых равна 60 см. Объем параллелепипеда равен 6,24 дм^3. Найдите длины ребер параллелепипеда.

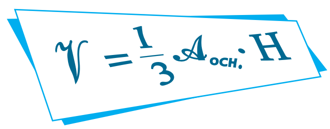
Б

1. В сосуд с водой погружается тяжелый куб, ребро которого равно 5 см. На сколько поднимается уровень воды в сосуде, если сосуд имеет форму прямоугольного параллелепипеда, у которого стороны основания равны 20 см и 25 см, высота 10 см, и вода налита до половины высоты сосуда?

2. На сколько поднимается уровень воды в сосуде, если куб из задачи **1** изготовлен из дерева (удельный вес дерева равен 0,5 г/см^3).

3. Прямые AA_1, CC_1 перпендикулярны плоскости ромба $ABCD$. Точки A_1 и C_1 лежат по одну сторону от этой плоскости. Известно, что $AC = 2d$, $BD = 2b$, $AA_1 = a$, $CC_1 = c$.
Найдите объемы пирамид $BACC_1A_1$, $BADA_1$, $BCDC_1$, BDA_1C_1.

4. Грани OAB, OAC и OBC пирамиды $OABC$ являются прямоугольными равнобедренными треугольниками: $OA = OB = OC = a$.
Найдите:
а) объем пирамиды;
б) площадь грани ABC;
в) высоту пирамиды, проведенную из точки O.



5. Стороны оснований правильной шестиугольной усеченной пирамиды равны 36 см и 22 см, а двугранные углы при большем основании равны 60°. Найдите объем усеченной пирамиды.

Проверочная работа

Время выполнения работы: 90 минут

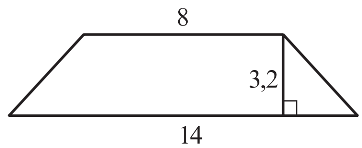
А

1. Основание прямой призмы – ромб со стороной a и острым углом 60°. Бóльшая диагональ призмы образует с плоскостью основания угол в 30°. Найдите: **2**
а) длину меньшей диагонали призмы; б) площадь полной поверхности призмы; в) объем призмы.

2. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно 12 см и образует с плоскостью основания угол в 60°. Найдите: **2**
а) площадь полной поверхности пирамиды;
б) сколько процентов площади боковой поверхности пирамиды составляет площадь основания пирамиды;
в) объем призмы.

3. Стороны оснований правильной четырехугольной пирамиды равны 4 см и 8 см, а высота равна 12 см. Найдите: **3**
а) площадь боковой поверхности усеченной пирамиды;
б) объем усеченной пирамиды;
в) величину угла, образованного боковым ребром и плоскостью основания усеченной призмы.

4. Сечение железнодорожной насыпи имеет вид равнобедренной трапеции, размеры которой (в метрах) указаны на рисунке. Найдите, сколько кубических метров земли приходится на 1 км насыпи. **3**



Б

1. Основание прямой призмы $ABCA'B'C'$ – равнобедренный треугольник, в котором $AB = AC = 10$ см, $BC = 12$ см. Расстояние от вершины B до середины ребра $A'C'$ равно $\sqrt{353}$ см. Найдите: **2**
а) площадь боковой поверхности пирамиды; б) объем пирамиды.

2. Основание четырехугольной пирамиды $EABCD$ – ромб $ABCD$ со стороной a и острым углом BAD, равным α. Двугранные углы при основании пирамиды конгруэнтны и равны β. Найдите: **2**
а) площадь полной поверхности пирамиды;
б) объем пирамиды.

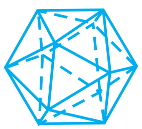
3. Длины сторон оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды относятся как $2:3$. Боковое ребро равно l и образует с плоскостью большего основания угол α. Найдите: **3**
а) площадь боковой поверхности усеченной пирамиды;
б) объем усеченной пирамиды.

4. Поперечное сечение водосточного канала имеет вид равнобедренного треугольника с основанием, равным 1,4 м, и высотой, проведенной к основанию, 1,2 м. Найдите пропускную способность канала (в кубических метрах за 1 час), если скорость течения воды 2 м/с. **3**

Многогранники

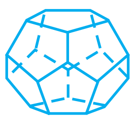
Правильные многогранники

Правильный икосаэдр



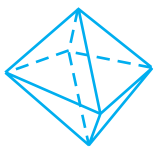
Все грани – правильные конгруэнтные треугольники, и число ребер при каждой вершине равно пяти

Правильный додекаэдр



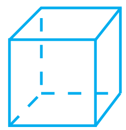
Все грани – правильные конгруэнтные пятиугольники, и число ребер при каждой вершине равно трем

Правильный октаэдр



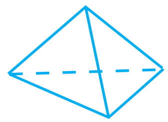
Все грани – правильные конгруэнтные треугольники, и число ребер при каждой вершине равно четырем

Куб



Все грани – конгруэнтные квадраты

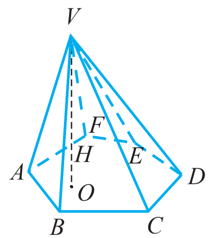
Правильный тетраэдр



Все грани – конгруэнтные равносторонние треугольники

Другие многогранники

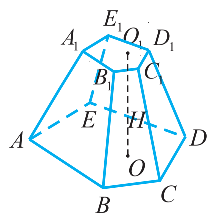
Пирамида



$\mathscr{V} = \frac{1}{3}\mathscr{A}_{осн.} \cdot H;$

$\mathscr{A}_{полн.} = \mathscr{A}_{бок.} + \mathscr{A}_{осн.}$

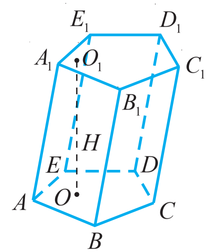
Усеченная пирамида



$\mathscr{V} = \frac{1}{3}H(\mathscr{A}_o + \mathscr{A}_O + \sqrt{\mathscr{A}_o\mathscr{A}_O})$

$\mathscr{A}_{полн.} = \mathscr{A}_{бок.} + \mathscr{A}_o + \mathscr{A}_O$

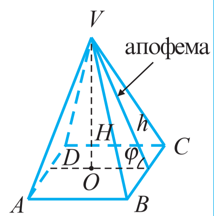
Призма



$\mathscr{V} = \mathscr{A}_{осн.} \cdot H;$

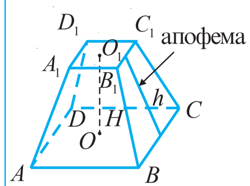
$\mathscr{A}_{полн.} = \mathscr{A}_{осн.} + \mathscr{A}_{бок.}$

Правильная пирамида



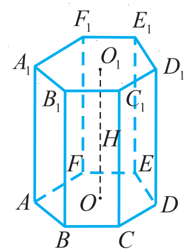
$\mathscr{A}_{бок.} = \mathscr{P}_{осн.} \cdot h = \frac{\mathscr{A}_{осн.}}{\cos\varphi}$

Правильная усеченная пирамида



$\mathscr{A}_{бок.} = \frac{1}{2}(\mathscr{P}_1 + \mathscr{P}_2) \cdot h$

Правильная призма



$\mathscr{A}_{бок.} = \mathscr{P}_{осн.} \cdot H$

Модуль 8

Тела вращения. Повторение и дополнения

Цели модуля

- распознавание тел вращения, их классификация по разным критериям;
- построение сечений тел вращения плоскостями;
- распознавание плоских геометрических фигур в телах вращения;
- применение свойств фигур вращения в разных контекстах;
- применение формул вычисления площадей и объемов тел вращения в различных контекстах.

$$\mathcal{A}_{\text{полн.}} = \pi R(G+R)$$

$$\mathcal{V}(\mathcal{C}) = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

§ 1 ЦИЛИНДР

1.1. Понятие цилиндра

Определение цилиндра аналогично определению призмы.

Определение

Пусть на плоскости α расположен круг $\mathscr{D}$, прямая g пересекает плоскость α в единственной точке и плоскость β параллельна плоскости α $(\alpha \neq \beta)$ (рис. 8.1).
Пересечение слоя, определенного плоскостями α и β, с множеством прямых, параллельных прямой g и проходящих через каждую точку круга $\mathscr{D}$, называется **круговым цилиндром** (рис. 8.1).

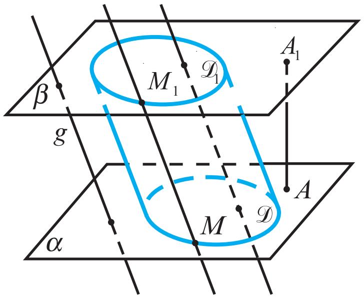
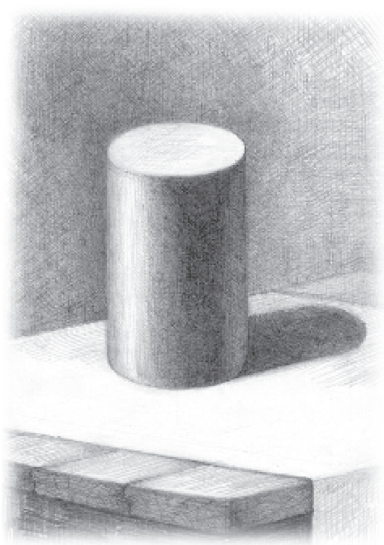


Рис. 8.1



Пересечением множества всех прямых, параллельных прямой g и проходящих через каждую точку круга $\mathscr{D}$, с плоскостью β является круг $\mathscr{D}_1$. Круги $\mathscr{D}_1$ и $\mathscr{D}$ конгруэнтны, поскольку при параллельном переносе в направлении прямой g, при котором плоскость α отображается на плоскость β, круг $\mathscr{D}$ отображается на круг $\mathscr{D}_1$.

Круги $\mathscr{D}$ и $\mathscr{D}_1$ называются ***основаниями*** цилиндра. Отрезок MM_1, где точка M принадлежит окружности, ограничивающей круг $\mathscr{D}$, а M_1 принадлежит окружности, ограничивающей круг $\mathscr{D}_1$, и $[MM_1] \| g$, называется ***образующей*** цилиндра (рис. 8. 1). Отрезок AA_1, где точка $A \in \alpha$, а $A_1 \in \beta$ и $[AA_1] \perp \alpha$, называется ***высотой*** цилиндра. Длина этого отрезка также называется ***высотой*** цилиндра.

Объединение всех образующих цилиндра называется ***боковой поверхностью*** цилиндра.

Заметим, что любая точка, принадлежащая основаниям или боковой поверхности цилиндра, является граничной точкой цилиндра, а остальные точки цилиндра являются внутренними точками цилиндра и их объединение образует ***внутреннюю область цилиндра***.

Мы будем рассматривать лишь случай, когда прямая g перпендикулярна плоскости α. Такой цилиндр называется ***прямым круговым цилиндром***.

В соответствии с определением вращения (см. Учебник математики для XI класса, модуль XII, §7), *прямой круговой цилиндр может быть получен вращением прямоугольника $ABCD$ вокруг прямой, содержащей одну из его сторон* (рис. 8. 2).

Эта прямая называется ***осью вращения*** цилиндра или ***осью симметрии*** цилиндра. Сечение прямого кругового цилиндра плоскостью, проходящей через ось цилиндра, называется ***осевым сечением*** ($LMNP$, рис. 8. 2).

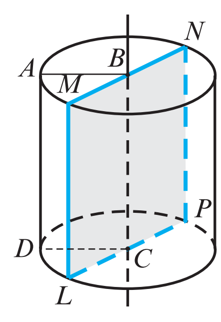


Рис. 8.2

1.2. Боковая поверхность, полная поверхность и объем цилиндра

В IX классе мы получили ***формулу для вычисления боковой поверхности цилиндра***, используя его развертку:

$$\boxed{\mathcal{A}_{\text{бок.}} = 2\pi RH}\,.$$

Определение

Сумма площадей боковой поверхности прямого кругового цилиндра и двух его оснований называется **площадью полной поверхности цилиндра**:

$$\boxed{\mathcal{A}_{\text{полн.}} = \mathcal{A}_{\text{бок.}} + 2\mathcal{A}_{\text{осн.}} = 2\pi HR + 2\pi R^2}\text{, или } \boxed{\mathcal{A}_{\text{полн.}} = 2\pi R(H+R)}\,.$$

Чтобы вывести формулу вычисления объема цилиндра, рассмотрим призму, высота которой равна высоте цилиндра (обозначенная H), а площадь основания призмы равна площади основания цилиндра: $\mathcal{A}_{\text{осн.}} = \pi R^2$. Если основание цилиндра и основание призмы лежат в плоскости α (рис. 8.3), то по принципу Кавальери призма и цилиндр имеют равные объемы, то есть:

$$\mathcal{V}_{\text{цил.}} = \mathcal{V}_{\text{призмы}} = H \cdot \mathcal{A}_{\text{осн.}} = H \cdot \pi R^2,$$

где H – высота цилиндра, а R – радиус его основания.

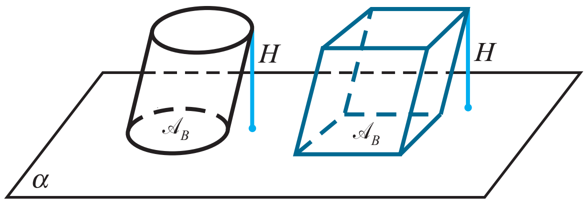


Рис. 8.3

Таким образом, ***объем кругового цилиндра*** можно вычислить по формуле:

$$\boxed{\mathcal{V}_{\text{цил.}} = \pi R^2 H}\,.$$

Заметим, что формулу $\mathcal{V}_{\text{цил.}} = \pi R^2 H$ для прямого кругового цилиндра можно получить при помощи определенного интеграла (модуль 4, §2).

Задачи с решением

1 Площадь полной поверхности прямого кругового цилиндра равна $72\pi(1+\sqrt{3})$ см^2. Отрезок, соединяющий центр одного основания с точкой, лежащей на окружности другого основания, конгруэнтен диаметру основания. Найдем объем цилиндра.

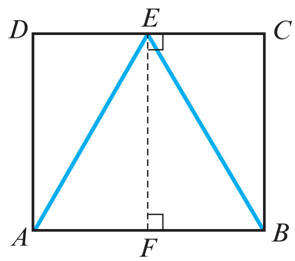


Рис. 8.4

Решение:

Рассмотрим осевое сечение $ABCD$ цилиндра (рис. 8.4). Пусть точки E и F – центры оснований цилиндра.

Из условия задачи следует, что ΔEAB – равносторонний и $EA = EB = AB = 2R$, где R – радиус основания цилиндра. Высота цилиндра $EF = \dfrac{AB\cdot\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3} = H$.

Площадь полной поверхности цилиндра:

$$\mathcal{A}_{\text{полн.}} = 2\pi R(R+H) = 2\pi R(R+R\sqrt{3}) = 2\pi R^2(1+\sqrt{3}).$$

Составляем уравнение: $2\pi R^2(1+\sqrt{3}) = 72\pi(1+\sqrt{3})$, из которого находим $R = 6$ (см).

Следовательно, объем цилиндра $\mathcal{V} = \pi FB^2 \cdot EF = \pi \cdot 6^2 \cdot 6\sqrt{3} = 216\pi\sqrt{3}$ (см^3).

Ответ: $216\pi\sqrt{3}$ см^3.

2 При полном вращении прямоугольника вокруг прямой, содержащей бóльшую сторону длиной a, и прямой, содержащей меньшую сторону длиной b, образуются два цилиндра, площади полных поверхностей которых равны 150π см^2 и 300π см^2 соответственно (рис. 8.5).

а) Найдем стороны прямоугольника.

б) Сравним площади боковых поверхностей цилиндров.

в) Сравним объемы цилиндров.

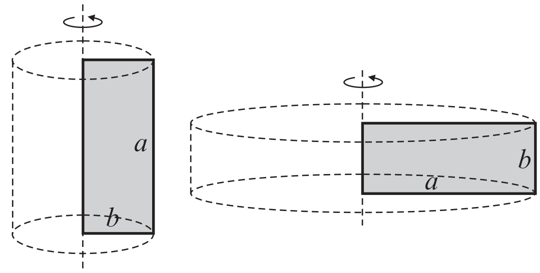


Рис. 8.5

Решение:

а) Используя формулу для вычисления площади полной поверхности цилиндра и данные задачи, составляем и решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2\pi b(a+b)=150\pi \\ 2\pi a(a+b)=300\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b(a+b)=75 \\ a(a+b)=150 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=5, \\ a=10. \end{cases}$$

Таким образом, бóльшая сторона прямоугольника $a=10$ см, а меньшая сторона прямоугольника $b=5$ см.

б) Площади боковых поверхностей цилиндров равны между собой и равны 100π см^2.

в) Объем цилиндра, образованного при вращении вокруг меньшей стороны, вычисляется по формуле $\mathcal{V}=\pi a^2 b$ и равен 500π см^3, а объем цилиндра, образованного при вращении вокруг большей стороны, вычисляется по формуле $\mathcal{V}=\pi b^2 a$ и равен 250π см^3.

Таким образом, цилиндр, образованный вращением вокруг большей стороны прямоугольника, имеет объем меньше, чем цилиндр, образованный вращением вокруг меньшей стороны прямоугольника.

Упражнения и задачи

A

1. Осевым сечением прямого кругового цилиндра является квадрат, площадь которого равна 16 см^2.

$\mathcal{A}_{бок.} = 2\pi RH$

Найдите:

а) площадь боковой поверхности цилиндра;

б) объем цилиндра.

2. Сумма длин высоты и радиуса основания цилиндра равна 30 см, а площадь боковой поверхности цилиндра относится к сумме площадей оснований как $7:3$. Найдите объем цилиндра.

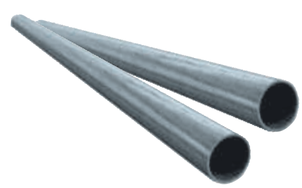
3. Высота прямого кругового цилиндра равна 5 см, а радиус его основания 6 см. Вычислите длину диагонали осевого сечения цилиндра.

4. Периметр осевого сечения цилиндра равен 18 см, а площадь полной поверхности цилиндра относится к площади его боковой поверхности как $7:5$. Найдите объем цилиндра.

5. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 32π см^2. Найдите его высоту, зная, что она на 4 см больше, чем диаметр основания цилиндра.

6. Фабрика производит жестяные коробки в форме цилиндра, высота которого 6 см, а радиус основания 5 см. Сколько квадратных метров жести понадобится для изготовления 5000000 коробок, если для соединения оснований с боковой поверхностью коробки дополнительно расходуется жести 13% от общей поверхности? ($\pi \approx 3{,}14$.)

7. Грузоподъемность машины 3,5 тонны. Какое максимальное число труб может перевезти машина, если трубы изготовлены из свинца, длина трубы 4 м, внешний диаметр трубы 16 см, внутренний диаметр 12 см, а плотность свинца 11,38 г/см^3? ($\pi \approx 3{,}14$.)



8. Деревянные балки имеют форму прямого кругового цилиндра. Длина балки 3,3 м. Диаметр балок не меньше 14 см и не больше 26 см. Грузоподъемность машины 3,5 т. В каких пределах варьируется максимальное число балок, перевозимых одной машиной, если плотность дерева 0,8 г/см³?

9. Емкость без крышки имеет форму цилиндра. Ее высота равна 1,5 м, а диаметр основания составляет 40% высоты. Определите, достаточно ли 1 кг краски для полной покраски емкости с обеих сторон, если расход краски составляет 150 г на 1 м^2 ($\pi \approx 3{,}14$). (БАК, 2007)

$$V_{\text{цил.}} = \pi R^2 H$$

Б

1. Концы отрезка AB принадлежат окружностям оснований прямого цилиндра, высота которого 6 см, а радиус основания 5 см. Расстояние от оси цилиндра до прямой AB равно 3 см. Найдите:
а) длину отрезка AB;
б) величину угла, образованного прямой AB и одним из оснований цилиндра.

2. Высота прямого кругового цилиндра H, а радиус основания R. Плоскость пересекает основания цилиндра по двум конгруэнтным хордам длины R (плоскость пересекает ось цилиндра). Найдите расстояние между этими двумя хордами.

3. В прямой круговой цилиндр с радиусом основания R и высотой H вписана правильная n-угольная призма. Найдите:
а) площадь полной поверхности призмы;
б) объем призмы.

4. Около прямого кругового цилиндра с радиусом основания R и высотой H описана правильная n–угольная призма. Найдите:
а) площадь полной поверхности призмы;
б) объем призмы.

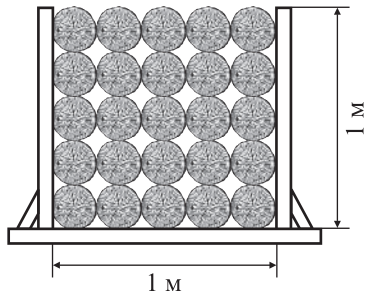
5. Площадь боковой поверхности прямого кругового цилиндра равна A. Вычислите площадь осевого сечения цилиндра.

6. Прямой круговой цилиндр вписан в правильную треугольную призму. Его высота равна 10 см, а радиус основания 6 см. Найдите:
а) площадь полной поверхности призмы;
б) объем призмы.

7. Площади боковых поверхностей двух цилиндров равны. Докажите, что их объемы относятся как радиусы оснований.

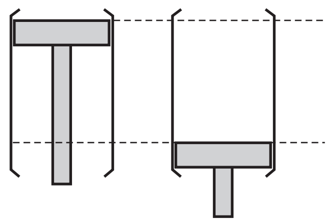
$$\mathcal{A}_{\text{полн.}} = \mathcal{A}_{\text{бок.}} + 2\mathcal{A}_{\text{осн.}}$$

8. Кубометр бревен цилиндрической формы уложен как указано на рисунке. Диаметр каждого бревна равен 20 см, а длина 1 м.



а) Найдите объем пустот между бревнами ($\pi \approx 3{,}14$).
б) Сколько процентов всего объема занимают бревна?
в) Изменится ли объем пустот, если диаметр бревна будет равен 25 см? 10 см?

9. Двигатель легкового автомобиля имеет четыре цилиндра, внутренний диаметр каждого из которых равен 79 мм. Поршень каждого цилиндра совершает поступательное движение вверх и вниз. Расстояние между верхним и нижним положениями поршня называется *ходом поршня* и равно 80 мм. Рабочий объем двигателя равен объему с одним ходом всех четырех цилиндров. Найдите рабочий объем цилиндра (в кубических сантиметрах) ($\pi \approx 3{,}14$).



10. Основание цилиндрической бочки радиуса 0,6 м и высотой 1,6 м находится на полу в помещении высотой 1,95 м. Можно ли выкатить бочку из этого помещения?

§ 2 КОНУС

2.1. Основные понятия

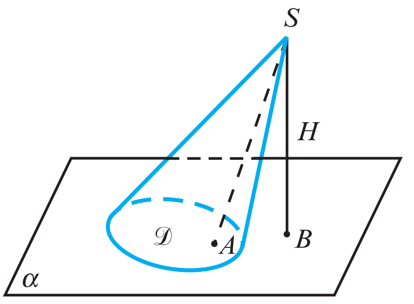


Рис. 8.6

Пусть круг $\mathscr{D}$ расположен на плоскости α, и точка S не принадлежит плоскости α.

Определение

Фигура, образованная объединением отрезков, соединяющих точки круга $\mathscr{D}$ с точкой S, называется **круговым конусом** (рис. 8.6).

Точка S называется ***вершиной*** конуса, а круг $\mathscr{D}$ называется ***основанием*** конуса.

Пусть B – проекция вершины S на плоскость α. Отрезок SB называется ***высотой*** конуса. Длина отрезка SB, которую обозначим через H, также называется ***высотой*** конуса.

Отрезок, соединяющий вершину конуса с точкой окружности основания, называется ***образующей*** конуса.

Объединение всех образующих конуса состоит из граничных точек и образует ***боковую поверхность*** конуса. Напомним, что любая точка основания также является граничной точкой.

Множество всех точек конуса, не являющихся граничными точками, называется ***внутренней областью*** конуса.

Если проекция вершины конуса на плоскость основания совпадает с центром основания, то конус называется ***прямым круговым*** (рис. 8.7).

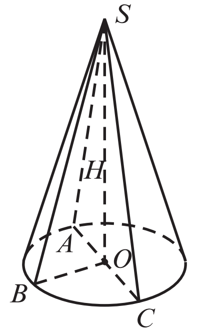


Рис. 8.7

Образующие прямого кругового конуса конгруэнтны. Действительно, если $[SA]$ и $[SB]$ – две образующие конуса (рис. 8.7), то треугольники SOA и SOB конгруэнтны как прямоугольные треугольники с соответственно конгруэнтными катетами.

Имеет место равенство $SB^2 = BO^2 + OS^2$, или $G^2 = R^2 + H^2$, где G – длина образующей, R – радиус основания, H – высота прямого кругового конуса.

Как и прямой круговой цилиндр, прямой круговой конус является телом вращения. Он может быть получен *вращением прямоугольного треугольника BSO вокруг одного из катетов* (рис. 8.7). В этом случае катет SO, определяющий ось, является высотой конуса, другой катет BO является радиусом основания конуса, а гипотенуза SB описывает боковую поверхность конуса и является его образующей.

Сечение прямого кругового конуса плоскостью, проходящей через его ось, называется ***осевым сечением*** конуса и является равнобедренным треугольником (рис. 8.7, ΔSAC).

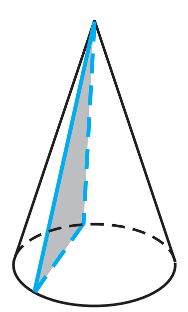


Рис. 8.8

Сечение прямого кругового конуса плоскостью, проходящей через две его образующие, является равнобедренным треугольником (рис. 8.8).

Далее рассмотрим сечение кругового конуса плоскостью, параллельной плоскости его основания.

Теорема 1 Сечение кругового конуса плоскостью, параллельной плоскости основания, является кругом.

Доказательство:

Пусть α – плоскость основания конуса $\mathscr{C}$, а β – плоскость, параллельная плоскости α и пересекающая отрезок SO в точке O' (рис. 8.9). Рассмотрим случай, когда $SO \not\perp \alpha$.

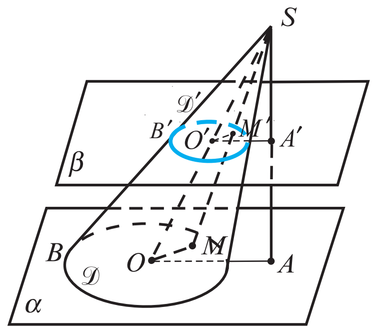


Рис. 8.9

Каждой точке M основания конуса ставим в соответствие точку $M' = \beta \cap [SM]$. Заметим, что это соответствие f: $\mathscr{D} \to \mathscr{D}'$, где $\mathscr{D}' = \beta \cap \mathscr{C}$, обратимо.

Пусть $[SA]$ – высота конуса $\mathscr{C}$ и $A' = \beta \cap [SA]$. Тогда из того, что $\alpha \parallel \beta$ следует, что $[O'A'] \parallel [OA]$ и $[O'M'] \parallel [OM]$. Значит, $\Delta SO'M' \sim \Delta SOM$ и $\Delta SO'A' \sim \Delta SOA$, откуда получаем $\frac{O'M'}{OM} = \frac{SO'}{SO} = \frac{SA'}{SA} = \frac{O'A'}{OA}$. Следовательно, $O'M' = \frac{O'A'}{OA} OM$.

Таким образом, f является преобразованием подобия с коэффициентом $\frac{O'A'}{OA}$ и при данном подобии образом круга $\mathscr{D}$ является круг $\mathscr{D}'$ с центром в точке O' и радиусом $R' = \frac{O'A'}{OA} \cdot R$.

Следствие 1 Любой конус, пересеченный плоскостью, параллельной основанию и пересекающей высоту конуса во внутренней точке, разбивается на два тела, одно из которых является конусом. Если радиус основания данного конуса равен R, высота $AS = H$, образующая $SB = G$ и радиус основания конуса, полученного при сечении, равен R', высота $SA' = H'$, образующая $B'S = G'$ (рис. 8.9), то $\frac{R'}{R} = \frac{H'}{H} = \frac{G'}{G}$.

Следствие 2 Отношение площади основания $\mathscr{A}_{\text{осн}}$ кругового конуса к площади $\mathscr{A}'_{\text{осн}}$ сечения, параллельного основанию, равно квадрату отношения высоты данного конуса к высоте конуса, образованного при сечении. Действительно, $\frac{\mathscr{A}_{\text{осн.}}}{\mathscr{A}'_{\text{осн.}}} = \frac{\pi R^2}{\pi R'^2} = \left(\frac{H}{H'}\right)^2$.

2.2. Площадь и объем прямого кругового конуса

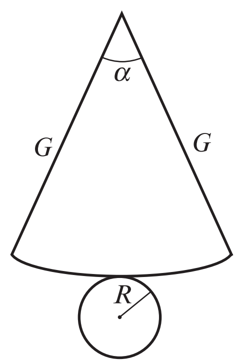


Рис. 8.10

Пусть $\mathscr{C}$ – прямой круговой конус, у которого радиус основания R и образующая G, тогда развертка конуса состоит из круга радиуса R и кругового сектора радиуса G (рис. 8.10). Длина дуги этого сектора равна $2\pi R$, а угол $\alpha = \frac{2\pi R}{G}$. Площадь боковой поверхности конуса $\mathscr{A}_{\text{бок.}}$ равна площади сектора развертки.

Следовательно, $\mathscr{A}_{\text{бок.}} = \frac{1}{2} G^2 \alpha = \frac{1}{2} G^2 \frac{2\pi R}{G} = \pi RG$.

Таким образом, ***площадь боковой поверхности прямого кругового конуса*** вычисляется по формуле: $\boxed{\mathscr{A}_{\text{бок.}}(\mathscr{C}) = \pi RG}$.

Определение

Сумма площади боковой поверхности прямого кругового конуса $\mathscr{A}_{\text{бок.}}$ и площади его основания $\mathscr{A}_{\text{осн.}}$ называется **площадью полной поверхности** $\mathscr{A}_{\text{полн.}}$ прямого кругового конуса:

$$\boxed{\mathscr{A}_{\text{полн.}}=\mathscr{A}_{\text{бок.}}+\mathscr{A}_{\text{осн.}}=\pi RG+\pi R^2}, \quad \text{или} \quad \boxed{\mathscr{A}_{\text{полн.}}=\pi R(G+R)}.$$

Объем кругового конуса вычисляется по формуле:

$$\boxed{\mathscr{V}(\mathscr{C})=\frac{1}{3}\mathscr{A}_{\text{осн.}}\cdot H}.$$

Для доказательства этой формулы рассмотрим пирамиду $\mathscr{P}$, основание которой принадлежит плоскости основания конуса, а высота пирамиды равна высоте конуса и площадь основания конуса $\mathscr{A}_{\text{осн.}}$ равна площади основания пирамиды.

Согласно принципу Кавальери, получаем $\mathscr{V}(\mathscr{C})=\mathscr{V}(\mathscr{P})=\frac{1}{3}\mathscr{A}_{\text{осн.}}\cdot H$.

Так как $\mathscr{A}_{\text{осн.}}=\pi R^2$, то получаем ***формулу для вычисления объема прямого кругового конуса***:

$$\boxed{\mathscr{V}(\mathscr{C})=\frac{1}{3}\pi R^2 H}. \qquad (2)$$

Этот же результат можно получить при помощи определенного интеграла (см. модуль 4, §2, задача с решением 2, полагая $r=0$).

Задача с решением

Высота конуса равна h. Две образующие конуса взаимно перпендикулярны и делят площадь боковой поверхности конуса в отношении $1:2$. Вычислим площадь боковой поверхности конуса.

Решение:

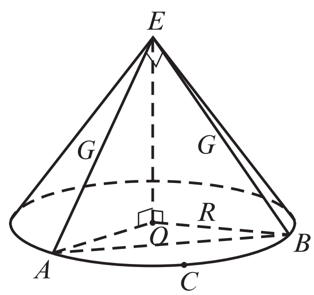


Рис. 8.11

Пусть радиус основания конуса равен R, а длина образующей равна G (рис. 8.11). Обозначим взаимно перпендикулярные образующие через EA и EB, а высоту конуса через EO. Предположим, что меньшая часть площади боковой поверхности конуса определяет дугу ACB. Так как площадь боковой поверхности конуса равна πRG, а отношение площадей равно $1:2$, то площадь меньшей части равна $\frac{1}{3}\pi RG$. Если обозначим через α угол при вершине развертки меньшей части боковой поверхности конуса, то ее площадь равна $\frac{\alpha G^2}{2}$.

Из равенства $\frac{\alpha G^2}{2}=\frac{\pi RG}{3}$ следует, что $\alpha=\frac{2\pi R}{3G}$.

Длина дуги ABC сектора $EACB$ равна $l=\alpha G=\frac{2\pi R}{3}$.

Пусть $x=m(\angle AOB)$. Тогда длина дуги ACB кругового сектора $OACB$ равна $l=xR$. Из равенства $xR=\frac{2\pi R}{3}$ получаем $x=\frac{2\pi}{3}$. Из прямоугольного треугольника AEB получаем $AB=G\sqrt{2}$, а из треугольника AOB получаем $AB=R\sqrt{3}$.

Следовательно, $G = R\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}$. Из ΔEOB получаем $R=\sqrt{2}h$ и $G=\sqrt{3}h$.

Находим $\mathscr{A}_{\text{бок}} = \pi RG = \pi\sqrt{6}h^2$, $\mathscr{V} = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{2}{3}\pi h^3$.

Ответ: $\pi\sqrt{6}h^2$ см^2, $\frac{2}{3}\pi h^3$ см^3.

Упражнения и задачи

А

1. Длина образующей прямого кругового конуса равна 13 см, а радиус основания 5 см. Найдите:
а) площадь боковой поверхности и площадь полной поверхности конуса;
б) объем конуса;
в) площадь осевого сечения конуса.

$$\mathscr{A}_{\text{бок.}}(\mathscr{C}) = \pi RG$$

2. Площадь полной поверхности прямого кругового конуса равна 384π см^2, а площадь его основания 144π см^2. Найдите объем конуса.

3. Осевым сечением прямого кругового конуса является равнобедренный прямоугольный треугольник, длина катета которого равна 5 см. Найдите:
а) площадь полной поверхности конуса;
б) объем конуса.

4. Крыша колодца имеет форму конуса с диаметром основания 6 м и высотой 2 м. Сколько листов жести необходимо для изготовления крыши, если размеры одного листа 0,6 м × 1,5 м, а швы и отходы составляют 11% от поверхности крыши ($\pi \approx 3{,}14$).

5. Отношение длины образующей к радиусу основания прямого кругового конуса равно 2 : 1, а площадь боковой поверхности конуса 162π см^2. Найдите объем конуса.

6. Образующая прямого кругового конуса равна 26 см, а отношение высоты к радиусу основания равно 12:5. Найдите площадь сечения конуса плоскостью, параллельной плоскости основания, если отсекаемые части конуса имеют равные объемы.

7. Площадь боковой поверхности прямого кругового конуса равна 544π см^2, а высота конуса 30 см. Найдите образующую и радиус основания конуса.

$$\mathscr{A}_{\text{полн.}} = \pi R(G+R)$$

Б

1. Радиус основания прямого кругового конуса равен R, а угол между образующей и плоскостью основания равен φ. Плоскость α параллельна основанию и пересекает конус. Найдите, на каком расстоянии от вершины проходит плоскость α, если:
а) площадь сечения равна половине площади основания;
б) объемы тел, полученных при сечении конуса, равны;
в) площадь боковой поверхности конуса, полученного при сечении данного конуса, равна половине площади боковой поверхности данного конуса.

2. Правильный тетраэдр, ребро которого a, описан около конуса. Найдите объем конуса.

3. Одна из граней куба принадлежит основанию прямого кругового конуса радиусом R и высотой H, а вершины противоположной грани – боковой поверхности конуса. Найдите объем куба.

$$\mathscr{V}(\mathscr{C}) = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

4. В основании прямого кругового конуса хорда длиной a стягивает дугу, величина которой 2α. Образующая конуса составляет с плоскостью основания угол φ. Найдите:
а) площадь полной поверхности конуса;
б) площадь осевого сечения конуса;
в) объем конуса.

5. Прямоугольный треугольник вращается вокруг гипотенузы. Длина одного из катетов равна a, а угол, противолежащий этому катету, равен α. Найдите:
а) площадь поверхности тела вращения;
б) объем тела вращения.

6. Рассмотрим множество конусов, образующая которых постоянна и равна G, а радиус основания является переменным. Найдите:
а) радиус основания конуса, площадь осевого сечения которого наибольшая;
б) объем конуса, радиус основания которого получен в а).

7. Радиус основания прямого кругового конуса равен его высоте. Выразите площади сечений конуса плоскостями, параллельными основанию, через расстояние x от плоскости основания до плоскости сечения.

8. Радиус R основания прямого кругового конуса равен его высоте. Выразите площади сечений конуса, проходящих через его вершину, через расстояние x от центра основания до секущей плоскости.

9. Основание прямого кругового цилиндра принадлежит основанию прямого кругового конуса, а окружность другого основания – боковой поверхности конуса. Радиус основания конуса равен R, а его высота H. Вычислите высоту h и радиус r цилиндра наибольшего объема.

10. В сосуд, имеющий форму конуса, обращенного вершиной вниз, влили 340 г ртути. Найдите уровень, до которого налита в сосуде ртуть, если угол при вершине осевого сечения конуса равен 60°, а удельный вес ртути 13,6 г/см^3 $(\pi \approx 3{,}14)$.

11. Докажите, что из всех сечений конуса плоскостями, проходящими через его вершину, наибольший периметр имеет осевое сечение.

12. Сколько квадратных метров ткани потребуется для изготовления конусообразной палатки высотой 3 м и диаметром основания 4 м, если швы и отходы составляют 5% ткани?

13. Образующие двух конусов составляют с плоскостями оснований равные углы. Докажите, что отношение площадей боковых поверхностей конусов равно отношению квадратов образующих этих конусов.

14. Свинцовый конус высотой 21 см расплавили в цилиндр с таким же основанием, что и у конуса. Найдите высоту цилиндра.

15. Докажите, что объем тела, образованного при вращении прямоугольного треугольника, с гипотенузой c и острым углом α, вокруг гипотенузы, равен $V = \dfrac{\pi c^3}{12}\sin^2 2\alpha$.

16. Значение отношения площади основания прямого кругового конуса к площади осевого сечения равно π. Найдите величину угла между образующей конуса и плоскостью его основания. (БАК, 2002)

17. Высота прямого кругового конуса равна 6 см, а образующая конуса составляет с плоскостью основания угол в 60°. В конус помещена пирамида, основание которой прямоугольный равнобедренный треугольник, вписанный в основание конуса, а ее вершина находится в середине одной из образующих конуса. Найдите объем пирамиды. (БАК, 1999)

§ 3 УСЕЧЕННЫЙ КОНУС

3.1. Основные понятия

Пусть $\mathscr{C}$ – круговой конус с вершиной S и основанием $\mathscr{D}(O, R)$ (рис. 8.12).

Пересекая конус $\mathscr{C}$ плоскостью $\beta \parallel \alpha$ (β пересекает $[SO]$ во внутренней точке), получим два тела. Первое тело – это конус $\mathscr{C}'$ с вершиной S, основание которого круг $\mathscr{D}'$, расположенный на секущей плоскости β. Второе тело называется ***усеченным круговым конусом***.

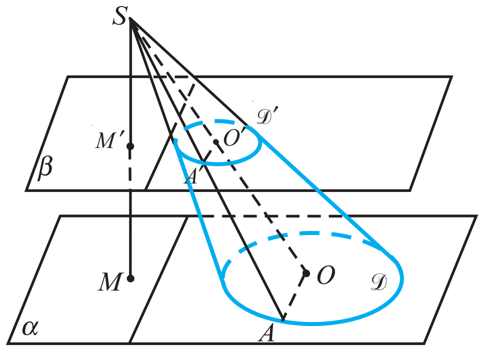


Рис. 8.12

Часть боковой поверхности конуса $\mathscr{C}$, которая остается после удаления конуса $\mathscr{C}'$, называется ***боковой поверхностью*** усеченного конуса.

Пересечением боковой поверхности усеченного конуса с любой образующей конуса $\mathscr{C}$ является отрезок, который называется ***образующей*** усеченного конуса (на рисунке 8.12 $[AA']$ – образующая).

Расстояние между плоскостями α и β называется ***высотой*** усеченного конуса (рис. 8.12, MM').

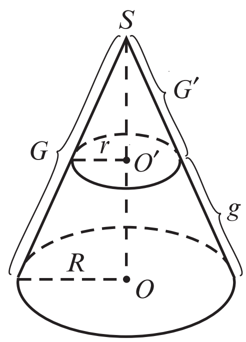


Рис. 8.13

Определение

Усеченный конус называется **прямым круговым**, если прямая, проходящая через центры оснований, перпендикулярна им (рис. 8.13).

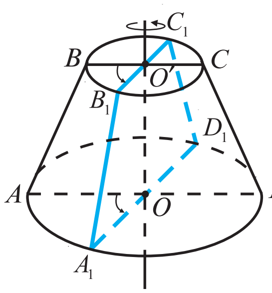


Рис. 8.14

Прямой круговой усеченный конус может быть получен вращением равнобедренной трапеции вокруг прямой OO', проходящей через середины оснований (рис. 8.14). Прямая OO' называется ***осью симметрии*** (или ***осью вращения***) усеченного конуса. Боковая поверхность усеченного конуса получается при вращении отрезка AB вокруг оси OO'.

Сечение прямого кругового усеченного конуса плоскостью, проходящей через его ось, называется ***осевым сечением*** усеченного конуса и является равнобедренной трапецией (рис. 8.14, трапеция $A_1B_1C_1D_1$).

3.2. Площадь боковой поверхности, площадь полной поверхности и объем усеченного конуса

Из определения боковой поверхности усеченного конуса следует, что площадь боковой поверхности прямого кругового усеченного конуса равна разности площадей боковых поверхностей конусов $\mathscr{C}$ и $\mathscr{C}'$, имеющих одну и ту же ось вращения SO и одну и ту же вершину S, то есть $\mathcal{A}_{\text{бок.}}(T)=\mathcal{A}_{\text{бок.}}(\mathscr{C})-\mathcal{A}_{\text{бок.}}(\mathscr{C}')$, где $\mathcal{A}_{\text{бок.}}(T)$ – площадь боковой поверхности усеченного конуса, $\mathcal{A}_{\text{бок.}}(\mathscr{C})$ – площадь боковой поверхности конуса, из которого получен усеченный, $\mathcal{A}_{\text{бок.}}(\mathscr{C}')$ – площадь боковой поверхности конуса, который отсекается.

Используя обозначения рисунка 8.13, получаем $\mathcal{A}_{\text{бок.}}(\mathscr{C})=\pi RG$ и $\mathcal{A}_{\text{бок.}}(\mathscr{C}')=\pi rG'$, где R и r – радиусы оснований, а G и G' – образующие конусов $\mathscr{C}$ и $\mathscr{C}'$.

Следовательно,

$$\mathcal{A}_{\text{бок.}}(T)=\pi(RG-rG'). \qquad (1)$$

Согласно следствию 1 теоремы 1 (§2), имеем $\dfrac{R}{r}=\dfrac{G}{G'}$.

Получаем, что $\dfrac{R-r}{r}=\dfrac{G-G'}{G'}=\dfrac{g}{G'}$, где $g=G-G'$ – образующая усеченного конуса.

Из последнего равенства следует, что $G'=\dfrac{gr}{R-r}$.

Аналогичным образом получаем, что $G=\dfrac{Rg}{R-r}$.

Подставляя G и G' в равенство (1), получаем:

$$\mathcal{A}_{\text{бок.}}(T)=\pi\left(\frac{R^2g}{R-r}-\frac{r^2g}{R-r}\right)=\pi g\frac{R^2-r^2}{R-r}=\pi g(R+r).$$

Таким образом:

$$\boxed{\mathcal{A}_{\text{бок.}}(T)=\pi g(R+r)}.$$

Площадь полной поверхности прямого кругового усеченного конуса равна сумме площадей боковой поверхности и его оснований:

$$\boxed{\mathcal{A}_{\text{бок.}}(T)=\pi g(R+r)+\pi R^2+\pi r^2}.$$

Площадь боковой поверхности прямого кругового усеченного конуса может быть вычислена и другим способом.

Теорема 2

Пусть прямой круговой усеченный конус T получен при вращении равнобедренной трапеции вокруг прямой, проходящей через середины ее оснований, h – высота трапеции, d – расстояние от точки пересечения медиатрисы боковой стороны с осью симметрии до середины боковой стороны (рис. 8.15). Тогда площадь боковой поверхности усеченного конуса $\mathcal{A}_{\text{бок.}}(T)$ вычисляется по формуле:

$$\boxed{\mathcal{A}_{\text{бок.}}(T)=2\pi hd}.$$

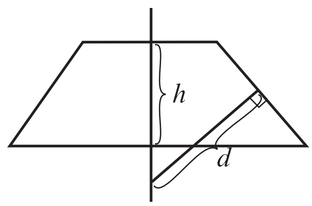


Рис. 8.15

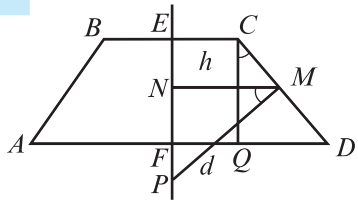


Рис. 8.16

Доказательство:

Площадь боковой поверхности усеченного конуса, полученного вращением равнобедренной трапеции $ABCD$ вокруг оси EF (рис. 8.16), где точки E и F – середины оснований трапеции, вычисляется по формуле:

$$\mathcal{A}_{\text{бок.}}(T)=\pi CD(EC+FD)=2\pi CD\cdot MN \qquad (2)$$

($[MN]$ – средняя линия трапеции $FECD$, а значит, $EC+FD=2MN$ (рис. 8.16)).

Построим высоту CQ данной трапеции и медиатрису MP стороны CD, где P – точка пересечения оси и медиатрисы. Прямоугольные треугольники CQD и MNP подобны, так как $\angle PMN \equiv \angle DCQ$ как углы с соответственно перпендикулярными сторонами.

Из подобия этих двух треугольников следует, что

$$\frac{CD}{MP}=\frac{CQ}{MN}, \qquad \text{или} \qquad CD\cdot MN = CQ\cdot MP.$$

Заменяя в формуле (2) произведение $CD\cdot MN$ на произведение $CQ\cdot MP$, получаем

$$\mathscr{A}_{\text{бок.}}(T)=2\pi CQ\cdot MP,$$

или $\mathscr{A}_{\text{бок.}}(T)=2\pi h\cdot d$, где $h=CQ$, $d=MP$.

Объем усеченного конуса равен разности объемов конусов $\mathscr{C}$ и $\mathscr{C}'$, то есть

$$\mathscr{V}(T)=\mathscr{V}(\mathscr{C})-\mathscr{V}(\mathscr{C}')=\frac{\pi}{3}R^2H-\frac{\pi}{3}r^2H'=\frac{\pi}{3}(R^2H-r^2H'), \tag{3}$$

где H и H' – высоты конусов $\mathscr{C}$ и $\mathscr{C}'$ соответственно.

Если обозначим через h высоту усеченного конуса ($h=H-H'$) и применим следствие 1 теоремы 1 (§2), получим:

$$\frac{H}{H'}=\frac{R}{r}, \qquad \frac{H-H'}{H'}=\frac{R-r}{r}, \qquad \frac{H}{H-H'}=\frac{R}{R-r},$$

откуда $H=\dfrac{Rh}{R-r}$, $H'=\dfrac{rh}{R-r}$.

Подставив H и H' в равенство (3), получим:

$$\mathscr{V}(T)=\frac{\pi}{3}\left(\frac{R^3h}{R-r}-\frac{r^3h}{R-r}\right)=\frac{\pi h}{3(R-r)}(R^3-r^3)=\frac{\pi h}{3}(R^2+Rr+r^2).$$

Таким образом, ***объем усеченного конуса*** вычисляется по формуле

$$\boxed{\mathscr{V}(T)=\frac{\pi h}{3}(R^2+Rr+r^2)},$$

где h – высота усеченного конуса, R и r – радиусы оснований усеченного конуса.

Эта же формула была получена при помощи определенного интеграла (см. модуль 4, § 2, задача с решением 2).

Задачи с решением

1 Радиусы оснований усеченного конуса относятся как $2:3$. Площадь боковой поверхности усеченного конуса равна сумме площадей оснований, а объем усеченного конуса равен 1900π см^3. Найдем высоту усеченного конуса (рис. 8.17 а)).

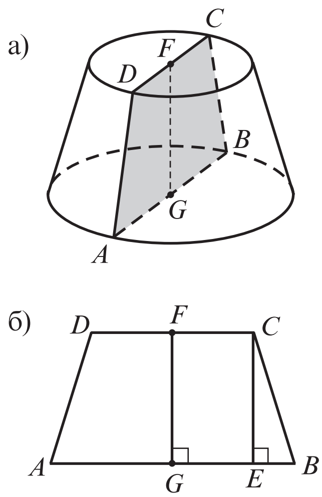


Рис. 8.17

Решение:

Рассмотрим одно из осевых сечений усеченного конуса. В сечении получаем равнобедренную трапецию $ABCD$, основания которой AB и CD являются диаметрами оснований усеченного конуса, а боковая сторона и высота CE трапеции являются соответственно образующей и высотой усеченного конуса (рис. 8.17 б)).

Обозначим середины оснований DC и AB через F и G соответственно. Согласно условию задачи, имеем: $FC=2x$, $GB=3x$, $x>0$ и $\pi\cdot BC(FC+GB)=\pi(FC^2+GB^2)$.

Последнее равенство можно привести к виду:

$5x\cdot BC=13x^2$, откуда $BC=\dfrac{13x}{5}$.

Применяя теорему Пифагора к прямоугольному треугольнику CEB, получаем:

$$CE=\sqrt{CB^2-BE^2}=\sqrt{\left(\frac{13}{5}x\right)^2-x^2}=\frac{12}{5}x.$$

Приравниваем объем усеченного конуса, выраженный через x, с заданным объемом:

$$\mathcal{V}=\frac{1}{3}\pi CE(FC^2+GB^2+FC\cdot GB)=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\frac{12x}{5}(4x^2+9x^2+6x^2)=\frac{4\pi\cdot 19x^3}{5}=1900\pi.$$

Находим $x=5$. Следовательно, $CE=\frac{12x}{5}=12$ (см).

Ответ: 12 см.

2 Равносторонний треугольник со стороной a вращается вокруг оси, лежащей в плоскости треугольника и которая параллельна высоте треугольника, причем расстояние d между высотой и осью больше, чем $\frac{a}{2}$. Найдем объем тела вращения.

Решение:

Пусть ΔABC вращается вокруг прямой EF (рис. 8.18). Объем полученного тела равен разности объемов двух усеченных конусов.

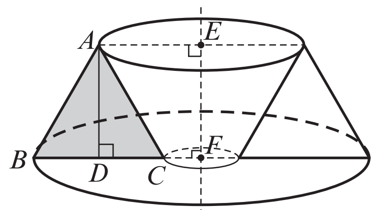


Рис. 8.18

При вращении прямоугольной трапеции $EFBA$ вокруг оси EF получается усеченный конус с радиусами оснований $AE=d$, $FB=d+\frac{a}{2}$ и высотой $EF=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Его объем равен $\mathcal{V}_1=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\left(d^2+\left(d+\frac{a}{2}\right)^2+d\left(d+\frac{a}{2}\right)\right)$.

При вращении прямоугольной трапеции $EFCA$ вокруг оси EF получается усеченный конус с радиусами оснований $AE=d$, $FC=d-\frac{a}{2}$ и высотой $EF=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Его объем равен $\mathcal{V}_2=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\left(d^2+\left(d-\frac{a}{2}\right)^2+d\left(d-\frac{a}{2}\right)\right)$.

Значит, объем тела вращения равен

$$\mathcal{V}=\mathcal{V}_1-\mathcal{V}_2=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\left(d^2+\left(d+\frac{a}{2}\right)^2+d\left(d+\frac{a}{2}\right)\right)-\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\left(d^2+\left(d-\frac{a}{2}\right)^2+d\left(d-\frac{a}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\left(\left(d+\frac{a}{2}\right)^2-\left(d-\frac{a}{2}\right)^2+d\left(d+\frac{a}{2}-d+\frac{a}{2}\right)\right)=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot 3ad=\frac{\sqrt{3}\pi a^2 d}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}\pi a^2 d}{2}$.

Упражнения и задачи

A

1. Радиусы оснований прямого кругового усеченного конуса равны 18 см и 30 см, а длина образующей 20 см. Найдите:

а) площадь боковой поверхности усеченного конуса;

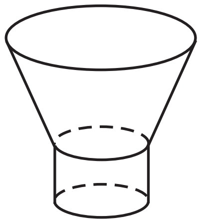
б) объем усеченного конуса;

в) радиус круга, описанного около одного из осевых сечений усеченного конуса.

$$\mathcal{A}_{\text{бок.}}(T)=\pi g(R+r)$$

2. Образующая прямого кругового усеченного конуса составляет с плоскостью большего основания угол, равный 45°. Радиусы оснований равны 3 см и 6 см. Найдите площадь боковой поверхности и объем усеченного конуса.

3. Мельничный желоб имеет форму боковой поверхности прямого кругового усеченного конуса и боковой поверхности прямого кругового цилиндра. Известно, что радиусы оснований усеченного конуса равны 1,3 м и 0,25 м, высота усеченного конуса 0,95 м, а длина образующей цилиндра 0,75 м. Найдите число листов жести, необходимой для изготовления желоба, если размеры одного листа 0,75 м × 1,75 м, а швы и отходы составляют 23% от полной поверхности желоба ($\pi \approx 3{,}14$).



4. В сосуд, имеющий форму прямого кругового усеченного конуса, налили 312π см^3 жидкости, что составляет $\frac{3}{4}$ емкости сосуда. Найдите радиус горловины сосуда, если радиус дна равен 2 см, а высота сосуда 24 см.

5. Найдите вместимость ведра, имеющего форму прямого кругового усеченного конуса, если радиус дна равен 9 см, диаметр отверстия 35 см и глубина 38,5 см.

6. Чугунную деталь, имеющую форму прямого кругового усеченного конуса, переплавили в прямой круговой цилиндр, высота которого равна высоте усеченного конуса (объемы цилиндра и усеченного конуса равны). Найдите радиус основания цилиндра, если радиусы оснований усеченного конуса равны 4 см и 2 см.

$$V(T) = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$$

Б

1. Радиусы оснований прямого кругового усеченного конуса R и r, а высота h. Найдите:
а) площадь боковой поверхности усеченного конуса;
б) величину угла наклона образующей к плоскости большего основания;
в) величину угла, образованного плоскостью основания и плоскостью, пересекающей основания усеченного конуса по хордам, конгруэнтным сторонам правильных шестиугольников, вписанных в основания (секущая плоскость не пересекает отрезок, соединяющий центры оснований).

2. Радиусы оснований прямого кругового усеченного конуса R и r, образующая составляет с плоскостью большего основания угол, равный α. Найдите:
а) площадь боковой поверхности усеченного конуса;
б) объем усеченного конуса.

3. Радиусы оснований прямого кругового усеченного конуса R и r, а площадь осевого сечения равна сумме площадей оснований. Найдите объем усеченного конуса.

4. Высота прямого кругового конуса разделена на четыре конгруэнтных отрезка. Через полученные точки проведены плоскости, параллельные плоскости основания. Найдите объемы полученных усеченных конусов, если высота конуса H, а радиус основания конуса R.

5. На каком расстоянии от меньшего основания прямого кругового усеченного конуса с радиусами оснований R и r и высотой H надо провести плоскость, чтобы в сечении получить круг, площадь которого равна:
а) среднему арифметическому площадей оснований;
б) среднему геометрическому площадей оснований?

6. Ведро имеет форму прямого усеченного конуса, радиусы оснований которого 15 см и 10 см, а образующая 30 см. Сколько краски нужно для покраски ведра с обеих сторон, если на 1 м^2 расходуется 200 г краски?

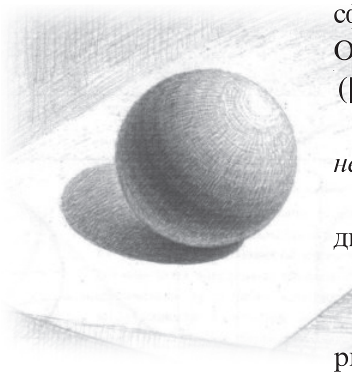
7. Высота прямого кругового усеченного конуса является средним геометрическим радиусов оснований. Докажите, что в осевое сечение усеченного конуса можно вписать окружность.

8. Найдите радиусы оснований прямого кругового усеченного конуса, если площадь его боковой поверхности равна 30π дм^2, высота 3 дм и произведение радиусов оснований равно 5.

9. Радиус одного из оснований усеченного конуса в два раза больше радиуса другого основания. Найдите отношение объемов усеченных конусов, отсекаемых плоскостью, проходящей через середину высоты данного усеченного конуса и которая параллельна его основаниям.

§ 4 СФЕРА И ШАР

4.1. Основные понятия



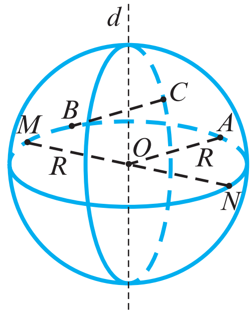


Рис. 8.19

Напоминаем, что ***сферой*** называется геометрическое место точек пространства, расположенных от данной точки O, называемой центром, на данном расстоянии R, называемом ***радиусом***. Обозначают: $\mathscr{S}(O, R)$. Радиусом сферы будем также называть любой отрезок, соединяющий центр сферы с точкой на сфере ($[OA]$ – радиус сферы, изображенной на рисунке 8.19). Отрезок, соединяющий две точки сферы, называется ***хордой*** ($[BC]$ – хорда сферы, изображенной на рисунке 8.19).

Сфера может быть получена вращением полукруга вокруг несущей d его диаметра (рис. 8.19).

Хорда, проходящая через центр сферы, называется ***диаметром*** сферы ($[MN]$ – диаметр сферы, изображенной на рисунке 8.19).

Взаимное расположение прямой и сферы

1) Прямая и сфера не имеют общих точек. В этом случае расстояние от центра сферы до прямой больше радиуса сферы и говорим, что ***прямая не пересекает сферу*** (рис. 8.20).

2) Прямая и сфера имеют одну общую точку. В этом случае говорим, что прямая является ***касательной*** к сфере. Напоминаем, что радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен этой прямой ($[OT]\perp d$, рис. 8.21).

3) Прямая и сфера имеют две общие точки. В этом случае говорим, что прямая является ***секущей*** по отношению к сфере. Заметим, что расстояние от центра сферы до секущей прямой меньше радиуса сферы (рис. 8.22).

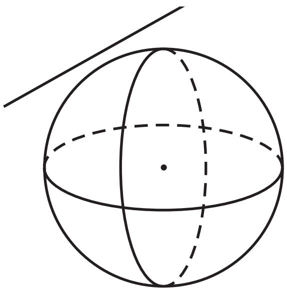


Рис. 8.20

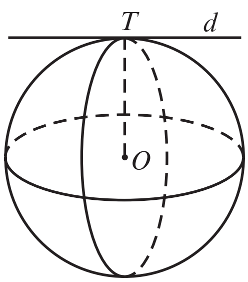


Рис. 8.21

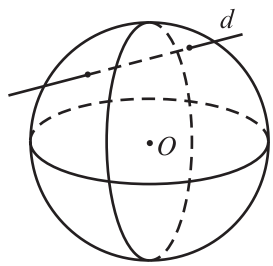


Рис. 8.22

Взаимное расположение плоскости и сферы

1) Сфера $\mathscr{S}(O, R)$ и плоскость α не имеют общих точек (рис. 8.23). В этом случае говорим, что ***плоскость не пересекает сферу***.

Если точка M принадлежит плоскости α, то $OM > R$.

2) Сфера $\mathscr{S}(O, R)$ и плоскость α имеют одну общую точку (рис. 8.24).

В этом случае говорим, что плоскость α является ***касательной*** к сфере, а общая точка T плоскости и сферы называется ***точкой касания***.

Если точка N принадлежит плоскости α, то $ON \geq R$ (равенство имеет место в случае, когда точка N совпадает с точкой T). Получаем, что OT – расстояние от точки O до плоскости α, откуда следует, что $[OT]\perp\alpha$ (рис. 8.24).

Итак, радиус, проведенный в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен этой плоскости.

3) Сфера $\mathscr{S}$ и плоскость α пересекаются (рис. 8.25). В этом случае говорим, что плоскость α является ***секущей плоскостью*** сферы.

Пусть M – общая точка сферы и плоскости, точка O_1 является проекцией центра сферы на плоскость α. Обозначим $OO_1 = d$ и $OM = R$ (рис. 8.25).

Треугольник OO_1M – прямоугольный и $O_1M = \sqrt{OM^2 - OO_1^2} = \sqrt{R^2 - d^2}$.

Точки плоскости α, находящиеся на расстоянии $\sqrt{R^2 - d^2}$ от точки O_1, образуют окружность и в то же время принадлежат сфере, так как $OM = R$. Таким образом, пересечением сферы с плоскостью α является окружность с центром в точке O_1 и радиусом $\sqrt{R^2 - d^2}$.

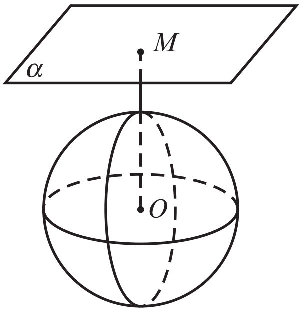


Рис. 8.23

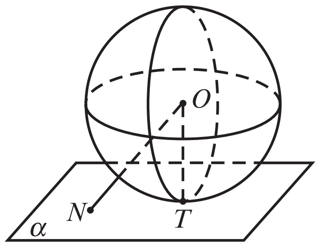


Рис. 8.24

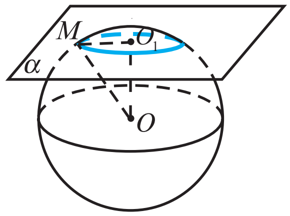


Рис. 8.25

Пересечение сферы со слоем, ограниченным параллельными плоскостями α и β, секущими по отношению к сфере, называется ***сферической зоной***, или ***сферическим поясом***. Расстояние между плоскостями α и β называется ***высотой зоны***.

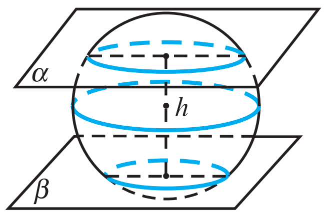


Рис. 8.26

Окружности, которые получаются при пересечении сферы с плоскостями α и β, называются ***основаниями сферической зоны*** (рис. 8.26).

Если одна из плоскостей слоя является касательной к сфере, а другая является секущей, то в пересечении получается поверхность, которая называется ***сферическим сегментом***. В этом случае окружность сечения называется ***основанием сегмента***.

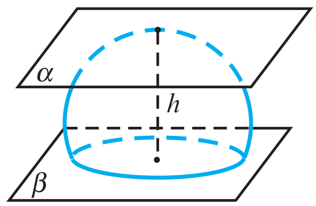


Рис. 8.27

Расстояние h между плоскостями α и β называется ***высотой сегмента*** (рис. 8.27).

Если центр сферы принадлежит основанию сферического сегмента, то сегмент называется ***полусферой***.

Тело, полученное при вращении кругового сектора вокруг диаметра, который не содержит внутренние точки сектора, называется ***сферическим сектором***. Диаметр, вокруг которого вращается круговой сектор, является ***осью сферического сектора***, а радиус кругового сектора является ***радиусом сферического сектора***.

Расстояние между центрами окружностей, описываемых концами дуги кругового сектора, является ***высотой сферического сектора***.

На рисунке 8.28 изображен сферический сектор, полученный при вращении кругового сектора OAB вокруг диаметра AA_1 (его высота $h = CA$), а на рисунке 8.29 – сферический сектор, полученный при вращении кругового сектора OBC вокруг диаметра AA_1 (его высота $h = DE$).

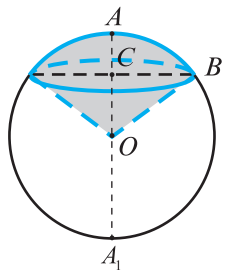


Рис. 8.28

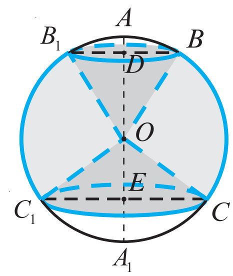


Рис. 8.29

Замечание

Можно показать, что ***площадь сферической зоны*** Z вычисляется по формуле:

$$\boxed{\mathscr{A}(Z) = 2\pi Rh}\,.$$

Заметим, что полученная формула действительна и для вычисления ***площади сферического сегмента*** (рис. 8.30), поскольку сферический сегмент можно считать частным случаем сферической зоны (рис. 8.30):

$$\boxed{\mathscr{A}_{\text{сегмента}} = 2\pi Rh}\,.$$

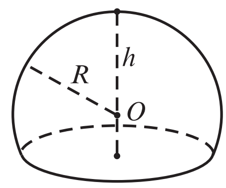


Рис. 8.30

Так как сфера является сферической зоной высоты $h = 2R$, то эта формула подходит и для вычисления ***площади сферы***, т. е.

$$\boxed{\mathscr{A}_{\text{сферы}} = 4\pi R^2}\,.$$

4.2. Объем шара

Рассмотрим шар $\mathscr{S}(O, R)$ и тело T, которое получено удалением из прямого кругового цилиндра, радиуса R и высотой $2R$ двух конусов с общей вершиной O_2 – серединой оси BC данного цилиндра, а основаниями конусов являются основания цилиндра. Пусть эти тела расположены на плоскости α так, как показано на рисунке 8.31.

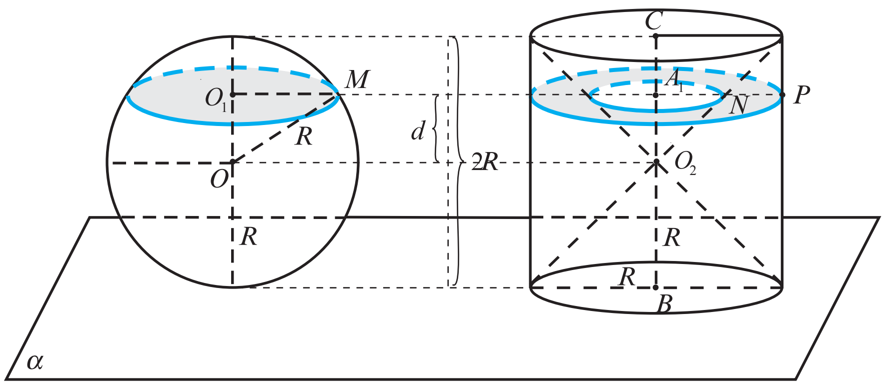


Рис. 8.31

При пересечении данных тел плоскостью $\beta \parallel \alpha$ на расстоянии $d < R$ от центра шара, получим в сечениях фигуры, площади которых равны.

Действительно, площадь круга, полученного при пересечении шара плоскостью β, равна

$$\pi O_1M^2 = \pi(OM^2 - OO_1^2) = \pi(R^2 - d^2),$$

а площадь кольца, полученного при пересечении тела T плоскостью β, равна

$$\pi A_1P^2 - \pi A_1N^2 = \pi A_1P^2 - \pi O_2A_1^{\;2} = \pi R^2 - \pi d^2 = \pi(R^2 - d^2),$$

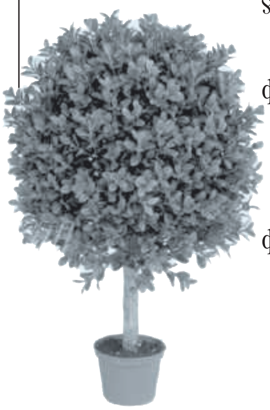
откуда получаем, что для любых значений d $(0 \le d \le R)$ площадь круга равна площади кольца.

Применив принцип Кавальери, получаем, что объем шара равен объему тела T, т. е. равен разности объема цилиндра и объема двух конусов с высотой и радиусом основания R.

Таким образом, $\mathcal{V}_{\text{шара}} = \mathcal{V}_{\text{тела}} = \mathcal{V}_{\text{цил.}} - 2\mathcal{V}_{\text{кон.}} = \pi R^2 \cdot 2R - 2 \cdot \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R = \frac{4}{3}\pi r^3.$

Следовательно, $\boxed{\mathcal{V}_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3}$.

Эта же формула была получена при помощи определенного интеграла (см. модуль 4, § 2, задача с решением 1).



Объем шарового сегмента, высота которого h и радиус шара R, вычисляется по формуле:

$$\boxed{\mathcal{V}_{\text{шар. сегм.}} = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3}\right)}\ .$$

Объем шарового сектора, высота которого h и радиус шара R, вычисляется по формуле:

$$\boxed{\mathcal{V}_{\text{шар. сект.}} = \frac{2}{3}\pi R^2 h}\ .$$

4.3. Вписанные сферы. Описанные сферы (дополнительный материал)

Определения

• Сфера называется **вписанной в цилиндр**, если основания цилиндра являются касательными к сфере и их радиус равен радиусу сферы (рис. 8.32) (цилиндр называется **описанным около сферы**).

• Сфера называется **описанной около цилиндра** (**усеченного конуса**), если она содержит окружности оснований цилиндра (усеченного конуса) (рис. 8.33) (цилиндр (усеченный конус) называется **вписанным в сферу**).

• Сфера называется **вписанной в многогранник**, если все грани многогранника касаются сферы (рис. 8.34) (многогранник называется **описанным около сферы**).

• Сфера называется **описанной около многогранника**, если все вершины многогранника принадлежат сфере (рис. 8.35) (многогранник называется **вписанным в сферу**).

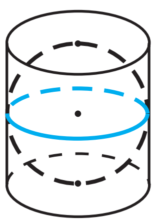


Рис. 8.32

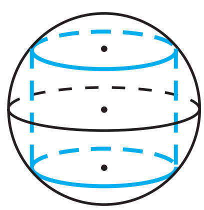


Рис. 8.33

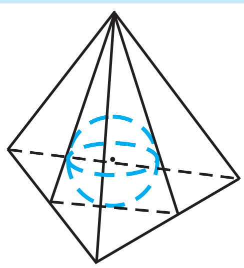


Рис. 8.34

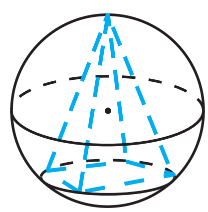


Рис. 8.35

Задачи с решением

1 Найдем радиус вписанной сферы и радиус сферы, описанной около правильной треугольной пирамиды, со стороной основания a и высотой H.

Решение:

Пусть $ABCD$ – данная пирамида (рис. 8.36). Сфера, вписанная в пирамиду, касается всех граней пирамиды, а ее центр находится на высоте DM пирамиды. (Задачи, которые относятся к вписанным и описанным телам, удобно решать, используя сечения данных тел плоскостями.)

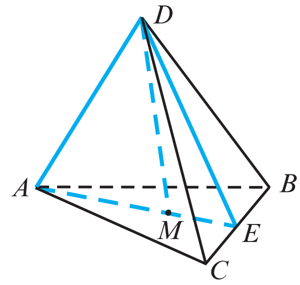


Рис. 8.36

Рассмотрим плоскость α, проходящую через боковое ребро и высоту пирамиды.

Таким образом, в сечении пирамиды и сферы плоскостью α, проходящей через $[AD]$ и $[DM]$, получаем треугольник ADE, где $E=\alpha\cap[CB]$, и окружность с центром I, расположенным на высоте DM. Стороны AE и DE являются касательными к окружности (рис. 8.37).

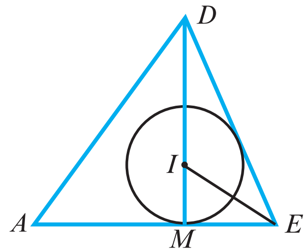


Рис. 8.37

Окружность, полученная в сечении, имеет тот же радиус, что и вписанная сфера. Таким образом, задача сводится к нахождению радиуса окружности, полученной в сечении.

Если $IM=r$, то $DI=DM-MI=H-r$,

$$ME=\frac{1}{3}AE=\frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{6},$$

$$DE=\sqrt{DM^2+ME^2}=\sqrt{H^2+\frac{a^2}{12}}.$$

В треугольнике DME отрезок IE является биссектрисой угла DEM, откуда

$$\frac{MI}{ID}=\frac{ME}{DE}, \text{ или } \frac{r}{H-r}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{H^2+\frac{a^2}{12}}}, \text{ откуда } r=\frac{aH}{a+\sqrt{12H^2+a^2}}.$$

В сечении пирамиды и описанной сферы плоскостью α, проходящей через $[AD]$ и $[DM]$, получаем треугольник ADE и окружность, проходящую через точки A и D, с центром O, расположенным на высоте DM пирамиды.

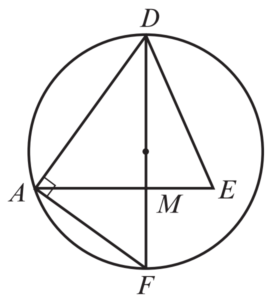


Рис. 8.38

Окружность, полученная в сечении, имеет тот же радиус, что и сфера, описанная около пирамиды. Таким образом, задача сводится к нахождению радиуса этой окружности. Если обозначим точку пересечения окружности и прямой DM через F (рис. 8.38), то получим прямоугольный треугольник ADF, где $[AM]$ – высота, проведенная к гипотенузе.

По теореме высоты получаем $AM^2=FM\cdot MD$, или $AM^2=(DF-DM)MD$.

Так как $AM=\frac{2}{3}AE=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, а $DF=2R$, где R – радиус сферы, описанной около пирамиды, получаем равенство $\frac{a^2}{3}=(2R-H)H$, откуда $R=\frac{a^2+3H^2}{6H}$.

Ответ: $r=\frac{aH}{a+\sqrt{12H^2+a^2}}$; $R=\frac{a^2+3H^2}{6H}$.

2 Круговой сектор AOB с $m(\angle AOB)=\dfrac{\alpha}{2}$ и радиусом R вращается вокруг радиуса OA (рис. 8.39). Вычислим объем и площадь полной поверхности полученного сферического сектора.

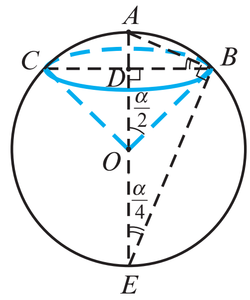


Рис. 8.39

Решение:

Рассмотрим осевое сечение сферического сектора, определенное первоначальным положением кругового сектора AOB. Так как $OA=OB=OE=R$ и $[AE]$ – диаметр, то

$$m(\angle OEB)=\frac{\alpha}{4}=m(\angle ABD).$$

Вычислим высоту $h=AD$ сферического сектора.

Из ΔAEB имеем: $AB=EA\sin\dfrac{\alpha}{4}=2R\sin\dfrac{\alpha}{4}$. Следовательно, $h=2R\sin^2\dfrac{\alpha}{4}$.

По формуле $\mathcal{V}_{\text{сектора}}=\dfrac{2}{3}\pi R^2 h$ находим:

$$\mathcal{V}_{\text{сектора}}=\frac{2}{3}\pi R^2 h=\frac{2}{3}\pi R^2\cdot 2R\sin^2\frac{\alpha}{4}=\frac{4}{3}\pi R^3\sin^2\frac{\alpha}{4}.$$

Площадь полной поверхности сферического сектора равна сумме площадей сферического сегмента BAC и боковой поверхности конуса OBC:

$$\mathcal{A}_{\text{сфер. сект.}}=\mathcal{A}_{\text{сфер. сегм.}}+\mathcal{A}_{\text{бок. кон.}}=2\pi Rh+\pi RDB.$$

Из ΔODB получаем, что $DB=OB\sin\dfrac{\alpha}{2}=R\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

Следовательно,

$$\mathcal{A}_{\text{сфер. сект.}}=2\pi R\cdot 2R\sin^2\frac{\alpha}{4}+\pi R^2\sin\frac{\alpha}{2}=\pi R^2\left(4\sin^2\frac{\alpha}{4}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)=\pi R^2\sin\frac{\alpha}{2}\left(2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}+1\right).$$

4.4. Сечение конической поверхности плоскостью

4.4.1. Конические сечения

Рассмотрим в пространстве прямую g, которая пересекает данную прямую a, $g\not\perp a$, в точке V.

Определения

- Поверхность, образованная вращением прямой a (рис. 8, 40), называется **прямой круговой поверхностью с двумя полами** (рис. 8.40).
- Прямая g и любая прямая g' конической поверхности называются **образующими конической поверхности**.
- Ось вращения a является и осью симметрии конической поверхности. Точка V называется **вершиной конической поверхности**.
- Линии, которые получаются в пересечении конической поверхности плоскостями, не проходящими через ее вершину, называются **коническими сечениями**.

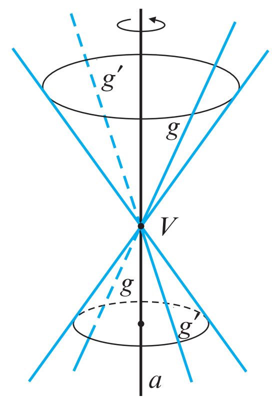


Рис. 8.40

Возможны три различных случая:

1. Секущая плоскость пересекает все образующие одной полы конической поверхности: в этом случае коническое сечение называется ***эллипсом***; в частности, если секущая плоскость перпендикулярна оси конической поверхности, то в сечении получается ***окружность*** (рис. 8.41 а)).
2. Секущая плоскость параллельна одной из образующих конической поверхности: коническим сечением является ***парабола*** (рис. 8.41 б)).

3. Секущая плоскость пересекает обе полы конической поверхности (плоскость параллельна двум образующим): коническим сечением является ***гипербола*** (рис. 8.41 в)).

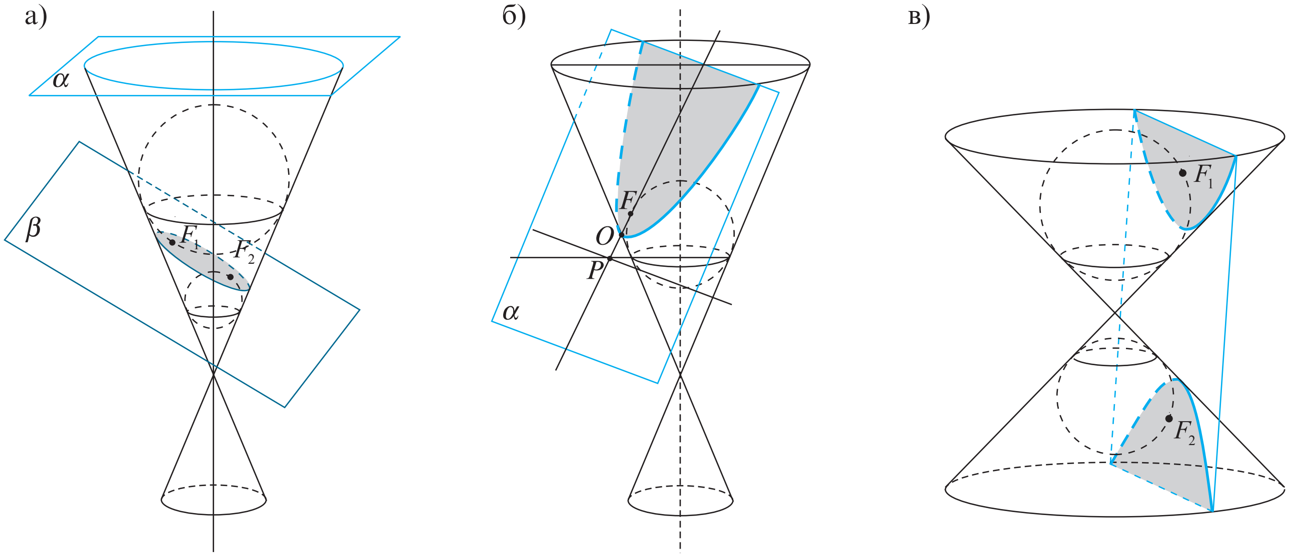
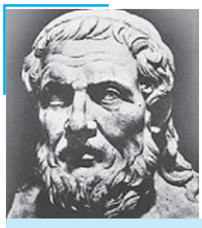


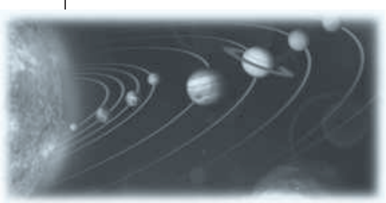
Рис. 8.41



Аполлоний Пергский (262–180 до Р. Х.) – древнегреческий геометр и астроном

Первое изложение теории конических сечений принадлежит одному из самых великих геометров древности, Аполлонию Пергскому. В трактате из восьми книг, названном „О конических сечениях“ Аполлоний систематизировал все свойства конических сечений, изученных до него, открыл ряд новых важных свойств этих линий и дал им названия, которые используются и в наши дни.

Конические сечения имеют много применений. Например, осевые сечения автомобильных фар, карманных фонарей, прожекторов являются параболами. Параболическая антенна представляет собой часть поверхности, получаемой вращением параболы вокруг ее оси.



Планеты солнечный системы вращаются вокруг Солнца по эллиптическим траекториям. Искусственные спутники также вращаются вокруг земли по эллиптическим траекториям. Эллипсы наблюдаются, когда наклоняется стакан, в который налита вода (рис. 8.42).

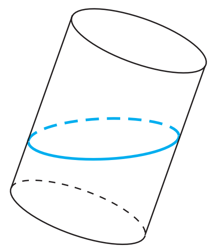
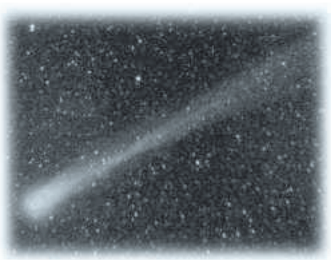


Рис. 8.42

Тень на столе от наклонного абажура настольной лампы имеет форму эллипса (рис. 8.43)).

Рис. 8.43



Траектории некоторых комет являются гиперболами, осевые сечения охлаждающих башен атомных станций имеют форму гипербол (рис. 8.44).

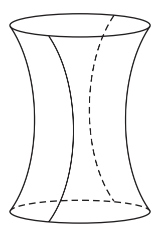


Рис. 8.44

4.4.2. Конические сечения как геометрические места точек

I. Окружность

Определение Геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки C, называется **окружностью**. Точка C – **центр окружности**.

Пусть декартовый репер $\{O, \bar{i}, \bar{j}\}$ в секущей плоскости α перпендикулярен оси конической поверхности (рис. 8.41 а)), $C(a, b)$ – точка плоскости и R – положительное число. Окружность $\mathscr{C}(C, R)$ с центром C и радиусом R (рис. 8.45) задается ***каноническим уравнением***:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

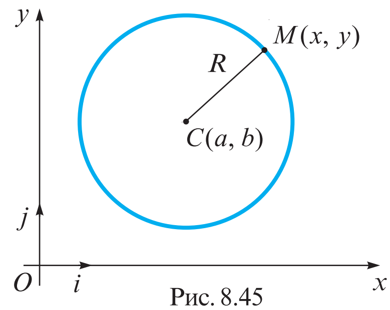


Рис. 8.45

II. Эллипс

Определение Пусть даны точки F_1 и F_2, расстояние между которыми $F_1F_2=2c$, $c>0$, и число a, большее, чем c. Геометрическое место точек M плоскости, обладающих свойством

$$MF_1+MF_2=2a \quad (a>c), \tag{1}$$

называется **эллипсом**.

Точки F_1 и F_2 называются ***фокусами эллипса***, прямая F_1F_2 – ***фокальной осью*** секущей плоскости.

Если по разные стороны секущей плоскости β (рис. 8.41 а)) впишем две сферы, касающиеся конической поверхности и секущей плоскости β, то точки касания сфер с плоскостью будут фокусами эллипса из сечения.

Выберем в секущей плоскости декартову систему координат $\{O, \bar{i}, \bar{j}\}$, как указано на рисунке 8.46. Тогда равенство (1) в координатах имеет вид:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

Избавляясь от иррациональности, получаем ***каноническое уравнение эллипса***:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (b^2=a^2-c^2). \tag{2}$$

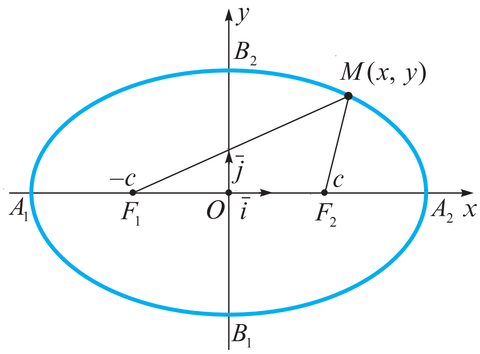


Рис. 8.46

Эллипс (2) пересекает ось Ox в точках $A_1(-a, 0)$ и $A_2(a, 0)$, а ось Oy – в точках $B_1(0, -b)$ и $B_2(0, b)$. Эти точки называются ***вершинами эллипса***. Отрезок A_1A_2 называется ***большой осью***, а отрезок B_1B_2 – ***малой осью*** (рис. 8.46).

Для построения точек эллипса при помощи циркуля и линейки, если заданы его фокусы F_1 и F_2 и бо́льшая ось A_1A_2, построим две окружности $\mathscr{C}_1(F_1, A_1P)$ и $\mathscr{C}_2(F_2, A_2P)$, где $P\in[F_1F_2]$. Точки M_1 и M_2 пересечения окружностей $\mathscr{C}_1$ и $\mathscr{C}_2$ очевидно принадлежат эллипсу (рис. 8.47). Таким образом, можно построить достаточное число точек, что позволит начертить эллипс.

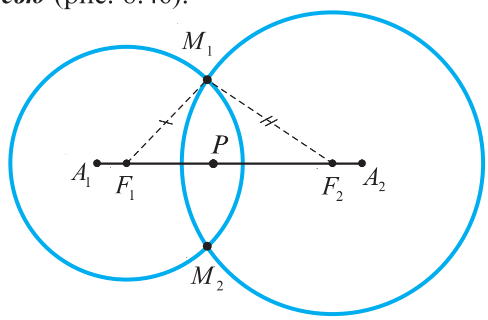


Рис. 8.47

III. Гипербола

Определение

Пусть даны точки F_1 и F_2, расстояние между которыми $F_1F_2 = 2c > 0$, и положительное число a, $a < c$. Геометрическое место точек M плоскости, обладающих свойством

$$|MF_1 - MF_2| = 2a, \qquad (3)$$

называется **гиперболой**.

Точки F_1 и F_2 называются ***фокусами гиперболы***, прямая F_1F_2 – ***фокальной осью***, расстояние $F_1F_2 = 2c$ – ***фокальным расстоянием***.

Если по одну и ту же сторону секущей плоскости из рисунка 8.41 в) вписываются две сферы, которые касаются конической поверхности и секущей плоскости, то точки касания сфер с секущей плоскостью являются фокусами гиперболы из сечения.

Выберем в секущей плоскости декартову систему координат $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$, как указано на рисунке 8.48. Тогда равенство (3) в координатах имеет вид:

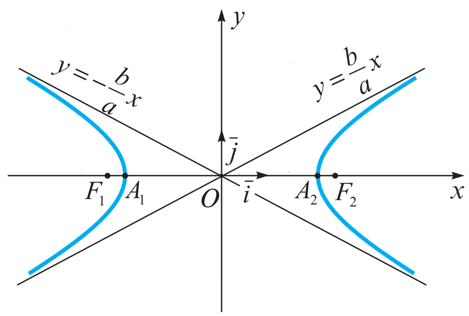


Рис. 8.48

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \sqrt{(x-c)^2+y^2} \pm 2a.$$

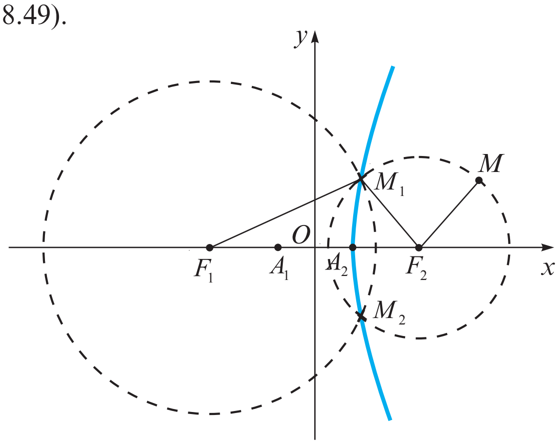
Избавляясь от иррациональности, получаем ***каноническое уравнение гиперболы***:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b^2 = c^2 - a^2). \qquad (4)$$

Гипербола (4) пересекает ось Ox в точках $A_1(-a, 0)$ и $A_2(a, 0)$, которые называются ***вершинами гиперболы***, а отрезок A_1A_2 называется ***фокальной осью***.

Прямые $y = -\frac{b}{a}x$ и $y = \frac{b}{a}x$ называются ***асимптотами гиперболы*** (рис. 8.48).

Для построения точек гиперболы при помощи циркуля и линейки, если указаны ее фокусы F_1, F_2 и фокальная ось A_1A_2, построим две окружности $\mathscr{C}_1(F_2, F_2M)$ и $\mathscr{C}_2(F_1, F_2M + A_1A_2)$. Точки M_1 и M_2 пересечения этих окружностей принадлежат гиперболе (рис. 8.49).



$F_1M = F_2M + A_1A_2$

Рис. 8.49

IV. Парабола

Определение

Пусть даны прямая d и точка F, не лежащая на этой прямой. **Параболой** называется геометрическое место точек M плоскости, обладающих свойством $\mathrm{d}(M, d) = MF$ (5) (рис. 8.50).

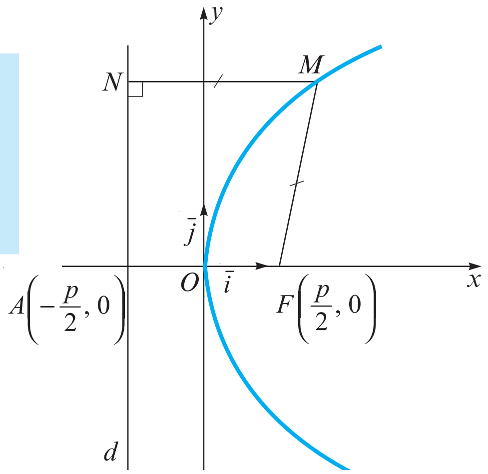


Рис. 8.50

Точка F называется ***фокусом параболы***, прямая d – ***директрисой параболы***.

Если рассмотреть сферу, указанную на рисунке 8.41 б), которая касается конической поверхности и секущей плоскости, то точка касания сферы с секущей плоскостью является фокусом параболы, а пересечение секущей плоскости с плоскостью касательной окружности является директрисой параболы.

Выберем в секущей плоскости декартову систему координат $\{O, \bar{i}, \bar{j}\}$, как показано на рисунке 8.50. Тогда равенство (5) в координатах имеет вид:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|,$$

где $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, $A\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$.

Избавляясь от иррациональности, получаем ***каноническое уравнение параболы***:

$$y^2 = 2px.$$

Число p равно расстоянию от фокуса до директрисы и называется ***параметром параболы***.

Для построения точек параболы, если указаны ее фокус F и директриса d, построим прямую $\Delta \parallel d$ по ту же сторону от директрисы, что и фокус F. Точки пересечения M_1 и M_2 прямой Δ и окружности $\mathscr{C}(F, AM)$ принадлежат параболе (рис. 8.51).

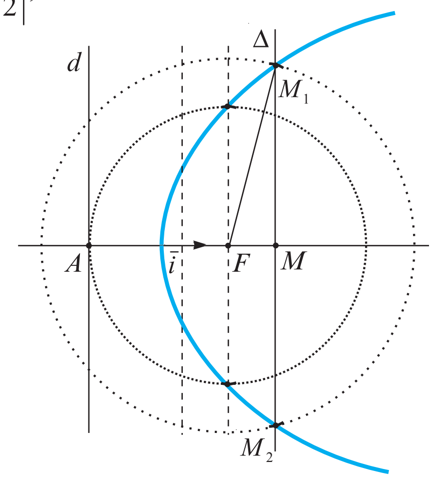


Рис. 8.51

Замечание

Известно, что график функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, называется параболой. Можно показать, что этот график действительно является параболой, ось симметрии которой параллельна оси ординат. Вершиной, фокусом, директрисой и параметром этой параболы соответственно являются:

$$V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right), \quad F\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a} + \frac{1}{4a}\right), \quad d: y = -\frac{\Delta}{4a} - \frac{1}{4a} \text{ и } p = \frac{1}{2a}.$$

Задания с решением

1 Найдем координаты центра и радиус окружности, заданной уравнением

$$x^2 + y^2 - 8x + 2y - 8 = 0.$$

Решение:

Запишем уравнение окружности в виде:

$$(x-4)^2 + (y+1)^2 = 25.$$

Значит, точка $C(4, -1)$ – центр окружности и $R = 5$ – ее радиус.

2 Найдем точки пересечения эллипса $x^2+9y^2=36$ с прямой $x-3y+6=0$.

Решение:

Координаты искомых точек являются решениями системы $\begin{cases} x^2+9y^2=36 \\ x-3y=-6. \end{cases}$

Таким образом, получаем две точки: $(-6, 0)$ и $(0, 2)$.

3 Дана гипербола $16x^2-9y^2=144$. Найдем:

а) числа a и b; б) координаты фокусов; в) уравнения асимптот.

Решение:

Запишем каноническое уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$. Отсюда следует, что $a^2=9$, $b^2=16$, $c^2=a^2+b^2=25$. Таким образом, получаем:

а) $a=3$, $b=4$; б) $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$; в) $y=-\frac{4}{3}x$, $y=\frac{4}{3}x$.

4 Составим каноническое уравнение гиперболы, если ее фокусы лежат на оси абсцисс, $F_1F_2=10\sqrt{2}$ и асимптоты гиперболы заданы уравнениями $y=\pm\frac{3}{4}x$.

Решение:

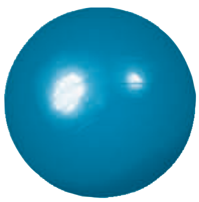
Так как уравнения асимптот гиперболы имеют вид $y=\pm\frac{b}{a}x$, находим, что $\frac{b}{a}=\frac{3}{4}$. Из соотношений $c^2-a^2=b^2$ и $F_1F_2=2c$ получаем уравнение $50-a^2=b^2$.

Решая систему $\begin{cases} \frac{b}{a}=\frac{3}{4} \\ 50-a^2=b^2, \end{cases}$ получаем $a^2=32$, $b^2=18$. Итак, каноническое уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{18}=1$.

Упражнения и задачи

А

1. Внешний диаметр резинового мяча равен 22 см, а толщина резины 1 см. Найдите объем резины, из которой изготовлен мяч.



2. Два свинцовых шара радиусов 12 см и 18 см переплавили в один шар. Найдите:
а) площадь сферической поверхности, ограничивающей шар;
б) объем полученного шара.

3. Масса чугунного шара 262,44 г. Найдите диаметр шара, если плотность чугуна $7{,}29\ г/см^3$.

4. Сосуд имеет форму полусферы радиуса 6 см, дополненной цилиндром, радиус основания которого 6 см. Какой высоты должен быть цилиндр, чтобы объем сосуда был равен $1800\ см^3$?

$$V_{шара}=\frac{4}{3}\pi R^3$$

Б

1. Найдите координаты центра и радиус окружности:
а) $x^2+y^2+6x-8y=0$;
б) $x^2+y^2+4x-6y-3=0$;
в) $x^2+y^2-7x+3y-1{,}5=0$;
г) $2x^2+2y^2+4x-3y+1=0$.

2. Составьте каноническое уравнение окружности диаметра AB, если:
а) $A(-1, 1)$, $B(3, 5)$; б) $A(-1, 1)$, $B(4, 6)$.

3. Найдите точки пересечения окружности $x^2+y^2=25$ и прямой: а) $x-y+1=0$; б) $x-7y-25=0$.

4. Составьте каноническое уравнение эллипса, который проходит через точки $A(-3, 4)$, $B(6, -2)$.

5. Составьте уравнение эллипса, если:
а) длина большой оси равна 20 см, а малой оси 12 см;
б) расстояние между фокусами равно 16 см, а длина большой оси 20 см.

6. Расстояния от одного из фокусов эллипса до концов фокальной оси равны 7 см и 1 см. Составьте каноническое уравнение эллипса.

7. Составьте каноническое уравнение эллипса, если известно, что:
а) точка $M(2\sqrt{5}, -2)$ принадлежит эллипсу, а длина малой оси равна 6;
б) точка $M(-2, 2)$ принадлежит эллипсу, а длина большой оси равна 8;
в) точка $M(\sqrt{15}, 1)$ принадлежит эллипсу и расстояние между фокусами равно 8.

8. Найдите точки гиперболы $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$, расположенные на расстоянии, равном 7 от левого фокуса.

9. Найдите координаты фокуса F и уравнение директрисы параболы $y^2 = 24x$.

10. Найдите координаты точек параболы $y^2 = 16x$, которые расположены на расстоянии, равном 13 от фокуса.

11. Найдите точки пересечения параболы $x^2 = 4y$ и прямой $x + y - 3 = 0$.

12. Через середину радиуса шара проведена плоскость, перпендикулярная этому радиусу. Найдите отношение объемов двух тел, на которые разбит шар секущей плоскостью.

13. Вершины треугольника со сторонами 4 см, 5 см, 7 см принадлежат сфере. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если радиус сферы равен $4\sqrt{6}$ см.

14. Через один конец диаметра шара проведена плоскость, образующая с этим диаметром угол, равный α. Вычислите площадь круга, полученного в сечении, если радиус шара равен R.

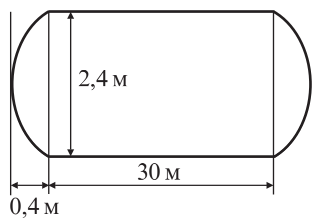
15. Какой процент от объема шара составляет объем шарового сегмента, высота которого составляет 20% от диаметра шара?

16. Для изготовления одного подшипника используют 12 шариков радиуса 1 см. Заводу по сборке оборудования необходимо изготовить 200000 подшипников. Найдите массу стали, которую надо расплавить, чтобы отлить необходимое количество шариков, если в результате плавления и отлива стали потери составляют 0,7% от первоначального веса и плотность стали $7{,}3$ г/см^3.

17. Фабрика игрушек выпускает резиновые мячи. Сколько банок краски необходимо для покраски 15000 мячей с внешним диаметром 32 см и 42000 мячей с внешним диаметром 18 см, если в банке 5 кг краски и для покраски 1 м^2 расходуется 180 г краски?

18. Чугунолитейный завод получил заказ на изготовление 400000 казанов в форме полусферы с толщиной стенок 3 мм и внутренним радиусом 15 см. Найдите массу чугуна, который необходимо расплавить для выполнения заказа, если плотность чугуна $3{,}2$ г/см^3 и в процессе плавления и отлива потери составляют 0,9% от первоначальной массы.

19. В депо доставили 23 цистерны, форма и размеры которых изображены на рисунке (цилиндр и два сферических сегмента). Цистерны должны покрасить. Сколько килограммов краски потребуется, если расход краски составляет 150 г на 1 м^2? ($\pi \approx 3{,}14$.)



20*. В правильную треугольную призму, сторона основания которой равна $8\sqrt{3}$ см, а высота 10 см, вписан прямой круговой цилиндр. Найдите объем цилиндра.

21*. Сфера радиуса r вписана в правильную треугольную призму. Найдите объем призмы.

22*. Сфера вписана в прямую призму, основание которой – прямоугольный треугольник с гипотенузой 20 см и острым углом $60°$. Найдите:
а) объем шара, ограниченного этой сферой;
б) площадь боковой поверхности призмы.

23*. В сферу радиуса 10 см вписан прямой круговой цилиндр, высота которого 12 см. Найдите боковую поверхность и объем цилиндра.

24*. Правильная четырехугольная пирамида вписана в сферу радиуса 12 см. Найдите объем пирамиды, если сторона ее основания равна $6\sqrt{2}$ см.

25*. В прямой круговой конус вписана сфера. Найдите отношение объема сферы к объему конуса, если образующая конуса составляет с плоскостью основания угол, равный φ.

Упражнения и задачи на повторение

А

1. Высота цилиндра равна половине диагонали осевого сечения, а площадь полной поверхности цилиндра равна $16(3+2\sqrt{3})$ см^2.
Найдите:
а) угол, образованный диагональю осевого сечения и высотой цилиндра;
б) площадь боковой поверхности цилиндра;
в) объем цилиндра.

$$\mathcal{A}_{бок.}=2\pi RH$$

2. Сколько квадратных метров жести потребуется для изготовления 100000 консервных банок, имеющих форму цилиндра с высотой 4 см и диаметром основания 8 см, если на швы и издержки расходуется 15% жести?

$$\mathcal{V}_{цил.}=\pi R^2 H$$

3. Образующая конуса равна 10 м, а его высота 6 м. Найдите площадь полной поверхности и объем конуса.

4. Радиусы оснований усеченного конуса равны 6 м и 3 м, а длина образующей 5 м. Найдите :
а) площадь осевого сечения усеченного конуса;
б) угол между образующей усеченного конуса и плоскостью основания;
в) объем и площадь боковой поверхности конуса, из которого происходит усеченный конус.

5. Найдите диаметр чугунного шара, масса которого равна 252π г (плотность чугуна 7 г/см^3).

$$\mathcal{V}(\mathscr{C})=\frac{1}{3}\pi R^2 H$$

Б

1. Высота усеченного конуса равна среднему геометрическому диаметров оснований. Угол между образующей усеченного конуса и плоскостью большего основания равен φ. Найдите радиусы R и r оснований усеченного конуса, если:
а) $R+r=s$; б) $R-r=d$.

2. В осевое сечение усеченного конуса, образующая которого равна G, можно вписать окружность радиуса R. Найдите площадь боковой поверхности и объем усеченного конуса.

3. Сфера радиуса $10\sqrt{2}$ см касается всех сторон прямоугольного треугольника с катетами 6 см и 8 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника.

$$\mathcal{V}(T)=\frac{\pi h}{3}(R^2+Rr+r^2)$$

4. Металлический шар радиуса 0,5 см покрыт тонким слоем никеля. Найдите необходимое количество никеля для покрытия 10 000 таких шаров, если расход никеля составляет 0,22 г на 100 см^2 $(\pi \approx 3{,}14)$.

5. Из одной точки сферы проведены три взаимно перпендикулярные хорды, длины которых равны a, b и c. Найдите радиус сферы.

6. В прямом круговом конусе, радиус основания которого равен R, расположены две сферы радиуса r с центрами на оси конуса. Одна из сфер касается боковой поверхности конуса, а другая сфера касается первой сферы и плоскости основания конуса. Найдите объем конуса, если $R=3r$.

$$\mathcal{A}_{бок.}(T)=\pi g(R+r)$$

Проверочная работа

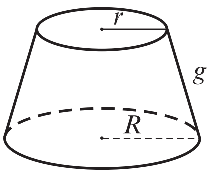
Время выполнения работы: 90 минут

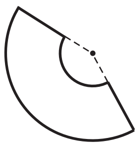
А

1. Образующая конуса равна l и составляет с плоскостью основания угол, равный α. Найдите: 2
а) площадь боковой поверхности конуса;
б) объем конуса.

2. Два металлических шара с диаметрами 8 см и 10 см переплавили в один шар. Найдите: 2
а) объем полученного шара;
б) сколько процентов составляет площадь поверхности меньшего шара от площади поверхности полученного шара.

3. Радиус основания прямого кругового цилиндра равен 5 см, а его высота 12 см. Найдите: 3
а) площадь боковой поверхности цилиндра;
б) объем цилиндра;
в) площадь полной поверхности правильной четырехугольной призмы, высота которой равна высоте цилиндра, а сторона основания конгруэнтна стороне квадрата, вписанного в основание цилиндра;
г) объем призмы из пункта в).



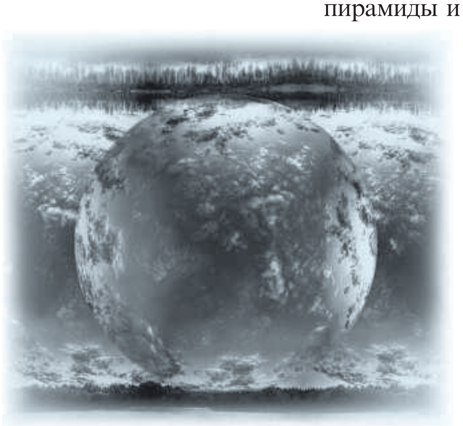


4. Абажур имеет форму усеченного конуса. Найдите площадь абажура, если $r = 12$ м, $R = 18$ см, $g = 20$ см. 3

Б

1. Площадь осевого сечения цилиндра равна A, а угол между диагональю этого сечения и образующей цилиндра равен α. Найдите: 2
а) площадь полной поверхности цилиндра; б) объем цилиндра;
в) периметр осевого сечения цилиндра.

2. Основание пирамиды – ромб со стороной a и острым углом α. Проекцией вершины пирамиды на плоскость основания является точка пересечения диагоналей ромба. Высота пирамиды равна H. Найдите объем шара, радиус которого равен радиусу окружности, вписанной в сечение пирамиды плоскостью, проходящей через высоту пирамиды и перпендикулярной двум параллельным ребрам основания пирамиды. 2

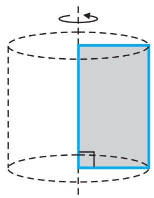


3. Полагая, что Земля имеет форму шара радиуса $R = 6\,400$ км, найдите площадь поверхности Земли, которая видна из самолета, летящего на высоте $d = 2\,000$ м над уровнем моря. 3

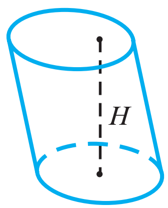
4. В основании конуса вписан правильный многоугольник и через его стороны и вершину конуса проводятся плоскости. Докажите, что сечения конуса этими плоскостями конгруэнтны и двугранные углы между двумя соседними сечениями конгруэнтны. 3

Тела вращения

Цилиндр

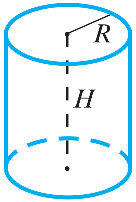


Цилиндр



$\mathscr{V} = \mathscr{A}_{\text{осн.}} \cdot H$

Прямой круговой цилиндр

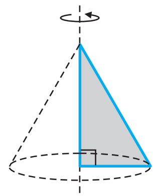


$\mathscr{A}_{\text{бок.}} = 2\pi RH$

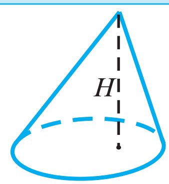
$\mathscr{A}_{\text{полн.}} = 2\pi R(H+R)$

$\mathscr{V} = \pi R^2 H$

Конус

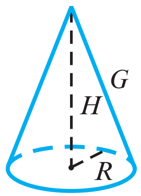


Конус



$\mathscr{V} = \frac{1}{3}\mathscr{A}_{\text{осн.}} \cdot H$

Прямой круговой конус

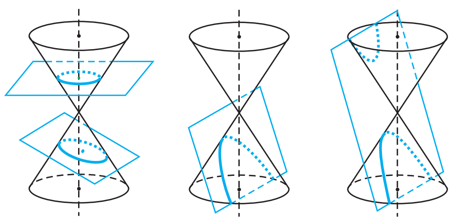


$\mathscr{A}_{\text{бок.}} = \pi RG$

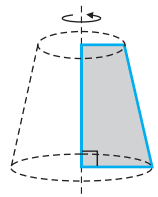
$\mathscr{A}_{\text{полн.}} = \pi R(R+G)$

$\mathscr{V} = \frac{1}{3}\pi R^2 H$

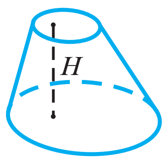
Конические сечения: окружность, эллипс, гипербола, парабола



Усеченный конус

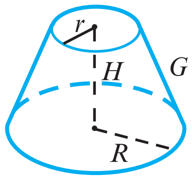


Усеченный конус



$\mathscr{V} = \frac{1}{3}H(\mathscr{A}_o + \mathscr{A}_O + \sqrt{\mathscr{A}_o\mathscr{A}_O})$

Прямой круговой усеченный конус

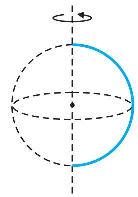


$\mathscr{A}_{\text{бок.}} = \pi G(R+r)$

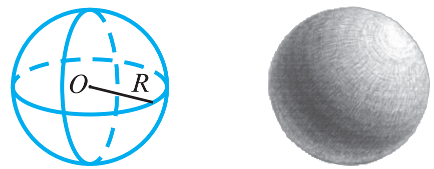
$\mathscr{A}_{\text{полн.}} = \pi[G(R+r)+R^2+r^2]$

$\mathscr{V} = \frac{\pi}{3}H(R^2+r^2+Rr)$

Сфера, шар



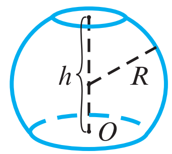
Сфера, шар



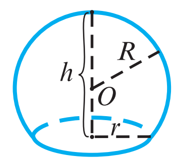
$\mathscr{V} = \frac{4}{3}\pi R^3$

$\mathscr{A} = 4\pi R^2$

Сферическая зона, сферический сегмент, сферический сектор

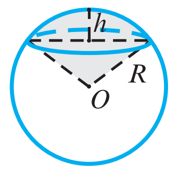


$\mathscr{A}(Z) = 2\pi Rh$



$\mathscr{A}_{\text{сегмента}} = 2\pi Rh = \pi(r^2+h^2)$

$\mathscr{V}_{\text{сегмента}} = \pi h^2(R - \frac{h}{3})$



$\mathscr{V}_{\text{сект.}} = \frac{2}{3}\pi R^2 h$

Модуль

9 Итоговое повторение

1. Комплексные числа. Множества. Элементы математической логики
2. Тождественные преобразования выражений
3. Многочлены
4. Уравнения. Неравенства. Системы. Совокупности
5. Последовательности действительных чисел. Предел последовательности
6. Предел функции. Непрерывные функции
7. Основные свойства и приложения дифференцируемых функций
8. Элементы комбинаторики. Бином Ньютона
9. Геометрия на плоскости и в пространстве
10. Элементы тригонометрии
11. Элементы высшей алгебры
12. Упражнения и задачи для повторения

§ 1 КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. МНОЖЕСТВА. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

1.1. Комплексные числа

Множество $\mathbf{C}=\{a+b\mathrm{i} \mid a, b\in\mathbb{R}\}$, где $\mathrm{i}^2=-1$, является *множеством комплексных чисел*.

Действия сложения и умножения комплексных чисел $z=a+b\mathrm{i}$, $u=c+d\mathrm{i}$ выполняются следующим образом:

$$(a+b\mathrm{i})+(c+d\mathrm{i})=(a+c)+(b+d)\mathrm{i}, \qquad (a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})=ac-bd+(ad+bc)\mathrm{i}.$$

Комплексное число $\bar{z}=a-b\mathrm{i}$ называется ***сопряженным*** числу $z=a+b\mathrm{i}$.

Свойства сопряженных комплексных чисел $(z, z_1, z_2\in\mathbf{C})$:

1° $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$

2° $\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$

3° $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, $z_2\neq 0$

4° $z\cdot\bar{z}=(a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})=a^2+b^2\in\mathbb{R}$

5° $z=\bar{z}\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$

6° $z+\bar{z}\in\mathbb{R}$

7° $\bar{\bar{z}}=z$

Число $|z|=|a+b\mathrm{i}|=\sqrt{a^2+b^2}=r\in\mathbb{R}_+$ называется ***модулем*** комплексного числа z.

Свойства модуля $(z, z_1, z_2\in\mathbf{C})$:

1° $|z|=|\bar{z}|$;

2° $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$;

3° $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2\neq 0$;

4° $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$;

5° $||z_1|-|z_2||\le|z_1+z_2|$.

Частное комплексных чисел $z=a+b\mathrm{i}$ и $u=c+d\mathrm{i}\neq 0$ можно вычислить следующим образом:

$$\frac{z}{u}=\frac{z\cdot\bar{u}}{u\cdot\bar{u}}=\frac{(a+b\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})}{(c+d\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}.$$

Действия сложения и умножения на множестве комплексных чисел обладают теми же свойствами, что и на множестве $\mathbb{R}$. Поэтому на множестве $\mathbf{C}$ остаются справедливыми формулы сокращенного умножения, формула решения квадратного уравнения и т. д. Следует лишь учитывать, что множеством корней второй степени из числа $-a$, $a\in\mathbb{R}_+^*$, является $\{-\mathrm{i}\sqrt{a}, \mathrm{i}\sqrt{a}\}$.

Задание с решением

Решим на множестве $\mathbf{C}$ уравнение $x^2+(1-2\mathrm{i})x+1+5\mathrm{i}=0$.

Решение:

Чтобы использовать известную формулу решения квадратного уравнения, вычислим $\Delta=1-4\mathrm{i}-4-4-20\mathrm{i}=-7-24\mathrm{i}$.

Вычислим корни второй степени из комплексного числа $a+b\mathrm{i}$ в виде $z=u+v\mathrm{i}$, где $u\in\left\{\pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\right\}$, $v\in\left\{\pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\right\}$, а знак произведения $u\cdot v$ совпадает со знаком b.

В нашем случае получаем $u \in \{-3, 3\}$, $v \in \{-4, 4\}$, и произведение $u \cdot v$ имеет знак „–“. Следовательно, $\sqrt{-7-24\mathrm{i}} = \pm(3-4\mathrm{i})$.

Итак, $x_1 = \dfrac{-1+2\mathrm{i}-(3-4\mathrm{i})}{2} = -2+3\mathrm{i}$, $x_2 = \dfrac{-1+2\mathrm{i}+(3-4\mathrm{i})}{2} = 1-\mathrm{i}$.

Ответ: $S = \{-2+3\mathrm{i}, 1-\mathrm{i}\}$.

Главный аргумент числа $u = x+\mathrm{i}y$, $u \neq 0$, вычисляется следующим образом:

$$\arg u = \begin{cases} \arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{если } y \geq 0, u \neq -1 \\ -\arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{если } y < 0 \\ -\pi, & \text{если } u = -1 \end{cases} = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{если } x > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{если } x < 0,\ y \geq 0 \\ -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{если } x < 0,\ y < 0 \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{если } x = 0,\ y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{если } x = 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Числа $\arg u + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, называются ***аргументами*** комплексного числа u.

Если на плоскости задана ортогональная система координат xOy, то существует биекция $f\colon \mathbf{C} = \{x+\mathrm{i}y \mid x, y \in \mathbb{R}\} \to P = \{M(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, определенная формулой $f(x+\mathrm{i}y) = M(x, y)$. В этом случае аргумент числа u имеет следующее геометрическое толкование: это величина (ориентированного) угла, образованного положительной полуосью $[Ox$ и $\overrightarrow{OM}$.

Для ***действительной части*** $x = \operatorname{Re} z$, ***мнимой части*** $y = \operatorname{Im} z$, модуля r и аргумента φ комплексного числа $z = x+\mathrm{i}y$ имеют место соотношения $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, откуда получаем запись

$$z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi),$$

которая называется ***тригонометрической формой*** комплексного числа z.

Если $z, z_1, z_2 \in \mathbf{C}^*$, $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)$,
$z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, то:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1+\varphi_2));$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1-\varphi_2));$$

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi),\quad n \in \mathbb{Z} \text{ (формула Муавра).}$$

Задание с решением

Вычислим $\dfrac{(1-\mathrm{i})^{15}}{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^{13}}$.

Решение:

Запишем числа $1-\mathrm{i}$ и $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ в тригонометрической форме:

$$1-\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right),\quad 1+\mathrm{i}\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Используя приведенные выше формулы, получаем:

$$\frac{\left[\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]^{15}}{\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^{13}}=\frac{(\sqrt{2})^{15}\left(\cos\left(-\frac{15\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{15\pi}{4}\right)\right)}{2^{13}\left(\cos\frac{13\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{13\pi}{3}\right)}=$$

$$=\frac{(\sqrt{2})^{15}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)}{2^{13}\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)}=2^{-\frac{11}{2}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right).$$

Число u называется ***корнем n-ой степени***, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, из комплексного числа z, если $u^n=z$.

Теорема

Если $z\neq 0$, $z=r(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$, то существует n различных корней n-ой степени, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, из комплексного числа z:

$$\left\{\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)\middle|\, k=\overline{0,\, n-1}\right\}.$$

Множество корней n-ой степени из комплексного числа z, $z\neq 0$, изображают на комплексной плоскости вершинами правильного n-угольника (если $n\geq 3$), вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{|z|}$ с центром в начале координат.

Задания с решением

1 Найдем корни 3-й степени из числа $5\mathrm{i}$.

Решение:

Так как $5\mathrm{i}=5\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)$, получаем:

$$u_0=\sqrt[3]{5}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi\cdot 0}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi\cdot 0}{3}\right)=$$

$$=\sqrt[3]{5}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right),$$

$u_1=\sqrt[3]{5}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)$, $u_2=-\sqrt[3]{5}\cdot\mathrm{i}$ (рис. 9.1).

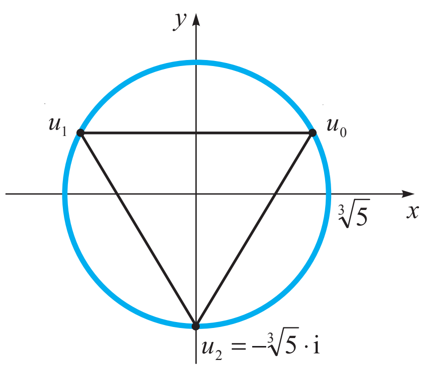


Рис. 9.1

2 Решим на множестве **C** уравнение $(2+\mathrm{i})z^3=-5+10\mathrm{i}$.

Решение:

$$(2+\mathrm{i})z^3=-5+10\mathrm{i}\Leftrightarrow z^3=\frac{-5+10\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}=5\mathrm{i}.$$

Решениями уравнения являются корни степени 3 из числа $5\mathrm{i}$ (см. задание **1**).

Ответ: $S=\left\{\sqrt[3]{5}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right),\ \sqrt[3]{5}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right),\ -\sqrt[3]{5}\cdot\mathrm{i}\right\}.$

1.2. Элементы теории множеств

Множество A называется ***подмножеством*** множества B (обозначают $A \subseteq B$), если любой элемент множества A является элементом и множества B. Множества A и B называются ***равными*** (обозначают $A = B$), если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется ***пустым множеством*** и обозначается символом $\varnothing$. Число элементов конечного множества M называется ***кардиналом*** этого множества и обозначается $\operatorname{card} M$ или $|M|$.

Множество подмножеств множества A является ***булеаном множества*** A и обозначается $\mathcal{B}(A)$. Если множество A содержит n элементов, $n \in \mathbb{N}$, то множество $\mathcal{B}(A)$ содержит 2^n элементов.

Пусть даны множества A и B. Определим следующие множества:

$A \cup B = \{x \mid x \in A$ или $x \in B\}$ – ***объединение*** множеств A и B;

$A \cap B = \{x \mid x \in A$ и $x \in B\}$ – ***пересечение*** множеств A и B;

$A \setminus B = \{x \mid x \in A$ и $x \notin B\}$ – ***разность*** множеств A и B.

Декартовым произведением непустых множеств A и B называется множество упорядоченных пар (x, y), где $x \in A$, $y \in B$ (обозначают $A \times B$). Если хотя бы одно из множеств A, B является пустым, то декартово произведение равно пустому множеству.

Задание с решением

Найдем $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x - 3 \geq 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 3\}$.

Решение:

Для удобства запишем множества A, B в виде числовых интервалов:
$A = (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$, $B = [-3, 3]$. Тогда

$A \cup B = (-\infty, +\infty)$, $A \cap B = [-3, -1] \cup \{3\}$, $A \setminus B = [-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$, $B \setminus A = (-1, 3)$.

Операции над множествами обладают следующими *свойствами*:

1° $A \cup A = A$	**1°′** $A \cap A = A$
2° $A \cup \varnothing = A$	**2°′** $A \cap \varnothing = \varnothing$
3° $A \cup B = B \cup A$	**3°′** $A \cap B = B \cap A$
4° $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	**4°′** $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
5° $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	**5°′** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
6° $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$	**6°′** $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

1.3. Элементы математической логики

В математике ***высказыванием*** называется предложение, о котором можно утверждать, что оно истинно или ложно. ***Истинностное значение*** истинного высказывания обозначают символом „И“ или „1“, а ложного высказывания – символом „Л“ или „0“.

Пример

Истинностное значение высказывания „$\sqrt{3} = 3$“ есть „Л“, а высказывания „Любой квадрат является ромбом“ – „И“.

Истинностное значение этих высказываний определяется легко, однако в некоторых случаях эта задача решается сложнее. Например, без доказательства невозможно определить истинностное значение высказывания „Для любого натурального n число $7^{n+2} + 8^{2n+1}$ кратно 57“.

Большинство теорем (как правило истинных) в математике имеют (или могут быть записаны в) один из видов „Если A, то B“ или „A тогда и только тогда, когда B“, где A, B – некоторые условия, относящиеся к математическим понятиям. Как правило, условия A, B относятся к произвольным элементам бесконечного множества математических объектов.

Примеры

1 Если четырехугольник является ромбом, то его диагонали перпендикулярны.

2 Целое число a делится на 5 тогда и только тогда, когда последняя цифра десятичной записи a равна 0 или 5.

В теоремах вида „Если A, то B“ условие A называется ***достаточным условием*** (для B), а B – ***необходимым условием*** (для A). В теоремах вида „A тогда и только тогда, когда B“ условия A, B называются ***эквивалентными условиями***.

Примеры

1 В истинной теореме „Если натуральное число делится на 6, то оно делится на 2“ условие „натуральное число делится на 6“ является достаточным условием для условия „натуральное число делится на 2“, которое, в свою очередь, является необходимым условием для первого.

2 Поскольку вторая теорема в предыдущем примере верна, то условия „целое число a делится на 5“ и „последняя цифра в десятичной записи целого числа равна 0 или 5“ эквиваленты.

Как правило, теоремы нужно доказывать, т. е. необходимо строгое доказательство того, что соответствующее высказывание верно. В процессе доказательства используются другие верные высказывания, причем некоторые из них являются теоремами (уже доказанные), а некоторые могут быть аксиомами. ***Аксиомами*** являются высказывания, которые считаются верными без доказательства (их невозможно доказать). Они представляют собой некоторые условия, свойства (возможно, общепризнанные) для понятий и объектов, изучаемых в рамках некоторых строго построенных теорий. Например, в планиметрии аксиомами являются: „любые две различные точки определяют одну-единственную прямую“, „через любую точку, не лежащую на заданной прямой, проходит единственная прямая, параллельная заданной прямой“.

Из теоремы „Если A, то B“, именуемой ***прямой теоремой***, получаем следующие высказывания, которые могут быть и теоремами:

„Если B, то A“ – ***обратное высказывание***;

„Если не выполняется A, то не выполняется B“ – ***противоположное высказывание***;

„Если не выполняется B, то не выполняется A“ – ***высказывание обратное противоположному,*** или ***противоположное обратному***.

Примеры

1 Обратной для теоремы „Если целое число делится на 6, то оно делится на 2“ является высказывание „Если целое число a делится на 2, то оно делится на 6“, но оно ложно. В этом можно убедиться с помощью ***контрпримера***: число 4 делится на 2, но не делится на 6. Противоположная к обратной для исходной теоремы есть высказывание: „Если целое число не делится на 2, то оно не делится на 6“ и оно истинно.

2 Обратной для теоремы „Если точка пересечения диагоналей четырехугольника делит их пополам, то этот четырехугольник является параллелограммом“ является „Если четырехугольник является параллелограммом, то точка пересечения его диагоналей делит их пополам“ – и это истинное высказывание.

Если для теоремы „Если A, то B“ истинна (верна) и обратная ей теорема, то условия A и B равносильны (эквивалентны), следовательно, верна теорема „A тогда и только тогда, когда B“. Таким образом, на основе предыдущих примеров можно сделать вывод, что верна теорема „Четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда точка пересечения его диагоналей делит их пополам“.

Можно показать, что (прямая) теорема „Если A, то B“ истинна тогда и только тогда, когда истинна противоположная обратной теорема „Если не верно B, то A не верно“. Доказательство теоремы противоположной к обратной вместо доказательства прямой теоремы носит название ***метода доказательства от противного***.

Пример

Пусть требуется доказать теорему „Если целое число m не делится на 3, то оно не делится на 6“. Эквивалентным ей высказыванием является противоположная обратной теорема „Если целое число m делится на 6, то оно делится на 3“ и эта теорема доказывается просто. Так как m делится на 6, то его можно записать в виде $m = 6t$, $t \in \mathbb{Z}$, или $m = 3 \cdot (2t)$, $2t \in \mathbb{Z}$, следовательно, m делится на 3.

Другим методом доказательства теорем является ***метод математической индукции***. Если для утверждения $P(n)$, $n \in \mathbb{N}$, истинно высказывание $P(0)$ (или $P(m)$, где m – фиксированное натуральное число) и из предположения, что высказывание $P(k)$ $(m \le k)$ истинно, следует, что истинно высказывание $P(k+1)$, то истинно и высказывание $P(n)$ $(n \ge m)$, для любого $n \in \mathbb{N}$.

Задание с решением

Пусть открыли депозитный счет с первоначальной суммой G_0 д. е. под $p\,\%$ сложных процентов для каждого учетного периода. Покажем, что в конце n-го периода на счете будет $G_n = G_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ д. е.

Решение:

Применим метод математической индукции.

1) Проверим $P(1)$: $G_1 = G_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)$. Это равенство верно, так как за первый период проценты составляют $D_1 = G_0 \cdot \frac{p}{100}$. Следовательно, в конце периода на счете будет

$$G_1 = G_0 + D_1 = G_0 + G_0 \cdot \frac{p}{100} = G_0\left(1 + \frac{p}{100}\right) \text{ (д. е.)}.$$

2) Предположим, что истинно высказывание $P(k)$, то есть $G_k = G_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^k$.

Проверим, используя предположение, верно ли равенство $G_{k+1} = G_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{k+1}$.

Действительно, проценты за $(k+1)$-й период составят $D_{k+1} = G_k \cdot \frac{p}{100}$. На основании предположения получим:

$$G_{k+1} = G_k + D_{k+1} = G_k + G_k \cdot \frac{p}{100} = G_k\left(1 + \frac{p}{100}\right) = G_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^k \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = G_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{k+1}.$$

Следовательно, первоначальная формула верна для $n = k + 1$.

3) На основании метода математической индукции получаем, что для любого n, $n \in \mathbb{N}^*$,

$$G_n = G_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

§ 2 ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВЫРАЖЕНИЙ

Областью допустимых значений (**ОДЗ**) выражения называется множество действительных значений (наборов значений) переменных, для которых можно вычислить значение выражения (имеет смысл выражение). Для определения ОДЗ, как правило, ставятся следующие условия: чтобы выражения в знаменателе принимали значения, отличные от нуля, выражения под знаком корня четной степени принимали неотрицательные значения, выражения под знаком log принимали положительные значения и т. д., то есть ставится условие, чтобы выражения принимали значения, которые принадлежат областям определения соответствующих функций.

Задание с решением

Найдем ОДЗ выражения: а) $A=\dfrac{2}{x-3}+\sqrt[4]{x-2}$; б) $B=\dfrac{2x}{x^2-y^2}+\dfrac{3}{x-y}$.

Решение:

а) Находим ОДЗ выражения A из условий $x-3\neq 0$, $x-2\geq 0$. Получаем множество $M=[2,\ 3)\bigcup(3,\ +\infty)$.

б) ОДЗ выражения B состоит из всех значений x и y, удовлетворяющих условию $x^2-y^2\neq 0$.

Тождеством называется равенство $U(x,\ y,\ ...)=V(x,\ y,\ ...)$, верное для всех допустимых числовых значений переменных x, y, ... ***Тождественное преобразование*** выражения выполняется, применяя какое-либо тождество.

Для упрощения выражений применяются тождества, отражающие свойства арифметических действий, свойства степеней, функций, тождества (формулы) сокращенного умножения и т. д. Целесообразно выполнять преобразования в следующей последовательности:

1) выполняем разложение на множители числителей и знаменателей отношений и сокращаем (если возможно) каждое отношение;
2) приводим к общему знаменателю отношения при их сложении;
3) выполняем действия, соблюдая соответствующий порядок, сокращая по ходу отношения.

Задание с решением

Упростим на ОДЗ выражение: $A=\dfrac{a-b}{a^3+a^2b}\cdot\dfrac{(a^2+b^2)^2-4a^2b^2}{a^5b^2-a^3b^4}+\dfrac{2}{a^4b}$.

Решение:

ОДЗ состоит из всех значений a и b, удовлетворяющих условию $ab(a^2-b^2)\neq 0$. Следуя вышеуказанным рекомендациям, получаем:

$$A=\frac{a-b}{a^2(a+b)}\cdot\frac{(a^2-b^2)^2}{a^3b^2(a^2-b^2)}+\frac{2}{a^4b}=\frac{(a-b)(a^2-b^2)}{a^5b^2(a+b)}+\frac{2}{a^4b}=\frac{(a-b)^2}{a^5b^2}+\frac{2}{a^4b}=$$

$$=\frac{a^2-2ab+b^2+2ab}{a^5b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^5b^2}.$$

Замечание

При применении тождеств могут быть допущены ошибки, если не учитывать ОДЗ. Например, было бы неверно преобразовать (без указания области существования) выражение $\sqrt{x^2-4}$ в выражение $\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+2}$, так как выражение $\sqrt{x^2-4}$ имеет смысл при $x\in(-\infty,\ -2]\bigcup[2,\ +\infty)$, а выражение $\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+2}$ – только при $x\in[2,\ +\infty)$. Также было бы ошибочным преобразовать выражение $x\sqrt[4]{y}$ в выражение

$\sqrt[4]{x^4y}$, поскольку при $y>0,\ x<0$ выражение $x\sqrt[4]{y}$ принимает отрицательные значения, а выражение $\sqrt[4]{x^4y}$ – положительные значения.

Верное решение: $x\sqrt[4]{y}=\begin{cases}\sqrt[4]{x^4y}, \text{ если } x\ge 0,\ y\ge 0\\ -\sqrt[4]{x^4y}, \text{ если } x\le 0,\ y\ge 0.\end{cases}$

Задание с решением

Упростим на ОДЗ выражение:

а) $A=\left(\dfrac{a-4}{a+2a^{0,5}+4}:\dfrac{a^{0,5}+2}{a^{1,5}-8}\right)^{0,5}-a^{0,5}$; б) $A=\sqrt{3}\cdot 3^{\frac{x}{1+\sqrt{x}}}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{2+\sqrt{x}+x}{2(1+\sqrt{x})}}$.

Решение:

а) ОДЗ находится из условий $a\ge 0,\ a+2a^{0,5}+4\ne 0,\ a^{0,5}+2\ne 0,\ a^{1,5}-8\ne 0$, и поэтому есть множество $[0,4)\cup(4,+\infty)$.

Согласно рекомендациям, выполним сокращение отношений и их частного.

Сделав подстановку $a^{0,5}=b$, получим:

$$A=\left(\frac{b^2-2^2}{b^2+2b+2^2}\cdot\frac{b^3-8}{b+2}\right)^{0,5}-b=\sqrt{(b-2)^2}-b=|b-2|-b=$$

$$=\begin{cases}-2, \text{ если } a^{0,5}>2\\ 2-2b, \text{ если } a^{0,5}<2\end{cases}=\begin{cases}-2,\ a>4,\\ 2-2\sqrt{a},\ 0\le a<4.\end{cases}$$

б) ОДЗ является множество $[0,+\infty)$.

$$A=3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{x}{1+\sqrt{x}}}\cdot 3^{-\frac{2+\sqrt{x}+x}{2(1+\sqrt{x})}}=3^{\frac{1+\sqrt{x}+2x-2-\sqrt{x}-x}{2(1+\sqrt{x})}}=3^{\frac{-1+x}{2(1+\sqrt{x})}}=3^{\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{2(1+\sqrt{x})}}=3^{\frac{\sqrt{x}-1}{2}}.$$

Тождество можно доказать:

а) выполнив тождественные преобразования, чтобы получить из левой части правую часть или наоборот, либо чтобы привести обе части к одному и тому же выражению;

б) выполнив равносильные преобразования равенства (см. §4 модуля 9), чтобы получить известное тождество.

Задания с решением

1 Для $n\ge 0$ докажем тождество:

$$\sqrt{6m+2\sqrt{9m^2-n^2}}-\sqrt{6m-2\sqrt{9m^2-n^2}}=2\sqrt{3m-n}.$$

Решение:

ОДЗ состоит из всех значений m и n, удовлетворяющих условию $3m-n\ge 0$, так как из этого неравенства и из $n\ge 0$ получаем $m\ge 0$, откуда следует, что $9m^2-n^2=(3m-n)(3m+n)\ge 0$ и $6m-2\sqrt{9m^2-n^2}\ge 0,\ 6m+2\sqrt{9m^2-n^2}\ge 0$.

Выполним тождественные преобразования левой части:

$$\sqrt{6m+2\sqrt{9m^2-n^2}}-\sqrt{6m-2\sqrt{9m^2-n^2}}=$$

$$=\sqrt{3m+n+2\sqrt{3m+n}\sqrt{3m-n}+3m-n}-\sqrt{3m+n-2\sqrt{3m+n}\sqrt{3m-n}+3m-n}=$$

$$=\sqrt{(\sqrt{3m+n}+\sqrt{3m-n})^2}-\sqrt{(\sqrt{3m+n}-\sqrt{3m-n})^2}=$$

$= |\sqrt{3m+n}+\sqrt{3m-n}|-|\sqrt{3m+n}-\sqrt{3m-n}| =$

$= \sqrt{3m+n}+\sqrt{3m-n}-\sqrt{3m+n}+\sqrt{3m-n} = 2\sqrt{3m-n}.$

(Использовали тот факт, что в условиях задания выражения под знаком модуля принимают неотрицательные значения.)

2 Докажем тождество $(3a+\sqrt{6a-1})^{-\frac{1}{2}}+(3a-\sqrt{6a-1})^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{12a-2}}{3a-1}$, если $a>\dfrac{1}{3}$.

Решение:

Так как $a>\dfrac{1}{3}$, то $a>\dfrac{1}{6}$. Значит, $6a-1>0$ и $3a+\sqrt{6a-1}>0$, $3a-\sqrt{6a-1}>0$. Следовательно, обе части равенства принимают положительные значения.

Выполнив тождественные преобразования левой части, получим равносильные равенства:

$$\frac{\sqrt{3a-\sqrt{6a-1}}+\sqrt{3a+\sqrt{6a-1}}}{\sqrt{9a^2-(6a-1)}}=\frac{\sqrt{12a-2}}{3a-1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3a-\sqrt{6a-1}}+\sqrt{3a+\sqrt{6a-1}}}{\sqrt{(3a-1)^2}}=\frac{\sqrt{12a-2}}{3a-1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{3a-\sqrt{6a-1}}+\sqrt{3a+\sqrt{6a-1}}=\sqrt{12a-2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3a-\sqrt{6a-1}+2\sqrt{9a^2-(6a-1)}+3a+\sqrt{6a-1}=12a-2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6a+2|3a-1|=12a-2\Leftrightarrow 12a-2=12a-2.$$

Последнее равенство верно, а значит, и исходное равенство верно.

Для преобразования выражений используются и тождества, отражающие свойства логарифмов, а также тригонометрические тождества.

Задание с решением

Упростим на ОДЗ выражение:

а) $A=\log_a\sqrt{4+x}+\log_{a^2}(4-x)^3-\log_{a^4}(16-x^2)^2$;

б) $B=\dfrac{1}{2}\log_4^2 x^4+\log_2 x\cdot x^{\log_x(\log_2 x+1)}+\log_2 2x^2+2^{-3\log_{\frac{1}{2}}(\log_2 x)}$.

Решение:

а) ОДЗ состоит из всех значений a и x, удовлетворяющих условиям: $a>0$, $a\neq 1$, $4+x>0$, $4-x>0$. Откуда $a\in(0,1)\cup(1,+\infty)$, $x\in(-4,4)$.

Применив тождества $\log_x y^k=k\log_x y$, $\log_{x^k} y=\dfrac{1}{k}\log_x y$, $x>0$, $y>0$, получим

$A=\dfrac{1}{2}\log_a(4+x)+\dfrac{3}{2}\log_a(4-x)-\dfrac{2}{4}\log_a(16-x^2)=$

$=\dfrac{1}{2}\log_a(4+x)+\dfrac{3}{2}\log_a(4-x)-\dfrac{1}{2}(\log_a(4-x)+\log_a(4+x))=\log_a(4-x).$

б) Отметим, что $\log_4^2 x^4=(\log_4 x^4)^2=(4\log_{2^2} x)^2=\dfrac{16}{4}\log_2^2 x=4\log_2^2 x$ (при $x>0$).

На ОДЗ, которое является множеством $(1,+\infty)$ (так как $\log_2 x$ принимает положительные значения как аргумент логарифмической функции), получаем:

$B=2\log_2^2 x+\log_2 x\cdot(\log_2 x+1)+\log_2 2+\log_2 x^2+2^{3\log_2(\log_2 x)}=$

$=3\log_2^2 x+3\log_2 x+1+2^{\log_2(\log_2 x)^3}=3\log_2^2 x+3\log_2 x+1+\log_2^3 x=(\log_2 x+1)^3=\log_2^3 2x.$

Для вычисления значений тригонометрических функций углов, кратных $30°, 45°$, полезно запомнить их значения только для углов, равных $0°, 30°, 45°, 60°, 90°$, и в подходящих случаях применять формулы приведения и периодичность функций. Они позволяют свести вычисление значений тригонометрических функций аргумента $k\frac{\pi}{2}+\alpha,\ k\in\mathbb{Z}$, к вычислению значений этих функций угла α. В этом случае, если k – четное число, то в результате получим одноименную функцию, а если k – нечетное число, то в результате будет соответствующая кофункция. Знак результата совпадает со знаком исходной тригонометрической функции в зависимости от четверти, в которой лежит угол $k\frac{\pi}{2}+\alpha$, учитывая, что $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Задания с решением

1 Вычислим $\sin(-300°)$.

Решение:

$\sin(-300°)=\sin(-4\cdot 90°+60°)=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

2 Упростим на ОДЗ выражение $A=\frac{(1+\operatorname{tg}\alpha)^2-2\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}-\sin 2\alpha-1.$

Решение:

ОДЗ находим из условия $\alpha\in\mathbb{R},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

Заменив знаменатель на $\frac{1}{\cos^2\alpha}$, получим последовательно:

$$A=(1-\operatorname{tg}^2\alpha+2\operatorname{tg}\alpha)\cdot\cos^2\alpha-\sin 2\alpha-1=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-\sin 2\alpha-1=$$
$$=1-2\sin^2\alpha-1=-2\sin^2\alpha.$$

3 Докажем тождество $\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha}}=\cos\frac{\alpha}{2},\ \alpha\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right].$

Решение:

При $\alpha=\pi$ выражения в обеих частях принимают значение 0, значит, равенство справедливо.

При $\alpha\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$ имеем $\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}\neq 0$, так что:

$$A=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha}}=\frac{\sin\alpha(\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha})}{(\sqrt{1+\sin\alpha})^2-(\sqrt{1-\sin\alpha})^2}=\frac{\sin\alpha(\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha})}{2\sin\alpha}=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)}-\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}-\sqrt{\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\left|\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right|-\left|\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right|\right).$$

Так как $\frac{\pi}{4}\le\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$, то $\frac{\sqrt{2}}{2}\le\sin\frac{\alpha}{2}<1,\ 0<\cos\frac{\alpha}{2}\le\frac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, $\cos\frac{\alpha}{2}\le\sin\frac{\alpha}{2}$, $\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\ge 0$. Итак, $A=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\frac{\alpha}{2}.$

§ 3 МНОГОЧЛЕНЫ

3.1. Операции над одночленами, многочленами

Одночленом является рациональное алгебраическое выражение, в котором над числами и буквами выполняются только операции умножения, возведения в степень с натуральным показателем.

Степень одночлена (ненулевого) ***относительно некоторой переменной*** равна показателю соответствующей переменной при условии, что она появляется лишь один раз. ***Степень одночлена*** (относительно всех переменных) равна сумме степеней его переменных. Степень ненулевого одночлена, не содержащего переменных, равна 0.

Пример

Одночлен $\sqrt{2}X^2Y$ имеет: степень 2 относительно переменной X, степень 1 относительно переменной Y и степень 3 относительно обеих переменных.

Одночлены, у которых совпадают буквенные выражения (с точностью до порядка следования множителей), называются ***подобными одночленами*** или (при сложении) ***подобными слагаемыми***.

Сложение, вычитание, умножение, возведение в степень с натуральным показателем одночленов выполняются в соответствии со свойствами этих операций (известными для чисел), соблюдая порядок их выполнения.

Пример

$$3\cdot(2X)^2+Y^2-3X^2+7Y^2Z=3\cdot4\cdot X^2+Y^2-3X^2+7Y^2Z=9X^2+Y^2+7Y^2Z.$$

Многочлен – это алгебраическая сумма одночленов. ***Нулевой многочлен*** – это многочлен с нулевыми коэффициентами. Слагаемое, не содержащее переменных, называется ***свободным членом***.

Важные приложения имеют многочлены от одной переменной. Многочлен от одной переменной имеет ***канонический вид***, если его ненулевые члены записаны в порядке убывания их степеней. Канонический вид многочлена определяется однозначно. ***Многочлены***, имеющие один и тот же канонический вид, ***равны***.

Пример

Многочлен $P(X)=3-2X^2-X^3+7X^2-10X$ имеет канонический вид $-X^3+5X^2-10X+3$.

Максимальная степень ненулевых членов многочлена $Q(X)$ называется ***степенью*** $Q(X)$ и обозначается $\operatorname{grad}Q(X)$. Степень ненулевого многочлена не определяется. Многочлен степени n записывается в виде:

$$P(X)=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\ldots+a_1X+a_0\quad(a_n\neq0).$$

Коэффициент a_n называется ***старшим коэффициентом***, a_0 – ***свободным членом***.

Сложение и вычитание многочленов выполняются, приводя подобные члены в соответствующей сумме. Умножение двух многочленов выполняется, умножив каждый член одного многочлена на каждый член другого многочлена, затем, приводя подобные члены в полученной сумме.

Замечание

Степень произведения двух многочленов равна сумме степеней сомножителей; степень суммы двух многочленов не превосходит максимальную степень многочленов.

Пример

Рассмотрим многочлены $P(X)=X^2+X+1,\ Q(X)=X^2+X+2,\ R(X)=X^2+3.$

Каноническая форма многочлена $P(X)\cdot Q(X)-P(X)\cdot R(X)$ определяется относительно просто, если его записать в виде:

$$P(X)(Q(X)-R(X))=(X^2+X+1)(X^2+X+2-X^2-3)=(X^2+X+1)(X-1)=X^3-1.$$

Для решения некоторых задач используют представление многочлена в виде произведения множителей.

Для ***разложения на множители многочленов*** применяется:

- *метод общего множителя*: $X^5-16X^4=X^4(X-16);$
- *метод группировки*:

  $X^3-6X^2+12X-72=X^2(X-6)+12(X-6)=(X-6)(X^2+12);$
- *формулы сокращенного умножения*:

  $27X^3-1=(3X)^3-1^3=(3X-1)((3X)^2+3X\cdot1+1)=(3X-1)(9X^2+3X+1);$
- *разложение на множители квадратного трехчлена*:

  $$X^2+(\sqrt{6}-\sqrt{2})X-\sqrt{12}=(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{6}),$$

  так как решениями уравнения $x^2+(\sqrt{6}-\sqrt{2})x-\sqrt{12}=0$ являются $x_1=\sqrt{2},\ x_2=-\sqrt{6}.$
- *сочетание различных методов и приемов*:

  $64X^3+4X^2+X+1=(64X^3+1)+4X^2+X=((4X)^3+1^3)+X(4X+1)=$

  $=(4X+1)(16X^2-4X+1)+X(4X+1)=(4X+1)(16X^2-3X+1).$

Многочлены первой степени с действительными коэффициентами и многочлены второй степени (трехчлены) с действительными коэффициентами, которые нельзя представить в виде произведения множителей первой степени с действительными коэффициентами (например, $16X^2-3X+1,\ X^2+X+1$), называются ***неприводимыми*** (над $\mathbb{R}$).

Задание с решением

Разложим на неприводимые над $\mathbb{R}$ множители многочлен:

$$Q(X)=X^4-2X^3+2X^2-2X+1.$$

Решение:

$Q(X)=X^4-2X^3+2X^2-2X+1=X^4+X^2+X^2+1-2X(X^2+1)=$

$=X^2(X^2+1)+X^2+1-2X(X^2+1)=(X^2+1)(X^2-2X+1)=(X-1)^2(X^2+1).$

Если $P(X)=Q(X)\cdot H(X)$, то говорят, что ***многочлен P(X) делится на*** $Q(X)$ (на $H(X)$), а $H(X)$ (соответственно $Q(X)$) называется ***частным*** от деления $P(X)$ на $Q(X)$ (соответственно на $H(X)$).

Пример

Многочлен $P(X)=X^5-16X^4$ разлагается на множители: $X^4\cdot(X-16)$.

Следовательно, $P(X)$ делится на X^4 (соответственно на $X-16$); многочлен X^4 (соответственно $X-16$) является частным от деления многочлена $P(X)$ на многочлен $X-16$ (соответственно на X^4).

Чтобы выяснить, делится ли многочлен на другой многочлен, можно (кроме разложения на множители) применить алгоритм деления многочленов.

Задание с решением

Разделим многочлен $P(X)=8X^3-2X^2+X+3$ на бином $X+2$.

Решение:

Напомним, что слагаемые частного представляют собой частные от деления старшего члена многочлена $P(X)$ и старших членов полученных остатков на старший член многочлена $Q(X)$:

$$
\begin{array}{r|l}
-\;8X^3-2X^2+X+3 & X+2 \\ \cline{2-2}
8X^3+16X^2 \qquad\quad & 8X^2-18X+37 \\ \cline{1-1}
-\;-18X^2+X+3 & \\
-18X^2-36X \quad & \\ \cline{1-1}
-\;37X+3 & \\
37X+74 & \\ \cline{1-1}
-71 &
\end{array}
$$

Получили частное $8X^2-18X+37$ и остаток –71. Поэтому
$8X^3-2X^2+X+3=(X+2)(8X^2-18X+37)+(-71)$.

Степень остатка обязательно меньше степени делителя либо остаток равен 0, поэтому, разделив многочлен $P(X)$ на бином $X-\alpha$, остатком будет некоторое число.

Если $P(X)=a_nX^n+\ldots+a_1X+a_0$, то число $P(\alpha)=a_n\alpha^n+\ldots+a_1\alpha+a_0$ называется ***числовым значением*** $P(X)$ для $X=\alpha$.

Теорема

(теорема Безу)
Остаток от деления многочлена $P(X)$ на бином $X-\alpha$ равен числовому значению этого многочлена для $X=\alpha$, то есть $P(\alpha)$.

Задание с решением

Найдем остаток от деления многочлена $P(X)=2X^3+aX^2+aX-3$ на бином $X-2$, зная, что при делении $P(X)$ на $X+2$ получается остаток –9.

Решение:

Применим теорему Безу.

Из условия $P(-2)=-9$ получим уравнение $2\cdot(-8)+4a-2a-3=-9$, решение которого $a=5$. Таким образом, $P(X)=2X^3+5X^2+5X-3$.

Найдем остаток от деления $P(X)$ на $X-2$: $P(2)=2\cdot 8+5\cdot 4+5\cdot 2-3=43$.

Ответ: 43.

2.2. Корни многочлена

Из теоремы Безу следует, что если при делении многочлена $P(X)$ на бином $X-\alpha$ получается нулевой остаток, т. е. $P(\alpha)=0$, то многочлен $P(X)$ разлагается на множители: $P(X)=(X-\alpha)\cdot Q(X)$.

Определение

Число α называется **корнем** многочлена $P(X)$, если $P(\alpha)=0$.

Для нахождения корней многочлена $P(X)$ можно использовать ***соответствующее ему уравнение***: $P(x)=0$.

Задание с решением

Найдем корни многочлена $P(X)=X^3-6X^2+81$.

Решение:

Решим соответствующее ему уравнение $x^3-6x^2+81=0$, разложив на множители выражение из левой части:

$$x^3+27-6(x^2-9)=(x+3)(x^2-3x+9)-6(x-3)(x+3)=(x+3)(x^2-9x+27).$$

Полученное уравнение $(x+3)(x^2-9x+27)=0$ имеет единственное действительное решение $x_1=-3$ и два комплексных решения $x_{2,3}=\frac{9}{2}\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$. Таким образом, корнями многочлена являются -3 и $\frac{9}{2}\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

Полезным для нахождения корней многочлена является следующее следствие теоремы Безу:

Следствие

Число α является корнем многочлена $P(X)$ тогда и только тогда, когда $P(X)$ делится нацело на $X-\alpha$.

Задание с решением

Разложим на множители многочлен $P(X)=X^3-3X^2+4$.

Решение:

Нетрудно заметить, что $P(2)=0$, следовательно, $\alpha=2$ является корнем $P(X)$. Разделив многочлен $P(X)$ на $X-2$, получим $P(X)=(X-2)(X^2-X-2)$. Для многочлена X^2-X-2 число 2 также является корнем, поэтому $X^2-X-2=(X-2)(X+1)$.

Таким образом, $P(X)$ можно представить в виде: $P(X)=(X-2)^2(X+1)$.

Определение

Действительное число α называется ***корнем кратности*** m, $m\in\mathbb{N}^*$, многочлена $P(X)$, если $P(X)$ делится на $(X-\alpha)^m$, но не делится на $(X-\alpha)^{m+1}$.

Для многочлена из предыдущего задания $\alpha=2$ является корнем кратности 2 (***двойной корень***), а $\beta=-1$ – корнем кратности 1 (***простой корень***).

Задание с решением

а) Разложим многочлен $P(X)=X^6-2X^5+3X^4-4X^3+3X^2-2X+1$ на неприводимые над $\mathbb{R}$ (с действительными коэффициентами) множители.

б) Найдем корни многочлена и их соответствующие кратности.

Решение:

а) Нетрудно заметить, что $P(1)=0$.

Следовательно, разделив $P(X)$ на $X-1$, получим:

$$P(X)=(X-1)(X^5-X^4+2X^3-2X^2+X-1).$$

Вновь разделим многочлен $Q(X)=X^5-X^4+2X^3-2X^2+X-1$ на $X-1$ и получим $Q(X)=(X-1)(X^4+2X^2+1)$.

Итак, $P(X)=(X-1)^2(X^4+2X^2+1)=(X-1)^2(X^2+1)^2$. Многочлены $X-1$, X^2+1 неприводимы (над $\mathbb{R}$).

б) Из предыдущего разложения многочлена $P(X)$ получим:

$P(X)=(X-1)^2(X-\mathrm{i})^2(X+\mathrm{i})^2$ – разложение на неприводимые (с комплексными коэффициентами) множители. Значит, 1 и $\pm\mathrm{i}$ – двойные корни многочлена $P(X)$.

§ 4 УРАВНЕНИЯ. НЕРАВЕНСТВА. СИСТЕМЫ. СОВОКУПНОСТИ

Определение

Уравнением (**неравенством**) с одним неизвестным называется равенство (неравенство) вида $A(x) = B(x)$, ($A(x) > B(x)$, $A(x) < B(x)$, $A(x) \geq B(x)$ или $A(x) \leq B(x)$), где $A(x)$, $B(x)$ – выражения от x.

Аналогично определяются уравнения (неравенства) с несколькими неизвестными.

Определения

• **Решением** уравнения (неравенства) с одним неизвестным называется значение неизвестного, подстановка которого в уравнение (неравенство) обращает это уравнение (неравенство) в верное числовое равенство (неравенство).

• **Решением** системы из двух (трех) уравнений с двумя (тремя) неизвестными называется упорядоченная пара (a, b) (тройка (a, b, c) значений неизвестных, которая является решением каждого из уравнений системы. Другими словами, которая обращает каждое уравнение системы в верное числовое равенство.

Множество решений совокупности уравнений (***систем***) есть объединение множеств решений уравнений (систем) этой совокупности.

Область допустимых значений (***ОДЗ***) уравнения (неравенства, системы) есть множество значений неизвестного (неизвестных), при которых определены все выражения уравнения (неравенства, системы).

Решениями уравнения (неравенства, системы) могут быть только те значения неизвестного (неизвестных), которые принадлежат ОДЗ данного уравнения (неравенства, системы).

Определение

Два уравнения (неравенства, системы, совокупности) называются **равносильными**, если множества их решений равны.

При решении уравнений, неравенств, систем и совокупностей, как правило, применяются преобразования, приводящие к равносильным уравнениям, неравенствам, системам, совокупностям. Применимы также преобразования, приводящие к образованию посторонних решений, но никак не преобразования, приводящие к потере решений. Посторонние решения исключают проверкой. Если все выполненные в ходе решения преобразования равносильны, то проверка не обязательна.

Например, при возведении в степень с натуральным показателем возможно получить посторонние решения, а при делении на выражение, содержащее неизвестное, рискуем потерять решения.

Основные виды преобразований, сохраняющие на ОДЗ равносильность систем уравнений

1. Изменение порядка записи уравнений в системе уравнений.
2. Замена некоторого уравнения системы равносильным уравнением.
3. Выражение одного неизвестного из некоторого уравнения системы через остальные неизвестные и замена этого неизвестного его выражением в остальных уравнениях системы.
4. Замена одного уравнения системы уравнением, полученным при алгебраическом сложении этого уравнения с любым другим уравнением системы.

Основные методы решения уравнений

1. Применение формул для решений уравнений (например, для уравнений II степени, тригонометрических уравнений и т. д.).
2. Метод введения вспомогательного неизвестного (вспомогательных неизвестных) (или метод замены).
3. Метод разложения на множители.
4. Графический метод.

Для некоторых классов уравнений применяются и специальные методы решения. Например, деление обеих частей однородного уравнения на одно и то же ненулевое выражение, возведение в степень с натуральным показателем иррациональных уравнений, приведение некоторых тригонометрических уравнений к однородным, метод интервалов для уравнений, содержащих знак модуля и др.

При решении неравенств применяются аналогичные методы решения уравнений.

Основные методы решения уравнений, содержащих знак модуля

1. *Применение определения модуля*

Пример

$|2x-3|=7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-3=7 \\ 2x-3=-7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5, \\ x=-2. \end{array}\right.$ *Ответ*: $S=\{-2,\ 5\}$.

2. *Использование соотношения* $|f(x)|=|g(x)| \Leftrightarrow f^2(x)=g^2(x)$

Пример

$|x+2|=|3x-2| \Leftrightarrow (x+2)^2=(3x-2)^2 \Leftrightarrow x^2+4x+4=9x^2-12x+4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8x^2-16x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=2. \end{array}\right.$ *Ответ*: $S=\{0,\ 2\}$.

3. *Метод введения вспомогательного неизвестного*

Задание с решением

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $2\lg^2 x+|\lg x|-3=0$.

Решение:

ОДЗ: $x\in\mathbb{R}_+^*$. Сделаем подстановку $|\lg x|=t$. Из соотношения $\lg^2 x=|\lg x|^2$ получаем уравнение $2t^2+t-3=0$, имеющее решения $t_1=1$, $t_2=-\frac{3}{2}$. Значит, решение исходного уравнения свелось к решению совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} |\lg x|=1 \\ |\lg x|=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lg x=1 \\ \lg x=-1 \\ S_1=\varnothing \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=10 \\ x=\dfrac{1}{10}. \end{array}\right.$$

Ответ: $S=\left\{10,\ \frac{1}{10}\right\}$.

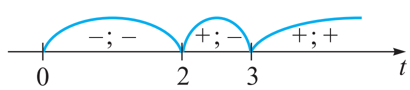
4. *Метод интервалов*

Задание с решением

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $|\sqrt{x-1}-2|+|\sqrt{x-1}-3|=x-1$.

Решение:

ОДЗ: $x\in[1,\ +\infty)$. Сделаем подстановку $\sqrt{x-1}=t$, $t\geq 0$, тогда $x-1=t^2$. Получаем и решаем уравнение $|t-2|+|t-3|=t^2$.



Нулями выражений, стоящих под знаками модулей, являются значения $t_1=2$, $t_2=3$.

а) При $t \in [0, 2)$ решаем уравнение:

$$-(t-2)-(t-3)=t^2 \Leftrightarrow t^2+2t-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1-\sqrt{6} \notin [0, 2), \\ t=-1+\sqrt{6} \in [0, 2). \end{array}\right.$$

б) При $t \in [2, 3)$ решаем уравнение $t-2-t+3=t^2 \Leftrightarrow t^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \notin [2, 3), \\ t=-1 \notin [2, 3). \end{array}\right.$

в) При $t \in [3, +\infty)$ решаем уравнение $t-2+t-3=t^2 \Leftrightarrow t^2-2t+5=0$. Имеем $S_1=\varnothing$.

Итак, единственным решением уравнения является $t=-1+\sqrt{6}$. Тогда получаем уравнение $\sqrt{x-1}=-1+\sqrt{6}$ с неизвестным x, имеющее решение $8-2\sqrt{6} \in DVA$.

Ответ: $S=\{8-2\sqrt{6}\}$.

5. *Графический метод*

В некоторых случаях использование графика функции, соответствующей заданному уравнению, упрощает нахождение его решений.

Основные методы решения неравенств, содержащих знак модуля

1. *Использование соотношения* $|f(x)| \le g(x) \Leftrightarrow -g(x) \le f(x) \le g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge -g(x) \\ f(x) \le g(x) \end{cases}$

2. *Использование соотношения* $|f(x)| \ge g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \ge g(x) \\ f(x) \le -g(x) \end{array}\right.$

3. *Метод введения вспомогательного неизвестного*

Задание с решением

Решим на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $3^{2|x|}-5\cdot 3^{|x|}+6 \le 0$.

Решение:

ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$. Подстановка $3^{|x|}=t,\ t>0$, приводит к неравенству $t^2-5t+6 \le 0$, которое имеет решение $t \in [2, 3]$, или $2 \le t \le 3$.

Теперь решим неравенство с неизвестным x:

$$2 \le 3^{|x|} \le 3 \Leftrightarrow \log_3 2 \le \log_3 3^{|x|} \le \log_3 3 \Leftrightarrow \log_3 2 \le |x| \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \le 1 \\ |x| \ge \log_3 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ \left[\begin{array}{l} x \ge \log_3 2 \\ x \le -\log_3 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ x \ge \log_3 2 \end{cases} \\ \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ x \le -\log_3 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 2 \le x \le 1 \\ -1 \le x \le -\log_3 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in [-1;\ -\log_3 2] \cup [\log_3 2;\ 1].$$

Ответ: $S=[-1;\ -\log_3 2] \cup [\log_3 2;\ 1]$.

4. *Метод интервалов*

Алгоритм решения методом интервалов неравенств, содержащих знак модуля, аналогичен алгоритму решения уравнений, содержащих знак модуля.

Основные методы решения систем уравнений

1. Метод подстановки.
2. Метод сложения.
3. Метод введения вспомогательного неизвестного (вспомогательных неизвестных) (или метод замены).
4. Графический метод.

Система уравнений называется ***совместной***, если она имеет решения.

Система уравнений называется ***совместной и определенной***, если она имеет конечное множество решений, и ***совместной и неопределенной***, если она имеет бесконечное множество решений.

Система уравнений называется ***несовместной***, если она не имеет решений.

Задание с решением

1 Найдем значения действительного параметра m, при которых система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=m \\ x-y=m \end{cases}$ имеет единственное решение.

Решение:

$$\begin{cases} x^2+y^2=m \\ x-y=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=m \\ x=y+m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y+m)^2+y^2=m \\ x=y+m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2+2ym+m^2-m=0, \\ x=y+m. \end{cases}$$

Решим уравнение с параметром $2y^2+2ym+m^2-m=0$.

$\Delta=4m^2-4\cdot 2(m^2-m)=4m(2-m)$.

Уравнение имеет единственное решение при $\Delta=0$.

Следовательно, $4m(2-m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0, \\ m=2. \end{array}\right.$

1) При $m=0$ получаем $y=0$, $x=y+m=0$.

Следовательно, при $m=0$ исходная система имеет единственное решение (0, 0).

2) При $m=2$ получаем $y=-\dfrac{2m}{4}=-1$, $x=y+m=1$.

Значит, при $m=2$ исходная система имеет единственное решение $(1,-1)$.

Ответ: При $m=0$, $S=\{(0,\ 0)\}$; при $m=2$, $S=\{(1,-1)\}$.

2 Решим на множестве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ систему уравнений $\begin{cases} x+xy+y=11, \\ x^2y+xy^2=30. \end{cases}$

Решение:

Эта система – симметрическая. Подстановка $\begin{cases} x+y=u \\ xy=v \end{cases}$ приводит к системе уравнений $\begin{cases} u+v=11 \\ uv=30, \end{cases}$ имеющей решения $u_1=6$, $v_1=5$ и $u_2=5$, $v_2=6$.

Таким образом, решение исходной системы свелось к решению совокупности из двух систем уравнений: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=5, \\ xy=6; \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=6, \\ xy=5. \end{cases} \end{array}\right.$

Первая система уравнений имеет решения (2, 3) и (3, 2), а вторая система имеет решения (1, 5) и (5, 1).

Ответ: $S=\{(2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (1,\ 5),\ (5,\ 1)\}$.

Приведем еще два вида преобразований, сохраняющих на ОДЗ равносильность:

1. $E_1(x)\cdot E_2(x)\cdot\ldots\cdot E_n(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} E_1(x)=0,\\ E_2(x)=0,\\ \ldots\ldots\ldots\\ E_n(x)=0;\end{array}\right.$ **2.** $(E_1(x))^2=(E_2(x))^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} E_1(x)=E_2(x),\\ E_1(x)=-E_2(x).\end{array}\right.$

При решении систем (совокупностей) неравенств применяются методы, аналогичные методам решения неравенств.

Задание с решением

Решим на множестве $\mathbb{R}$ систему неравенств $\begin{cases}\log_x(x+2)>2,\\ \log_2(9-2^x)\ge 3-x.\end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases}\log_x(x+2)>2\\ \log_2(9-2^x)\ge 3-x\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases}0<x<1\\ x+2<x^2\\ 9-2^x>0\\ 9-2^x\ge 2^{3-x}\end{cases}\\ \begin{cases}x>1\\ x+2>x^2\\ 9-2^x>0\\ 9-2^x\ge 2^{3-x}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases}x\in(0,1)\\ x\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)\\ x\in(-\infty,\log_2 9)\\ x\in[0,3]\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(1,+\infty)\\ x\in(-1,2)\\ x\in(-\infty,\log_2 9)\\ x\in[0,3]\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} S=\varnothing,\\ x\in(1,2).\end{array}\right.$$

Ответ: $S=(1,2)$.

Решения уравнений, неравенств, систем и совокупностей уравнений (неравенств) необходимо найти с учетом множества, на котором они отыскиваются.

Задания с решением

1 Решим на множестве **C** уравнение $3x^3+2x^2+2x+3=0$.

Решение:

Поскольку уравнение – симметрическое нечетной степени, то $x=-1$ – его решение.

Разложим на множители и получим: $3x^3+2x^2+2x+3=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x+1)(3x^2-x+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0\\ 3x^2-x+3=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1,\\ x=\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{35}}{6},\\ x=\dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{35}}{6}.\end{array}\right.$$

Ответ: $S=\left\{-1,\ \dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{35}}{6},\ \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{35}}{6}\right\}$.

2 Решим на множестве **C** уравнение $x^2-(2+\mathrm{i})x-1+7\mathrm{i}=0$.

Решение:

$\Delta=(2+\mathrm{i})^2-4(-1+7\mathrm{i})=7-24\mathrm{i}$. Тогда

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{7-24\mathrm{i}}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{7^2+24^2}+7}{2}}-\mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{7^2+24^2}-7}{2}}\right)=\pm(4-3\mathrm{i}).$$

Получаем $x_1=\dfrac{(2+\mathrm{i})+(4-3\mathrm{i})}{2}=3-\mathrm{i},\ x_2=\dfrac{(2+\mathrm{i})-(4-3\mathrm{i})}{2}=-1+2\mathrm{i}.$

Ответ: $S=\{3-\mathrm{i},-1+2\mathrm{i}\}$.

§ 5 ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

5.1. Понятие числовой последовательности. Монотонные последовательности. *Ограниченные последовательности

$(x_n)_{n\geq 1},\ x_n = \dfrac{n+3}{n+4}$

$(x_n)_{n\geq 1},\ x_n = \dfrac{1}{n+1}$

Последовательностью действительных чисел, или ***числовой последовательностью*** называется числовая функция $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$.

Обозначим $f(n) = x_n$. Тогда последовательность может быть записана в виде $x_1, x_2, x_n, \ldots$ или $(x_n)_{n\geq 1}$.

Последовательность $(x_n)_{n\geq 1}$ называется ***возрастающей*** (соответственно ***убывающей***), если $x_n \leq x_{n+1}$ (соответственно $x_n \geq x_{n+1}$), $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Последовательность $(x_n)_{n\geq 1}$ называется ***строго возрастающей*** (соответственно ***строго убывающей***), если $x_n < x_{n+1}$ (соответственно $x_n > x_{n+1}$), $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Возрастающие и убывающие последовательности называются ***монотонными***.

Строго возрастающие и строго убывающие последовательности называются ***строго монотонными***.

Последовательность действительных чисел $(x_n)_{n\geq 1}$ называется ***ограниченной***, если выполнено одно из следующих условий:

а) существуют числа $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, такие, что $a \leq x_n \leq b$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

б) существует число $M \in \mathbb{R}_+$ такое, что $|x_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5.2. Арифметическая и геометрическая прогрессии

Определение

Арифметической прогрессией называется числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, получается из предыдущего прибавлением одного и того же числа.

Любой член арифметической прогрессии $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots$, начиная со второго, равен среднему арифметическому двух соседних с ним членов, то есть для любого $n \geq 2$,

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Общий член арифметической прогрессии $(a_n)_{n\geq 1}$ задается формулой:

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \text{ где } d \text{ – разность этой прогрессии.}$$

Сумма первых n членов арифметической прогрессии $(a_n)_{n\geq 1}$ вычисляется по формуле:

$$S_n = \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Определение

Геометрической прогрессией называется числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый член, начиная со второго, получается из предыдущего умножением на одно и то же число.

Любой член геометрической прогрессии с положительными членами $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n, b_{n+1}, \ldots$, начиная со второго, равен среднему геометрическому соседних с ним членов, то есть для любого $n \geq 2$,

$$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}.$$

Общий член геометрической прогрессии $(b_n)_{n\geq 1}$ задается формулой:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \text{ где } q \text{ – знаменатель этой прогрессии.}$$

Сумма первых n членов геометрической прогрессии $(b_n)_{n\geq 1}$ вычисляется по формуле:

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q},\ q \neq 1.$$

Сумма бесконечно убывающей арифметической прогрессии вычисляется по формуле:

$$S = \frac{b_1}{1-q},\ |q| < 1.$$

Задания с решением

1 Велосипедист проехал за первый час 5 км. За каждый последующий час он преодолевал на 2 км больше, чем за предыдущий час. За сколько часов велосипедист проехал 32 км?

Решение:

Расстояния, пройденные велосипедистом за каждый час, составляют арифметическую прогрессию, первый член которой равен $a_1 = 5$, а разность равна $q = 2$. Используя формулу вычисления первых n членов арифметической прогрессии, получаем уравнение $\frac{2 \cdot 5 + 2(n-1)}{2} \cdot n = 32 \Leftrightarrow n^2 + 4n - 32 = 0$, решениями которого являются $n_1 = 4,\ n_2 = -8$ (которое не удовлетворяет условию задачи). *Ответ*: За 4 часа.

2 При каких значениях $x \in \mathbb{R}_+^*$ числовая последовательность $\log_8 x, (\log_8 x)^2, ..., (\log_8 x)^n, ...$ является бесконечно убывающей геометрической прогрессией, сумма которой равна $\frac{1}{2}$?

Решение:

Числовая последовательность $\log_8 x, (\log_8 x)^2, ..., (\log_8 x)^n, ...$ является геометрической прогрессией со знаменателем $q = \log_8 x$. Если $|\log_8 x| < 1$, то имеем бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, сумма которой равна $\frac{\log_8 x}{1-\log_8 x}$. Из условия задачи получаем логарифмическое уравнение:

$$\frac{\log_8 x}{1-\log_8 x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\log_8 x = 1 - \log_8 x \Leftrightarrow 3\log_8 x = 1,\ \text{откуда}\ x = 8^{\frac{1}{3}} = 2.$$

Поскольку $|\log_8 2| = \left|\frac{1}{3}\right| < 1$, следует, что $x = 2$ есть значение, при котором последовательность действительных чисел $\log_8 x, (\log_8 x)^2, ..., (\log_8 x)^n, ...$ или последовательность $\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, ..., \frac{1}{3^n}, ...$ образует бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, для которой $b_1 = \frac{1}{3}$ и $q = \frac{1}{3}$. *Ответ*: $x = 2$.

5.3. Предел последовательности. Подпоследовательности

Определения

- **Окрестностью** точки $a \in \mathbb{R}$ называется интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.
- **Определение предела последовательности „на языке окрестностей“**

Пусть $(x_n)_{n\geq 1}$ – последовательность действительных чисел и a – действительное число. Число a называется **пределом** последовательности $(x_n)_{n\geq 1}$, если в любую окрестность числа a попадают все члены последовательности, начиная с некоторого номера.

Предел последовательности обозначают: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

- **Определение предела последовательности „на языке ε“**

Число $a \in \mathbb{R}$ называется **пределом** последовательности $(x_n)_{n\geq 1}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, при котором для любого $n \in \mathbb{N}^*$, $n > n_\varepsilon$, верно неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Пусть $(x_n)_{n\geq 1}$ – последовательность действительных чисел, $(n_k)_{k\geq 1}$ – строго возрастающая последовательность чисел, $n_k \in \mathbb{N}^*$. Последовательность $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ называется ***подпоследовательностью*** последовательности $(x_n)_{n\geq 1}$.

Говорят, что последовательность действительных чисел $(x_n)_{n\geq 1}$ имеет ***бесконечный предел*** (обозначают $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, при котором для любого $n > n_\varepsilon$ верно неравенство $|x_n| > \varepsilon$.

Последовательность, имеющая конечный предел, называется ***сходящейся последовательностью***. Последовательность, не являющаяся сходящейся (то есть последовательность, у которой нет предела или предел равен бесконечности), называется ***расходящейся последовательностью***.

Задание с решением

Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+1}{n^2+4} = 3.$

Решение:

По определению предела последовательности „на языке ε“ нужно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует число $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, при котором для любого $n \in \mathbb{N}^*$, $n > n_\varepsilon$, верно неравенство $\left|\dfrac{3n^2+1}{n^2+4} - 3\right| < \varepsilon.$

Имеем: $\left|\dfrac{3n^2+1}{n^2+4} - 3\right| = \left|\dfrac{3n^2+1-3n^2-12}{n^2+4}\right| = \left|\dfrac{-11}{n^2+4}\right| = \dfrac{11}{n^2+4}.$

Оцениваем: $\dfrac{11}{n^2+4} < \dfrac{11}{n^2} < \dfrac{11}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Пусть ε – любое положительное число. Если возьмем число n_ε, при котором $\forall n > n_\varepsilon$ верно неравенство $\dfrac{11}{n} < \varepsilon$, то для этих чисел n верно неравенство $\dfrac{11}{n^2+4} < \varepsilon$. Значит, в качестве n_ε можно взять число $n_\varepsilon = \left[\dfrac{11}{\varepsilon}\right] + 1.$

Получили, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon = \left[\dfrac{11}{\varepsilon}\right] + 1 \in \mathbb{N}^*$ такое, что $\forall n > n_\varepsilon$ выполняется неравенство $\left|\dfrac{3n^2+1}{n^2+4} - 3\right| < \varepsilon.$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+1}{n^2+4} = 3.$

5.4. Число *e*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}7182818284590\ldots$$

Задание с решением

Вычислим $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{n}\right)^n.$

Решение:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[1+\left(\cos\frac{1}{n}-1\right)\right]^n = \lim_{n\to\infty}\left[1+\left(\cos\frac{1}{n}-1\right)\right]^{\frac{1}{\cos\frac{1}{n}-1}\left(\cos\frac{1}{n}-1\right)\cdot n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\left[1+\left(\cos\frac{1}{n}-1\right)\right]^{\frac{1}{\cos\frac{1}{n}-1}}\right\}^{\left(\cos\frac{1}{n}-1\right)\cdot n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{n\left(\cos\frac{1}{n}-1\right)} = \lim_{n\to\infty} e^{n\left(-2\sin^2\frac{1}{2n}\right)} = \lim_{n\to\infty} e^{-2\cdot\frac{\sin^2\frac{1}{2n}}{\frac{1}{4n^2}\cdot 4n^2}n} = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{2n}{4n^2}\left(\frac{\sin\frac{1}{2n}}{\frac{1}{2n}}\right)^2} = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{2n}} = 1.$$

§ 6 ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

6.1. Предел функции

Определения

• Пусть E – подмножество множества $\mathbb{R}$ ($E \subseteq \mathbb{R}$). Точка x_0 (конечная или бесконечная) называется **предельной точкой** множества E, если для любой окрестности V точки x_0 верно соотношение $V \bigcap (E \setminus \{x_0\}) \neq \varnothing$ или если существует последовательность $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n \in E \setminus \{x_0\}$, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

• Пусть $E \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon E \to \mathbb{R}$ – некоторая функция и x_0 – предельная точка множества E. Говорят, что число l (конечное или бесконечное) называется **пределом** функции f в точке x_0 (обозначается $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$), если для любой окрестности U числа l существует окрестность V числа x_0 такая, что для любого $x \in V \bigcap (E \setminus \{x_0\})$ следует, что $f(x) \in U$.

• Число $l_л$ (соответственно $l_п$) называется **левым пределом** (соответственно **правым пределом**) функции f в точке x_0, если для любой окрестности U точки $l_л$ (соответственно $l_п$) существует окрестность V точки x_0 такая, что для любого $x < x_0$ (соответственно для любого $x > x_0$), $x \in V \bigcap (E \setminus \{x_0\})$ следует, что $f(x) \in U$.

• Числа $l_л = l_л(x_0)$, $l_п = l_п(x_0)$ называются **односторонними пределами** функции f в точке x_0 и обозначаются $l_л(x_0) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)$, $l_п(x_0) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)$.

6.1.1. Критерий существования предела функции в точке

Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}$ – некоторая функция и x_0 – предельная точка множества E.

а) *Критерий „на языке $\varepsilon - \delta$“*

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ $(x_0, l \in \mathbb{R})$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x \in E \setminus \{x_0\}$ из неравенства $|x - x_0| < \delta$ следует, что $|f(x) - l| < \varepsilon$.

б) *Критерий „на языке последовательностей“*

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$, если $\forall (x_n)_{n\geq 1}$, $x_n \in E \setminus \{x_0\}$, из $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

в) *Критерий „на языке односторонних пределов“*

Пусть x_0 – предельная точка множеств $E \bigcap (-\infty, x_0)$ и $E \bigcap (x_0, +\infty)$. Функция f имеет предел в точке x_0 и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ тогда и только тогда, когда функция f имеет в точке x_0 односторонние пределы $l_л(x_0)$, $l_п(x_0)$ и $l_л(x_0) = l_п(x_0) = l$.

6.1.2. Операции над пределами функций. Свойства пределов функций

Операции над пределами функций

Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}$, $g\colon E \to \mathbb{R}$ – некоторые функции, где $E \subseteq \mathbb{R}$, x_0 – предельная точка множества E, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$ и имеют смысл следующие операции:

$$a+b,\ a-b,\ ab,\ \frac{a}{b},\ a^b.$$

Тогда:

1) $\lim\limits_{x\to x_0}[cf(x)]=ca \ \ (c\in\mathbb{R})$; 2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=a+b$, $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=a-b$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=a\cdot b$; 4) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{a}{b}$;

5) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}=a^b$, где $f(x)>0,\ \forall x\in E$.

Свойства пределов функций

1° Если существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, то этот предел единственный.

2° Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a,\ a\in\mathbb{R}$, то существует окрестность V точки x_0 такая, что функция f ограничена на множестве $V\bigcap E$.

3° Если существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ и $f(x)\le g(x),\ \forall x\in E$ или в некоторой окрестности точки x_0 из E, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\le\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

4° Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ и если функция g ограничена в некоторой окрестности точки x_0 из E, то функция $f\cdot g$ имеет предел в точке x_0 и $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=0$.

5° Пусть $u\colon D\to E,\ f\colon E\to\mathbb{R}$ – некоторые функции, где $D,\ E\subseteq\mathbb{R}$, и x_0 – предельная точка множества D. Если $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=y_0,\ u(x)\ne y_0$ для любого $x\in D,\ x\ne x_0$, и существует $\lim\limits_{y\to y_0} f(y)$, то сложная функция $f\circ u$ имеет предел в точке x_0 и $\lim\limits_{x\to x_0} f(u(x))=\lim\limits_{y\to y_0} f(y)$. Подстановка $y=u(x)$ из последнего равенства называется ***заменой переменной***.

6.1.3. Замечательные пределы. Другие пределы

Замечательные пределы (применяются при вычислении пределов функции)

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 2) а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

Другие пределы (часто применяемые при вычислении пределов функции)

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a,\ a>0$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=1$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$;

8) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}=0,\ \alpha>0$;

9) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^\alpha}{a^x}=0,\ \alpha>0,\ a>1$;

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0,\ a>1$

Все указанные выше пределы верны, на основании свойства 5° предела сложной функции, и в том случае, когда переменная x является функцией $x=u(t)$, предел которой при $t\to t_0$ равен нулю или бесконечности.

6.1.4. Неопределенности в операциях над пределами функций

Вычисления пределов функций приводят к неопределенностям вида:

$$\boxed{\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 1^{\infty},\ 0^{0},\ \infty^{0}}.$$

Для раскрытия неопределенностей такого вида рекомендуется:

- разложить, если возможно, выражения на множители и сократить на общий множитель или применить замечательные пределы или другие пределы $\left(\text{случай } \frac{0}{0}\right)$;
- вынести за скобки числителя и знаменателя отношения, как общий множитель, функции, дающие наибольший рост на бесконечность, и применить, если это необходимо, замечательные или другие пределы $\left(\text{случай } \frac{\infty}{\infty}\right)$;
- привести к общему знаменателю, избавиться от иррациональности при помощи сопряженных выражений, применить равносильные преобразования и т. д. (случай $\infty-\infty$);
- применить тождества $u\cdot v=\dfrac{u}{\frac{1}{v}}=\dfrac{v}{\frac{1}{u}}$ (случай $0\cdot\infty$), $u^{v}=e^{v\ln u}$ (случаи 1^{∞}, 0^{0}, ∞^{0}) и перейти к неопределенности вида $0\cdot\infty$;
- использовать замечательные пределы, относящиеся к числу *e* (случай 1^{∞}).

Если $[u(x)]^{v(x)}$ – неопределенность вида 1^{∞}, то полезно применить формулу

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}[u(x)]^{v(x)}=(1^{\infty})=e^{\lim\limits_{x\to x_0}[u(x)-1]v(x)}}.$$

6.1.5. Таблица определенностей

1) $\infty+a=\infty$	10) $a\cdot(-\infty)=+\infty\ \ (a<0)$	18) $a^{+\infty}=+\infty$, если $a>1$
2) $(+\infty)+a=+\infty$	11) $(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$	19) $a^{-\infty}=0$, если $a>1$
3) $(-\infty)+a=-\infty$	12) $(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty$	20) $a^{+\infty}=0$, если $0<a<1$
4) $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$	13) $(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty$	21) $a^{-\infty}=+\infty$, если $0<a<1$
5) $(-\infty)+(-\infty)=-\infty$	14) $\infty\cdot\infty=\infty$	22) $(+\infty)^{a}=+\infty$, если $a>0$
6) $a\cdot\infty=\infty\ \ (a\neq 0)$	15) $\frac{a}{\infty}=0$	23) $(+\infty)^{a}=0$, если $a<0$
7) $a\cdot(+\infty)=+\infty\ \ (a>0)$	16) $\frac{\infty}{a}=\infty$	24) $0^{+\infty}=0$
8) $a\cdot(-\infty)=-\infty\ \ (a>0)$	17) $\frac{a}{0}=\infty\ \ (a\neq 0)$	25) $(+\infty)^{+\infty}=+\infty$
9) $a\cdot(+\infty)=-\infty\ \ (a<0)$		26) $(+\infty)^{-\infty}=0$

Задания с решением

1 Вычислим:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2-4x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{2x+3}-\dfrac{x^2+x}{2x-1}\right)$.

Решение:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2-4x+1}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(2x+1)}{(x-1)(3x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+1}{3x-1}=\dfrac{3}{2}.$

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{2x+3}-\dfrac{x^2+x}{2x-1}\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x^2-1)(2x-1)-(2x+3)(x^2+x)}{(2x+3)(2x-1)}=$

$$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-6x^2-5x+1}{4x^2+4x-3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(-6-\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(4+\dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-6-\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{4+\dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{x^2}}=-\frac{3}{2}.$$

2 Вычислим:

а) $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt{25+2x}-3}{\sqrt[3]{x}+2}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{6+3x}-\sqrt[3]{36-9x}}{\sqrt[4]{12+4x}-2}$.

Решение:

а) Избавимся от иррациональности при помощи сопряженных выражений:

$$\lim\limits_{x\to-8}\frac{\sqrt{25+2x}-3}{\sqrt[3]{x}+2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to-8}\left[\frac{(\sqrt{25+2x})^2-3^2}{(\sqrt[3]{x})^3+2^3}\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt{25+2x}+3}\right]=$$

$$=\lim\limits_{x\to-8}\frac{2(x+8)(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4)}{(x+8)(\sqrt{25+2x}+3)}=2\lim\limits_{x\to-8}\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt{25+2x}+3}=2\cdot\frac{12}{6}=4.$$

б) Избавимся от иррациональности при помощи сопряженных выражений:

$$\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{6+3x}-\sqrt[3]{36-9x}}{\sqrt[4]{12+4x}-2}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(\sqrt{6+3x}-3)-(\sqrt[3]{36-9x}-3)}{\sqrt[4]{12+4x}-2}=$$

$$=\lim\limits_{x\to1}\left[\frac{(\sqrt{6+3x})^2-3^2}{\sqrt{6+3x}+3}-\frac{(\sqrt[3]{36-9x})^3-3^3}{\sqrt[3]{(36-9x)^2}+3\sqrt[3]{36-9x}+3^2}\right]\cdot\frac{\sqrt[4]{12+4x}+2}{(\sqrt[4]{12+4x})^2-2^2}=$$

$$=\lim\limits_{x\to1}\left[\frac{3(x-1)}{\sqrt{6+3x}+3}-\frac{9(x-1)}{\sqrt[3]{(36-9x)^2}+3\sqrt[3]{36-9x}+9}\right]\cdot\frac{(\sqrt[4]{12+4x}+2)(\sqrt{12+4x}+4)}{(\sqrt{12+4x})^2-4^2}=$$

$$=\lim\limits_{x\to1}\left[\frac{3}{\sqrt{6+3x}+3}-\frac{9}{\sqrt[3]{(36-9x)^2}+3\sqrt[3]{36-9x}+9}\right]\cdot\frac{(\sqrt[4]{12+4x}+2)(\sqrt{12+4x}+4)}{4}=$$

$$=\left[\frac{3}{3+3}+\frac{9}{9+9+9}\right]\cdot\frac{(2+2)(4+4)}{4}=\frac{20}{3}.$$

3 Вычислим:

а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin4x+2\operatorname{tg}3x}{e^{-3x}+e^{5x}-2}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos5x-\cos3x}{\operatorname{tg}^2(\sin x)}$.

Решение:

$$\text{а) }\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin4x+2\operatorname{tg}3x}{e^{-3x}+e^{5x}-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{4\dfrac{\sin4x}{4x}+6\dfrac{\operatorname{tg}3x}{3x}}{-3\dfrac{e^{-3x}-1}{-3x}+5\dfrac{e^{5x}-1}{5x}}=\frac{4\cdot1+6\cdot1}{-3\ln e+5\ln e}=5.$$

$$\text{б) }\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos5x-\cos3x}{\operatorname{tg}^2(\sin x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to0}\cos^2(\sin x)\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos5x-\cos3x}{\sin^2(\sin x)}=$$

$$=1\cdot\lim_{x\to0}\frac{-2\sin x\cdot\sin 4x}{\sin^2(\sin x)}=-2\lim_{x\to0}\frac{4\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{\sin 4x}{4x}}{\left[\dfrac{\sin(\sin x)}{\sin x}\right]^2\cdot\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2}=-2\cdot\frac{4\cdot1\cdot1}{1^2\cdot1^2}=-8.$$

4 Вычислим:

а) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+3x}{1+5x}\right)^{\frac{1}{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 3x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Решение:

а) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+3x}{1+5x}\right)^{\frac{1}{x}}=(1^\infty)=\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{1+3x}{1+5x}-1\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left[\left(1+\dfrac{-2x}{1+5x}\right)^{\frac{1+5x}{-2x}}\right]^{\frac{-2x}{1+5x}\cdot\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-2}{1+5x}}=e^{-2}.$

б) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 3x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=(1^\infty)=e^{\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\cos x}{\cos 3x}-1\right)\cdot\frac{1}{x^2}}=e^4$, поскольку

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos x}{\cos 3x}-1\right)\cdot\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos 3x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}=1\cdot\lim_{x\to0}\frac{-2\sin\dfrac{x-3x}{2}\cdot\sin\dfrac{x+3x}{2}}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin x\cdot\sin 2x}{x^2}=2\cdot\lim_{x\to0}2\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}=4\cdot1\cdot1=4.$$

5 Найдем значения параметров $a,b\in\mathbb{R}$, при которых $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+1}+ax+b)=3.$

Решение:

Если $a\le0$, то данный предел равен $+\infty$, и задание решения не имеет.

Пусть $a>0$. Тогда:

$$3=\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+1}+ax+b)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2+1-(ax+b)^2}{\sqrt{4x^2+1}-(ax+b)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left[(4-a^2)x-2ab+\dfrac{1-b^2}{x}\right]}{x\left(-\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}-a-\dfrac{b}{x}\right)}=\begin{cases}\infty, & \text{если } 4-a^2\ne0\\ \dfrac{2ab}{a+2}, & \text{если } 4-a^2=0\end{cases}\Rightarrow\frac{2ab}{a+2}=3,$$

$a^2=4\Rightarrow a=2,\ b=3.$

6 Найдем значения параметра $m\in\mathbb{R}$, при которых функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin m(x-1)}{x-1}+3x^2, & \text{если } x<1,\\ \sqrt{x+3}+2m^2x, & \text{если } x\ge1,\end{cases}$ имеет предел в точке $x_0=1$, а затем вычислим значение этого предела.

Решение:

Так как $l_л(1)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\left[m\dfrac{\sin m(x-1)}{m(x-1)}+3x^2\right]=m+3,\ l_п(1)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}(\sqrt{x+3}+2m^2x)=2+2m^2,$

то функция f имеет предел в точке $x_0=1$, если $m+3=l_л(1)=l_п(1)=2+2m^2$.

Следовательно, $2m^2-m-1=0$, то есть $m=-\dfrac{1}{2}$ или $m=1$.

Если $m=-\frac{1}{2}$, то $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=l_л(1)=l_п(1)=\frac{5}{2}$.

Если, однако, $m=1$, то $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=l_л(1)=l_п(1)=4$.

7 Докажем, что если $a+b=\pi$, то $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(ax+b)}{x-1}=-a$.

Доказательство:

Если $a+b=\pi$, то для этого предела имеем случай $\frac{0}{0}$ и, так как $b=\pi-a$, из формул приведения получаем:

$$\sin(ax+b)=\sin(ax+\pi-a)=\sin[\pi+a(x-1)]=-\sin a(x-1).$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(ax+b)}{x-1}=-\lim\limits_{x\to 1} a\cdot\frac{\sin a(x-1)}{a(x-1)}=-a\cdot 1=-a$.

8 Предприятие производит минеральную воду. Автоматические линии розлива получают минеральную воду из накопительного бассейна, в котором в начале было 1 000 л первичного материала. Согласно производственной технологии, за каждую секунду из бассейна откачивают 10% содержимого и одновременно из артезианского колодца вливают в бассейн 120 л минеральной воды. Сколько литров минеральной воды будет в накопительном бассейне через неограниченный период времени, если автоматические линии будут работать без остановок?

Решение:

Пусть $f(n)$ – количество воды (в литрах) в бассейне в первую секунду, где $f(0)=1000\ l$. Тогда на $(n+1)$-й секунде будет:

$$f(n+1)=f(n)-0{,}1\cdot f(n)+120=0{,}9f(n)+120.$$

Если $a=\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$, то такой же предел будем иметь и для $f(n+1)$, то есть $a=\lim\limits_{n\to\infty} f(n+1)$.

Переходя к пределу при $n\to\infty$ в равенстве $f(n+1)=0{,}9\cdot f(n)+120$, получаем $\lim\limits_{n\to\infty} f(n+1)=0{,}9\cdot\lim\limits_{n\to\infty} f(n)+120$, то есть $a=0{,}9a+120$.

Из этого уравнения найдем, что $a=1200\ l$. Это и есть количество воды, которое будет в накопительном бассейне через неограниченный период времени.

9 В начале года вкладчик открыл счет в банке на 10 000 леев в режиме сложных процентов с годовой капитализацией и процентной ставкой в 10%. В конце каждого года он снимает со счета постоянную сумму – 800 леев. Сколько денег будет на счету этого вкладчика через n лет? Истощится ли данный счет при $n\to\infty$?

Решение:

Пусть $f(n)$ – сумма денег на данном счету в начале $(n+1)$-го года. Тогда

$$f(n+1)=f(n)+0{,}1f(n)-800=1{,}1f(n)-800,$$

где $f(0)=10\,000$.

Из формулы $f(n+1)=1{,}1f(n)-800$ при $n=0, 1, 2, \ldots$ получаем последовательно соотношения:

$$f(1)=1{,}1f(0)-800;$$
$$f(2)=1{,}1f(1)-800;$$
$$f(3)=1{,}1f(2)-800;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Подставив полученные соотношения одно в другое и обозначив $q = 1{,}1$, приходим к выводу, что:

$$f(1) = q \cdot f(0) - 800;$$
$$f(2) = q^2 \cdot f(0) - 800(1+q);$$
$$f(3) = q^3 \cdot f(0) - 800(1+q+q^2);$$
....

Предположим, что $f(n) = q^n \cdot f(0) - 800(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}),\ n \geq 1.$

Тогда

$$f(n+1) = q \cdot f(n) - 800 = q[q^n \cdot f(0) - 800(1+q+\ldots+q^{n-1})] - 800 =$$
$$= q^{n+1} \cdot f(0) - 800(1+q+\ldots+q^{n-1}+q^n).$$

На основании метода математической индукции делаем вывод, что равенство $f(n) = q^n \cdot f(0) - 800(1+q+\ldots+q^{n-1})$ верно для любого натурального числа $n \geq 1$.

Вычислив сумму полученной геометрической прогрессии и учитывая, что $f(0) = 10\,000$, а $q = 1{,}1$, получаем:

$$f(n) = q^n \cdot f(0) - 800 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = (1{,}1)^n \cdot f(0) + 800\frac{1-(1{,}1)^n}{0{,}1} =$$
$$= (1{,}1)^n \cdot 10\,000 + 8\,000(1-(1{,}1)^n) = (1{,}1)^n \cdot 2\,000 + 8\,000.$$

Итак, через n лет на данном счету будет:

$$f(n) = 2\,000(4+(1{,}1)^n) \text{ (леев)},\ n \geq 0.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}(1{,}1)^n = +\infty$, получаем $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = 2\,000(4+\lim\limits_{n\to\infty}(1{,}1)^n) = +\infty$, следовательно, счет данного вкладчика не истощится никогда.

6.2. Непрерывные функции

Определения

• Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}$ – некоторая функция и x_0 – некоторая точка множества E. Функция f называется **непрерывной в точке** x_0, если существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и этот предел равен $f(x_0)$, то есть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

• Точка x_0 называется **точкой непрерывности** функции f, если функция f непрерывна в точке $x_0 \in E$.

• Функция f, непрерывная в любой точке множества $A \subseteq E$, называется **непрерывной на множестве** A.

• Функция f называется **разрывной** в точке x_0, если она не является непрерывной в точке $x_0 \in E$. В таком случае точка x_0 называется **точкой разрыва**. Точка разрыва x_0 называется **точкой разрыва первого рода** функции f, если односторонние пределы функции f в точке x_0 существуют и конечны, однако $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$ или $f(x_0-0) = f(x_0+0) \neq f(x_0)$.

• Разность $f(x_0+0) - f(x_0-0)$ называется **скачком** функции f в точке x_0, если существуют конечные односторонние пределы $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$.

• Точка разрыва x_0 называется **точкой разрыва второго рода** функции f, если она не является точкой разрыва первого рода, то есть, если хотя бы один из односторонних пределов $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ равен бесконечности или не существует.

• Функция f называется **непрерывной слева** (соответственно **непрерывной справа**) в точке x_0, если в точке x_0 существует предел слева $f(x_0-0)$ (соответственно предел справа $f(x_0+0)$) и, кроме того, $f(x_0-0) = f(x_0)$ (соответственно $f(x_0+0) = f(x_0)$).

Теорема 1

Функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ $(E \subseteq \mathbb{R})$ непрерывна в точке $x_0 \in E$ (x_0 – внутренняя точка множества E) тогда и только тогда, когда она непрерывна и слева, и справа в точке x_0, то есть $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$.

Вывод. Элементарные функции (рациональные, тригонометрические, показательные и др.) непрерывны на любом промежутке, на котором они определены.

Операции над непрерывными функциями

Теорема 2

Пусть $f, g\colon E \to \mathbb{R}$ – непрерывные функции в точке $x_0 \in E$ (соответственно на множестве E). Тогда функции αf $(\alpha \in \mathbb{R})$, $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ являются непрерывными в точке x_0 (соответственно на множестве E). Если кроме того, $g(x_0)\neq 0$, то $\dfrac{f}{g}$ – непрерывная функция в точке x_0 (соответственно на множестве $E\setminus\{x \mid x\in E,\ g(x)=0\}$).

Теорема 3

Пусть $g\colon E_1 \to E_2$, $f\colon E_2 \to \mathbb{R}$ $(E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R})$ – некоторые функции и $h=f\circ g\colon E_1\to\mathbb{R}$ – их композиция. Если функция g непрерывна в точке $x_0\in E_1$ и функция f непрерывна в точке $y_0=g(x_0)\in E_2$, то функция h непрерывна в точке x_0.

Основные свойства непрерывных функций

Теорема 4

Первая теорема Вейерштрасса об ограниченности

Любая функция, непрерывная на отрезке, является ограниченной на этом отрезке.

Теорема 5

Вторая теорема Вейерштрасса

Любая функция, непрерывная на отрезке, достигает на этом отрезке своих точных граней, верхней и нижней.

Теорема 6

Первая теорема Больцано–Коши о прохождении функции через нуль

Пусть функция $f\colon [a, b]\to\mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает на его концах значения противоположных знаков: $f(a)\cdot f(b)<0$. Тогда существует хотя бы одна точка $c\in(a, b)$ такая, что $f(c)=0$.

Задания с решением

1 Исследуем на непрерывность функцию:

а) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} 2x+1, & \text{если } x<0, \\ \sin x+\cos x, & \text{если } x\geq 0; \end{cases}$

б) $g\colon [0, +\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\begin{cases} \sqrt{x}, & \text{если } 0\leq x\leq 1, \\ 2+x, & \text{если } x>1; \end{cases}$

в) $h\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=\begin{cases} e^x, & \text{если } x\leq 1, \\ \dfrac{1}{x^2-1}, & \text{если } x>1. \end{cases}$

Решение:

а) Функция f, будучи элементарной, непрерывна на интервалах $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$. Остается исследовать ее на непрерывность в точке $x_0=0$. Так как $f(0)=1$, $f(-0)=1$, $f(+0)=1$ и $f(-0)=f(+0)=f(0)$, то функция f непрерывна на множестве $\mathbb{R}$.

б) Функция g непрерывна в любой точке $x \in [0, +\infty) \setminus \{1\}$, а в точке $x_0 = 1$ имеем: $f(1) = 1$, $f(1-0) = 1$, $f(1+0) = 3$. Следовательно, точка $x_0 = 1$ является точкой разрыва первого рода. Еще заметим, что функция g непрерывна слева в точке $x_0 = 1$.

в) Очевидно, что функция h непрерывна на интервалах $(-\infty, 1)$ и $(1, +\infty)$, а в точке $x_0 = 1$ имеем $\lim\limits_{x \to 1-0} h(x) = e = h(1)$, $\lim\limits_{x \to 1+0} h(x) = \lim\limits_{x \to 1+0} \dfrac{1}{x^2 - 1} = +\infty$, то есть $x_0 = 1$ является точкой разрыва второго рода.

2 Найдем действительные значения параметров a и b, при которых функция

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & x \le 2, \\ ax + b, & x > 2, \end{cases}$ непрерывна в точке $x_0 = 2$.

Решение:

$f(2) = 4 + a$, $f(2-0) = 4 + a$ и $f(2+0) = 2a + b$. Следовательно, функция f непрерывна в точке $x_0 = 2$, если $4 + a = 2a + b \Leftrightarrow a + b = 4$.

3 Покажем, что непрерывная функция $f: (0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + x^2$, ограничена на интервале $(0, 1)$, но не достигает своих точных граней на этом интервале.

Решение:

$$m = \inf_{x \in (0,1)} f(x) = \inf_{x \in (0,1)} (1 + x^2) = 1, \quad M = \sup_{x \in (0,1)} f(x) = \sup_{x \in (0,1)} (1 + x^2) = 2.$$

Значит, $1 \le f(x) \le 2$, $\forall x \in (0, 1)$. Покажем, что функция f не достигает своих точных нижней и верхней граней $m = 1$ и $M = 2$.

В самом деле, пусть $f(x) = 1$. Тогда $1 + x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 0 \notin (0, 1)$. Следовательно, $f(x) \ne 1$.

Если $1 + x^2 = 2$, то $x = -1 \notin (0, 1)$ или $x = 1 \notin (0, 1)$, Значит, $f(x) \ne 2$, $\forall x \in (0, 1)$.

4 Решим на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $(x^2 - 2x - 3) \cdot \ln x < 0$.

Решение:

Областью определения функции $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 2x - 3) \cdot \ln x$, является интервал $I = (0, +\infty)$. На множестве I функция f имеет нули $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$. Так как функция f непрерывна на I, она сохраняет свой знак на каждом из интервалов $I_1 = (0, 1)$, $I_2 = (1, 3)$, $I_3 = (3, +\infty)$. Взяв, например, значения $a_1 = \dfrac{1}{10} \in I_1$, $a_2 = 2 \in I_2$, $a_3 = 10 \in I_3$, получаем $f(a_1) = \left(\dfrac{1}{100} - \dfrac{2}{10} - 3\right) \cdot \ln \dfrac{1}{10} > 0$, $f(a_2) < 0$, $f(a_3) > 0$.

Итак, функция отрицательна на интервале $I_2 = (1, 3)$.

Ответ: $S = (1, 3)$.

§ 7 ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА И ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

7.1. Основные свойства дифференцируемых функций

Определение

Точки локального максимума (локального минимума) функции называются **точками локального экстремума** этой функции.

Теорема 1

Теорема Ферма

Пусть $f\colon I \to \mathbb{R}$ $(I \subseteq R)$ – дифференцируемая функция на интервале I. Если $x_0 \in I$ – точка локального экстремума функции f, то $f'(x_0) = 0$ (рис. 9.2).

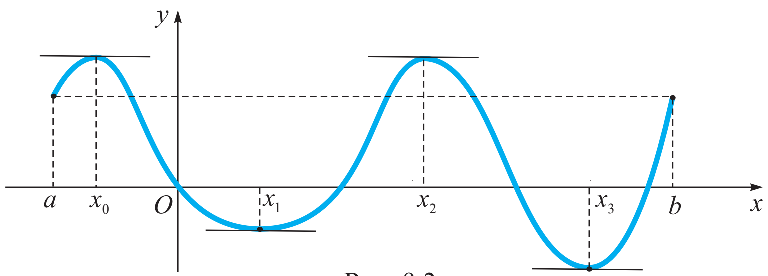


Рис. 9.2

Замечания

1. Обратное утверждение теоремы Ферма ложно, поскольку могут существовать нули функции f', которые не являются точками локального экстремума функции f. Например, для функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, имеем $f'(0) = 0$, но $x_0 = 0$ не является ни точкой максимума, ни точкой минимума функции f.

2. Теорема Ферма утверждает, что точки локального экстремума находятся среди критических точек функции f.

Теорема 2

Теорема Ролля

Если функция $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ $(a < b)$

1) непрерывна на отрезке $[a, b]$;

2) дифференцируема на интервале (a, b);

3) $f(a) = f(b)$,

то существует хотя бы одна точка $c \in (a, b)$ такая, что $f'(c) = 0$ (рис. 9.2).

Замечание

Точка c из теоремы Ролля не всегда единственная для соответствующей функции.

Следствия из теоремы Ролля

1. Между двумя последовательными нулями дифференцируемой на интервале функции всегда содержится хотя бы один нуль ее производной (рис. 9.2).

2. Между двумя последовательными нулями производной дифференцируемой на интервале функции содержится не более одного нуля этой функции (рис. 9.2).

Теорема 3

Теорема Лагранжа

Если функция $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$

1) непрерывна на отрезке $[a, b]$;

2) дифференцируема на интервале (a, b),

то существует хотя бы одна точка $c \in (a, b)$ такая, что $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$.

Формула $f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)$, или $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$, называется ***формулой Лагранжа*** или ***формулой конечных приращений***.

Замечания

1. Точка c из теоремы Лагранжа не всегда единственная для соответствующей функции.

2. Теорема Лагранжа является обобщением теоремы Ролля (рис. 9.2).

Задание с решением

Дана функция $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-3)(2x+1)(3x+4)$. Покажем, что функция f' имеет только действительные нули.

Решение:

$f(x)=0 \Leftrightarrow x\in\left\{-\frac{4}{3}, -\frac{1}{2}, 3\right\}$. Так как $f\left(-\frac{4}{3}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$, то на отрезке $\left[-\frac{4}{3}, -\frac{1}{2}\right]$ производная функции f имеет хотя бы один действительный нуль. Значит, существует точка $c_1\in\left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{2}\right)$ такая, что $f'(c_1)=0$.

Аналогично $f\left(-\frac{1}{2}\right)=f(3)=0$. Значит, существует точка $c_2\in\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$ такая, что $f'(c_2)=0$. Итак, существуют по меньшей мере два действительных нуля c_1, c_2 на соответствующих интервалах. Так как $f'\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ есть полиномиальная функция, соответствующая многочлену второй степени, который имеет не более двух действительных корней, следует, что функция f' имеет точно два действительных нуля.

7.2. Приложения производных при вычислении пределов функций

Некоторые пределы функций могут быть вычислены при помощи производных.

Правило Лопиталя для неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$

Теорема 4

Пусть I – числовой интервал $(I\subseteq R)$, $x_0\in I$ и $f, g\colon I\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}$ – некоторые функции. Если

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$;

2) функции f и g дифференцируемы на множестве $I\setminus\{x_0\}$;

3) $g'(x)\neq 0,\ \forall x\in V(x_0)\cap I$;

4) существует предел (конечный или бесконечный) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$,

то существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Правило Лопиталя для неопределенности вида $\dfrac{\infty}{\infty}$ аналогично теореме 4.

Замечания

1. Правила Лопиталя верны и при $x_0\to\infty$, и для односторонних пределов в указанной точке.

2. При необходимости, если это возможно, правила Лопиталя могут быть применены два, три и более раз.

3. Неопределенности вида $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0 можно свести различными методами к неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Задание с решением

Вычислим: а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln\frac{x}{2}}{x^3-8}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{5^x}$; в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^{3x}$.

Решение:

а) $$\lim_{x\to 2}\frac{\ln\frac{x}{2}}{x^3-8}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\ln\frac{x}{2}\right)'}{(x^3-8)'}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x}}{3x^2}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{3x^3}=\frac{1}{24}.$$

б) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{5^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(3x^2)'}{(5^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{5^x\ln 5}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(6x)'}{(5^x\ln 5)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{5^x\ln^2 5}=0.$$

в) Пусть функция $f\colon D\to\mathbb{R},\ f(x)=\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^{3x}$.

Логарифмируя, сведем случай 1^∞ к случаю $0\cdot\infty$: $\ln f(x)=3x\ln\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)$.

Значит, $$\lim_{x\to+\infty}\ln f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{x-3}{x+2}\right)}{\frac{1}{3x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln\left(\frac{x-3}{x+2}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{3x}\right)'}=-3\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{5}{(x-3)(x+2)}}{\frac{1}{x^2}}=$$

$$=-3\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2}{(x-3)(x+2)}=-15.$$ Итак, $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{3x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}3x\cdot\ln\left(\frac{x-3}{x+2}\right)}=e^{-15}.$$

7.3. Приложения производной при исследовании функций

Теорема 5 Если $f\colon I\to\mathbb{R}$ – дифференцируемая функция на интервале I, то она возрастает (убывает) на I тогда и только тогда, когда $f'(x)\ge 0\ (f'(x)\le 0),\ \forall x\in I$.

Замечание Если $f'(x)>0\ (f'(x)<0),\ \forall x\in I$, то функция f строго возрастает (строго убывает) на промежутке I.

Интервалы монотонности и точки экстремума функции $f:I\to\mathbb{R}\ (I\subseteq\mathbb{R})$, дифференцируемой на интервале I, могут быть найдены по следующему *алгоритму*:

I. Находят производную f'.

II. Находят решения уравнения $f'(x)=0,\ x\in I$ (решение этого уравнения (нули функции f') являются предполагаемыми точками экстремума функции f).

III. Определяют знак функции f' на интервалах, в которых она не обращается в нуль.

IV. Находят интервалы знакопостоянства функции f', которые и являются интервалами монотонности функции f.

V. Находят точки экстремума функции.

Определение Функция $f\colon I\to\mathbb{R}\ (I\subseteq\mathbb{R})$, дважды дифференцируемая на интервале I, называется **выпуклой вверх** (**выпуклой вниз**) на интервале I, если график функции f расположен ниже (выше) любой своей касательной.

Определение Пусть функция $f\colon(a,b)\to\mathbb{R}$ – дифференцируема на интервале (a,b). Точка $x_0\in(a,b)$ называется **точкой перегиба** функции f, если существует окрестность $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ такая, что функция f выпукла вниз на интервале $(x_0-\delta,\ x_0)$ и выпукла вверх на интервале $(x_0,\ x_0+\delta)$ или наоборот.

Интервалы выпуклости и точки перегиба дважды дифференцируемой функции f могут быть найдены по следующему *алгоритму*:

I. Вычисляют f'', а затем находят решения уравнения $f''(x)=0$, которые могут быть точками перегиба функции f.

II. Находят интервалы знакопостоянства функции f'', которые являются интервалами выпуклости функции f.

III. Находят точки перегиба (если существуют) функции f.

Определение

Пусть $f: E \to \mathbb{R}$ $(E \subseteq \mathbb{R})$ – некоторая функция и $+\infty$ – предельная точка множества E. Прямая $y=l$ является **горизонтальной асимптотой** графика функции f (функции f) при $x \to +\infty$, если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$.

Аналогичное определение можно сформулировать и для горизонтальной асимптоты при $x \to -\infty$.

Определение

Пусть $f: E \to \mathbb{R}$ $(E \subseteq \mathbb{R})$ – некоторая функция и $+\infty$ – предельная точка множества E. Прямая $y=mx+n$, $m\neq 0$, является **наклонной асимптотой** графика функции f (функции f) при $x \to +\infty$, если $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-mx-n)=0$.

Аналогичное определение можно сформулировать и для наклонной асимптоты при $x \to -\infty$.

Теорема 6

Прямая $y=mx+n$, $m\neq 0$, является наклонной асимптотой графика функции $f: E \to \mathbb{R}$ при $x \to +\infty$, если и только если $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ $(m\neq 0)$ и $n=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-mx)$.

Аналогичная теорема верна и при $x \to -\infty$.

Определение

Пусть $f: E \to \mathbb{R}$ $(E \subseteq \mathbb{R})$ – некоторая функция и $a \in \mathbb{R}$ – предельная точка множества E. Если предел слева $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ (предел справа $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$) равен $+\infty$ или $-\infty$, будем говорить, что прямая $x=a$ является **левой (правой) вертикальной асимптотой** графика функции f.

Чтобы исследовать функцию и построить ее график, рекомендуем выполнить следующие *этапы*:

I. Находят область определения функции.

II. Исследуют функцию на четность и периодичность.

III*. Вычисляют пределы функции на концах интервалов, исследуют функцию на непрерывность и находят ее асимптоты.

IV. Находят первую производную функции, интервалы возрастания и убывания функции и ее экстремумы.

V*. Находят вторую производную функции, интервалы выпуклости функции и ее точки перегиба.

VI. Заполняют таблицу поведения функции на основании результатов, полученных на I–V этапах исследования.

VII. Строят график функции.

Задание с решением

Построим график функции $f\colon D\to\mathbb{R},\ f(x)=1-\sqrt{|x^2-1|}$.

Решение:

I. Областью определения функции f является множество $D=\mathbb{R}$.

II. Функция f – четная. Значит, достаточно исследовать функцию f на интервале $[0,+\infty)$.

III. $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\sqrt{x^2-1})=-\infty$.

Функция f не имеет вертикальных асимптот, а также горизонтальной асимптоты при $x\to+\infty$. Найдем (возможную) наклонную асимптоту:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)=-1,$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}[f(x)+x]=\lim_{x\to+\infty}[1+x-\sqrt{x^2-1}]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+x)^2-(x^2-1)}{1+x+\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+2}{1+x+\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2+\frac{2}{x}\right)}{x\left(\frac{1}{x}+1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}=1.$$

Следовательно, прямая $y=-x+1$ является наклонной асимптотой при $+\infty$. Функция f непрерывна на множестве $\mathbb{R}$.

IV. Для любых $x\in\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}1-\sqrt{1-x^2}, & \text{если } x\in[-1,1],\\ 1-\sqrt{x^2-1}, & \text{если } x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty).\end{cases}$

Тогда $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}, & \text{если } x\in(-1,1),\\ -\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}, & \text{если } |x|>1.\end{cases}$

В точках $x_0=-1,\ x_1=1$ функция f недифференцируема: $f'_{\text{л}}(-1)=+\infty,\ f'_{\text{п}}(-1)=-\infty$, $f'_{\text{л}}(1)=+\infty,\ f'_{\text{п}}(1)=-\infty$. Следовательно, точки $x_0=-1$ и $x_1=1$ являются одновременно возвратными точками и точками максимума функции f.

V. $f''(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x^2}, & \text{если } x\in(-1,1),\\ \dfrac{1}{x^2-1}, & \text{если } |x|>1.\end{cases}$

Таким образом, при любых $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ вторая производная положительна. Значит, функция f выпукла вниз на интервалах $(-\infty,-1),\ (-1,1)$ и $(1,+\infty)$.

VI. Таблица поведения функции f на интервале $[0,+\infty)$:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	$+\infty$ | $-\infty$	$-$	
$f''(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$		↗	1 | 1	↘	$-\infty$

VII. График функции f изображен на рисунке 9.3.

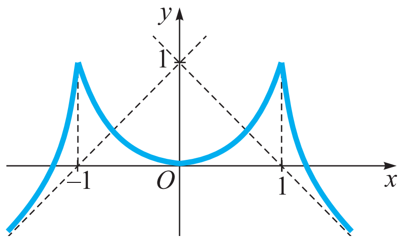


Рис. 9.3

7.4. Задачи на максимум и минимум

При решении некоторых задач из геометрии, физики, экономики и т. п. требуется найти максимальное (наибольшее) или минимальное (наименьшее) значение, которое может принимать некоторая переменная величина при соответствующих условиях. Решения таких задач могут быть найдены по следующему *алгоритму*:

I. Задачу переводят на математический язык при помощи некоторой функции (для этого выбирают подходящий параметр x, а изучаемую величину выражают функцией от x).

II. Применив изученные методы, находят наименьшее или наибольшее значение этой функции на промежутке, полученном при решении задачи.

III. Разъясняют практический смысл (в соответствии с поставленной задачей) полученного результата.

IV. Записывают ответ.

Задания с решением

1 Найдем точку графика функции $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2\sqrt{x}$, удаленную на наименьшее расстояние от точки $A(2, 0)$ (рис. 9.4).

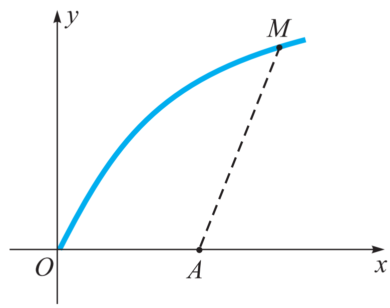


Рис. 9.4

Решение:

Любая точка M графика функции f имеет координаты $(x, 2\sqrt{x})$, $x \geq 0$.

Обозначим через $\mathrm{d}(x)$ расстояние между точками A и M.

Тогда $\mathrm{d}(x) = \sqrt{(x-2)^2 + (2\sqrt{x} - 0)^2} = \sqrt{x^2 + 4}$.

Минимум функции $d\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $d(x) = \sqrt{x^2+4}$, достигается в точке с абсциссой $x_0 = 0$.

Ответ: Искомая точка M совпадает с точкой $O(0, 0)$ и наименьшее расстояние между точками $M(0, 0)$ и $A(2, 0)$ равно 2.

2 Средние затраты (в леях) на производство товара выражены функцией, заданной формулой $C(x) = 5 + 11x$, а спрос – функцией, заданной формулой $p(x) = -x^2 + 15x + 11$, $4 < x < 12$. Найдем количество товара x, при котором доход (валовой) будет максимален, и величину этого дохода.

Решение:

Валовой доход выражается формулой:

$$V(x) = p(x)\cdot x - C(x) = (-x^2 + 15x + 11)x - (5 + 11x) = -x^3 + 15x^2 - 5.$$

Производная равна $V'(x) = -3x^2 + 30x$.

Из $V'(x) = 0$ получаем уравнение $-3x^2 + 30x = 0$, решениями которого являются $x_1 = 0$, $x_2 = 10$ ($x_1 = 0$ не удовлетворяет условию задачи). Так как $V''(10) < 0$, то $x = 10$ – точка максимума.

Значит, максимальный валовой доход $V(10) = -10^3 + 15\cdot 10^2 - 5 = 495$ (леев).

Ответ: 10 изделий; 495 леев.

§ 8 ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ. БИНОМ НЬЮТОНА

8.1. Элементы комбинаторики

Комбинаторика – область математики, в которой рассматриваются задачи о выполнении определенных комбинаций с конечным числом элементов (объектов). Такие задачи называются ***комбинаторными.***

Определение

Конечное множество $M = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ называется **упорядоченным множеством**, если каждому его элементу ставится в соответствие определенное натуральное число от 1 до n, при этом разным элементам множества M соответствуют разные натуральные числа.

Например, алфавит является упорядоченным множеством букв.

Упорядоченные множества, соответствующие заданному множеству, принято записывать в круглых скобках.

Пример

Множеству $\{-\sqrt{3}, 0, 4\}$ соответствуют следующие упорядоченные множества: $(-\sqrt{3}, 0, 4)$, $(-\sqrt{3}, 4, 0)$, $(4, 0, -\sqrt{3})$, $(0, 4, -\sqrt{3})$, $(0, -\sqrt{3}, 4)$, $(4, -\sqrt{3}, 0)$.

Таким образом, $\{-\sqrt{3}, 0, 4\} = \{4, 0, -\sqrt{3}\}$, а $(-\sqrt{3}, 0, 4) \neq (4, 0, -\sqrt{3})$.

Аналогично $(a, b, c) \neq (a, b, d)$.

Произведение первых n ненулевых натуральных чисел обозначается $n!$, то есть $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n$.

Принято считать, что $0! = 1$.

Пример

а) $6! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = 720$; б) $(n-2)! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot (n-3)(n-2)$.

Задание с решением

Решим на множестве $\mathbb{N}$ неравенство $\dfrac{2n!}{(n-3)!\cdot(n-1)} \leq n^2$.

Решение:

ОДЗ: $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$. На ОДЗ

$$\frac{2n!}{(n-3)!\cdot(n-1)} \leq n^2 \Leftrightarrow \frac{2\cdot(n-3)!\cdot(n-2)(n-1)\cdot n^{((n-3)!\cdot(n-1)}}{(n-3)!\cdot(n-1)} \leq n^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2n(n-2) \leq n^2 \Leftrightarrow n(n-4) \leq 0 \Leftrightarrow n \in [0, 4].$$

$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n$

Учитывая ОДЗ, получаем $n \in [3, 4]$, $n \in \mathbb{N}$.

Ответ: $S = \{3, 4\}$.

Простейшие комбинаторные задачи (без повторений элементов)

Пусть дано множество $M = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$.

1. Размещения

Определение

Упорядоченные m-элементные, где $0 \leq m \leq n$, подмножества заданного множества M называются **размещениями из *n* элементов по *m***.

Обозначают: A_n^m.

Теорема 1

Если m и n – натуральные числа, где $0 \le m \le n$, то

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot (n-m+1), \quad \text{или} \quad A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \quad (1).$$

2. Перестановки

Определение

Размещения из n элементов по n заданного множества M называются **перестановками из n элементов** этого множества.

Обозначают: P_n.

Теорема 2

Если $n \in \mathbb{N}$, то $P_n = n!$ (2).

Замечание

Из (1) и (2) следует, что $A_n^m = \dfrac{P_n}{P_{n-m}}$.

3. Сочетания

Определение

m–элементные подмножества заданного множества M, где $0 \le m \le n$, называются **сочетаниями из n элементов по m**.

Обозначают: C_n^m.

Теорема 3

Если m и n – натуральные числа, где $0 \le m \le n$, то $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ (3).

Замечание

Из (1), (2) и (3) следует, что $C_n^m = \dfrac{A_n^m}{P_m}$.

Основные свойства чисел C_n^m

1° $C_n^m = C_n^{n-m}$, $0 \le m \le n$, $m, n \in \mathbb{N}$ – формула взаимозаменяемых сочетаний.

2° $C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1}$, $0 \le m < n$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$ – рекуррентная формула вычисления числа сочетаний.

3° $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$ – число всех подмножеств n-элементного множества M равно 2^n, то есть $\operatorname{card} \mathscr{B}(M) = 2^n$.

Замечание

Чтобы отличить сочетания от размещений, необходимо учесть, что:

- в размещениях все m-элементные подмножества заданного множества упорядочены, а в сочетаниях эти подмножества не упорядочены;
- скобки указывают на отличие между сочетаниями и размещениями.

Задания с решением

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

1 Ученики XII класса изучают 14 учебных дисциплин. Сколькими способами можно составить расписание уроков на один день, если оно состоит из 6 различных учебных дисциплин?

Решение:

$A_{14}^6 = \dfrac{14!}{(14-6)!} = \dfrac{14!}{8!} = 2\,162\,160.$ *Ответ*: 2 162 160 расписаний.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

2 Сколькими способами можно составить команды из трех учащихся, если всего 26 учащихся?

Решение:

$C_{26}^3 = \dfrac{26!}{3!\cdot 23!} = \dfrac{24\cdot 25\cdot 26}{6} = 4\cdot 25\cdot 26 = 2600.$ *Ответ*: 2 600 способами.

$P_n = n!$

3 Сколькими способами можно раздать 5 различных шоколадок пятерым малышам.

Решение:

$P_5 = 5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120.$ *Ответ*: 120 способами.

8.2. Бином Ньютона

Формула

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^m a^{n-m} b^m + \ldots + C_n^n b^n, \qquad (4)$$

где $m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \le m \le n,$ называется ***формулой бинома Ньютона***.

Определения

- Правая часть формулы (4) называется **разложением степени бинома**.
- Числа $C_n^0,\ C_n^1,\ \ldots,\ C_n^m,\ \ldots,\ C_n^n$ в формуле бинома Ньютона называются **биномиальными коэффициентами**.

Кратко формула (4) записывается следующим образом:

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m,\ m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Аналогично:

$$(a-b)^n = [a+(-b)]^n = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_n^m a^{n-m} b^m,\ m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Основные свойства разложения степени бинома

1° Количество слагаемых (членов) разложения степени бинома равно $n+1$. Значит, количество биномиальных коэффициентов $C_n^0,\ C_n^1,\ \ldots,\ C_n^m,\ \ldots,\ C_n^n$ равно $n+1$.

2° В формуле бинома Ньютона показатели степени a убывают от n до 0, а показатели степени b возрастают от 0 до n.

3° В каждом слагаемом разложения степени бинома сумма степеней a и b равна n.

4° $(k+1)$-й член разложения степени бинома, то есть

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k,\ k \in \{0, 1, \ldots, n\},$$

называется ***общим членом разложения степени бинома***.

Основные свойства биномиальных коэффициентов

1° $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^m + \ldots + C_n^n = 2^n.$

2° Так как $C_n^m = C_n^{n-m}$, то биномиальные коэффициенты слагаемых, равноудаленные от крайних слагаемых разложения, равны.

3° Сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах в разложении степени бинома, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах этого же разложения, и равна 2^{n-1}.

4° а) При $n = 2k$ биномиальный коэффициент (C_n^k) среднего члена разложения степени бинома является наибольшим.

б) При $n = 2k+1$ биномиальные коэффициенты $(C_n^k = C_n^{k+1})$ двух средних членов разложения степени бинома равны и являются наибольшими.

Замечания

1. Числа $C_n^0, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^n$ можно найти при помощи ***арифметического треугольника***, или ***треугольника Паскаля***.

1	$n=0$	$(a+b)^0$
1 1	$n=1$	$(a+b)^1$
1 2 1	$n=2$	$(a+b)^2$
1 3 3 1	$n=3$	$(a+b)^3$
1 4 6 4 1	$n=4$	$(a+b)^4$
1 5 10 10 5 1	$n=5$	$(a+b)^5$
………………………………………	…	…

2. Биномиальные коэффициенты $C_n^0, C_n^1, ..., C_n^n$ можно найти при помощи производной функции.

Задания с решением

1 Найдем член разложения:

а) содержащий x^{30} в разложении степени бинома $(2x^2+3x)^{24}$;

б) не содержащий x в разложении степени бинома $(x-5y)^{21}$.

Решение:

а) $T_{k+1}=C_{24}^k(2x^2)^{24-k}\cdot(3x)^k=C_{24}^k 2^{24-k}\cdot 3^k\cdot x^{2(24-k)+k}$. По условию $x^{2(24-k)+k}=x^{30}$. Значит, $48-k=30 \Leftrightarrow k=18$. Тогда $T_{18+1}=T_{19}=C_{24}^{18}\cdot 2^6\cdot 3^{18}\cdot x^{30}$.

б) $T_{k+1}=C_{21}^k x^{21-k}(-5y)^k$. По условию $x^{21-k}=x^0 \Leftrightarrow k=21$. Тогда $T_{21+1}=T_{22}=C_{21}^{21}\cdot x^0\cdot(-5y)^{21}=-5^{21}\cdot y^{21}$.

Ответ: а) T_{19}; б) T_{22}.

2 Дано $x\in\mathbb{R}_+^*$, $n\in\mathbb{N}^*$ и степень бинома $(\ln^2 x+\sqrt[4]{x})^n$.

а) Найдем n, если известно, что биномиальные коэффициенты 14, 15, 16 членов разложения составляют арифметическую прогрессию.

б) Для значения n, найденного в пункте а), найдем член с наибольшим биномиальным коэффициентом.

Решение:

а) Из свойства членов арифметической прогрессии и из условия задачи следует, что

$$C_n^{14}=\frac{1}{2}(C_n^{13}+C_n^{15}),\text{ или } \frac{2n!}{14!(n-14)!}=\frac{n!}{13!(n-13)!}+\frac{n!}{15!(n-15)!}.$$

Отсюда получаем уравнение $n^2-57n+782=0$, имеющее решения $n_1=23$, $n_2=34$. (Проверьте!)

б) Случай $n_1=23$. Тогда $2k+1=23$. Значит, $k=11$. Согласно свойству 4° биномиальных коэффициентов, получаем:

1) $T_{k+1}=T_{11+1}=T_{12}=C_{23}^{11}(\ln^2 x)^{12}\cdot(\sqrt[4]{x})^{11}=1\,352\,078x^2\cdot\sqrt[4]{x^3}\ln^{24}x$;

2) $T_{13}=T_{12+1}=C_{23}^{12}(\ln^2 x)^{11}\cdot(\sqrt[4]{x})^{12}=1\,352\,078x^3\ln^{22}x$.

Случай $n_2=34$. Тогда $2k=34$. Значит, $k=17$. Согласно свойству 4° биномиальных коэффициентов, получаем:

$$T_{k+1}=T_{17+1}=T_{18}=C_{34}^{17}(\ln^2 x)^{17}\cdot(\sqrt[4]{x})^{17}=2\,333\,606\,220x^4\cdot\sqrt[4]{x}\ln^{34}x.$$

Ответ: а) $n_1=23$; $n_2=34$; б) T_{12}, T_{13}; T_{18}.

$$T_{k+1}=C_n^k a^{n-k}b^k,\ k\in\{0,1,...,n\}$$

§ 9 ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

9.1. Элементы векторного исчисления

Определения

• **Направленные отрезки** $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ **равны**, если они сонаправлены ($\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CD}$) и имеют равные модули (длины) ($|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$) (рис. 9.5).

• Множество равных направленных отрезков называется **вектором** и обозначается $\overline{a}$.

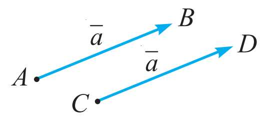


Рис. 9.5

Равенство $\overline{a}=\overrightarrow{AB}$ означает, что направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ является представителем вектора $\overline{a}$.

Направленный отрезок, начало и конец которого совпадают, определяет ***нулевой вектор*** $\overline{0}=\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{CC}=\overrightarrow{OO}=\ldots$

✓ Сумма векторов

Если вектор $\overline{a}=\overrightarrow{OA}$, вектор $\overline{b}=\overrightarrow{AB}$, то $\overline{a}+\overline{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}=\overline{c}$ (*правило треугольника*) (рис. 9.6).

Если вектор $\overline{a}=\overrightarrow{OA}$, вектор $\overline{b}=\overrightarrow{OB}$ и $OACB$ – параллелограмм, то $\overline{a}+\overline{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}=\overline{c}$ (*правило параллелограмма*) (рис. 9.7).

Два вектора называются ***противоположными векторами***, если их сумма равна нулевому вектору. Если $\overline{a}=\overrightarrow{AB}$, то вектор $-\overline{a}=\overrightarrow{BA}$, является противоположным вектору $\overline{a}$:

$$-\overline{a}+\overline{a}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BB}=\overline{0}.$$

Если $\overline{a}=\overrightarrow{OA}$, $\overline{b}=\overrightarrow{OB}$, то $a-b=\overline{a}+(-\overline{b})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BA}$ (рис. 9.8).

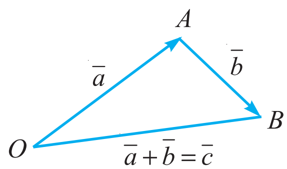


Рис. 9.6

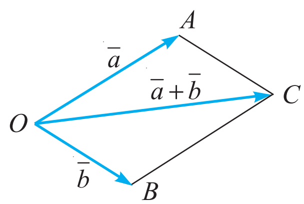


Рис. 9.7

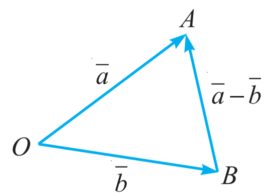


Рис. 9.8

✓ Умножение вектора на число

Произведением вектора $\overline{b}$ на число $\lambda\in\mathbb{R}$ называется вектор $\overline{a}$, который удовлетворяет условиям: 1) $|\overline{a}|=|\lambda|\cdot|\overline{b}|$; 2) $\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{b}$, если $\lambda\geq 0$; $\overline{a}\downarrow\uparrow\overline{b}$, если $\lambda<0$. Такой вектор $\overline{a}$ обозначается через $\lambda\overline{b}$.

✓ Свойства сложения векторов и умножения векторов на число

1° $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$;	5° $\lambda\overline{a}+\mu\overline{a}=(\lambda+\mu)\overline{a}$;
2° $\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})=(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}$;	6° $\lambda\overline{a}+\lambda\overline{b}=\lambda(\overline{a}+\overline{b})$;
3° $\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}$;	7° $0\cdot\overline{a}=\overline{0}$,
4° $(\lambda\mu)\overline{a}=\lambda(\mu\overline{a})$;	для любых λ, $\mu\in\mathbb{R}$.

✓ Скалярное произведение векторов

$\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cos\varphi$ ($\varphi=(\widehat{\overline{a},\overline{b}})$ – угол, образованный векторами $\overline{a}$, $\overline{b}$, имеющих общее начало).

✓ **Свойства скалярного произведения двух векторов**

1° $\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{b}\cdot\overline{a}$; 3° $\overline{a}(\overline{b}+\overline{c})=\overline{a}\overline{b}+\overline{a}\overline{c}$; 5° $\overline{a}\cdot\overline{a}=\overline{a}^{\,2}=|\overline{a}|^2$.

2° $(\lambda\overline{a})\overline{b}=\lambda(\overline{a}\cdot\overline{b})$; 4° $\overline{a}\cdot\overline{b}=0\Leftrightarrow\overline{a}\perp\overline{b}$;

✓ **Операции над векторами в координатах**

В декартовой системе координат xOy плоскости, репер которой $\{O,\overline{i},\overline{j}\}$, любой вектор $\overline{a}$ плоскости может быть представлен в виде $\overline{a}=x\overline{i}+y\overline{j}$.

Числа x, y называются ***координатами вектора*** $\overline{a}$ и обозначаются $\overline{a}=(x,\ y)$.

Если $\overline{a}=(x_1,\ y_1)$ и $\overline{b}=(x_2,\ y_2)$, то:

1) $\overline{a}=\overline{b}\Leftrightarrow x_1=x_2$ и $y_1=y_2$;
2) $\overline{a}\pm\overline{b}=(x_1\pm x_2,\ y_1\pm y_2)$;
3) $\lambda\overline{a}=(\lambda x_1,\ \lambda y_1)$;
4) $\overline{a}\parallel\overline{b}\Leftrightarrow\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}$;
5) $\overline{a}\cdot\overline{b}=x_1x_2+y_1y_2$;
6) $|\overline{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$;
7) $\cos(\widehat{\overline{a},\overline{b}})=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$.

Если $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, то $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$ и $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

Если $M(x,\ y)$ является серединой отрезка AB, то $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$, $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$.

9.2. Основные формулы для треугольников

✓ **Произвольный треугольник**

Пусть ABC – произвольный треугольник (рис. 9.9). Обозначим через:

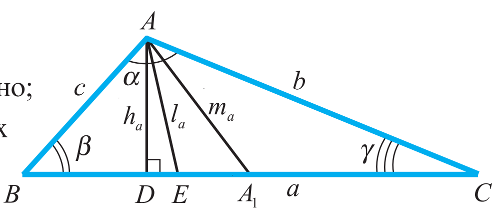


Рис. 9.9

$a,\ b,\ c$ – длины сторон $BC,\ AC,\ AB$ соответственно;
$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ – величины углов, противолежащих сторонам $BC,\ AC,\ AB$ соответственно;
p – полупериметр;
R – радиус описанной окружности;
r – радиус вписанной окружности;
$\mathscr{A}$ – площадь треугольника;
$h_a=AD$, $m_a=AA_1$ – соответственно высота и медиана, проведенные к стороне BC;
$l_a=AE$ – биссектриса угла A.

Тогда:

$\alpha+\beta+\gamma=180°$;

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$ (*теорема косинуса*);

$\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}=2R$ (*теорема синусов*);

$\mathscr{A}=\dfrac{1}{2}a\cdot h_a$; $\mathscr{A}=\dfrac{1}{2}bc\sin\alpha$; $\mathscr{A}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (*формула Герона*);

$r=\dfrac{\mathscr{A}}{p}$; $R=\dfrac{abc}{4\mathscr{A}}$;

$m_a=\dfrac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$;

$\frac{b}{c}=\frac{EC}{BE}$ (*свойство биссектрисы*);

$l_a=\sqrt{b\cdot c-BE\cdot EC}$; $l_a=\frac{\sqrt{bc(a+b+c)(b+c-a)}}{b+c}$.

✓ **Прямоугольный треугольник**

Пусть ABC – прямоугольный треугольник (рис. 9.10), длины его катетов – a, b, длина гипотенузы – c, длины проекций катетов на гипотенузу – a_c, b_c соответственно.

Тогда: $c^2=a^2+b^2$ (*теорема Пифагора*);

$\mathcal{A}=\frac{1}{2}a\cdot b=\frac{1}{2}c\cdot h_c$;

$r=\frac{a+b-c}{2}$; $R=\frac{c}{2}$;

$a=c\sin\alpha=c\cos\beta=b\,\mathrm{tg}\,\alpha=b\,\mathrm{ctg}\,\beta$;

$h_c^2=a_c\cdot b_c$; $b^2=c\cdot b_c$; $a^2=c\cdot a_c$.

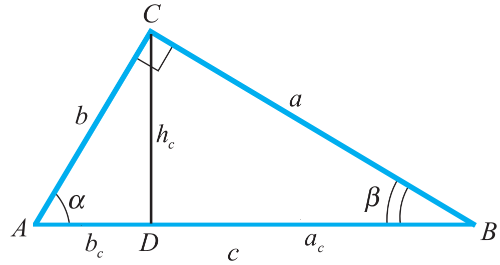


Рис. 9.10

✓ **Равносторонний треугольник**

$\mathcal{A}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $r=\frac{a}{2\sqrt{3}}$, $R=\frac{a}{\sqrt{3}}$, где a – длина стороны треугольника.

Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ *подобны* ($\Delta ABC\sim\Delta A_1B_1C_1$) тогда и только тогда, когда выполняется одно из равносильных условий:

1) $AB:BC:CA=A_1B_1:B_1C_1:C_1A_1$;
2) $AB:BC=A_1B_1:B_1C_1$ и $\mathrm{m}(\angle B)=\mathrm{m}(\angle B_1)$;
3) $\mathrm{m}(\angle B)=\mathrm{m}(\angle B_1)$ и $\mathrm{m}(\angle A)=\mathrm{m}(\angle A_1)$.

Средняя линия треугольника параллельна третьей стороне треугольника, и ее длина равна половине длины этой стороны.

Биссектрисы треугольника пересекаются в *центре окружности, вписанной в треугольник*.

Медиатрисы (*серединные перпендикуляры*) сторон треугольника пересекаются в *центре окружности, описанной около треугольника*.

Медианы треугольника пересекаются в одной точке, называемой *центром тяжести* треугольника. Эта точка делит каждую из медиан в отношении 2 : 1 от вершины.

Высоты треугольника пересекаются в одной точке, называемой *ортоцентром* треугольника.

9.3. Основные формулы для четырехугольников и многоугольников

✓ *Выпуклый четырехугольник* $ABCD$ (φ – угол, образованный диагоналями AC и BD, $\mathcal{A}$ – площадь четырехугольника):

$$\mathrm{m}(\angle A)+\mathrm{m}(\angle B)+\mathrm{m}(\angle C)+\mathrm{m}(\angle D)=360^\circ;\quad \mathcal{A}=\frac{1}{2}AC\cdot BD\sin\varphi.$$

✓ *Параллелограмм* (a и b – стороны, φ – угол, образованный сторонами a и b, h_a – высота, проведенная к стороне a, d_1 и d_2 – диагонали, $\mathcal{A}$ – площадь):

$$\mathcal{A}=ah_a=ab\sin\varphi;\qquad d_1^2+d_2^2=2(a^2+b^2).$$

✓ *Ромб*: $\mathcal{A}=ah_a=a^2\sin\varphi=\frac{1}{2}d_1d_2$.

✓ *Прямоугольник*: $\mathcal{A}=ab$.

✓ *Квадрат* (d – диагональ): $\mathcal{A} = a^2 = \dfrac{d^2}{2}$.

✓ *Трапеция* с основаниями a и b, высотой h и средней линией l:

$$l = \frac{a+b}{2};\ \mathcal{A} = \frac{a+b}{2}h = lh.$$

✓ *Выпуклый четырехугольник* $ABCD$ является вписываемым тогда и только тогда, когда

$$\mathrm{m}(\angle ABC) + \mathrm{m}(\angle ADC) = 180°.$$

✓ *Выпуклый четырехугольник* $ABCD$ является вписываемым тогда и только тогда, когда

$$\mathrm{m}(\angle ABD) = \mathrm{m}(\angle ACD).$$

✓ *Теоремы Птолемея* для вписываемого четырехугольника:

1. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ является вписываемым тогда и только тогда, когда

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD.$$

2. Для вписываемого четырехугольника $ABCD$ справедливо соотношение:

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AB \cdot AD + BC \cdot CD}{AD \cdot CD + AB \cdot BC}.$$

В выпуклый четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы длин противолежащих сторон равны:

$$AB + CD = AD + BC.$$

✓ *Правильный многоугольник*, у которого n сторон (a_n – длина стороны многоугольника, r – радиус вписанной окружности, R – радиус описанной окружности, $\mathcal{A}$ – площадь многоугольника, p – полупериметр):

$$a_3 = R\sqrt{3};\quad a_4 = R\sqrt{2};\quad a_6 = R;\quad a_n = 2R\sin\frac{180°}{n};\quad \mathcal{A} = \frac{na_n r}{2} = pr.$$

✓ *Окружность* и *круг* радиуса R (L – длина окружности, l – длина дуги окружности, α – величина дуги (центрального угла) в градусах, φ – величина дуги в радианах, $\mathcal{A}$ – площадь круга, $\mathcal{A}_{\text{сект. кр.}}$ – площадь сектора круга):

$$L = 2\pi R;\quad l = \frac{\pi R\alpha}{180°};\quad l = R\varphi;$$

$$\mathcal{A} = \pi R^2;\quad \mathcal{A}_{\text{сект. кр.}} = \frac{\pi R^2\alpha}{360°};\quad \mathcal{A}_{\text{сект. кр.}} = \frac{1}{2}R^2\varphi.$$

9.4. Параллельность прямых и плоскостей

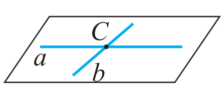
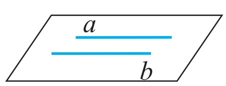
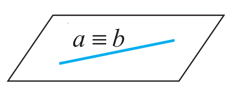
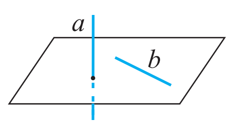
Две прямые называются ***параллельными***, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются или если они совпадают.

Прямая и плоскость называются ***параллельными***, если они не пересекаются или прямая принадлежит плоскости.

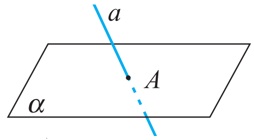
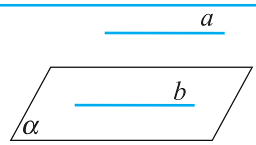
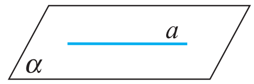
Две плоскости называются ***параллельными***, если они не пересекаются или совпадают.

Взаимное расположение прямых и плоскостей

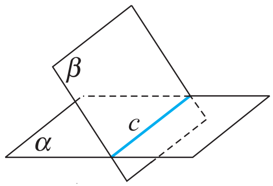
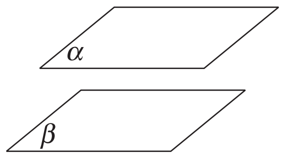
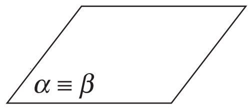
1. Взаимное расположение двух прямых

a и b – компланарные			a и b – скрещивающиеся
			
$a \cap b = \{C\}$	$a \cap b = \varnothing$	$a \equiv b$	$a \cap b = \varnothing$

2. Взаимное расположение прямой и плоскости

a пересекает α	a параллельна α	
		
$a \cap \alpha = \{A\}$	$(b \subset \alpha,\ a \parallel b) \Rightarrow a \parallel \alpha$	$a \subset \alpha$

3. Взаимное расположение двух плоскостей

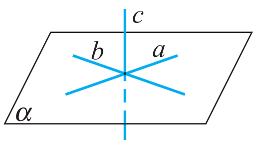
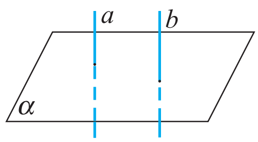
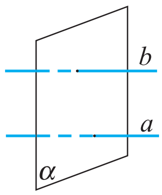
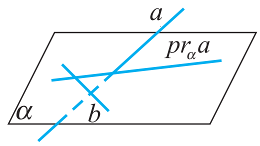
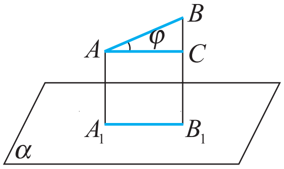
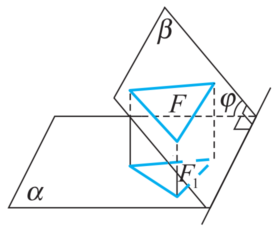
α пересекает β	α и β параллельны	
		
$\alpha \cap \beta = c$	$\alpha \cap \beta = \varnothing$	

9.5. Перпендикулярность в пространстве

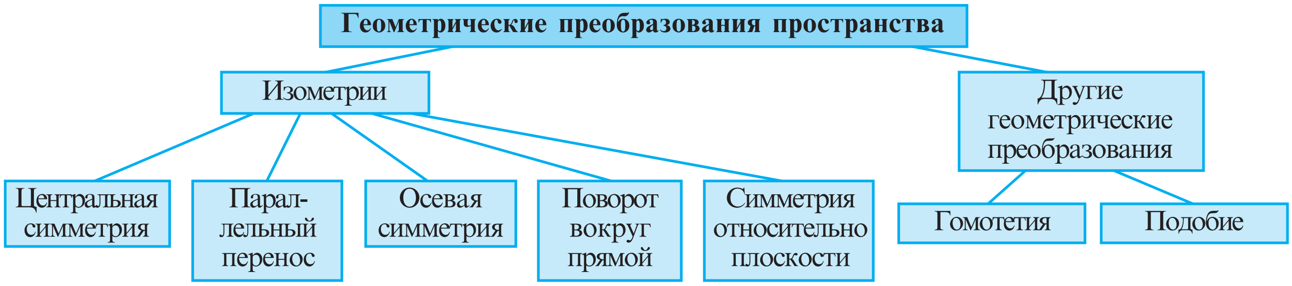
Две прямые в пространстве называются ***перпендикулярными***, если величина угла между ними равна 90°.

Прямая называется ***перпендикулярной*** данной плоскости, если она пересекает эту плоскость в какой-то точке и перпендикулярна всякой прямой, лежащей в этой плоскости и проходящей через ту же точку.

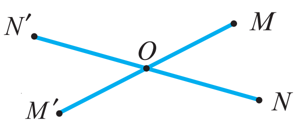
Если прямая, пересекающая плоскость, перпендикулярна двум прямым в этой плоскости, проходящим через точку пересечения, то она перпендикулярна плоскости.

 $(a \subset \alpha,\ b \subset \alpha,\ a \nparallel b,\ c \perp a,\ c \perp b) \Rightarrow c \perp \alpha$	 $(a \parallel b,\ a \perp \alpha) \Rightarrow b \perp \alpha$
 $(a \perp \alpha,\ b \perp \alpha) \Rightarrow a \parallel b$	 $b \subset \alpha$ 1) $a \perp b \Rightarrow pr_\alpha a \perp b$ 2) $b \perp pr_\alpha a \Rightarrow a \perp b$
 $([A_1B_1] \equiv pr_\alpha[AB],\ AC \parallel A_1B_1) \Rightarrow$ $\Rightarrow$ длина проекции $[AB]$ равна $AB\cos\varphi$	 $(F \subset \beta,\ F_1 = pr_\alpha F,\ \mathrm{m}(\angle(\alpha\beta)) = \varphi) \Rightarrow \mathscr{A}_{F_1} = \mathscr{A}_F \cos\varphi$

9.6. Геометрические преобразования

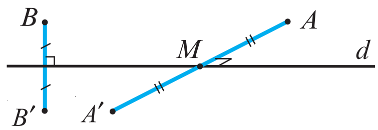


Центральная симметрия: S_O



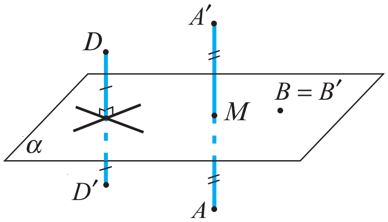
1. $S_O(O) = O$;
2. $\forall M \neq O,\ S_O(M) = M'$, где O – середина отрезка MM'.

Осевая симметрия: S_d



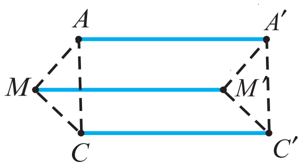
1. $\forall M \in d,\ S_d(M) = M$;
2. $\forall A \notin d,\ S_d(A) = A'$, где $AA' \perp d$, и если $AA' \cap d = \{M\}$, то точка M – середина отрезка AA'.

Симметрия относительно плоскости: S_α



1. $\forall B \in \alpha,\ S_\alpha(B) = B$;
2. $\forall A \notin \alpha,\ S_\alpha(A) = A'$, где $AA' \perp \alpha$, и если $AA' \cap \alpha = \{M\}$, то точка M – середина отрезка AA'.

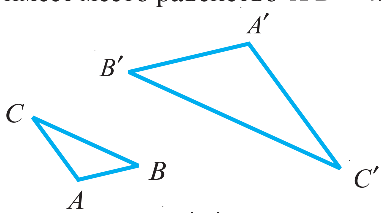
Параллельный перенос, заданный упорядоченной парой точек (A, A'): $t_{AA'}$



$\forall M \notin (AA'),\ t_{AA'}(M) = M'$, где $AA'M'M$ – параллелограмм.
$t_{AA'}(C) = C'$.

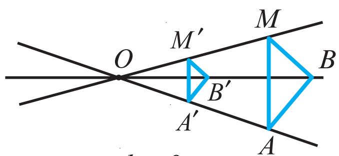
Подобие с коэффициентом $k,\ k > 0$

Для любых точек A, B пространства и их образов A', B' имеет место равенство $A'B' = k \cdot AB$.

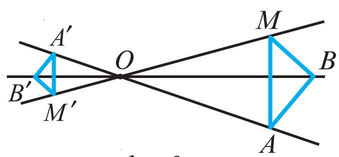


$A'B' = 2AB,$
$A'C' = 2AC,$
$B'C' = 2BC.$

Гомотетия с центром *O* и коэффициентом *k*



$k > 0$



$k < 0$

§ 10 ЭЛЕМЕНТЫ ТРИГОНОМЕТРИИ

10.1. Тригонометрические функции

Определение

Тригонометрической окружностью называется окружность единичного радиуса с центром в начале координат.

В тригонометрии используются градусная и радианная мера измерения углов.

Переход от одной меры к другой осуществляется при помощи формулы $\frac{a}{\alpha}=\frac{180^\circ}{\pi}$, где a – градусная мера, а α – радианная мера угла. Отсюда $a=\frac{\alpha}{\pi}180^\circ$, а $\alpha=\frac{a}{180^\circ}\cdot\pi$ для любого угла.

Пример

Угол в π радиан имеет градусную меру, равную 180°. Значит, угол в 1 радиан имеет градусную меру, равную $\frac{180^\circ}{\pi}\approx\frac{180^\circ}{3{,}14}\approx 57^\circ 17' 44''$. Обратно, угол в 1° равен $\frac{\pi}{180}$ радиан.

Пусть $M(x, y)$ – точка на тригонометрической окружности, t – величина угла, образованного (OM с Ox (рис. 9.11).

Тогда:

$\sin t = y;$

$\cos t = x;$

$\mathrm{tg}\, t=\frac{\sin t}{\cos t}=\frac{y}{x},\ \ t\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z};$

$\mathrm{ctg}\, t=\frac{\cos t}{\sin t}=\frac{x}{y},\ \ t\neq\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z}.$

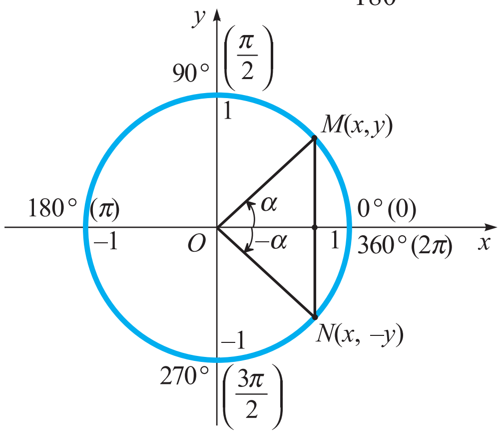


Рис. 9.11

Определения

Функция

а) $f:\mathbb{R}\to[-1, 1],\ f(t)=\sin t$, называется функцией **синус**;

б) $f:\mathbb{R}\to[-1, 1],\ f(t)=\cos t$, называется функцией **косинус**;

в) $f:\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R},\ f(t)=\mathrm{tg}\, t$, называется функцией **тангенс**;

г) $f:\mathbb{R}\setminus\{\pi k\,|\,k\in\mathbb{Z}\}\to\mathbb{R},\ f(t)=\mathrm{ctg}\, t$, называется функцией **котангенс**.

Тригонометрические функции применяются в различных областях: в геометрии, физике, практической деятельности и т. д.

Задача с решением

Выполнив необходимые измерения, найдем расстояние от точки A до точки B (недоступной), разделенных преградой (река) (рис. 9.12).

Решение:

Выбираем точку C (доступную) так, чтобы прямые CA и CB (воображаемые) пересе-

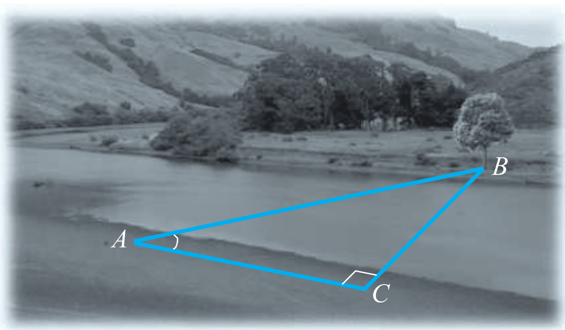


Рис. 9.12

кались под углом в 90°. Находим величину угла A и измеряем расстояние AC. Используя определение косинуса, получаем $AB = \dfrac{AC}{\cos(\angle A)}$ (значение косинуса находим, используя соответствующие таблицы, микрокалькулятор и т. п.).

Подставив полученные значения, находим расстояние AB.

Задание Сформулируйте, используя графики (рис. 9.13–9.16), свойства известных четырех тригонометрических функций.

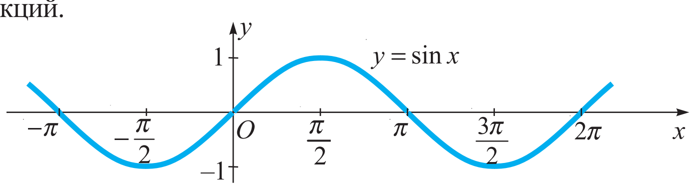


Рис. 9.13

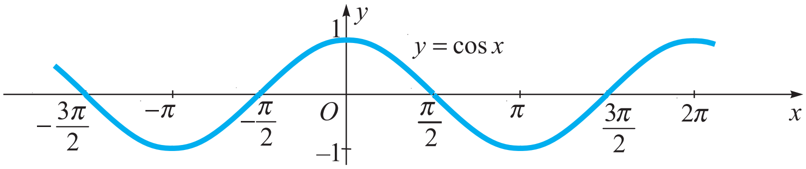


Рис. 9.14

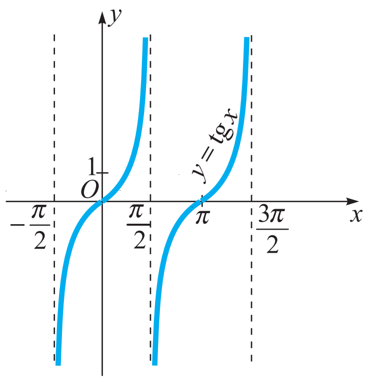


Рис. 9.15

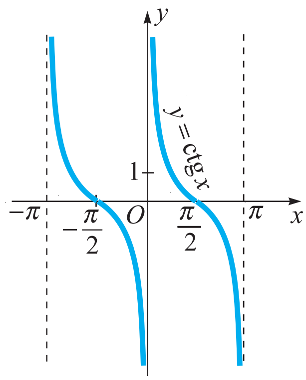


Рис. 9.16

Вспомним

$\arcsin x = y \Leftrightarrow \sin y = x,\ \ x \in [-1, 1],\ \ y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right];$

$\arccos x = y \Leftrightarrow \cos y = x,\ \ x \in [-1, 1],\ \ y \in [0, \pi];$

$\operatorname{arctg} x = y \Leftrightarrow \operatorname{tg} y = x,\ \ x \in \mathbb{R},\ \ y \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right);$

$\operatorname{arcctg} x = y \Leftrightarrow \operatorname{ctg} y = x,\ \ x \in \mathbb{R},\ \ y \in (0, \pi).$

Замечание Некоторые значения для arcsin, arccos, arctg и arcctg можно найти, используя таблицу значений функций sin, cos, tg, ctg (таблица 1).

Пример

$\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{3}$, так как $\dfrac{\pi}{3} \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ и $\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

$\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{3\pi}{4}$, так как $\dfrac{3\pi}{4} \in [0, \pi]$ и $\cos\dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\pi}{6}$, так как $\dfrac{\pi}{6} \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ и $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Значения тригонометрических функций для некоторых углов

Таблица 1

	α (радианы)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$
	α (градусы)	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$-30°$	$-45°$	$-60°$	$-90°$
Значение функции	$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
	$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
	$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Не существ.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	Не существ.
	$\operatorname{ctg}\alpha$	Не существ.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	Не существ.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

10.2. Тригонометрические формулы (тождества)

Основные тригонометрические тождества

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\ \alpha\in\mathbb{R};$ $\qquad$ $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1,\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}k,\ k\in\mathbb{Z};$

$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z};$ $\qquad$ $1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha},\ \alpha\neq\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

Формулы сложения

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$[1]$;$

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R};$

$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ для любых $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, при которых имеет смысл $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$ и $1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\neq0.$

Формулы для тригонометрических функций углов вида $n\alpha$, где $n\in\mathbb{N}^*$

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;$ $\qquad$ $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha;$

$\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha;$ $\qquad$ $\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha.$

Замечание

Эти формулы можно вывести, используя формулу Муавра и формулу бинома Ньютона:

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos n\alpha+i\sin n\alpha,$$

при $n=2$ и $n=3$.

Аналогично выводят формулы для тригонометрических функций угла $n\alpha$ для любого $n\in\mathbb{N}^*$. Например, приравнивая действительные и соответственно мнимые части в обеих частях равенства, соответствующего формуле Муавра при $n=4$, получаем формулы:

$$\cos4\alpha=\cos^4\alpha-6\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\sin^4\alpha;$$

$$\sin4\alpha=4\cos^3\alpha\sin\alpha-4\cos\alpha\sin^3\alpha.$$

[1] В дальнейшем будем считать, что $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$, если не уточняется что-либо другое.

Формулы понижения степени тригонометрических функций

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2};\qquad \sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}.$$

Формулы половинного аргумента $\mathbf{\sin\frac{\alpha}{2}}$, $\mathbf{\cos\frac{\alpha}{2}}$, $\mathbf{tg\frac{\alpha}{2}}$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};\qquad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}},\ \alpha\neq(2n+1)\pi,\ n\in\mathbb{Z};\qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \alpha\neq\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Формулы универсальных подстановок

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\ \alpha\neq(2n+1)\pi,\ n\in\mathbb{Z};\qquad \cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\ \alpha\neq(2n+1)\pi,\ n\in\mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\ \alpha\neq(2n+1)\pi,\ \alpha\neq\frac{(2n+1)\pi}{2},\ n\in\mathbb{Z}.$$

Формулы преобразования суммы в произведение и преобразования произведения в сумму

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};\qquad \sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};\qquad \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)];\qquad \cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)];$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)].$$

При решении тригонометрических уравнений и неравенств полезно знать, что:

$$\arcsin(-x)=-\arcsin x,\ x\in[-1,1];\qquad \operatorname{arctg}(-x)=-\operatorname{arctg}x,\ x\in\mathbb{R};$$

$$\arccos(-x)=\pi-\arccos x,\ x\in[-1,1];\qquad \operatorname{arcctg}(-x)=\pi-\operatorname{arcctg}x,\ x\in\mathbb{R}.$$

$$\arcsin x=\frac{\pi}{2}-\arccos x=\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ x\in(-1,1);$$

$$\arccos x=\frac{\pi}{2}-\arcsin x=\operatorname{arcctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ x\in(-1,1);$$

$$\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arcctg}x=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\ x\in\mathbb{R};$$

$$\operatorname{arcctg}x=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x=\arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\ x\in\mathbb{R}.$$

Примеры

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\pi}{4};\qquad \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4};$$

$$\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2};\qquad \operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\pi-\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

10.3. Тригонометрические уравнения

Простейшие тригонометрические уравнения

$\sin x = a \Leftrightarrow S = \{(-1)^k \arcsin a + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\},\ a \in [-1, 1];$

$\operatorname{tg} x = a \Leftrightarrow S = \{\operatorname{arctg} a + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\},\ a \in \mathbb{R};$

$\cos x = a \Leftrightarrow S = \{(\pm \arccos a + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\},\ a \in [-1, 1];$

$\operatorname{ctg} x = a \Leftrightarrow S = \{\operatorname{arcctg} a + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\},\ a \in \mathbb{R}.$

Основные методы решения тригонометрических уравнений

1. Метод введения вспомогательного неизвестного (метод замены).
2. Метод разложения на множители.
3. Метод разделения обеих частей однородного тригонометрического уравнения на $\sin^n x$ (или на $\cos^n x$), $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Метод сведения к однородному тригонометрическому уравнению.
5. Метод введения вспомогательного угла.
6. Метод применения формул универсальных подстановок.
7. Метод сведения к системе алгебраических уравнений.

Задания с решением

1 Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $\sin x + \cos 2x - 1 = 0;$ б) $4\sin^2 x - \sin 2x = 3.$

Решение:

а) $\sin x + \cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x + 1 - 2\sin^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x - 2\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin x(2\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ 2\sin x = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \sin x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}\\ x = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Ответ: $S = \{(-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$

б) $4\sin^2 x - \sin 2x = 3 \Leftrightarrow 4\sin^2 x - 2\sin x \cos x - 3\cos^2 x - 3\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin^2 x - 2\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0 \,\big|: \cos^2 x \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 3 = 0.$

Подстановка $\operatorname{tg} x = t$ приводит к уравнению $t^2 - 2t - 3 = 0$, имеющему решения $t_1 = -1,\ t_2 = 3.$

$$\text{Тогда } \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x = -1\\ \operatorname{tg} x = 3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z},\\ x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Ответ: $S = \left\{-\dfrac{\pi}{4} + \pi k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{\operatorname{arctg} 3 + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$

2 Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\sin x + \sqrt{3}\cos x = -\sqrt{2}$ и найдем его решения, принадлежащие интервалу $\left(-\pi, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Решение:

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = -\sqrt{2} \,\big|: 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}\sin x + \sin\frac{\pi}{3}\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

1) При $k=2n,\ n\in\mathbb{Z}$, получаем $x=-\frac{7\pi}{12}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Имеем $-\pi<-\frac{7\pi}{12}+2\pi n<\frac{\pi}{2},\ n\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow-\frac{5\pi}{12}<2\pi n<\frac{13\pi}{12},\ n\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow-\frac{5}{24}<n<\frac{13}{24},\ n\in\mathbb{Z}$.

Значит, $n=0$. Тогда $x=-\frac{7\pi}{12}\in\left(-\pi,\ \frac{\pi}{2}\right)$.

2) При $k=2n+1,\ n\in\mathbb{Z}$, получаем $x=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}+(2n+1)\pi,\ n\in\mathbb{Z}$, или $x=\frac{11\pi}{12}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Имеем $-\pi<\frac{11\pi}{12}+2\pi n<\frac{\pi}{2},\ n\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow-\frac{23\pi}{12}<2\pi n<-\frac{5\pi}{12},\ n\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow-\frac{23}{24}<n<-\frac{5}{24},\ n\in\mathbb{Z}$.

Значит, таких чисел не существует.

Ответ: $S=\left\{-\frac{7\pi}{12}\right\}$.

10.4. Тригонометрические неравенства

Простейшие тригонометрические неравенства

$\sin t>a\Leftrightarrow S=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(\arcsin a+2\pi k,\ \pi-\arcsin a+2\pi k),\ a\in[-1,1)$;

$\sin t<a\Leftrightarrow S=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(-\pi-\arcsin a+2\pi k,\ \arcsin a+2\pi k),\ a\in(-1,1]$;

$\cos t>a\Leftrightarrow S=\bigcup\limits_{k=\mathbb{Z}}(-\arccos a+2\pi k,\ \arccos a+2\pi k),\ a\in[-1,1)$;

$\cos t<a\Leftrightarrow S=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(\arccos a+2\pi k,\ 2\pi-\arccos a+2\pi k),\ a\in(-1,1]$;

$\operatorname{tg} t>a\Leftrightarrow S=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(\operatorname{arctg} a+\pi k,\ \frac{\pi}{2}+\pi k),\ a\in\mathbb{R}$;

$\operatorname{tg} t<a\Leftrightarrow S=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \operatorname{arctg} a+\pi k\right),\ a\in\mathbb{R}$;

$\operatorname{ctg} t>a\Leftrightarrow S=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(\pi k,\ \operatorname{arcctg} a+\pi k),\ a\in\mathbb{R}$;

$\operatorname{ctg} t<a\Leftrightarrow S=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(\operatorname{arcctg} a+\pi k,\ \pi+\pi k),\ a\in\mathbb{R}$.

Замечание

Решения нестрогих тригонометрических неравенств содержат: оба конца интервалов для неравенств $\sin t\ge a$, $\sin t\le a$, $\cos t\le a$, $\cos t\ge a$; левые концы соответствующих интервалов для неравенств $\operatorname{tg} t\ge a$, $\operatorname{ctg} t\le a$; правые концы соответствующих интервалов для неравенств $\operatorname{tg} t\le a$, $\operatorname{ctg} t\ge a$.

§ 11 ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ

11.1. Операции над матрицами

Множество матриц размера $m\times n$ с элементами из множества $\mathbb{Z}$ (соответственно $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbf{C}$) обозначают через $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{Z})$ (соответственно $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{Q})$, $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{C})$). Для $m=n$ матрица называется ***квадратной порядка n***, а соответствующие множества обозначают через $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. В квадратной матрице $A=(a_{ij})$, $i,j=\overline{1,n}$, элементы a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} образуют ***главную диагональ***, а элементы a_{1n}, $a_{2\,n-1}$, ..., $a_{n-1\,2}$, a_{n1} – ***второстепенную диагональ***. Квадратная матрица называется ***верхнетреугольной*** (соответственно ***нижнетреугольной***), если все ее элементы, расположенные ниже (соответственно выше) главной диагонали, равны нулю.

Единичная матрица порядка n есть квадратная матрица вида $I_n=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}$.

Нулевая матрица (O) есть матрица любого порядка, элементы которой равны нулю.

Сумма матриц $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ размера $m\times n$ есть матрица того же размера $C=A+B=(a_{ij}+b_{ij})$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$. ***Произведение*** матрицы $A=(a_{ij})$ на число λ есть матрица $C=\lambda\cdot A=(\lambda\cdot a_{ij})$. ***Транспонированная*** к матрице $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{m,\,n}\mathbf{C}$ есть матрица ${}^tA=(a_{ji})\in\mathcal{M}_{n,\,m}\mathbf{C}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$. ***Произведение*** матрицы $A=(a_{ij})$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, на матрицу $B=(b_{jk})$, $j=\overline{1,n}$, $k=\overline{1,s}$ (определено лишь в случае, когда число столбцов первой матрицы равну числу строк второй матрицы) есть матрица $D=(d_{ik})$, $i=\overline{1,m}$, $k=\overline{1,s}$, где $d_{ik}=a_{i1}\cdot b_{1k}+\ldots+a_{in}\cdot b_{nk}$.

Задание с решением

Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ -1 & 0 & 8\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}5 & -3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

Выясним существуют ли, и в случае положительного ответа, вычислим:

а) $A+B$; б) $A+C$; в) $3C$; г) $A\cdot B$; д) $B\cdot C$; е) ${}^tA$.

Решение:

а) $A+B$ не существует, так как A и B матрицы различных размеров;

б) $A+C=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & -3\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -3\\ 1 & 4\end{pmatrix}$; в) $3C=3\cdot\begin{pmatrix}5 & -3\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & -9\\ 6 & 3\end{pmatrix}$;

г) $A\cdot B=\begin{pmatrix}2\cdot 2-0 & 2\cdot 3+0 & 2\cdot 1+0\\ -1\cdot 2+3\cdot(-1) & -1\cdot 3+3\cdot 0 & -1\cdot 1+3\cdot 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 6 & 2\\ -5 & -3 & 23\end{pmatrix}$;

д) $B\cdot C$ не существует, так как число столбцов матрицы B отлично от числа строк матрицы C; е) ${}^tA=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$.

Операции сложения и умножения матриц обладают теми же свойствами, что и соответствующие операции над числами, за исключением свойства коммутативности умножения матриц. Напомним *свойства операции транспонирования матриц*:

1° ${}^t(\lambda\cdot A)=\lambda\cdot{}^tA$; **2°** ${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB$; **3°** ${}^t({}^tA)=A$; **4°** ${}^t(AB)={}^tB\cdot{}^tA$.

Обратной к квадратной матрице A порядка n называется квадратная порядка n матрица A^{-1}, удовлетворяющая условиям $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I_n$.

Свойства обратимых матриц:

1° $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$;

2° если существует обратная к матрице A (т. е. матрица A ***обратима***), то A^{-1} единственна.

Задание с решением

Решим уравнение $3X-2A=({}^{t}B)^{2}\cdot C$, если:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1-\mathrm{i}\\ 0 & 3+\mathrm{i}\\ 1 & -2+2\mathrm{i}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 0 & 3 & -2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Решение:

В силу свойств операций над матрицами имеем:

$$3X=2A+({}^{t}B)^{2}\cdot C,\quad X=\frac{1}{3}(2A+({}^{t}B)^{2}\cdot C).$$

Так как $({}^{t}B)^{2}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 6\\ -1 & 3 & -3\\ -5 & 0 & 10\end{pmatrix}$, то $({}^{t}B)^{2}\cdot C=\begin{pmatrix}5 & 8\\ 5 & -9\\ -5 & 20\end{pmatrix}$.

Итак, $X=\frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix}4 & 2-2\mathrm{i}\\ 0 & 6+2\mathrm{i}\\ 2 & -4+4\mathrm{i}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 8\\ 5 & -9\\ -5 & 20\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}9 & 10-2\mathrm{i}\\ 5 & -3+2\mathrm{i}\\ -3 & 16+4\mathrm{i}\end{pmatrix}$.

Для нахождения обратной матрицы, для решения систем линейных уравнений применяются ***элементарные преобразования*** строк матрицы, а именно:

а) перестановка двух строк;

б) умножение всех элементов строки на одно и то же ненулевое число;

в) прибавление к элементам какой-либо строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и то же число.

Говорят, что ненулевая матрица A имеет ***ступенчатый вид*** (является ***ступенчатой***), если первый (слева) ненулевой элемент (называемый ***ведущим***) в каждой строке, начиная со второй, расположен правее первого ненулевого элемента из предыдущей строки.

Для нахождения обратной к квадратной матрице A порядка n строится матрица $(A\mid I_n)$. К полученной матрице применяются элементарные преобразования строк так, чтобы получить ступенчатую матрицу вида $(I_n\mid B)$ (если возможно). Матрица B равна A^{-1}. Если такое преобразование невозможно, то не существует обратной к матрице A.

Задание с решением

Найдем обратную к матрице $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 0 & 2 & -9\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$.

Решение:

$$(A\mid I_3)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -9 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -9 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 3\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & -6\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 0 & 0 & 4 & -2 & 13\\ 0 & 1 & 0 & 9 & -4 & 27\\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & -6\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -4 & 2 & -13\\ 0 & 1 & 0 & 9 & -4 & 27\\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 6\end{array}\right).\ \text{Итак, } A^{-1}=\begin{pmatrix}-4 & 2 & -13\\ 9 & -4 & 27\\ 2 & -1 & 6\end{pmatrix}.\ \text{(Проверьте!)}$$

11.2. Определители

Определителем матрицы $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, соответственно $C=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, или ***определителем порядка 2***, соответственно 3, называется число, обозначаемое $|A|=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$, соответственно $|C|=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$, которое можно обозначить также через $\det A$, соответственно $\det C$, или Δ.

Определитель квадратной матрицы A произвольного порядка n, $n\geq 2$, есть число $|A|=a_{i1}(-1)^{i+1}\overline{M}_1^i+\ldots+a_{in}(-1)^{i+n}\overline{M}_n^i$ или $|A|=a_{1i}(-1)^{1+i}\overline{M}_i^1+\ldots+a_{ni}(-1)^{n+i}\overline{M}_i^n$, где $\overline{M}_s^i$ – ***дополнительный минор*** элемента a_{is} – это определитель квадратной матрицы порядка $n-1$, полученной из A вычеркиванием строки i и столбца s. Эти выражения называются ***разложением определителя по строке i*** (соответственно ***по столбцу i***).

Задание с решением

Вычислим $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & \mathrm{i} \end{vmatrix}$.

Решение:

$$\Delta=1\cdot1\cdot\mathrm{i}+2\cdot2\cdot2+0\cdot0\cdot(-1)-(-1)\cdot1\cdot2-1\cdot2\cdot0-2\cdot0\cdot\mathrm{i}=10+\mathrm{i}.$$

Такой же результат получим, если разложим определитель по некоторой строке (столбцу), например, по третьей строке:

$$\Delta=2\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}+0\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}+\mathrm{i}\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=2\cdot(4+1)+0+\mathrm{i}\cdot1=10+\mathrm{i}.$$

Свойства определителей, применение которых упрощает их вычисление:

1° Определитель матрицы равен нулю, если выполнено одно из условий:
- а) все элементы какой-либо строки (столбца) равны нулю;
- б) элементы какой-либо строки (столбца) получаются из соответствующих элементов другой строки (столбца) умножением на одно и то же число (говорят, что такие строки (столбцы) пропорциональны);
- в) в частности, две строки (столбца) равны.

2° Определитель матрицы A равен определителю матрицы ${}^tA$.

3° Если матрица B получается из матрицы A перестановкой двух строк (столбцов), то:
$$\det B=-\det A.$$

4° Общий множитель элементов строки (столбца) можно вынести за знак определителя.

5° Если матрица B получается из матрицы A прибавлением к элементам некоторой строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на одно и то же число, то $|B|=|A|$.

Изложим два эффективных метода вычисления определителей:

1) преобразование определителя так, чтобы одна строка (столбец) содержала не более одного ненулевого элемента, и затем его разложение по соответствующей строке (столбцу);

2) преобразование определителя так, чтобы все элементы, расположенные выше или ниже главной (или второстепенной) диагонали, были равны нулю.

Во атором случае получаем определители вида:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\ldots a_{nn},\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2\,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2\,n-1}\ldots a_{n1}.$$

Задание с решением

Вычислим $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & \mathrm{i} \end{vmatrix}$.

Решение:

Применим первый метод.

Для этого к элементам первой строки прибавим соответствующие элементы второй строки, умноженные на –2, затем разложим полученный определитель по первому столбцу, содержащему лишь один ненулевой элемент:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & \mathrm{i} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & \mathrm{i} \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & \mathrm{i} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & \mathrm{i}-10 \end{vmatrix} = 26-\mathrm{i}.$$

Покажем применение определителей при вычислении обратной матрицы.

1. Матрица A обратима, если и только если $\det A \neq 0$.

2. Если $\det A \neq 0$, то обратная к матрице A находится следующим образом:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$ где $A_{ij} = (-1)^{i+j}\overline{M}_j^i$ – ***алгебраическое дополнение*** элемента a_{ij}.

Примеры

Для $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -9 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ имеем: $|A| = 1 \neq 0$, $A_{11} = (-1)^2\begin{vmatrix} 2 & -9 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4$,

$$A_{12} = (-1)^3\begin{vmatrix} 0 & -9 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 9,\ A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2,\ A_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1,\ A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -9 \end{vmatrix} = -13,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -9 \end{vmatrix} = 27,\ A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6.$$

Тогда $A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -4 & 2 & -13 \\ 9 & -4 & 27 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -13 \\ 9 & -4 & 27 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$.

11.3. Системы линейных уравнений

Произвольная система m линейных уравнений с n неизвестными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad a_{ij}, b_j \in \mathbf{C},\ i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n},\ m, n \in \mathbb{N}^*. \tag{1}$$

Матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ называются соответственно ***матрицей*** и ***расширенной матрицей*** системы (1).

Для решения систем, содержащих одинаковое число уравнений и неизвестных, и матрицы которых имеют ненулевой определитель, можно применять два метода: правило Крамера и использование обратной матрицы.

Теорема 1

(Правило Крамера)

Если в (1) $m = n$ и определитель $\Delta = |A|$ ненулевой, то система имеет единственное решение (совместно определена) и ее решением является $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, ..., $x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta}$, где Δ_i, $i = \overline{1, n}$, получается из Δ, заменив столбец i столбцом свободных членов.

Замечание

В условиях теоремы 1 решение системы (1) можно получить и с помощью обратной матрицы:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Задание с решением

Решим систему уравнений $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_2 - 9x_3 = 0, \\ -x_1 - 2x_3 = 2. \end{cases}$

Решение:

Матрицей системы является $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -9 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ и $|A| = 1 \neq 0$, поэтому можно применять правило Крамера. Имеем:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -9 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -26, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -9 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 54, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 12.$$

Получаем решение: $x_1 = -\dfrac{26}{1} = -26$, $x_2 = \dfrac{54}{1} = 54$, $x_3 = \dfrac{12}{1} = 12$.

Такой же результат получим, применив (2).

В примере раздела 11.1 вычислили матрицу, обратную к A: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -13 \\ 9 & -4 & 27 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$.

Применив (2), получим $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -13 \\ 9 & -4 & 27 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26 \\ 54 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Ответ: $S = \{(-26, 54, 12)\}$.

Если система (1) имеет производную форму (m не обязательно равно n), применяют ***метод Гаусса***, который состоит в следующем:

1. Составляем расширенную матрицу $\overline{A} = (A \mid B)$ системы (1) и приводим эту матрицу к ступенчатому виду $\overline{A_1} = (A_1 \mid B_1)$.

2. Если число ненулевых строк матрицы A_1 меньше, чем число ненулевых строк матрицы $\overline{A_1}$, то система несовместна.

3. Если число ненулевых строк матрицы A_1 равно числу ненулевых строк матрицы $\overline{A_1}$, то составляем систему уравнений (равносильную исходной), соответствующую матрице $\overline{A_1}$. Возможны два случая:

3.1. Число уравнений полученной системы равно числу неизвестных (***система треугольная***).
В этом случае система имеет единственное решение, которое находим следующим образом: из последнего уравнения вычисляем значение неизвестного x_n и подставляем в остальные уравнения, затем из предпоследнего уравнения вычисляем значение x_{n-1}, которое подставляем в предыдущие уравнения, и т. д., пока не вычислим значение неизвестного x_1.

3.2. Соответствующая система содержит меньше уравнений, чем неизвестных (является ***трапециевидной***, или ***ступенчатой системой***).
В таком случае определяем главные неизвестные (например, неизвестные, коэффициенты при которых являются ведущими элементами матрицы $\overline{A_1}$). Остальные неизвестные являются свободными. Обозначим их $x_q = \alpha, \ldots, x_v = \gamma$, где $\alpha, \ldots, \gamma \in \mathbf{C}$. Перенесем в правые части уравнений слагаемые, содержащие свободные неизвестные (параметры), и получим треугольную систему относительно главных неизвестных. Как и в случае 2.1, выражаем главные неизвестные через параметры $\alpha, \ldots, \gamma$ и получаем общее решение $x_1 = f_1(\alpha, \ldots, \gamma), \ldots, x_n = f_n(\alpha, \ldots, \gamma)$. Очевидно, что система уравнений имеет бесконечно много решений.

Задание с решением

Методом Гаусса решим систему уравнений $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$

Решение:

Составим расширенную матрицу системы: $\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & 0 & 5 \end{array}\right)$.

Применив элементарные преобразования строк, приведем матрицу к ступенчатому виду: $\overline{A_1} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

Число ненулевых строк матриц A_1, $\overline{A_1}$ совпадает, следовательно, система совместна.

Составим систему уравнений, соответствующую матрице $\overline{A_1}$, (получается трапециевидная система): $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 3. \end{cases}$

Главными неизвестными выберем x_1, x_2, а x_3, x_4 – свободными. Обозначим свободные неизвестные $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$, перенесем соответствующие слагаемые в правую часть и получим треугольную систему $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 + \alpha - \beta, \\ 3x_2 = 3 + 3\alpha - 4\beta. \end{cases}$

Из второго уравнения получаем $x_2 = 1 + \alpha - \frac{4}{3}\beta$. Подставляем в первое уравнение и получаем $x_1 = 1 + \frac{1}{3}\beta$.

Общим решением является $x_1 = 1 + \frac{1}{3}\beta$, $x_2 = 1 + \alpha - \frac{4}{3}\beta$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$.

Ответ: $S = \left\{ \left(1 + \frac{1}{3}\beta,\ 1 + \alpha - \frac{4}{3}\beta,\ \alpha,\ \beta \right) \middle| \alpha, \beta \in \mathbf{C} \right\}$.

§ 12 УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

A

1. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

$$4:[5(1{,}2:36+1\frac{1}{5}:0{,}25-1{,}8(3))\cdot 12{,}8]=$$
$$=0{,}125x:[(7-6{,}35):6{,}5+9{,}8(9)].$$

2. Пусть $a=\dfrac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}\,(5+2\sqrt{6})(-49+20\sqrt{6})}{\sqrt{27}-3\sqrt{18}+3\sqrt{12}-\sqrt{8}}$.

Определите, истинно или ложно высказывание:

а) $a\in\mathbb{N}$; б) $a\in\mathbb{Z}$; в) $a\in\mathbb{Q}$;
г) $a\in\mathbb{R}$; д) $a\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$; е) $a\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$.

3. Поставьте один из знаков (>, =, <), чтобы полученное высказывание стало истинным:

а) $2\sqrt{3}\ \square\ \sqrt{13}$; б) $\sqrt{19}\ \square\ \sqrt{26}-1$;
в) $3\sqrt{5}\ \square\ 5\sqrt{3}$; г) $0{,}2\sqrt{25}\ \square\ 0{,}1\sqrt{100}$.

4. Найдите множества $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, если:

а) $A=[\sqrt{3};\,3)$, $B=[1{,}9;\,\sqrt{10}]$;

б) $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x^2-x-2\ge 0\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,3-x-x^2>0\}$.

5. Упростите выражение:

а) $\left(\dfrac{a^2-2a+4}{4a^2-1}\cdot\dfrac{2a^2-a}{a^3+8}-\dfrac{a+2}{2a^2+a}\right):\dfrac{4}{a^2+2a}-\dfrac{a+4}{3-6a}$;

б) $\dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-b)}-\dfrac{\sqrt{ab}}{a-b}$.

6. Допишите такое действительное число, чтобы множество решений уравнения $2x^2-\square x+1=0$ содержало:

а) одно действительное решение;
б) два действительных решения;
в) два комплексных решения.

7. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $2^{x^2-x}=1$; б) $0{,}5^{2(x-5)}=0{,}25$; в) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{x^3+5x^2}=-\dfrac{1}{2}$;

г) $5\cdot 4^x=4\cdot 5^x$; д) $19^x=38^x$.

8. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $\log_2(x^2-3x)=2$;
б) $\lg(x^2-9x)=1$;
в) $\log_3(x-1)+\log_{\frac{1}{3}}(x+1)=-2$;
г) $\log_5(x^2-4)+\log_5\sqrt{125}=\log_5(x+4)$.

9. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $5^{2x}+5^x-600=0$; б) $10^x+4^x-2\cdot 25^x=0$.

10. Решите на множестве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ систему уравнений:

а) $\begin{cases}x^2+y^2=400,\\2x-y=0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}9^{x+y}=729,\\5^{x-y+1}=1;\end{cases}$ в) $\begin{cases}2x-y=16,\\\lg x+\lg y=2.\end{cases}$

11. Найдите значение выражения:

$-3\sin(\pi-\alpha)-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$ при $\sin\alpha=-\dfrac{1}{8}$.

12. Найдите значение выражения $\dfrac{-3\cos 33^\circ}{\sin(-57^\circ)}$.

13. Известно, что:

а) $\cos\alpha=-0{,}4$; б) $\sin\alpha=-0{,}6$.

Найдите $\cos 2\alpha$.

14. Известно, что $\sin\alpha+\cos\beta=2$. Найдите $\cos(\alpha+\beta)$.

15. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

а) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\ge 0$; б) $\dfrac{3|x-3|}{x^2(x-1)}\le 0$; в) $\dfrac{x^3(1-x)}{x^2-1}\le 0$.

16. Вычислите:

а) $\dfrac{7!-5!}{6!}$; б) $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}$; в) P_{n+1}; г) A_{k+3}^{k-1}.

17. Выполните действия:

а) $\dfrac{(n-8)!}{(n-10)!(n-9)}$; б) $\dfrac{(n+2)\,!}{(n-3)!\,(n+1)n}$.

18. Выполните действия:

а) $\dfrac{A_n^3\cdot P_{n+1}}{n!}$; б) $\dfrac{C_n^5-C_n^6}{C_n^3}$; в) $\dfrac{A_n^5C_n^4-P_n}{P_{n+1}}$.

19. Сколько различных пятизначных натуральных чисел можно составить из всех нечетных цифр без повторения цифр в записи каждого числа.

20. Сколькими способами из 20 учеников можно назначить двух дежурных, имеющих одинаковые обязанности?

21. Сколькими способами из 20 учеников можно назначить двух дежурных, имеющих различные обязанности?

22. Сколькими способами можно составить список из 10 учащихся?

23. Сколько элементов содержит множество, если число их перестановок больше 500 и меньше 600?

24. Решите на множестве $\mathbb{N}$ уравнение:

а) $C_x^3+C_x^4=A_x^2$; б) $\dfrac{A_x^2}{C_{x+1}^3}=48(x-1)$;

в) $2A_n^3+6A_n^2=P_{n+1}$.

25. Решите на множестве **C** уравнение:

а) $3z^2-z+1=0$; б) $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$.

26. Дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 - x^2 - 3x$.
а) Найдите промежутки, на которых функция f возрастает.
б) Найдите координаты точки локального максимума функции f.
в) Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $f(x) \le 0$.

27. Найдите промежутки возрастания, убывания и точки экстремума функции $f: D \to \mathbb{R}$:
а) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$; б) $f(x) = 1 - 16x^4$.

28. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции:
а) $f: [1, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - x^3$;
б) $f: [0, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2\sqrt{x}$.

29. Запишите уравнение касательной к графику функции $f: \mathbb{R} \setminus \{-8\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - 96}{x + 8}$, в точке пересечения графика:
а) с осью ординат; б) с осью абсцисс.

30. Установите, выполняются ли в точке $x_0 = 2$ условия теоремы Ферма для функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
а) $f(x) = (x-2)^2$; б) $f(x) = (x-2)^3$.

31. Начертите график функции, для которой в точках $x_0 = 0$, $x_1 = 3$ выполняются условия теоремы Ферма.

32. Найдите промежутки возрастания, убывания, точки экстремума и локальные экстремумы функции f на ее области определения, если $f: D \to \mathbb{R}$:
а) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 10$; б) $f(x) = x^3 - 18x$;
в) $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$.

33. Постройте график функции $f: D \to \mathbb{R}$:
а) $f(x) = x^3 - 2x + 1$; б) $f(x) = x^4 - 2x^2$.

34. Из 100 лотерейных билетов 6 выигрышных. Найдите вероятность того, что из 10 наугад купленных билетов ни один не окажется выигрышным.

35. Какова вероятность того, что у наугад выбранного числа меньше 40, но больше 9, обе цифры окажутся различными?

36. Иван и Василий бросают по одной игральной кости. Если сумма выпавших очков равна 7 или произведение чисел (очков) равно 6, то побеждает Иван. Если сумма очков равна 6 или произведение чисел (очков) равно 4, то побеждает Василий. На кого вы поставите? Кто выиграет?

37. Решите на множестве $\mathbf{C} \times \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ методом Крамера систему уравнений:
а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + ix_2 + 3x_3 = 1, \\ -x_1 + 4x_3 = 2, \\ 3ix_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

38. Решите на множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ методом Гаусса систему уравнений:
а) $\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

39. Вычислите $P(X) + Q(X)$, $P(X) - Q(X)$ и $P(X) \cdot Q(X)$, если
$P(X) = 2 - 3X + 2X^3$, $Q(X) = 3 + 4X - 2X^2$.

40. Найдите частное и остаток при делении многочлена $P(X)$ на многочлен $Q(X)$, где:
а) $P(X) = 2X^4 + 3X^3 - 2X^2 + 3X + 1$,
$Q(X) = X^2 + 3X + 1$;
б) $P(X) = 3X^5 - 2X^4 - 3X^2 + 5X + 4$,
$Q(X) = X^3 + 2X + 3$.

41. Дан многочлен $F(X) = X^5 + 5X^4 + 8X^3 + 5X^2 + 7X + 3$.
а) Выберите его корни из множества $M = \{\pm i, 1, 3, 0\}$.
б) Найдите кратность каждого корня многочлена.
в) Разложите многочлен на неприводимые множители с действительными коэффициентами.
г) Упростите выражение $H(X) = \dfrac{F(X)}{G(X)}$, где $G(X) = X^3 + X^2 + X + 1$.

42. Найдите корни многочлена $P(X)$, зная, что $P(\alpha) = 0$, если:
а) $P(X) = X^3 - 2X^2 - X + 2$, $\alpha = 1$;
б) $P(X) = X^3 + 5X^2 + 5X + 4$, $\alpha = -4$.

43. Разложите на неприводимые над $\mathbb{R}$ множители многочлен:
а) $X^3 - 1$; б) $X^4 - 16$; в) $X^4 - 3X^2 - 4$.

44. Цена единицы товара 150 леев. Затраты на производство товара выражены функцией
$$c(x) = 4x^2 + 30x + 300,$$
где x – количество единиц товара. Найдите максимальный валовой доход.

45. Материальная точка движется по оси согласно закону $s(t) = 27t - t^3 + 1$ (где s – расстояние, выраженное в метрах, а t – время, выраженное в секундах).
а) Какова начальная скорость материальной точки?
б) Через какое время после начала движения материальная точка остановится? Чему равно расстояние, пройденное за это время?

46. Три брата, возрасты которых являются последовательными членами геометрической прогрессии, делят денежную сумму пропорционально возрасту каждого из них. Если бы они поделили эти деньги через три года, когда младший брат был бы в два раза моложе старшего брата, то младший получил бы на 105 леев, а средний – на 15 леев больше. Сколько лет каждому из братьев?

47. Найдите кардинал множества $M=\mathbb{Z}\cap D,\ D\subseteq\mathbb{R}$, где D – область определения функции $f\colon D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\dfrac{x^2-9}{-x^2+25}$, а $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел.

48. Вычислите сумму первых пяти членов арифметической прогрессии $(a_n)_{n\ge1}$, если:

а) $a_{10}=131,\ r=12$; б) $a_5=27,\ a_{27}=60$.

49. Вычислите сумму первых десяти членов геометрической прогрессии $(b_n)_{n\ge1}$, если:

а) $b_8=384,\ q=2$; б) $b_3=20,\ b_4=1280$.

50. У Юры 120 леев. Каждый следующий день он тратит больше на одну и ту же сумму денег, чем в предыдущий день. В первый день он потратил 10 леев. Сколько денег истратил Юра в последний день, если известно, что все деньги были потрачены за 6 дней?

51. Типография выпускает тетради по 24 и 48 листов. Набор из 4 тонких и 5 толстых тетрадей продается по 51 лею, а набор из 8 тонких и 3 толстых тетрадей стоит 53 лея (включая НДС – 20%). Типография предоставляет скидку в 10%, если покупают 50 тонких или 30 толстых тетрадей.

а) Сколько будут стоить эти тетради в магазине (поштучно), если торговая надбавка составляет 1 лей для тонкой и 2 лея для толстой тетради?

б) Сколько тонких тетрадей можно купить в магазине на сумму, потраченную для приобретения 50 тонких тетрадей в типографии?

52. В 2014 году в городе было 30 000 жителей. В 2015 году за счет новых построек население города увеличилось на 9%, а в 2016 – на 10% (сравнительно с 2015 годом). Сколько жителей было в городе в 2016 году?

53. Предприниматель Петров в 2000 году получил прибыль в 10 000 леев. В каждый последующий год его прибыль возрастала на 200% сравнительно с предыдущим годом.

а) Сколько всего леев заработал предприниматель с 2000 по 2005 годы?

б) На сколько процентов доход в 2005 году больше, чем в 2000 году?

54. Вычислите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты (1; 1), (1; 4), (4; 3).

55. Вычислите площадь параллелограмма, вершины которого имеют координаты (1; 2), (1; 4), (5; 3), (5;1).

56. Прямая $y=2x-3$ касательна к графику функции $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+2x-3$.
Найдите абсциссу точки касания.

57. Высота, на которой находится мяч, брошенный вертикально вверх относительно поверхности земли, вычисляется по формуле $h(t)=-4t^2+22t$; где h – высота (в метрах), t – время (в секундах), пройденное после броска. Сколько секунд будет находиться мяч на высоте не меньше 10 м?

58. Дана система координат xOy и точки $A(-2,-1)$, $B(0,3)$, $C(-3,2)$.

а) Найдите: 1) $|\overrightarrow{AO}|$; 2) $|\overrightarrow{AB}|$; 3) $|\overrightarrow{BC}|$; 4) $|\overrightarrow{AC}|$.

б) Найдите: 1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}$; 3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

в) Определите тип треугольника ABC.

г) Найдите площадь треугольника ABC.

д) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

е) Вычислите длину окружности, описанной около треугольника ABC.

59. Найдите цифру a, при которой:

а) число $\overline{235a}$ кратно 18; б) число $\overline{120a}$ кратно 15;

в) число $\overline{345a}$ кратно 6.

60. Даны числа: 1) $a=272,\ b=150$; 2) $a=41,\ b=246$.

а) Разложите на простые множители числа a и b.

б) Найдите НОД чисел a, b, то есть (a, b).

в) Найдите НОК чисел a, b, то есть $[a, b]$.

61. Вычислите:

а) $\dfrac{(1-\mathrm{i})^{2011}}{(1+\mathrm{i})^{2011}}$; б) $\mathrm{i}^{2012}\cdot(\mathrm{i}^{27})^{15}$;

в) $\begin{vmatrix} \mathrm{i} & 2 & -\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & 0 & 2\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} & 1 & \mathrm{i} \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{i} & 1 \\ -1 & \mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \end{vmatrix}$.

62. Решите на множестве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ систему уравнений:

а) $\begin{cases} \log_3 x+\log_3 5=\log_3 10, \\ \log_5 x^3+\log_5 y^2=\log_5 32; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^3y+xy^3=1010, \\ \lg x+2\log_{100} y=1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2^{\frac{x-y}{2}}-2^{\frac{x-y}{4}}=2, \\ 3^{\log_2(2y-x)}=1. \end{cases}$

63. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $x+\sqrt{5x+10}=8$; б) $4x-5=-2\sqrt{5-4x}$;

в) $(x^2-4)\sqrt{x-3}=0$; г) $2^{x+3}+4^{x+1}=320$;

д) $3^{x+1}+18\cdot3^{-x}=29$;

е) $\log_{\frac{1}{5}}(3-2x)+\log_5(-x-6)=-1$.

64. Дано уравнение $5x^2-x-4=0$.

а) Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение.

б) Составьте многочлен II степени, корнями которого являются противоположные решения данного уравнения.

в) Найдите первообразную функции g, соответствующую многочлену из пункта б), график которой проходит через точку $A(-1, 5)$.

г) Вычислите интеграл $\int\limits_0^1 G(x)\mathrm{d}x$, где G – первообразная, найденная в пункте в).

д) Найдите объем правильного тетраэдра, длина ребра которого равна значению определенного интеграла из пункта г).

65. Наугад выбирается одна буква из пословицы: „Настоящий друг познается в беде“.

а) Какова вероятность, что это будет буква *е*?

б) Какова вероятность, что это будет буква *а*?

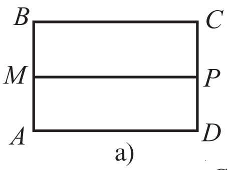
66. Один из операторов мобильной связи в Республике Молдова проводит акцию: каждая минута, начиная со второй, стоит на 10 банов дешевле, чем предыдущая минута. Сколько сэкономит пользователь за 15-минутный разговор в рамках этой акции?

67. Фермер выращивает кроликов и страусов. Всего на ферме насчитывается 200 голов и 700 лап. Сколько кроликов и сколько страусов?
(Решите задачу алгебраическим методом и методом фальшивой гипотезы.)

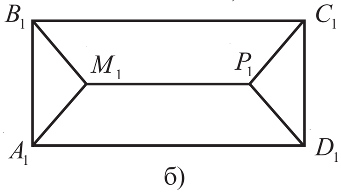
68. Коммерческая фирма „VinProm“ экспортирует в Европу вино в цистернах цилиндрической формы, каждая длиной 10 м и шириной 2 м. В Европе вино переливают в бутылки по 0,7 л каждая. Бутылка вина продается по цене 2,5 €. Сколько леев получено за товар, если продали 6 таких цистерн? (1 € = 21,14 лея).

69. Фабричная труба имеет форму усеченного прямого кругового конуса, у которого высота равна 30 м, внешний диаметр при основании равен 3,6 м, а внешний диаметр при вершине 2,4 м. Внутренняя часть трубы имеет форму прямого кругового цилиндра, диаметр которого равен 1,6 м. Сколько весит эта труба, если масса одного кубического метра этого строения равна 1800 кг?

70. Согласно проекту, дом, основание которого – прямоугольник со сторонами 8 м и 12 м (рис. а), должен был иметь двускатную крышу, угол наклона которой относительно горизонтальной поверхности равен 45°. Для уменьшения объема чердака, не меняя площади его поверхности, было принято решение изменить форму крыши и сделать ее четырехскатной так, чтобы две по две части крыши были конгруэнтными (рис. б).
На сколько процентов уменьшился объем чердака, если известно, что длина вершины новой крыши 8 м (то есть $M_1P_1 = 8$ м)?



а)



б)

71. Величина острого угла ромба равна α, а его высота равна h.

а) Найдите длины диагоналей ромба.

б) Найдите площадь ромба, используя найденные длины его диагоналей.

в) Найдите объем прямой призмы, основанием которой является данный ромб, а ее высота конгруэнтна стороне ромба.

72. В равнобокую трапецию с основаниями 1 см и 9 см вписана окружность. Найдите:

а) длину боковой (непараллельной) стороны трапеции;

б) радиус окружности, вписанной в трапецию;

в) высоту трапеции;

г) длину диагонали трапеции;

д) радиус окружности, описанной около трапеции;

е) площадь трапеции;

ж) площади треугольников, на которые делит трапецию ее диагональ.

73. Дана окружность радиуса 12 см. Найдите:

а) длину стороны равностороннего треугольника, описанного около этой окружности;

б) периметр правильного четырехугольника, описанного около этой окружности;

в) площадь правильного шестиугольника, описанного около этой окружности.

74. В ромбе $ABCD$, $AB = 6$ см, $m(\angle A) = 60°$, $K \in [CD]$ и $CK = 2$ см. Из точки K восстановлен перпендикуляр KM к плоскости ромба такой, что $KM = 6$ см. Найдите:

а) величину угла, образованного прямой AD и плоскостью MCD;

б) величину двугранного угла, ребро которого AB;

в) расстояние между прямыми MK и BD;

г) величину угла, образованного прямыми MC и BD.

75. Определите взаимное расположение окружностей, заданных уравнениями:
$x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ и $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 3$.

76. Запишите уравнение окружности радиуса 5 м, которая касается окружности $x^2 + y^2 - 10y = 0$ в точке $P(3, 1)$.

77. Найдите координаты общих точек прямой $y = 4 - 0{,}4x$ и окружности $x^2 + x + y^2 = 1$.

78. Найдите площадь полной поверхности правильной шестиугольной призмы, если известно, что ее объем равен 4 дм^3, а сумма длин всех ее ребер минимальна.

79. В параллелограмме $ABCD$, $m(\angle A) = 45°$, $AP \perp (ABC)$, $AD = 3\sqrt{2}$ см, $AP = 4$ см, $AB = 3$ см.

а) Найдите расстояние от точки P до прямой DC.

б) Найдите расстояние от точки P до всех вершин параллелограмма.

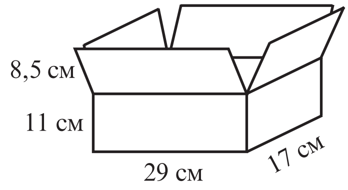
в) Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.
г) Найдите площадь треугольника PAC.

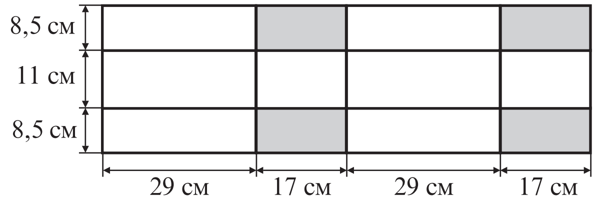
80. Дана функция $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2$. Касательная, проведенная к графику G_f, пересекает ось Ox в точке M, а ось Oy – в точке N. Найдите координаты точки касания, если площадь треугольника NOM равна $6{,}75$ см^2.

81. Площадь прямоугольника равна 32 см^2. Найдите наименьшее значение периметра этого прямоугольника.

82. Банк выделяет кредит на следующих условиях: банк выдает клиенту по 100 000 леев ежедневно на протяжении месяца (30 дней); клиент же возвращает банку в первый день – 1 бан, во второй – 2 бана, в третий – 4 бана, в четвертый – 8 банов и т. д. (на протяжении 30 дней). Согласны ли вы стать клиентом этого банка? Обоснуйте ответ.

83. Упаковочная картонная коробка имеет форму прямоугольного параллелепипеда, размеры которого указаны на рисунке. Исследуйте развертку этой коробки и соответствующие размеры. При сборке коробки некоторые прямоугольники (закрашенные) накладываются.
Найдите площадь полной поверхности закрытой коробки.





Б

1. Представьте в тригонометрической форме число:
а) i; б) $-\mathrm{i}$; в) 10; г) $\mathrm{i}-\sqrt{3}$; д) $2-3\mathrm{i}$.

2. Определите, истинно или ложно высказывание:
а) $(\exists x\in\mathbb{R})(|x+2|<3)$;
б) $(\forall x\in\mathbb{R})(x^2+4x+4+|x^2-x+1|>0)$.

3. Докажите методом математической индукции:
$$\frac{1}{4\cdot5}+\frac{1}{5\cdot6}+\ldots+\frac{1}{(n+3)(n+4)}=\frac{n}{4(n+4)}.$$

4. Решите на множестве $\mathbf{C}$ уравнение:
а) $\mathrm{i}x^2-3x+\mathrm{i}=0$; б) $z^4-z^2-12=0$;
в) $3x^3-x^2-x+3=0$; г) $(1+\mathrm{i})z^2-(5+2\mathrm{i})z+5=0$.

5. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:
а) $\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x+\left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^x=10$;
б) $2x^2-8x+3\sqrt{x^2-4x+1}=3$;
в) $(x^2-6x+5)\sqrt{2x+8-x^2}=0$;
г) $\sqrt{4^x-2^{x+1}+1}+\sqrt{4^x-8\cdot2^x+16}=3$;
д) $x^{\log_2 x+2}=256$;
е) $6^{\log_{\sqrt{3}} x}-7\cdot6^{\log_3 x}=-6$;
ж) $\log_{x+2} x+\log_x(x+2)=2{,}5$.

6. Решите на множестве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ систему уравнений:
а) $\begin{cases} x^{\log_2 y}+y^{\log_2 x}=16,\\ \log_2 x-\log_2 y=2;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=2,\\ x+y=26;\end{cases}$
в)) $\begin{cases}2\log_y x+2\log_x y=5,\\ xy=8;\end{cases}$ г) $\begin{cases}|x|^{\lg y}=4,\\ xy=40.\end{cases}$

7. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:
а) $\log_{0,1}(-x)\le\frac{1}{2}\log_{0,1}(8-7x)$;
б) $27\cdot4^x-30\cdot6^x+8\cdot9^x\ge0$;
в) $32^{1-x^2}<16^x$; г) $0{,}2^{x^2-6}\ge0{,}008$;
д) $\log_{\frac{1}{3}}\log_2\frac{x-3}{1-x}>-1$; е) $\log_x\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x-2}\right)\le1$.

8. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:
а) $(x^2-4x+4)(\ln x-1)<0$;
б) $|x^2-5x+6|(4^x-64)\ge0$.

9. Найдите область определения функции $f\colon D\to\mathbb{R}$:
а) $f(x)=\sqrt{\dfrac{(x+5)(2-x)}{\log_2(x^2-1)}}$;
б) $f(x)=\ln|x^2-1|+\dfrac{\sqrt[4]{3x^4-x^2-2}}{x^3-x^2+x-1}$.

10. Вычислите $\sqrt[3]{z_1z_2}$, где $z_1,\ z_2$ – комплексные решения уравнения $x^2-(2\mathrm{i}+1)x+(\mathrm{i}-1)=0$.

11. При каких значениях действительного параметра a система уравнений $\begin{cases}|x|+y=5\\ (y-a)^2+x^2=9\end{cases}$ имеет единственное решение?

12. Вычислите:
а) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(1-x)(1-2x^2)(1-3x^3)}{(3+2x^2)^3}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{6}{1-x^6}-\dfrac{4}{1-x^4}\right)$;
в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\,\mathrm{tg}\,x}-\sqrt{\cos2x}}{\sin^2(3x)}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$.

13. Вычислите $\lim\limits_{a\to+\infty}a\cdot I(a)$, если $I(a)=\displaystyle\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{|x+a|+1}$.

14. Вычислите $\lim\limits_{a\to+\infty}a(I(a)-1)$, если $I(a)=\displaystyle\int_a^{a+1}\frac{|1-x|\,\mathrm{d}x}{1+|x|}$.

15. Найдите значения действительных параметров a и b, при которых
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt[3]{x^3+x^2}+\sqrt[4]{x^4+x^3}+ax+b\right)=\frac{1}{12}.$$

16. Найдите значения действительного параметра a, при которых:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+ax+1}{x^2+2x-1}\right)^x=e$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{1+a^2x^2}}\right)^{x\sqrt{x}}=\sqrt{e},\ a\neq 0$.

17. Определите форму графика функции $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, если известно, что на интервале (a,b):

а) $f(x)>0,\ f'(x)>0,\ f''(x)<0$;

б) $f(x)<0,\ f'(x)>0,\ f''(x)>0$.

В заданиях 18–20 укажите букву, соответствующую верному варианту.

18. Разложение степени бинома $(5x+3y)^{17}$ состоит из

A 17 членов. **B** 16 членов.
C 18 членов. **D** 15 членов.

19. Шестой член разложения степени бинома $(a^2-b^2)^{10}$ равен

A $C_{10}^6(a^2)^4\cdot(b^2)^6$. **B** $-C_{10}^5(a^2)^5(b^2)^5$.
C $C_{10}^5(a^2)^5(b^2)^5$. **D** $-C_{10}^6(a^2)^4(b^2)^6$.

20. Сумма биномиальных коэффициентов членов, стоящих на нечетных местах в разложении степени бинома $(x^3-y^3)^6$, равна

A 32. **B** 64. **C** 128. **D** 16.

21. Допишите выражение, используя факториал, чтобы полученное высказывание стало истинным:

$C_{m+3}^{m-2}=\boxed{}$.

22. Решите на множестве $\mathbb{N}$ неравенство:

а) $2C_n^3\geq A_n^2$; б) $4(C_{n-1}^4-C_{n-1}^3)\geq 5A_{n-2}^2$.

23. Найдите (если существует):

а) член разложения степени бинома $\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{x}\right)^{14}$, содержащий x^3;

б) член разложения степени бинома $(y-\sqrt{2})^9$, содержащий y^7;

в) член разложения степени бинома $(2a^3-a^2)^{20}$, не содержащий a.

24. Найдите C_n^4, если известно, что в разложении степени бинома $(1+\sqrt{a})^n$ биномиальные коэффициенты при a^3 и a^5 равны.

25. Сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах в разложении степени бинома $\left(a^2-\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^n$, равна 64. Найдите член разложения, содержащий a^{-3}.

26. Используя разложение степени бинома, вычислите $P(2-\mathrm{i})$, если $P(X)=X^5-3X^3+\mathrm{i}X-\mathrm{i}$.

27. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $3\cos^2x+7\sin x-5=0$;

б) $1-\sin 2x=(\cos x+\sin x)^2$;

в) $\sin x-\cos x=-\sqrt{2}$;

г) $2\sin^2x-3\sin 2x=2$;

д) $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-5\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}=-4$;

е) $2\sin^2x-1{,}5\sin 2x-3\cos^2x=0$.

28. Найдите решения уравнения $\cos 2x-5\sin x=3$, которые принадлежит отрезку $\left[-\pi,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

29. Зная, что $A=\begin{pmatrix}2&0\\-1&-3\\3&\mathrm{i}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&1\\-5&6\\2\mathrm{i}&4\end{pmatrix}$, $C_1=\begin{pmatrix}3&5\\4&-1\end{pmatrix}$,

$C_2=\begin{pmatrix}2&0&-3\\1&4&-1\\0&-3&1\end{pmatrix}$, решите матричное уравнение:

а) ${}^tAB-2X=3C_1$; б) $3X+AB^t+2C_2=0$.

30. Решите на множестве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ методом Гаусса систему уравнений:

а) $\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3-4x_4=1,\\x_1+4x_3-2x_4=2,\\4x_1+x_2+11x_3-8x_4=5;\end{cases}$

б) $\begin{cases}3x_1+x_2+2x_3-3x_4=0,\\x_1+2x_2-4x_3+x_4=2,\\2x_1-x_2+6x_3-4x_4=-2,\\5x_1+5x_2-6x_3-x_4=4.\end{cases}$

31. Докажите, что если функции $f,g: I\to\mathbb{R}$ $(I\subset\mathbb{R})$ непрерывны в некоторой точке $x_0\in I$ и если $f(x_0)<g(x_0)$, то существует $\delta>0$ такое, что $f(x)<g(x)$ для любого $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap I$. Останется ли верным заключение, если одна из функций f,g разрывна в точке x_0?

32. Пусть $f:[-1,1]\to[-a,a]$ – непрерывная функция, где a, $a>0$, фиксированный параметр. Покажите, что уравнения $f(x)-ax=0$ и $f(x)+ax=0$ имеют хотя бы одно действительное решение, принадлежащее отрезку $[-1,1]$.

33. Пусть $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ – непрерывная, отличная от константы функция и $f(a)=f(b)$. Покажите, что если $m=\min\limits_{x\in[a,b]}f(x)$ и $M=\max\limits_{x\in[a,b]}f(x)$, то функция f принимает не менее двух раз любое значение из промежутка (m,M).

34. Пусть $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ – некоторая непрерывная функция. Докажите, что функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(\alpha)=\int\limits_0^1 g(x)\sin\alpha x\,\mathrm{d}x$, непрерывна на множестве $\mathbb{R}$.

35. Дана функция $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}, & \text{если } x\in[-1, 1]\setminus\{0\},\\ \alpha, \text{ если } x=0, \alpha\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

Найдите значения α, при которых функция f непрерывна на отрезке $[-1, 1]$.

36. Найдите точки разрыва функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\le 0,\\ x+\cos x, & 0<x<\dfrac{\pi}{2},\\ e^x, & x\ge\dfrac{\pi}{2};\end{cases}$

б) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$.

37. Пусть $a\in\mathbb{R}$ и функция $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}2x^2+a^2, & x\in(-\infty, a],\\ 2x+1, & x\in(a, +\infty).\end{cases}$$

Найдите a, при котором функция f непрерывна на множестве $\mathbb{R}$.

38. Определите, ограничена ли функция:

а) $f\colon [0, 1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2+1}$;

б) $f\colon (0, 1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{x(1+e^x)}$;

в) $f\colon [0, 3\pi)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{2+\sin x}$;

г) $f\colon (-\infty, +\infty)$, $f(x)=\sin x+e^{-x}$.

39. Докажите, что функция $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ имеет хотя бы один нуль на указанном множестве:

а) $f(x)=3^x-2-\sin x$ на $[0, 1]$;

б) $f(x)=\ln x+x^2$ на $(0, 1]$.

40. Примените теорему Ролля к функции f и найдите соответствующее число c:

а) $f\colon [-2, 5]\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+2)(x-5)$;

б) $f\colon [-1, 5]\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x-2|$.

41. Примените теорему Лагранжа к функции f и найдите соответствующее число c:

а) $f\colon [1, 4]\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x\ln x$;

б) $f\colon [-1, 2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-3e^x$;

в) $f\colon [0, 4]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}-x^2, & \text{если } x\in[0, 1],\\ x-2, & \text{если } x\in(1, 4].\end{cases}$

42. Используя правила Лопиталя, вычислите предел:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+2x^2}{x^2-5x}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{2x}\right)^{\frac{1}{x\sin x}}$.

43. Постройте график функции $f\colon D\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=x^2\ln x$; б) $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$; в) $f(x)=\dfrac{|x^2-4|}{2x}$.

44. Найдите наибольшую площадь прямоугольника, диагональ которого равна l.

45. Покажите, что график функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$, имеет 3 точки перегиба, которые лежат на одной прямой.

46. При каких значениях параметров $a, b\in\mathbb{R}$ точка $M(1, 3)$ является точкой перегиба для кривой $f(x)=ax^3+bx^2$?

47. Докажите, что если график функции $f\colon (a, b)\to\mathbb{R}$ обращен выпуклостью строго вниз (или строго вверх), то эта функция имеет не более одной точки экстремума.

48. Найдите положительное число x, при котором сумма $x+\dfrac{1}{x}$ минимальна.

49. Постройте прямую, проходящую через точку $A(1, 4)$ так, чтобы сумма длин отрезков, полученных при пересечении этой прямой с положительными полуосями Ox и Oy, была минимальной.

50. Найдите величину налога для каждой единицы товара, при которой доход от налогообложения максимален, если известна функция спроса $p(x)=900-\dfrac{1}{3}x$ и функция предложения $p_1(x)=800+3x$ (x – количество единиц товара).

Указание. Доход от налогообложения вычисляется по формуле $V(x)=I\cdot x$, где I – величина налога на единицу товара и определяется из соотношения $p(x)=p_1(x)+I$.

51. Закон движения материальной точки по оси задается формулой $s(t)=te^{-t}+2$. Найдите:

а) момент времени, когда ускорение материальной точки равно нулю;

б) минимальное значение скорости и расстояние, пройденное в соответствующий момент времени.

52. Допишите выражение, чтобы получить истинное высказывание:

$$3A_n^2+A_n^3=\boxed{}-C_n^{n-1}.$$

53. Выполните действия: $\dfrac{C_{2n}^3C_{2n}^1}{(C_{2n}^2)^2}-\dfrac{P_{2n}P_{2n+1}(4n^2-2n)^2}{4(C_{2n}^2)^2((2n)!)^2}$.

54. Найдите сумму $C_n^0+3C_n^1+3^2C_n^2+\ldots+3^nC_n^n$.

55. Докажите, что:

$$C_n^0+2C_n^1+3C_n^2+\ldots+(n+1)C_n^n=(n+2)2^{n-1},\ n\in\mathbb{N}^*.$$

56. Решите на множестве $\mathbb{N}$ уравнение:

а) $\dfrac{C_{2n+1}^{n-1}}{C_{2n}^{n+1}}=\dfrac{13}{7}$; б) $C_{2n-1}^{2n-2}=n^3+13$.

57. Решите на множестве $\mathbb{N}$ неравенство:

а) $C_{2n}^{5} > C_{2n}^{3}$; б) $C_{11}^{n} < C_{11}^{n+2}$; в) $\dfrac{C_{n+1}^{2}}{C_{n}^{3}} \geq \dfrac{4}{5}$.

58. Найдите в разложении степени бинома $(\sqrt{5}-\sqrt{3})^n$ значение n, при котором $T_5 : T_7 = 5$.

59. Сколько рациональных слагаемых в разложении степени бинома:

а) $(\sqrt{3}+\sqrt[4]{5})^{124}$; б) $(\sqrt{2}-\sqrt[4]{3})^{100}$?

60. Найдите число x, если известно, что четвертое слагаемое разложения степени бинома $(x - x^{\lg x})^9$ равно $-84\cdot 10^8$.

61. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $\dfrac{\sin 2t}{1-\sin t} = 2\cos t$;

б) $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2\sin 3x$;

в) $3^{1-4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} - 8\cdot 3^{\cos x - \sin x} - 9 = 0$;

г) $\cos 4x + \sin^2 3x = 1$.

62. При каких значениях действительного параметра a уравнения $\sin x + \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0$ и $\left(\sin x - \dfrac{a}{3}\right)\left(\sin x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$ равносильны?

63. Найдите действительные решения уравнения
$$\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x,$$
которые удовлетворяют условию $\cos x < -\dfrac{1}{2}$.

64. Найдите двумя способами обратную к матрице:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

65. Установите, совместна ли система уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$

66. Даны условия. A: „Треугольник MNP равнобедренный“, B: „Величины углов M и N равны 30°“. Сформулируйте теорему „Если A, то B“ и обратную к ней. Найдите их истинностные значения.

67. Даны условия. A: „Целое число a кратно 4“, B: „Целое число a кратно 8“. Определите, равносильны ли эти условия.

68. Допустим, что вы забыли одну цифру номера телефона и набираете ее наугад. Какова вероятность, что вы сделаете не более двух попыток?

69. В двух урнах содержатся 13 шаров, белых и черных. Из каждой урны извлекается наугад по одному шару. Вероятность того, что оба шара белые, равна $\dfrac{7}{18}$. Чему равна вероятность того, что оба извлеченных шара будут черными?

70. Даны цены единицы одного и того же товара, выставленного для продажи в разных магазинах:

45	60	40	52,5	50	60	47,5	62,5
45	50	45	60	55	60	45	42,5
60	50	50	62,5	40	55	55	60

а) Сгруппируйте эти данные по интервалам: [40, 45), [45, 50), [50, 55), [55, 60), [60,65]. Дополните полученную таблицу, включая в нее накопленные относительные частоты.

б) Предложите два способа для определения средней цены единицы соответствующего товара.

71. Найдите значения параметра a, при которых остаток от деления многочлена $P(X)$ на двучлен $Q(X)$ равен r, если:

а) $P(X) = X^4 + aX^3 - 6X^2 + 3X + 4$,
$Q(X) = X + 3$, $r = -5$;

б) $P(X) = X^3 + (a^2+3)X^2 + 2aX + 4a + 5$,
$Q(X) = X - 2$, $r = 37$.

72. Найдите корни многочлена $P(X)$, зная, что $P(\alpha) = 0$, если $P(X) = X^3 - 21X^2 - 73X + 24$, $\alpha = 24$.

73. Найдите остальные рациональные корни многочлена, если α_1 – один из его корней:

а) $X^3 + 9X^2 + 18X + 26$, если $\alpha_1 = -2$;

б) $2X^3 + 12X^2 + 60X + 50$, если $\alpha_1 = -1$.

74. Разложите многочлен на неприводимые над $\mathbb{R}$ множители и найдите его корни:

а) $X^4 + X^3 - X^2 - 1$; б) $x^4 - 2x^2 + 1$; в) $3x^4 - x^2 - 2$.

75. Докажите, что числа $\dfrac{1}{6}\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ являются последовательными членами арифметической прогрессии, если $\alpha = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

76. Докажите, что если для показательной функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$, последовательность значений аргумента $x = x_n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ образует арифметическую прогрессию, то последовательность соответствующих значений функций $(f(x_n))_{n\geq 1}$ образуют геометрическую прогрессию.

77. На соревновании по стрельбе за каждый промах из серии в 25 выстрелов спортсмена штрафуют следующим образом: за первый промах – 1 балл, за каждый последующий промах – на $\dfrac{1}{2}$ больше, чем за предыдущий промах. Сколько раз спортсмен попал в цель, если его оштрафовали 7 баллами за промахи?

78. При каких значениях $x \in (1, +\infty)$ числа $\lg 2$, $\lg(2^x - 1)$, $\lg(2^x + 3)$ являются последующими членами арифметической прогрессии?

79. Числа x, y, z являются последовательными членами геометрической прогрессии, а числа x, $2y$, $3z$ – последовательными членами арифметической прогрессии. Найдите отличный от единицы знаменатель геометрической прогрессии.

80. Металлическая деталь в форме прямого кругового цилиндра, дополненного прямым круговым конусом того же радиуса, имеет высоту 40 см. Образующая конуса составляет с плоскостью основания угол в 15°. Площадь боковой поверхности цилиндра относится к площади основания конуса как 1,5:1. Сколько краски потребуется для покраски этой детали, если расход краски составляет 2 г на 0,01 дм²?

81. Дана функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -x^3 - x^2 - mx.$ Известно, что точка $x_0 = -2$ – точка максимума для функции f.
а) Найдите значение параметра m.
б) Определите точку минимума для функции f при m, найденном в пункте а).
в) Вычислите расстояние между точками максимума и минимума функции f.

82. При каких действительных значениях параметра a функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = (2-x)^2 - ax + 3a$, четная?

83. Прямая $y = 4x + 6$ – касательная к графику функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 + x^2 + 5x + 7.$
а) Найдите координаты точки касания.
б) Сколько общих точек имеют прямая $y = 4x + 6$ и G_f?
в) Вычислите площадь фигуры, ограниченной прямыми $y = 4x + 6$, G_f, $x = -1$ и $x = 4$.

84. Найдите кардинал множества:
$$A = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid x = \frac{6n-7}{2n+1},\ n \in \mathbb{Z}\right\} \cup$$
$$\cup \left\{x \in \mathbb{N} \mid x = \frac{3n^2+6n+1}{n^2+1},\ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

85. Дано множество $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + mx + 2 = 0\} \cup$
$\cup \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 8x + 2m^2 = 0\}.$
Докажите, что $\operatorname{card} B = 2$ при любых $m \in \mathbb{N}$.

86. Имея отрез ткани треугольной формы, портниха хочет сшить покрывало прямоугольной формы. Как должна покроить это покрывало портниха, чтобы отходы ткани были минимальными?

87. Даны функции:
$$f\colon D_1 \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x-1}},$$
$$g\colon D_2 \to \mathbb{R},\ g(x) = \sqrt{2x + \sqrt{4x-1}} + \sqrt{2x - \sqrt{4x-1}}.$$
а) Найдите D_1 и D_2.
б) Сократите отношение $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.
в) Решите на множестве $D_1 \cap D_2 \cap \mathbb{R}$ уравнение:
$$f(x) + g(x) = 2\sqrt{2}.$$

88. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем:
$$(1+\mathrm{i})^n + (1-\mathrm{i})^n \in \mathbb{R}.$$

89. Пусть $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ такие, что $|z_1| = |z_2| = 1$. Докажите, что $\dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \in \mathbb{R}$.

90. Найдите комплексное число z, при котором:
а) $|z| - 2z = 3 - 4\mathrm{i}$; б) $|z - \mathrm{i}| = |z - 1| + |z + \mathrm{i}z|$.

91. Пусть $z = a + b\mathrm{i}$. Найдите все комплексные числа $z_1 = x + \mathrm{i}y$ такие, что $z^2 = a + b\mathrm{i}$.

92. Докажите, что $\log_2 3 + \log_3 4 + \log_3 5 + \log_5 6 > 5$.

93. Найдите сумму и затем методом математической индукции докажите, что формула верна $\forall n \in \mathbb{N}^*$:
а) $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + n(n+1)$;
б) $1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2)$;
в) $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

94. На фирме работают 15 специалистов (9 мужчин и 6 женщин). Из них составляют команду из 7 членов, в которую входят хотя бы 3 женщины. Сколькими способами можно составить эту команду?

95. У одного меломана 9 музыкальных CD, а у другого – 7 музыкальных CD.
а) Сколькими способами они могут обменяться CD: один CD на один CD?
б) Сколькими способами они могут обменяться CD: два CD на два CD?

96. Сколько словарей необходимо для того, чтобы перевести напрямую из одного языка на один из следующих 6 языков: румынский, украинский, русский, греческий, итальянский, английский?

97. Найдите:
а) рациональные члены разложения бинома $(\sqrt[5]{2} - \sqrt[7]{3})^{24}$;
б) иррациональные члены разложения бинома $(\sqrt[5]{3} + \sqrt[7]{2})^{24}$.

98. Докажите, что для $n \in \mathbb{N}$ число $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ – натуральное.

99. Докажите, что:
а) $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \ldots = 2^{\frac{n}{2}} \sin\dfrac{n\pi}{4}$;
б) $1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots = 2^{\frac{n}{2}} \cos\dfrac{n\pi}{4}$.

100. Последовательность $(a_n)_{n\ge 1}$ задана формулой общего члена: а) $a_n = \dfrac{1}{n}$; б) $a_n = \sqrt{n}$.
Докажите, что какими бы ни были три последовательных члена этой последовательности, они не являются последовательными членами арифметической прогрессии.

101. Вычислите сумму $3 + 33 + 333 + \ldots + \underbrace{333\ldots3}_{n\text{ раз}}$.

102. Докажите, что числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ не могут быть членами геометрической прогрессии с положительными членами.

103. В одном городе проживают 3 миллиона жителей. Некто прибыл в город, владея новой информацией. Через 10 минут он сообщил эту информацию двум жителям. Каждый из них сообщил эту новость через 10 минут еще двум жителям (которые не владели этой информацией) и т. д. Через сколько минут все горожане будут владеть новой информацией?

104. Найдите все геометрические прогрессии, для которых каждый член, начиная с третьего, равен сумме двух членов, предшествующих ему.

105. Сумма первых пяти членов геометрической прогрессии равна 62. Найдите первый член геометрической прогрессии, если известно, что пятый, восьмой и одиннадцатый члены этой прогрессии являются соответственно первым, вторым и десятым членами арифметической прогрессии.

106. Сумма первых тринадцати членов арифметической прогрессии равна 130. Найдите первый член арифметической прогрессии, если известно, что четвертый, десятый и седьмой члены этой прогрессии являются в этой последовательности тремя последовательными членами некоторой геометрической прогрессии.

107. Дана функция $f\colon \mathbb{R} \to [1, +\infty)$, $f(x) = 2x^2 + 1$, а f^{-1} – обратная к функции f. Найдите:
а) $f(f^{-1}(x))$; б) $f^{-1}(f(x))$.

108. Найдите значение действительного параметра m, при котором остаток от деления многочлена
$$P(X) = X^6 - mX^4 + (m^2 + 4)X^2 - 2$$
на бином $X - 1$ равен 5.

109. Докажите, что многочлен $X^{n+1} - X^{n+2} - 3X + 3$ делится без остатка на многочлен $(X-1)^2$.

110. Докажите, что многочлен $X^{1993} + X^2 + 1$ делится без остатка на многочлен $X^2 + X + 1$, и найдите соответствующее частное.

111. Решите на множестве **C** возвратное уравнение:
а) $x^3 - 8x^2 - 8x + 1 = 0$; б) $4x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 5x + 4 = 0$.

112. Решите на множестве **C** биквадратное уравнение:
а) $x^4 + 20x^2 + 96 = 0$; б) $x^6 - 19x^3 - 216 = 0$;
в) $x^4 - (m+1)x^2 + m = 0$, где m – действительный параметр.

113. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & e^x & e^{-x} \\ e^{-x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Найдите A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

114. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Найдите a и b, при которых $AX = XA$.

115. Пусть A – квадратная матрица третьего порядка с элементами –1 и 1.
а) Покажите, что $\det A$ есть четное число.
б) Определите наибольшее возможное значение для $\det A$.
в) Определите наименьшее возможное значение для $\det A$.

116. Найдите матрицы $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, при которых $A^2 + A + I_2 = O_2$.
а) Покажите, что матрица A обратима.
б) Найдите обратную к матрице A.

117. Докажите, что $\begin{vmatrix} 1 & a & h_b \cdot h_c \\ 1 & b & h_c \cdot h_a \\ 1 & c & h_b \cdot h_a \end{vmatrix} = 0$, где a, b, c – длины сторон треугольника, а h_a, h_b, h_c – соответствующие высоты этого треугольника.

118. Дана точка $A(-1, 2)$. Найдите координаты образа точки A:
а) при центральной симметрии относительно точки $M(2, -5)$;
б) при осевой симметрии относительно точки $x = 2$;
в) при повороте против часовой стрелки на $120°$ вокруг начала координат O;
г) при параллельном переносе t_{OM}.

119. Сторона AB параллелограмма $ABCD$ содержится в плоскости ABM, а сторона BC образует угол α с этой плоскостью. Какой угол образует диагональ BD с плоскостью ABM, если:
а) $ABCD$ – квадрат;
б) $ABCD$ – ромб и $m(\angle B) = 120°$?

120. Возможно ли, чтобы все ребра правильной шестиугольной пирамиды были конгруэнтны? Обоснуйте ответ.

121. Катет прямоугольного треугольника равен m, а острый угол при этом катете равен β. Треугольник вращается вокруг гипотенузы.
а) Найдите площадь полной поверхности полученного тела.
б) Найдите объем полученного тела.

122. Вычислите интеграл:
а) $\int e^{2x} \log(1 + e^x)\mathrm{d}x$; б) $\int_{-1}^{1} x^4 \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$.

123. Дана функция $f\colon D \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4x - 5} - \frac{1}{|x+2| - 3}.$$
а) Исследуйте функцию на непрерывность и дифференцируемость.
б) Постройте графк функции f.
в) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком G_f, наклонной асимптотой к этому графику и прямыми $x = 3$ и $x = 4$.

Итоговое оценивание

Время выполнения работы: 90 минут

Итоговый тест

Гуманитарный профиль

1. В рамках реализации проекта „Дерево для нашей жизни“ примэрия приобрела 390 саженцев по 25,5 лея за один саженец. Саженцы были посажены учениками XI и XII классов местного лицея. Известно, что ученики XII класса посадили на 30% саженцев больше, чем ученики XI класса.

а) Дополните запись, чтобы получить истинное высказывание: 2

„Примэрия заплатила ☐ леев за приобретенные саженцы.“

б) Найдите, сколько саженцев посадили ученики XII класса. 5

в) Известно, что взрослое дерево за год вырабатывает около 100 м^3 кислорода, а один человек за сутки потребляет около 19 м^3 кислорода. Найдите, сколько человек за сутки смогут использовать то количество кислорода, которое выработают 390 деревьев за год. 3

2. Даны функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(t) = t^3 - 1{,}5t^2 - t + 1$, и $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(t) = -2t^2 + t + 3$.

а) Обведите букву **И**, если высказывание истинно, или букву **Л,** если оно ложно. 2

„$f(0) > g(1)$.“ **И** | **Л**

б) Найдите координаты точек пересечения графиков функций f и g. 6

в) Вычислите интеграл $\int_0^1 [f(t) - g(t)]\mathrm{d}t$. 6

г) Траектория движения брошенного камня представляет собой часть графика функции g. Определите, какую максимальную высоту может достигнуть брошенный камень. 4

3. Фермер сложил сено в скирду, имеющую форму прямого кругового конуса, радиус основания которого 4 м, а высота 3 м.

а) Дополните запись одним из терминов „многогранник“, „круг“, „геометрическое тело“, чтобы получить истинное высказывание: 2

„Прямой круговой конус – это ______________________________.“

б) Вычислите площадь поверхности скирды. 4

в) В ноябре для того, чтобы прокормить свою лошадь, фермер использовал сено из вершины скирды. Оставшееся сено приняло форму прямого усеченного конуса, высота которого равна 1,2 м. Вычислите объем сена, использованного фермером в ноябре. (Ответ округлите до десятых.) 6

Схема оценивания теста

Оценка	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Сумма баллов	40–38	37–35	34–30	29–24	23–18	17–13	12–8	7–5	4–2	1–0

Время выполнения работы: **90 минут**

Реальный профиль

1. Для перевода температуры из градусов Цельсия в градусы Фаренгейта следует умножить эту температуру на $\frac{9}{5}$, а затем сложить с числом 32.

а) Запишите формулу перевода температуры из градусов Цельсия в градусы Фаренгейта. 2

t°F = $\boxed{}$

б) Известно, что в холодильнике температура сохраняется от 2°C до 7°C. Определите, каковы будут эти температуры в градусах Фаренгейта. 4

в) Летним днем в одном из штатов США температура воздуха менялась от 70°F до 90°F. Найдите эти температуры в градусах Цельсия. 4

2. Дана функция $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$.

а) Обведите букву **И**, если высказывание истинно, или букву **Л**, если оно ложно. 1

„Функция f непрерывна в точке $x_0=0$.“ | **И** | **Л** |

б) Найдите первообразную F_1 функции f, график которой проходит через точку $A(1, 2)$. 4

в) Найдите первообразную F_2 функции f, график которой проходит через точку $B(8, 4)$. 4

г) Определите, какой из графиков этих первообразных расположен выше в системе координат. 2

д) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками первообразных F_1, F_2 и прямыми $x_1=8$ и $x_2=27$. 4

3. В магазине продается молоко в пакетах, имеющих форму правильной треугольной пирамиды с ребром 13,5 см. 2

а) Дополните запись, чтобы получить соответствующее определение: 6

„Треугольная пирамида, у которой все ребра конгруэнтны, называется

____________________________.“

б) Найдите объем пакета.

в) Определите, сколько процентов объема пакета остаются незаполненными после того, как в пакет нальют 0,5 л молока. (Вычислите для $\pi \approx 3{,}14$.) 4

4. Дано множество $A=\{z\in \mathbf{C} \mid |z|+2\mathrm{i}=1+\mathrm{i}z\}\cup\left\{x\in \mathbb{Z} \,\middle|\, \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ \mathrm{tg}^2 x & \cos 2x \end{vmatrix}=5 \text{ и } x\in\left(-\frac{\pi}{2}, \pi\right)\right\}$.

а) Заполните рамки, чтобы получить истинное высказывание: 2

„$\boxed{}\cdot\cos^2 2x+\boxed{}\cdot\sin^2 2x=-\sqrt{10}$.“

б) Найдите кардинал множества A. 9

в) Докажите, что $(1+\mathrm{i})^{6n}=(-\mathrm{i})^n\cdot 2^{3n},\ n\in\mathbb{Z}$. 4

Схема оценивания теста

Оценка	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Сумма баллов	52–50	49–45	44–40	39–32	31–24	23–16	15–10	9–5	4–3	2–0

Ответы и указания

Модуль 1. Дифференцируемые функции. Повторение

А. **1.** а) 0; б) $\sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$; в) $-40x^9$; е) $7\cdot 2^x\ln 2$; ж) $\dfrac{6}{x\ln 3}$. **2.** а) $\dfrac{4\sqrt{x}-3}{2\sqrt{x}}$; б) $4(2x-3)$; в) $-2\cdot 3^{2x-1}\ln 3$; д) $\dfrac{3x^2}{x^3-3}$; е) $\dfrac{3}{\cos^2(3x+\sqrt{5})}$; ж) $3\sin 2x$; з) $\dfrac{6\ln^2(2x+1)}{2x+1}$. **3.** а) $2\cdot 3^{2x}\ln 3-\dfrac{2}{(2x-1)\ln 10}$; б) $2\cos 2x-15\sin 5x$; в) $\dfrac{3}{\sqrt{6x}}-\dfrac{4}{\sin^2 4x}$; г) $\sin 5x+5x\cos 5x$; ж) $\dfrac{1-3\ln x}{x^4}$; з) $xe^x(2+x)$. **4.** б) 2; в) $\dfrac{1}{3}-2\cos 2$. **5.** а) $S=\{0{,}3\}$; б) $S=\{0{,}5\}$; в) $S=\{0,\ 2\}$. **7.** а) $y=\dfrac{1}{2}x+2$; в) $y=-\sqrt{3}x-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\pi\sqrt{3}}{3}\right)$. **9.** а) $t=4$ с; б) 8 м/с. **10.** $A\left(\dfrac{1}{12},\ \dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)$.

Б. **1.** б) $\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+4)^2}}$; г) $-9x^2\sin 2(1-x^3)$; е) $\dfrac{9x^2}{1+(3x^3+1)^2}$. **2.** а) $D_{f'}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $f'(x)=\dfrac{6-x}{x^3}$; в) $D_{f'}=\mathbb{R}$, $f'(x)=x^2(3\sin 5x+5x\cos 5x)$; е) $D_{f'}=\mathbb{R}$, $f'(x)=-18x^2\sin(6x^3+10)$. **3.** б) $-6\lg e$; г) $32\ln 2$. **4.** а) $y=\dfrac{\sqrt{2}}{8}(\sqrt{7}x+1)$; в) $y=9x-\dfrac{3\pi}{2}$. **5.** б) $f''(x)=-18\cos 6x$; г) $f''(x)=12e^{2x}(x+1)$. **6.** а) $S=(-\infty;\ 0]\cup[1{,}5;\ +\infty)$; в) $S=[-2;\ +\infty)$; г) $S=\varnothing$. **7.** а) $f(x)=3x-2\cos x+2011$; в) $f(x)=\dfrac{x^4}{4}-2\ln x-10$. **11.** б) $\mathrm{d}f(x)=-3\sin(3x+4)\mathrm{d}x$; в) $\mathrm{d}f(x)=\sin 2x\mathrm{d}x$; е) $\mathrm{d}f(x)=2x\cdot 2^{x^2+3}\cdot\ln 2\mathrm{d}x$; ж) $\mathrm{d}f(x)=\left(2x\lg x+\dfrac{x}{\ln 10}\right)\mathrm{d}x$. **12.** а) *Указание*. $\cos 61°=\cos(60°+1°)=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{180}\right)$; б) *Указание*. $\mathrm{tg}46°=\mathrm{tg}(45°+1°)=\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{180}\right)$; г) $\approx 11{,}04$; д) $\approx 0{,}5469$. **13.** а) $I(t)=-2\pi\sin\pi t$; б) *Указание*. Максимум достигается в точках, где $\sin\pi t=-1$, а минимум – в точках, где $\sin\pi t=1$. **14.** *Указание*. $V(t)=\alpha'(t)$, где $\alpha(t)=\mathrm{arctg}\dfrac{h(t)}{30}$, $h(t)$ – высота, на которой находится вертолет в момент времени t. **15.** а) $S=\left\{\dfrac{1}{e}\right\}$; б) $S=\{-1\}$; в) $S=\left\{-\dfrac{\pi}{4}+\pi k\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$. **16.** *Указание*. Исследуйте функцию, заданную формулой $l(x)=\sqrt{144+x^2}+\sqrt{529+(25-x)^2}$, где $x=A'O$.

Модуль 2. Первообразная и неопределенный интеграл

§1. А. **1.** а) $\dfrac{3}{2}x^2-5\sin x+e^x+C$; б) $\ln|x|+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x^2}+C$; в) $\dfrac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+\dfrac{5}{9}x\sqrt[5]{x^4}+C$; г) $2\ln|x|+\mathrm{tg}x-\dfrac{2}{3}\sqrt{x}+C$; д) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sin x}{2}+C$; е) $x+\cos x+C$. **2.** а) $\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$; б) $-\dfrac{1}{x}+C$; в) $\dfrac{2x^2-12x-6}{3\sqrt{x}}+C$; г) $3x-\dfrac{2(1{,}5)^x}{\ln 1{,}5}+C$; д) $\mathrm{tg}\,x-x+C$; е) $x-\sin x+C$. **3.** $f(x)=\dfrac{5}{3}e^{3x}+\dfrac{7}{3}$. **4.** $f(x)=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+\dfrac{4}{3}$. **5.** $F(x)=\mathrm{tg}x-1$.

§1. Б. **1.** а) $\dfrac{(ae)^x}{1+\ln a}+C$; б) $C-\dfrac{2}{3x\sqrt{x}}-e^x+\ln|x|$; в) $\dfrac{1}{2}(\mathrm{tg}\,x+x)+C$; г) $C-\mathrm{tg}\,x-\mathrm{ctg}\,x$; д) $\mathrm{tg}\,x+C$; е) $C-\dfrac{4}{21}(8-3x)^{\frac{7}{4}}$; ж) $\dfrac{3}{8}\sqrt[3]{(x^4+1)^2}+C$; з) $\sqrt{3x^2-5x+6}+C$; и) $\dfrac{1}{3}\mathrm{arctg}3x+C$; к) $\dfrac{\arcsin 2^x}{\ln 2}+C$; л) $\dfrac{1}{2}\mathrm{arctg}\dfrac{e^x}{2}+C$.

2. $F(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+x+C_1, & \text{если } x\ge 1,\\ -\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{3}{2}x^2-x+C_2, & \text{если } x<1.\end{cases}$ **3.** $F(x)=\dfrac{(2e)^x}{1+\ln 2}$. **4.** $f(x)=\dfrac{x^4}{4}+x+1$. **5.** $F_1(x)=3\sqrt[3]{x}+C_1$, $F_2(x)=3\sqrt[3]{x}+C_2$, $F_1(x)=3\sqrt[3]{x}-1$, $F_2(x)=3\sqrt[3]{x}-2$, $F_1(x)-F_2(x)=1$. **6.** $s(t)=\dfrac{3}{4}\left(1+t^{\frac{4}{3}}\right)+C$; $s(7)=11{,}25$ м. **7.** Через 40 мин. *Указание.* Примените закон охлаждения Ньютона: скорость изменения температуры тела пропорциональна разности температур тела и среды.

§2.Б. **1.** а) $\frac{1}{8}(2x+3)^4+C$; б) $-\frac{(5-4x)^{201}}{804}+C$; в) $\frac{(3x+1)^{\pi+1}}{3\pi+3}+C$; г) $\frac{1}{3}x^3+2x\sqrt{x}+7\ln x+\frac{4}{x}+C$; д) $\frac{15}{2}\sqrt[3]{x^2}+\frac{12}{11}\sqrt[12]{x^{11}}-\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+C$;

е) $\frac{1}{12}\ln|12x+5|+C$; ж) $-\frac{1}{3}e^{4-3x}+C$; з) $-\frac{1}{12}\cos(12x+7)+C$; и) $\frac{3}{8}\ln(4x^2+5)+C$; к) $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{\sqrt{2}}+C$; л) $\frac{\sqrt{15}}{30\sqrt{7}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{\frac{7}{15}}}{x+\sqrt{\frac{7}{15}}}\right|+C$;

м) $\frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{7}}+C$. **2.** а) $2\ln(x^2+x+3)+C$; б) $\ln(\operatorname{tg}x)+C$; в) $-\ln\cos x+\frac{\cos^2 x}{2}+C$; г) $\frac{1}{2}\arcsin x^2+C$; д) $\ln|1+\ln x|+C$;

е) $\frac{(2x-3)\sqrt{x^2-3x+2}}{4}-\frac{1}{8}\ln\left(\frac{2x-3}{2}+\sqrt{x^2-3x+2}\right)+C$; ж) $\frac{x}{2}\sqrt{9-4x^2}+\frac{9}{4}\arcsin\frac{2x}{3}+C$; з) $2(\sqrt{x+1}-\ln(1+\sqrt{x+1}))+C$;

и) $\ln\frac{|x|}{1+\sqrt{x^2+1}}+C$; к) $\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}-1})+\arcsin e^{-x}+C$. **3.** а) $\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C$; б) $2(\sqrt{x}-\operatorname{arctg}\sqrt{x})+C$; в) $\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{1+e^x+1}+C$;

г) $\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{x}\sin 2\sqrt{x}}{2}+\frac{\cos 2\sqrt{x}}{4}+C$; д) $\sqrt{x}+\frac{x}{2}-\frac{x\sqrt{x+1}}{2}-\frac{\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})}{2}+C$.

4. а) $\frac{2}{125}(1+5x)^2\cdot\sqrt{1+5x}-\frac{2}{75}(1+5x)\cdot\sqrt{1+5x}+C$; б) $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)+C$; в) $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$; г) $\sqrt{x^2+1}+C$.

§3.Б. **1.** а) $x(\ln x-1)+C$; б) $\frac{x^2}{4}(2\ln x-1)+C$; в) $e^x(x-1)+C$; г) $\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)+C$; д) $\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\sin\beta x-\beta\cos\beta x)+C$;

е) $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-4}-2\ln(x+\sqrt{x^2-4})+C$; ж) $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$; з) $\frac{3^x}{\ln^2 3}(x\ln 3-1)+C$; и) $\frac{x}{2}(\sin\ln x-\cos\ln x)+C$;

к) $\frac{1}{2}\sin x^2+C$. **2.** а) $\frac{x^3}{9}(3\ln x-1)+C$; б) $e^x(x^2-4x+3)$; в) $2\sqrt{x+1}\arcsin x+4\sqrt{1-x}+C$;

г) $\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg}x-\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$; д) $2(\sqrt{x}-\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x})+C$; е) $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$;

ж) $e^x(x^3-3x^2+6x-6)+C$; з) $\frac{1}{2}[(x^2-1)\sin x-(x-1)^2\cos x]e^x+C$; и) $\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2}+C$;

к) $C-x^3\cos x+3x^2\sin x+6x\cos x-6\sin x$; л) $C-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$; м) $\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$. **4.** $x(t)=x_0e^{-kt}$,

где $x_0=x(0)$, $k\in\mathbb{R}_+$. **5.** а) $\frac{x^3}{3}-\frac{5}{3}$; б) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}-17$; в) $-2\sqrt{3-x}+9$. **6.** а) $x\ln(2x+5)-x+\frac{5}{2}\ln(2x+5)+C$;

б) $e^x(x^2-3x+7)+C$; в) $3(1-2x)\sin\frac{x}{3}-18\cos\frac{x}{3}+C$; г) $\frac{2^x}{\ln^2 2}(3+(1-3x)\ln 2)+C$.

Упражнения и задачи на повторение

А. **1.** $x^2+5\sin x-3x$. **2.** а) $\frac{x^3}{3}+x^2+C$; б) $\frac{5}{3}\ln|3x+2|+C$; в) $-\ln|3-x|+C$; г) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}3x+C$;

д) $\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+\frac{3}{7}x^2\sqrt[3]{x}+7x+C$; е) $5^x\ln 5-2\sin x+C$; ж) $\frac{1}{5}x-\frac{1}{5}\operatorname{arctg}x+C$; з) $\frac{1}{4}e^{4x}-\frac{1}{7}\operatorname{ctg}7x+C$. **3.** $-\frac{1}{2x^2}+5$.

5. $y=\frac{x^2}{2}+C$, $y=\frac{x^2}{2}$. **6.** $y(t)=y_0e^{kt}$, $k>0$.

Б. **2.** $F(x)=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+1$. **3.** а) $3\ln\ln x+C$; б) $\frac{\sqrt{5}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}x}{\sqrt{5}}+C$. **4.** а) $\frac{x^2}{2}\arccos x-\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{4}\arcsin x+C$;

б) $\frac{e^{2x}}{13}(3\sin 3x+2\cos 3x)+C$; в) $-\frac{x}{2\sin^2 x}-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}x+C$. **5.** x^2-3x+4. **6.** $y=x^3-5$. **7.** $y^2=Cx$.

Проверочная работа

А. **2.** а) $\frac{x^4}{4}+C$; б) $\frac{5}{9}x\sqrt{x}+C$; в) $\sin x-3e^x+C$; г) $-\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{x^5}+C$; д) $\frac{2}{3}x^3+3x-5\ln|x|+C$; е) $\frac{(x+1)^3}{3}+3x+C$.

3. 122,375 м; 9,77 м/с^2. **4.** $F(x)=2\sqrt{x}-8$. **6.** а) $\frac{x^2}{2}-2x^3+\frac{9}{4}x^4+C$; б) $-\frac{1}{3}\cos(3x-1)+C$.

Б. **1.** $-\frac{1}{17}$, $\frac{4}{17}$. **2.** а) $-\frac{1}{3}(4-x^2)\sqrt{4-x^2}+C$; б) $3\sqrt[3]{x}+3\ln|\sqrt[3]{x}-1|+C$. **3.** а) $x(\arcsin x)^2+2\arcsin x\cdot\sqrt{1-x^2}-2x+C$;

б) $\frac{x^3}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\ln|x+1|+C$. **4.** $\left(8R+\frac{16}{3}a\right)$м; $\left(R+\frac{a}{4}\right)$м/с^2. **5.** $A(v)=\frac{v^4}{4}+v-1$.

Модуль 3. Определенный интеграл

§ 1. А. **1.** а) 4; б) $\frac{5}{4}$; в) $\frac{2}{5}$; г) $-\frac{7}{6}$; д) $\frac{14}{3}$; е) 1; ж) $\frac{4}{7}$; з) $-\frac{9}{2}$; и) $\frac{4}{3}$; к) 3. **2.** а) 4; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{1}{12}$; г) –9; д) –2; е) –12. **3.** а) 2; б) ln3; в) $2+3\ln 2$; г) $1-2\ln 2$; д) $\frac{1}{4}(6-\ln 3)$; е) $-\frac{9}{2}+8\ln 2$; ж) $\frac{5}{6}-\ln 2$; з) ln2; и) $\ln\frac{3}{8}$; к) $1-\ln 3$. **4.** а) 1; б) $e-e^{-1}$; в) $\frac{7}{8}$; г) $\frac{1}{2\ln 2}$; д) $\frac{1}{2\ln 3}$; е) 1; ж) $-\frac{2}{3}$; з) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; и) 1; к) 3; л) $\frac{9}{2}$; м) $\frac{2}{3}$; н) π; о) 0; п) $\frac{1}{8}$; р) $\pi-2$. **5.** а) $3\frac{3}{4}$; б) $5\frac{1}{3}$; в) $\frac{7}{2\ln 2}$. **6.** а) 72 м^2; б) 10,8 кг; в) 270 леев.

§ 1. Б. **1.** а) $-3\frac{3}{4}$; б) $12\frac{2}{3}$; в) 2; г) $\frac{28}{15}$; д) $\frac{5}{4}$; е) $-\frac{5}{64}$; ж) 4; з) $\frac{1}{5}$; и) $\frac{1}{2}$; к) $\frac{1}{5}$; л) ln7; м) 2; н) $\frac{\pi^2}{18}$; о) $\frac{\pi^2}{72}$; п) $\frac{1}{2}$; р) $\frac{\pi}{2}$; с) $\frac{\pi}{48}$; т) $\frac{\pi}{3}$; у) $\frac{\pi}{6}$; ф) ln2; х) $\frac{1}{2}\ln 3$; ц) $\frac{\pi}{6}$; ч) $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln 3$; ш) $\frac{2}{3}\ln 2$; щ) $\frac{\pi}{4}$; э) $\frac{1}{2}\ln 3$. **2.** а) $\ln\frac{3}{2}$; б) $\frac{8}{3}-\ln 3$; в) 0; г) $\frac{1}{8}+\ln\frac{3}{2}$; д) $2(1-\ln 3)$; е) $\frac{3\pi}{2}+2+2\ln 2$; ж) $1-\ln 2$; з) $\frac{1}{2}\ln 3-\frac{1}{3}\ln 2$. **3.** а) $2\sqrt{2}$; б) $11\frac{1}{4}$; в) $2\frac{3}{4}$. **4.** а) $\frac{3\,175}{33}\approx 96{,}2$ м^2; б) 10 583 м^3; в) 52 916 леев. **5.** а) $\ln b-\ln a$; б) $\cos a-\cos b$; в) e^b-e^a.

§ 2. А. **1.** а) $11\frac{2}{3}$; б) $\frac{5}{2}$; в) $-\frac{1}{4}$; г) 24; д) $\frac{2}{3}$; е) $\frac{4}{9}$; ж) $\frac{13}{8}$; з) $35\frac{1}{2}$. **2.** а) $\frac{3}{2}-\ln 2$; б) 20,1; в) $9\frac{5}{6}+\ln 2$; г) 2; д) $\frac{4}{3}$; е) $\frac{1}{5}$; ж) $\frac{68}{3}$; з) $58\frac{2}{3}$; и) 12; к) $\frac{68}{81}$; л) e^3-2e^2+1; м) $\frac{1}{2}(e^2-4-e^{-2})$; н) $\frac{2}{3}(e-e^{-1})$; о) $(e^2-e^{-2})^2$; п) $\frac{1}{2}(e^2-2e+3)$; р) $6\frac{1}{2}$; с) $\frac{5}{\ln 6}+\frac{1}{\ln 2}$; т) 1. **3.** а) $-1+\sqrt{3}$; б) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **4.** а) 2 м; б) 4 см; в) 14 см; г) $\frac{16}{75}$ м$^2=2\,133\frac{1}{3}$ см^2.

§ 2. Б. **1.** а) $\frac{35}{6}$; б) 4; в) $\frac{19}{3}$; г) $-\frac{5}{12}$; д) 3; е) 30; ж) 5; з) $2+\pi$; и) 4; к) $-1+\ln\frac{1+e^2}{2\sqrt{2}}$; л) 1; м) 3. **2.** а) 1; б) $\frac{5}{2}$; в) $\frac{5}{6}$; г) $\frac{1}{2}$; д) 4; е) $8\frac{1}{6}$; ж) $\frac{1}{2}$; з) 5; и) 8; к) $\frac{7}{2}$; л) $\frac{11}{4}$; м) $-1+6\ln\frac{3}{2}$; н) 2; о) $\frac{2}{e}(e-1)^2$; п) $\frac{4}{3\ln 3}$; р) $3-\frac{2}{\ln 2}$; с) $\frac{19}{6}$; т) $\frac{2}{e}(e+1)$. **3.** а) +; б) –; в) +; г) –. **4.** а) $I_1>I_2$; б) $I_1<I_2$; в) $I_1<I_2$. **5.** а) $-\frac{2}{\pi}(1+\pi)$; б) $\frac{9}{8\ln 2}$. **6.** а) $\sqrt[3]{10}$; б) π; в) $\pm\frac{\pi}{4}$; г) $\frac{1+\sqrt{28}}{3}$. **7.** 3. **9.** а) $f(t)=t^2-14t+124$; б) 111 леев и 100 леев; в) июль; г) 75 леев.

§ 3. Б. **1.** а) –2; б) 1; в) -2π; г) $\frac{1}{9}(2e^3+1)$; д) $\frac{4}{3}\left(8\ln 2-\frac{7}{3}\right)$; е) $1-\frac{2}{e}$; ж) $-\frac{1}{2}$; з) $-\frac{2}{e}$; и) $-\frac{5}{4}-e^3$; к) $2(3+4\pi)$; л) $-1+2\ln 2$; м) $2-\log_2 e$; н) –1; о) $(2-\log_2 e)\log_2 e$. **2.** а) $2\frac{2}{5}$; б) $-\frac{1}{4}$; в) $\frac{1}{2}\ln 3$; г) $2\frac{8}{15}$; д) $\frac{1}{3\ln 2}$; е) $\frac{9}{14}$; ж) 4; з) $3\sqrt{3}$. **3.** а) $-4+22\ln 2$; б) $1+2\ln 2$; в) $\frac{\pi}{2}-2+\ln 2$; г) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\ln 2$; д) $1-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6}$; е) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$; ж) $-\ln 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}$; з) e^3; и) $1-5e^{-2}$; к) $-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi^2}{6\sqrt{3}}$; л) $\frac{1}{4}\left(1-\frac{5}{e^2}\right)$; м) $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{7\pi}{36}\right)$; н) $-2(3+e)$; о) $\frac{2}{e}(3e-8)$; п) $-1-\frac{5}{8}e$; р) $-\frac{8}{\pi}\left(1+\frac{4}{\pi^2}\right)$; с) $\frac{1}{8}(\pi^2-2\pi-4)$; т) $-\frac{1}{2}(1+e^{\pi})$; у) e^2; ф) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}-\frac{1}{2}$. **4.** а) $x=t^2$, $2(2-\ln 2)$; б) $x=t^3$, $\frac{5}{2}-3\ln 2$; в) $x=t^6$, $4\left(5+12\ln\frac{3}{4}\right)$; г) $t=\sqrt{2-x}$, $\frac{142}{105}$; д) $t=\sqrt[3]{1-2x}$, $\frac{3}{14}$; е) $t=x^3$, $\frac{\pi}{12}$; ж) $t=1+x^3$, $\frac{52}{9}$; з) $t=1+3x^5$, $\frac{116}{675}$; и) $t=\cos x$, $\frac{1}{4}$; к) $t=\sin x$, $\frac{7}{3}$; л) $t=\sin x$, $\frac{8}{15}$; м) $t=\cos x$, $\frac{2}{35}$; н) $t=\sin^2 x$, $\frac{1}{24}$; о) $t=\ln x$, $\frac{3}{8}$; п) $t=\ln(\ln x)$, $-\ln 2$; р) $t=\sin x+\cos x$, $\frac{1}{2}\ln 2$; с) $t=\sin x+\cos$, $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$; т) $t=\sin x$, $\frac{1}{3}(4-\sqrt{2})$. **5.** а) $2-\frac{\pi}{2}$; б) $2+\ln\frac{3}{2}$; в) $4\sqrt{2}+6$; г) $\ln\frac{3}{2}$; д) $\frac{1}{2}+\frac{3\pi}{16}$; е) $\frac{\pi}{16}$; ж) $\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{6}$; з) $\ln\frac{2e}{e+1}$. **6.** а) 800 м и 42,6 м; б) 32 м; в) $\frac{192}{39}$ кв.ед., $\approx 49\,230$ м^2; г) 147 692 м^3.

Упражнения и задачи на повторение

А. **1.** а) $-\frac{33}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) 7; г) $-58\frac{1}{3}$; д) 8; е) $21\frac{1}{3}$; ж) 2; з) $\frac{1}{3}(9-4\sqrt{3})$; и) $\frac{\pi}{2}-1$; к) $-1+e^{-2}$; л) $-\frac{3}{\ln 2}$; м) $\frac{1}{2}(e^4-4e^2+7)$; н) $2(1-2\ln 3)$; о) $19\frac{1}{3}$; п) $2(-1+\ln 3)$. **2.** а) $\frac{3}{2}$; б) $4\frac{2}{3}$. **3.** $\frac{1+\sqrt{61}}{2}$, 3000 м^2, 34 м.

Б. **1.** а) $-6\frac{2}{3}$; б) –27; в) $2\left(\ln 2-\frac{26}{81}\right)$; г) 65; д) $2\sqrt{3}-\frac{1}{3}$; е) $\frac{1}{8}(7-2\sqrt{3})$; ж) $-\frac{506}{375}$; з) $\frac{51}{10}$; и) $\frac{182}{33}$; к) $\frac{1}{3}$; л) $-\frac{1}{9}(2e^3+1)$; м) $\frac{1}{16}(3e^4+1)$; н) $\frac{1}{2}e^2$; о) $-\frac{4}{\pi^2}$; п) $\frac{13}{3}$; р) 5. **2.** а) $6\frac{11}{12}$; б) $\frac{\pi}{8}+\ln(2+\sqrt{3})$. **4.** $\left(-\frac{5}{6}, -\frac{1}{12}\right)$ – точка локального минимума. **5.** а) 2 м, 3 м, 5 м; б) $8\frac{2}{15}$ м^2; в) 109,8 м^2; г) 54 900 леев.

Проверочная работа

А. **1.** а) $-\frac{8}{3}$; б) 3; в) $30\frac{1}{8}$. **2.** а) –3; б) $\frac{10}{\ln 2}$; в) $-\frac{13}{2}+2\ln 2$. **4.** а) $10\frac{2}{3}$ м^2; б) 96 м^3.

Б. **1.** а) $-\frac{20}{3}$; б) 8. **2.** а) $\frac{1}{4}$; б) $1-\frac{1}{2}e^2$. **3.** а) $\frac{48}{5}$; б) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$; в) 1. **5.** а) $107\frac{49}{93}$ м^2 $\approx 107{,}5$ м^2; б) 160 м^3 – 215 м^3.

Модуль 4. Приложения определенного интеграла

§1. А. **1.** а) $\frac{10}{3}$; б) $\frac{\pi^2}{2}$; в) $\frac{1}{2}$; г) 1; д) $3(e^{\pi}-1)$; е) 7; ж) $\frac{4}{3}$; з) 3. **2.** $a=\sqrt{17}-3$. **3.** а) $t=\sqrt{2}$; б) $t=4$. **5.** в) ≈ 713 м^2 $=7{,}13$ а; г) $\approx 213{,}9$ тыс. леев.

§1. Б. **1.** а) $\frac{256}{3}$; б) $\frac{32}{5}$; в) $\frac{64}{3}$; г) $\frac{125}{6}$; д) $\frac{1}{2}(e^2+2e^{-1}-3)$; е) 1. **2.** а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}-\ln 2$; в) $\frac{8}{\ln 3}-2$. **3.** *Указание*. Если $0<a\le 1$, то площади полученных частей равны $2\left(a^2-\frac{a^3}{3}\right)$ и $2\left(a^2+\frac{a^3}{3}\right)$, и эти площади не могут быть одинаковы. Если $a>1$, то площадь части квадрата, расположенной над осью Ox, численно равна $2\int\limits_0^{\sqrt{a}}(a-x^2)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}a\sqrt{a}$, а площадь другой части равна $4a^2-\frac{4}{3}a\sqrt{a}$. И опять эти площади не равны. **4.** $\mathscr{A}_1=\frac{12\sqrt{6}-8}{3}$, $\mathscr{A}_2=\frac{35-12\sqrt{6}}{3}$. **5.** а) $\left(\frac{e^2+1}{2(e^2-1)}, \frac{e^2+1}{4}\right)$; б) $\left(1, \frac{\pi}{8}\right)$; в) $\left(-\frac{5}{4}, \frac{11}{10}\right)$. **7.** ln2. **8.** $m=2-\sqrt[3]{4}$. *Указание*. Пусть $\mathscr{A}_1$ – площадь подграфика функции f, а $\mathscr{A}_2$ – площадь множества, ограниченного кривыми $f(x)=2x-x^2$ и $y=mx$ $(0<m<2)$, $x\in[0, 2-m]$. Необходимо, чтобы $\mathscr{A}_2=\frac{\mathscr{A}_1}{2}$.

§2. Б. **1.** а) $\frac{3\pi^2}{8}$; б) $\frac{\pi}{10}$; в) $\frac{13\pi}{4}e^4-\frac{\pi}{4e^2}$; г) $\frac{\pi}{4}(e^2+1)$; д) $\frac{\pi(\pi^2-8)}{4}$; е) $\frac{11\pi}{6}$; ж) $\frac{\pi}{2}(e^{\frac{\pi}{2}}-1)$; з) $\frac{92\pi}{5}$; и) $\frac{\pi(3e^2-7)}{2e^2}$; к) $\frac{5e^3-2}{27}\pi$. **2.** *Указание*. Обозначьте $n\cdot\arccos x=t \Rightarrow x=\cos\frac{t}{n}$. Тогда $\mathscr{V}=\pi\left(1+\frac{1}{1-4n^2}\right)$. Так как $\mathscr{V}=\frac{2\pi}{3}$, то $n=1$. **3.** а) $\frac{3\pi}{10}$; б) $\frac{19\pi}{60}$; в) $\frac{\pi(5\pi-6\sqrt{3})}{6}$. **4.** г) $\frac{148}{3}\pi$. **5.** $\mathscr{V}=\pi a^2\left(\frac{4\pi+3\sqrt{3}}{12}\right)$. **6.** $\mathscr{V}=\frac{\pi}{27}(5e^3-2)$. *Указание*. Вычислите интеграл $\int x^2\ln^2 x\mathrm{d}x$ методом интегрирования по частям.

§3.Б. **1.** а) $2\sqrt{5}+\ln(2+\sqrt{5})$; б) $\frac{1}{4}(e^2+1)$; в) $3\sqrt{2}$; г) $2+\ln\frac{4}{3}$. *Указание*. $\mathscr{L}=\int\limits_{\sqrt{8}}^{\sqrt{24}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x=\int\limits_{\sqrt{8}}^{\sqrt{24}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\mathrm{d}x$ и обозначьте $\sqrt{1+x^2}=t$; д) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$; е) $\ln 3-\frac{1}{2}$; ж) $\frac{1}{2}(e^3-e^{-3})$; з) $\frac{14}{3}$; и) $4+\ln\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$; к) $\ln(1+\sqrt{2})$. **2.** а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{2}(e-e^{-1})$. **3.** $\frac{\pi}{2}(1-e^{-2a})$. **4.** а) $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$; б) $\frac{64}{5}$. **5.** *Указание*. Площадь полной поверхности прямого кругового усеченного конуса равна сумме площади поверхности вращения, полученной при вращении вокруг оси Ox графика функции $f\colon [0, H]\to\mathbb{R}$, $f(x)=r+\frac{R-r}{H}x$, и площадей его оснований. $\mathscr{A}=\pi[(r^2+R^2)+(r+R)\sqrt{H^2+(R-r)^2}]$.

Упражнения и задачи на повторение

А. **1.** а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{1}{3}$; г) 1. **3.** $a=\frac{2}{3}$. **4.** а) $t>1$; б) $1<t\le\sqrt{2}$; в) $t\ge 1$. **6.** в) $\frac{8}{3}$.

Б. **1.** а) 2; б) e^2-3; в) $\log_2 e-\frac{1}{3}$. **2.** $m=\frac{7}{6}$. **3.** $a=\sqrt{\frac{2}{3}}$. **4.** $\mathscr{A}(\lambda)=1-(1+\lambda)e^{-\lambda}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathscr{A}(\lambda)=1$. **5.** 10,25 а; 307,5 тыс. леев. **6.** $\frac{1}{2}$. **7.** $\left(e-2, \frac{e^2-1}{8}\right)$. **8.** а) $\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{\pi}{2}(2+\pi)$; в) 3π; г) $\frac{47}{60}\pi$. **9.** $\pi\left(\frac{a^2}{2}\pi+4ab+\pi b^2\right)$.

Проверочная работа

А. **1.** а) 1; б) ln2; в) $\frac{1}{2}$; г) 1. **2.** $a=\frac{9}{2}$. **3.** а) $a>1$; б) $1\le a\le 2$; в) $\frac{1}{2}<a<2$.

Б. **1.** а) $4\sqrt{3}$; б) 1; в) $\frac{32}{3}$. **2.** а) $\left(\frac{e^2+1}{4}, \frac{e-2}{2}\right)$; б) $\left(0, \frac{83}{70}\right)$. **3.** а) $\frac{\pi^2}{4}$; б) $\frac{\pi}{4}(e^2-1)$. **4.** $\approx 1{,}717\pi$.

Модуль 5. Элементы теории вероятностей

§ 1. А. **1.** Да. **2.** а) $P(A)=\frac{1}{24}$; б) $P(B)=\frac{1}{4}$; в) $P(C)=\frac{1}{12}$. **3.** $\frac{1}{5}$. **4.** $\frac{1}{4}$. **5.** а) $P(A)=\frac{1}{56}$; б) $P(B)=\frac{11}{56}$; в) $P(C)=\frac{15}{56}$; г) $P(D)=\frac{45}{56}$.

§ 1. Б. **1.** B_1 и B_3; B_2 и B_3; A_1 и B_1. **2.** а) $P(A)=\frac{1}{2}$; б) $P(B)=\frac{2}{5}$; в) $P(C)=\frac{4}{5}$. **3.** $\approx 0{,}0167$. **4.** а) $P(A)=\frac{C_8^2\cdot C_{88}^{10}}{C_{96}^{12}}$; б) $P(B)=\frac{C_{96}^{12}-(C_8^0C_{88}^{12}+C_8^1C_{88}^{11}+C_8^2C_{88}^{10})}{C_{96}^{12}}$. **5.** а) $P(A_1)=\frac{1}{9}$; б) $P(A_2)=\frac{5}{18}$; в) $P(A_3)=\frac{1}{3}$. **6.** а) $P(A)\approx 0{,}273$; б) $P(B)\approx 0{,}085$; в) $P(C)\approx 0{,}064$. *Указание*. Примените схему: из урны, содержащей 3 шара с номерами 1, 2, 3, извлекается 9 раз по одному шару с возвращением.

§ 2. А. **1.** $E=\{10, 11, 12, \dots, 98, 99\}$; а) $A=\{12, 15, 18, 21, \dots, 99\}$; б) $B=A\bigcup\{14, 21, 28, \dots, 91, 98\}$; в) $C=\{16, 25, 36, 49, 64, 81\}$. **2.** а) $B=A_1\cap A_2\cap\overline{A_3}\cup A_1\cap\overline{A_2}\cap A_3\cup\overline{A_1}\cap A_2\cap A_3$; б) $C=B\bigcup A_1\cap A_2\cap A_3$; в) $D=\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cup A_1\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\cap A_2\cap\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap A_3\cup B$. **3.** 0,31. **4.** 0,6. **5.** $\frac{671}{1296}\approx 0{,}52$.

§ 2. Б. **1.** Элементарными событиями являются упорядоченные пары: $E=\{11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44\}$; а) $A=\{33, 34, 43\}$; б) $B=\{13, 23, 31, 32, 33, 34\}$. **2.** а) 0,5; б) 0,6; в) 0,7; г) 0,1; д) 0,9; е) 0,8. **3.** $\frac{163}{165}$. *Указание*. Примените формулу $P(A)=1-P(\overline{A})$, где {извлечены шары по крайней мере двух цветов}, $\overline{A}=$ {извлечены шары одного цвета}. **4.** $\frac{91}{216}$. **5.** $\approx 0{,}188$. **6.** $P(A)=1-\frac{2^n}{C_{2n}^n}$. *Указание*. Введите случайное событие $A=$ {среди n выбранных ботинок имеется хотя бы одна пара} и примените формулу $P(A)=1-P(\overline{A})$; $\overline{A}=$ {среди n выбранных ботинок нет ни одной пары}. Вычислите $P(\overline{A})$. Каждый исход, благоприятствующий событию $\overline{A}$, означает n ботинок, выбранных по одному из каждой пары. По правилу произведения число всех таких исходов равно 2^n: если элементы $x_1, x_2, \dots, x_n$ выбираются по одному, каждый из некоторого двухэлементного множества, то можно образовать $\underbrace{2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}_{n}=2^n$ комбинаций вида $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

§ 3. Б. **1.** 0,2. **2.** $\frac{16}{33}$. **3.** $\frac{5}{26}$. *Указание*. Введите случайные события: A = {в семье 4 девочки и один мальчик}, B = {в семье по крайней мере 2 девочки}; очевидно, что $A\cap B=A$. Примените формулу условной вероятности, $P(B)$ найдите по формуле $P(B)=1-P(\overline{B})$. **4.** $\frac{5}{13}$. **5.** а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{2}{5}$; в) 0,3. **6.** $\frac{29}{38}$. *Указание*. Введите случайные события: A_1 = {студент знает ответ на вопрос из первого вытянутого билета}, A_2 = {студент знает ответ на вопрос из второго вытянутого билета}. Событие A можно представить следующим образом: $A=A_1\cup\overline{A_1}\cap A_2$. Следовательно, $P(A)=P(A_1)+P(\overline{A_1})\cdot P(A_2/\overline{A_1})$. **7.** $\frac{1}{151200}$.

§ 4. А. **2.** A и B. **3.** 0,95. **4.** Зависимы. *Указание*. Примените определение независимости двух случайных величин. Заметьте, что $A\cap B=$ {оба шара белые}. **5.** а) $P(A)\approx 0{,}136$; б) $P(B)\approx 0{,}0065$; в) $P(C)\approx 0{,}000096$.

§ 4. Б. **2.** а) $\frac{8}{81}$; б) $\frac{17}{81}$. **3.** а) 0,243; б) 0,972. **4.** $\frac{121}{270}\approx 0{,}448$. **5.** $P(D_0)=0{,}882$; $P(D_1)=0{,}116$. *Указание*. $D_0=\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$. **6.** t_3 попал с вероятностью $\frac{10}{19}$. *Указание*. Введите события: $A_i=$ {стрелок t_i попадает в цель}, $i=\overline{1, 3}$ (A_1, A_2, A_3 – независимые случайные события); D = {два стрелка из трех попадают в цель}. Вычислите условные вероятности $P(A_3/D)$, $P(\overline{A_3}/D)$ и сравните их. Заметьте, что $D=\overline{A_1}\cap A_2\cap A_3\cup A_1\cap\overline{A_2}\cap A_3\cup A_1\cap A_2\cap\overline{A_3}$.

§5. Б. 1.

ξ	1	2	3	4
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$

2.

ξ	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$M(\xi)=7.$

3.

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{10}{56}$

$M(\xi)=1{,}875.$ **4.** 1,6. **5.** $P(\xi=i)=\frac{1}{5},\ i=\overline{1,5};\ M(\xi)=3.$

6.

ξ	0	1	2	3	4
P	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,0625

$M(\xi)=0{,}9375.$

Указание. $P(\xi=0)=P$(первый светофор запрещает дальнейшее движение)$=\frac{1}{2}$; если $1\le i\le 4$, то $P(\xi=i)=P(A\cap B)$, где A и B – независимые случайные события: A = {первые i светофоров разрешают дальнейшее движение}, B = {i + 1-й светофор запрещает дальнейшее движение}; $\{\xi=5\}$ = {все светофоры разрешают движение}.

7. а)

x_1	1	2	3
P	0,6	0,3	0,1

;

x_2	2	3	4
P	0,3	0,4	0,3

;

x_3	3	4	5
P	0,1	0,3	0,6

.

Указание. Любые три числа, выбранные из множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, представляют некоторое его трехэлементное подмножество. Существуют $C_5^3=10$ таких подмножеств (а значит, и способов выбрать 3 числа): $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{1, 4, 5\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{2, 3, 5\}$, $\{2, 4, 5\}$, $\{3, 4, 5\}$. Теперь распределение случайных величин x_1, x_2, x_3 найти не трудно.

б) $M(x_1)=1{,}5;\ M(x_2)=3;\ M(x_3)=4{,}5.$

Упражнения и задачи на повторение

А. 1. а) Совместные: A_1 и A_3; A_1 и A_4; A_2 и A_4; несовместные: A_2 и A_3; $\overline{A}_3$ и A_4; б) $A_2\cap A_3=\varnothing$; $A_3\cap A_4$ = {извлечены 1 черный и 3 красных шара}. **2.** а) $P(A)=\frac{5}{12}$; б) $P(B)=\frac{1}{6}$. **3.** $\frac{1}{20}$. **4.** Вероятность, что среди k пассажиров, выбранных наудачу, находится хотя бы один преступник, меньше, чем 0,5 при $k\in\{1, 2, 3, 4, 5\}$; при $k=6$ эта вероятность больше, чем 0,5. **5.** $\frac{91}{350}$. **6.** Зависимы. **7.** $a=8$.

Б. 1. а) Совместные, зависимые; б) несовместные, зависимые; в) совместные.

2. а) $P(A_1)=\frac{1}{n}\left[\frac{n}{k}\right]\to\frac{1}{k}$; б) $P(A_2)=\frac{1}{n}\left[\frac{n-r}{k}\right]\to\frac{1}{k}$. **3.** 0,3. **4.** б) 1. **5.** 0,995. *Указание.* Введите случайные события: A_1 = {первый станок не потребует внимания мастера}; A_2 = {второй станок не потребует внимания мастера}. Объединение $A_1\cup A_2$ состоит в том, что в течение смены хотя бы один станок не потребует внимания мастера. В задаче требуется вычислить вероятность $P(A_1\cup A_2)$ по соответствующей формуле. **6.** $\frac{1}{15}$.

7. а)

ξ	12	0	–5	–6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$

$M(\xi)=-\frac{11}{6}.$

Указание. Возможные значения ξ – это возможные значения „чистого“ выигрыша $12(=18-6)$, $0(=6-6)$, $-5(=1-6)$, $-6(=0-6)$.

б) $\frac{2}{6}$. *Указание.* Две партии можно сыграть, если выпадает 6 очков или 5 очков.

Проверочная работа

А. 1. а) $E=\{1, 2, \ldots, 14, 15\}$; $A=\{4, 8, 12\}$; $B=\{5, 10, 15\}$; $C=\{13, 14, 15\}$; $B\cap C=\{15\}$; $B\cap\overline{C}=\{5, 10\}$; $A\cap B=\varnothing$; б) несовместные: A и B; A и C; совместные: B и C. **2.** а) $P(A)\approx 0{,}44$; б) $P(B)\approx 0{,}93$; в) $P(C)=0{,}78$. **4.** $\frac{24}{90}$.

Б. 1. а) $E=\{12, 21, 13, 31, 23, 32\}$; б) $P(A)=\frac{1}{2}$; $P(B)=\frac{1}{3}$. **2.** $P(A)=1-\frac{2}{C_{10}^5}\approx 0{,}992$. **3.** а) $P(A_1)\approx 0{,}05$; б) $P(A_2)\approx 0{,}46$; в) $P(A_3)\approx 0{,}04$. **4.** 0,8. **5.**

ξ	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

$M(\xi)=2.$

Модуль 6. Элементы математической статистики и финансовой математики

§ 2. А. 1. 60. **2.**

Границы интервала	Частота (n_i)
[0, 10)	4
[10, 20)	7
[20, 30)	6
[30, 40)	3
[40, 50)	4
[50, 60)	6
[60, 70)	4
[70, 80)	4
[80, 90)	6
[90, 100]	6
Всего	50

3. 1)

Интервалы	Абсолютная частота (n_i)	Накопленная абсолютная частота (F_i)	Относительная частота (f_i)	Накопленная относительная частота
[55; 66)	8	8	0,200	0,200
[66; 77)	7	15	0,175	0,375
[77; 88)	13	28	0,325	0,700
[88; 99)	6	34	0,150	0,850
[99; 110)	3	37	0,075	0,925
[110; 121]	3	40	0,075	1,000
Всего	40		1,000	

§ 2. Б. 1. 6. **2.**

Границы интервала	Частота (n_i)
[0; 1)	5
[1; 2)	3
[2; 3)	6
[3; 4)	4
[4; 5)	6
[5; 6)	3
[6; 7)	4
[7; 8)	3
[8; 9)	3
[9; 10)	4
[10; 11)	5
[11; 12]	4
Всего	50

3. а) Продукция консервной фабрики (банки); б) масса содержимого одной банки; непрерывный количественный признак; в) 16%.

4. 1)

Возраст (лет)	Абсолютная частота (n_i)	Относительная частота (f_i)	Накопленная относительная частота (F_i)
[31; 39)	11	0,28	0,28
[39; 47)	15	0,38	0,66
[47; 55)	5	0,13	0,79
[55; 63)	7	0,18	0,97
[63; 71)	0	0,00	0,97
[71; 79]	1	0,03	1,00
Всего	39	1	

5. а)

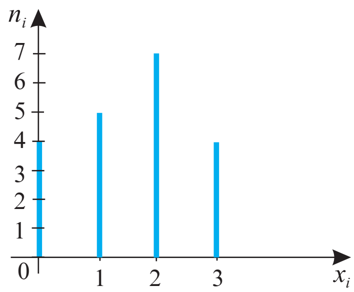
Масса (кг)	[2,0; 2,4)	[2,4; 2,8)	[2,8; 3,2)	[3,2; 3,6)	[3,6; 4,0)	[4,0; 4,4)	[4,4; 4,8)	[4,8; 5,2]	Всего
Новорожденные (n_i)	3	8	10	12	13	6	2	2	56
Накопленная абсолютная частота (F_i)	3	11	21	33	46	52	54	56	56
Относительная частота (f_i)	0,05	0,14	0,18	0,21	0,23	0,11	0,04	0,04	1
Накопленная относительная частота	0,05	0,19	0,37	0,58	0,81	0,92	0,96	1,00	1

б)

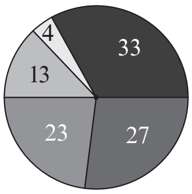
Масса (кг)	[2,0; 2,6)	[2,6; 3,2)	[3,2; 3,8)	[3,8; 4,4)	[4,4; 5,0)	[5,0; 5,6]	Всего
Новорожденные (n_i)	7	14	17	14	3	1	56

§ 3. А. 1.

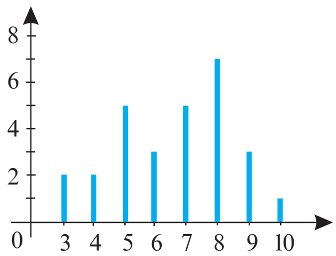
x_i	n_i	Накопленная абсолютная частота	Относительная частота (f_i)	Накопленная относительная частота
0	4	4	0,20	0,20
1	5	9	0,25	0,45
2	7	16	0,35	0,80
3	4	20	0,20	1,00



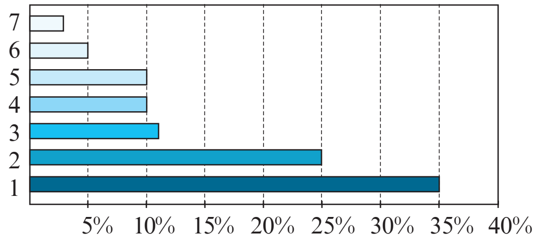
2.



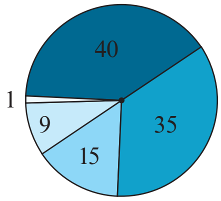
3.



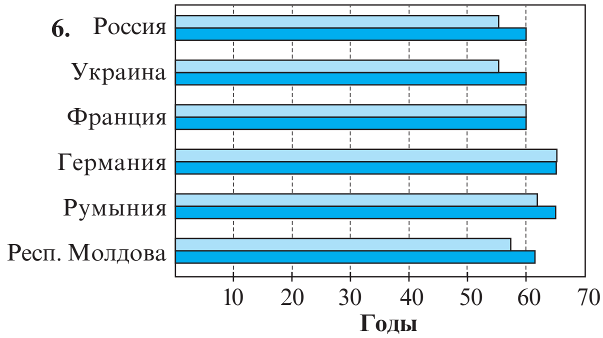
5.



§3. Б. **4.**

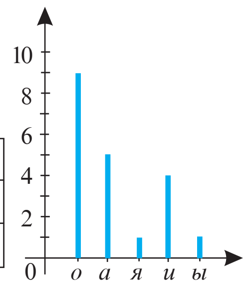


6.



7. а)

Буква	п	о	л	с	в	а	я	д	и	г	р	м	т	з	н	ь	ы	х	Всего
(n_i)	2	9	3	4	1	5	1	1	4	2	2	2	3	2	2	1	1	1	46
(f_i)	4,3	19,6	6,5	8,7	2,2	10,9	2,2	2,2	8,7	4,3	4,3	4,3	6,5	4,3	4,3	2,2	2,2	2,2	100



§4. А. **1.** $\overline{x} \approx 4{,}23$; $Me = 4$; $Mo = 1$, $Mo = 5$ (ряд бимодальный). **2.** $\overline{x} \approx 25\,250$; $Me = 25\,500$; $Mo \approx 25\,666{,}7$. **4.** $\overline{x} \approx 20{,}19$; $Me \approx 21{,}18$; $Mo = 24$. **5.** а) $\overline{x} \approx 21{,}525$ см; $Me = 21{,}5$ см; $Mo = 21{,}5$ см; б) 51,67%.

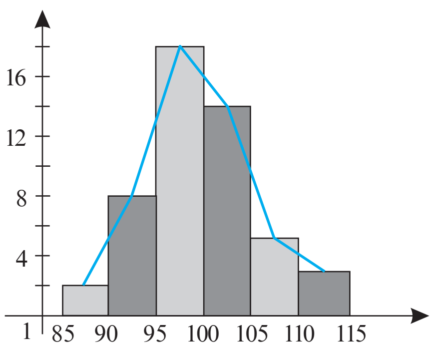
§4. Б. **1.** $\overline{x} = 57{,}6$; $Me \approx 61{,}15$; $Mo \approx 69{,}76$. **2.** б) $\overline{x} \approx 163{,}17$; $Me \approx 163{,}48$; $Mo \approx 164{,}10$. **4.** $\overline{x} \approx 18{,}68$; $Me \approx 18{,}82$; $Mo = 18{,}5$. **5.** а) $\overline{x} \approx 56{,}55$; $Me \approx 53{,}5$; $Mo = 35$; б) $\overline{x} \approx 57{,}67$; $Me \approx 54{,}54$; $Mo = 43$. **6.** а) $x_1 = 7{,}5$; $x_2 = 10{,}5$; $x_3 = 13{,}5$; $x_4 = 30{,}0$; $x_5 = 43{,}5$; $x_6 = 45{,}0$ (млн. км²); б) $\overline{x} = 25{,}0$ (млн. км²); в) $Me = 21{,}75$ (млн. км²).

§5. А. **1.** а) 13,33%; б) 26 400 леев. **2.** 3,75%. **3.** 2 250 леев. **4.** а) 1 180 леев; б) 1 192,52 лея; в) 1 196,79 лея. **5.** а) 5 152,05 лея; б) 5 173,7 лея. **6.** 3 500,26 лея. **7.** 1 590,33 д. е. **8.** 1 250 д. е.

§5. Б. **1.** а) Увеличивается в 1,135 раза; б) увеличивается в 1,1232 раза; в) увеличивается в 1,127 раза. Вариант а). **2.** а) 167,55 д. е. б) 200,81 д. е. **3.** а) 11 235 д. е.; б) 11 294,1 лея. Вариант б). **4.** 2430,64 д. е. **5.** а) 5%; б) 8,75%. **6.** а) 25937 д. е.; б) 44 104 д. е. **7.** 2 000 д. е.

Упражнения и задачи на повторение

А. **1.** б), в). **2.** а)

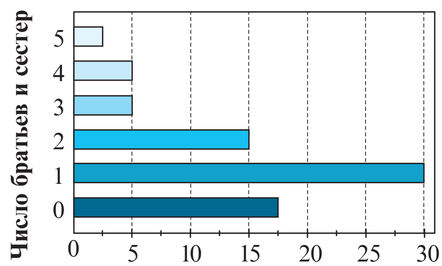


б) $\overline{x} = 99{,}6$; $Me \approx 99{,}3$; $Mo \approx 98{,}57$.

3. Елена Петрова– 1701,0 лея, Анна Лукьян – 1734,0 лея.

4. а) $\overline{x} \approx 14{,}3$; б) 2;

в)



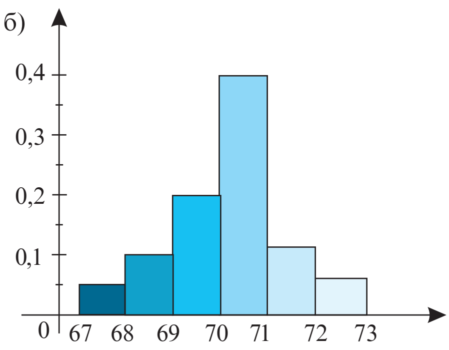
5. 31%. **6.** 184 лея – техосмотр, 272 лея – материалы.

Б. 1. 1,875 м. **2.** 15427,5 лея.

3. а)

Концентрация (%) (интервал)	x_i^*	Абсолютная частота (n_i)	Накопленная абсолютная частота	Относительная частота (f_i)
[67, 68)	67,5	3	3	0,05
[68, 69)	68,5	7	10	0,12
[69, 70)	69,5	13	23	0,22
[70, 71)	70,5	25	48	0,41
[71, 72)	71,5	8	56	0,13
[72, 73]	72,5	4	60	0,07
Всего		60		

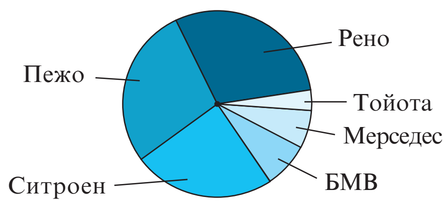
б)



в) $\overline{x} \approx 70{,}17$; $Me = 70{,}3$; $Mo \approx 70{,}41$.

4. а) Марка автомобиля – качественный статистический признак.

б)



5. Покупатель не прав.

6. а) $\overline{x} \approx 7{,}62$; $Me = 8{,}4$; $Mo = 9$; б) $\approx 31\%$.

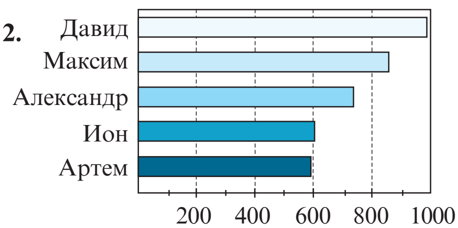
7. а) $6{,}9 + 1{,}1 = 8$; б) $6{,}9 \cdot \frac{11}{10} = 7{,}59$.

Проверочная работа

А. 1.

Вариант x_i	Абсолютная частота (n_i)	Относительная частота (f_i)
0	1	0,025
1	3	0,075
2	6	0,150
3	6	0,150
4	4	0,100
5	4	0,100
6	3	0,075
7	3	0,075
8	5	0,125
9	5	0,125

2.



3. а) 8 400 д. е.; б) 8 354,4 д. е.

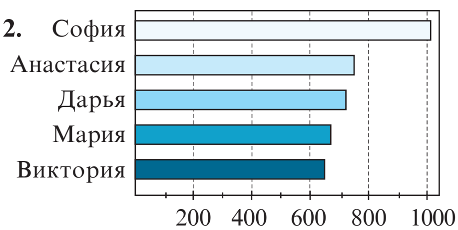
4.

Вариант x_i	Абсолютная частота (n_i)	Накопленная абсолютная частота	Относительная частота (f_i)	Накопленная относительная частота
2	6	6	0,24	0,24
4	5	11	0,20	0,44
5	6	17	0,24	0,68
6	4	21	0,16	0,84
8	2	23	0,08	0,92
10	1	24	0,04	0,96
11	1	25	0,04	1,00

$\overline{x} = 4{,}92$; $Me = 5$; $Mo = 2$, $Mo = 5$.

Б. 1. $Me = 4{,}375$; $Mo = 4{,}3125$.

2.



3. а) 29 000 д. е.; б) 44 114,35 д. е.

4. 15.

Модуль 7. Многогранники. Повторение и дополнения

§2. А. **1.** 80 см^2. **2.** 90°, 60°, 30°. **3.** $10(5+2\sqrt{119})$ см^2. **4.** а) $6\sqrt{6}$ см, 12 см; б) $180\sqrt{3}$ см^2. **5.** а) 12 см, $6\sqrt{5}$ см; б) $36\sqrt{3}$ см^2, 72 см^2; в) $108(2+\sqrt{3})$ см^2. **6.** а) $\arccos\frac{41}{50}$; б) $\arccos\frac{23}{50}$. **7.** а) $2\sqrt{53}$ см, $2\sqrt{29}$ см; б) $16(14+3\sqrt{3})$ см^2. **8.** а) $4\sqrt{3}$ см; б) $4\sqrt{2}$ см. **9.** а) $\sqrt{58}$ см; б) $2\sqrt{29}$ см. **10.** а) $3\sqrt{43}$ см^2; б) $(48+9\sqrt{3}+3\sqrt{43})$ см^2. **11.** а) 7 см; б) $\arcsin\frac{6}{7}$, $\arcsin\frac{2}{7}$, $\arcsin\frac{3}{7}$; в) arctg 3, arctg 2, arctg1,5. **12.** $\approx 2{,}66$ кг.

§2. Б. **1.** а) 9 см; б) $3\sqrt{21}$ см. **2.** а) 6 см; б) $\sqrt{39}$ см; в) $\sqrt{111}$ см; г) $12\sqrt{3}(2+\sqrt{13})$ см^2. **3.** а) $ab(1+2\sin\alpha)$; б) $b\sqrt{1-\frac{4}{3}\cos^2\alpha}$. **4.** $6\sqrt{2}$ см, 12 см. **5.** а) 680 см^2; б) $\frac{60}{\sqrt{97}}$ см. **6.** а) $\arccos\frac{2h^2-a^2}{2(h^2+a^2)}$; б) $a=h\sqrt{2}$. **7.** а) $\arccos\frac{h^2}{a^2+h^2}$; б) $\arccos\frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{a^2+h^2}}$. **8.** а) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; б) $\frac{1}{4}$; в) 0; г) $\frac{1}{4}$; д) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; е) 0. **9.** 39 см. **10.** а) $\sqrt{2}d^2\sin 2\varphi$; б) $\frac{1}{2}d^2\sin 2\varphi$. **11.** 15 рулонов.

§3. А. **1.** а) $3\sqrt{3}$ см; б) 144 см^2; в) $12\sqrt{3}$ см^2, $14{,}4\sqrt{3}$ см^2. **2.** 6,5 см. **3.** 15 см^2. **4.** а) 4 см; б) $96\sqrt{2}$ см^2. **5.** $9(4+\sqrt{7})$ см^2. **6.** arctg 2. **7.** а) 9 см; б) arctg 1,75. **8.** а) 5 см; б) $\sqrt{189{,}75}$ см; в) 6 см.

§3. Б. **3.** $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\operatorname{tg}\alpha$. **4.** г) $\frac{a}{2\cos\varphi}\sqrt{\cos^2\varphi+\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{n}}$, $\frac{na^2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}}{4\cos\varphi}$. **5.** а) $VB=VC=\frac{a}{4}\sqrt{1+9\operatorname{tg}^2\alpha}$, $VA=\frac{3a}{4\cos\alpha}$; б) $\frac{a^2}{8}(6\operatorname{tg}\alpha+\sqrt{9\operatorname{tg}^2\alpha-3})$; в) $\varphi=\operatorname{arctg}\sqrt{3\operatorname{tg}^2\alpha-1}$. **6.** а) $\frac{d_1\cdot d_2}{2\cos\varphi}$; б) $\frac{d_1d_2^2}{4\sqrt{d_1^2+d_2^2}}\operatorname{tg}\varphi$. **7.** а) $\frac{1}{2}\sqrt{4h^2-ab}$; б) $h(a+b)$; в) $\arccos\frac{\sqrt{ab}}{2h}$; г) $\frac{(a+b)\sqrt{ab}}{8}$. **8.** $\frac{a}{4}\sqrt{a^2+b^2}$. **9.** 113 листов.

§4. А. **1.** а) 432 см^2; б) $\sqrt{119}$ см; в) $9\sqrt{238}$ см^2. **2.** а) 84 см^2; б) $\sqrt{13}$ см; в) $12{,}25\sqrt{3}$ см^2. **3.** а) $\sqrt{150}$ см; б) $220\sqrt{5}$ см^2. **4.** а) $4\sqrt{3}$ см; б) $(15\sqrt{39}+17\sqrt{3})$ см^2. **5.** $\approx 1{,}6$ м.

§4. Б. **1.** а) $\frac{\sqrt{3}(b-a)}{6}\operatorname{tg}\varphi$; б) $\frac{\sqrt{3}(b-a)}{6\cos\varphi}$; в) $\frac{\sqrt{3}(b^2-a^2)}{4\cos\varphi}$. **2.** а) $\frac{a}{2}\sqrt{(b-a)^2\operatorname{tg}^2\varphi+b^2}$; б) $\frac{b}{\sqrt{(b-a)^2\operatorname{tg}^2\varphi+b^2}}$; в) $\frac{b^2-a^2}{2}\operatorname{tg}\alpha$. **3.** а) 120 см^2; б) $48(\sqrt{10}+\sqrt{17})$ см^2. **4.** 3,59 м.

§5. А. **1.** $\frac{512\sqrt{3}}{9}$ см^3. **2.** 64 см^3. **3.** а) $3\sqrt{38}$ см; б) 558 см^2; в) 810 см^3. **4.** а) $144{,}5\sqrt{3}$ см^2; б) $\frac{3\,893\sqrt{6}}{6}$ см^3. **5.** а) 39; б) $84\sqrt{3}$ см^3. **6.** а) $36\sqrt{3}$ см^2; б) $18\sqrt{2}$ см^3. **7.** 8 см. **8.** 94,7 м^3. **9.** 84.

§5. Б. **1.** $192\sqrt{6}$ см^3. **2.** $162\sqrt{5951}$ см^3. **3.** $144\sqrt{134}$ см^3. **4.** а) $6a^2\sin\alpha$; б) $2a^3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\alpha}$. **5.** $\frac{ab\sin\gamma}{2(a+b)}\sqrt{l^2(a+b)^2-4a^2b^2\cos^2\frac{\gamma}{2}}$. **6.** $\arcsin\frac{4\gamma\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{na^3}$. **7.** $36\sqrt{31}$ см^3. **8.** а) $\frac{140\sqrt{2}}{3}$ см^2; б) $\frac{700\sqrt{3}}{27}$ см^3. **9.** 216 мин. **10.** 162 см^3. **11.** а) $16\sqrt{39}$ см^2; б) $\frac{128\sqrt{3}}{3}$ см^3. **12.** а) 284 см^2; б) $156\sqrt{3}$ см^3. **13.** 60°.

Упражнения и задачи на повторение

А. **1.** ≈ 48 кг. **2.** $\approx 83{,}6$ мин. **3.** 680 кубиков. **4.** $3d$, $4d$. **5.** 10 см, 24 см, 26 см.

Б. **1.** 0,25 см. **2.** 0,125 см. **3.** $\frac{bd(a+c)}{3}$, $\frac{abd}{3}$, $\frac{bcd}{3}$, $\frac{bd(a+c)}{3}$. **4.** а) $\frac{1}{6}a^3$; б) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; в) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **5.** $27\,006\sqrt{3}$ см^3.

Проверочная работа

А. **1.** а) $a\sqrt{2}$; б) $a^2(4+\sqrt{3})$; в) $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **2.** а) $72(1+\sqrt{7})$ см^2; б) $\frac{100\sqrt{7}}{7}$ %; в) $144\sqrt{3}$ см^3. **3.** а) $48\sqrt{37}$ см^2; б) 448 см^3; в) $\operatorname{arctg}3\sqrt{2}$. **4.** 35 200 м^3.

Б. **1.** а) 512 см^2; б) 768 см^3; в) $\frac{39}{4}\sqrt{265}$ см^2. **2.** а) $\frac{a^2\sin\alpha}{\cos\beta}(1+\cos\beta)$; б) $\frac{a^3}{6}\sin^2\alpha\operatorname{tg}\beta$. **3.** а) $10l^2\cos\alpha\sqrt{1+\sin^2\alpha}$; б) $\frac{38}{3}l^2\sin\alpha\cos^2\alpha$. **4.** 6048 м^3.

Модуль 8. Тела вращения. Повторение и дополнения

§1. А. **1.** а) 16π см^2; б) 16π см^3. **2.** 1701π см^3. **3.** 13 см. **4.** 20π см^3. **5.** 8 см. **6.** 195151 м^2. **7.** 8. **8.** 24 и 86. **9.** Достаточно.

§1. Б. **1.** а) 10 см; б) arccos0,8. **2.** $\sqrt{H^2+3R^2}$. **3.** а) $nR\left(2H\sin\frac{\pi}{n}+R\sin\frac{2\pi}{n}\right)$; б) $nR^2H\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}$. **4.** а) $2nR(H+R)\mathrm{tg}\frac{\pi}{n}$; б) $nR^2H\mathrm{tg}\frac{\pi}{n}$. **6.** а) $576\sqrt{3}$ см^2; б) $1080\sqrt{3}$ см^3. **8.** а) 0,215 м^3; б) 78,5%; в) не изменится. **9.** $\mathcal{V}\approx 1568$ см^3. **10.** Нет.

§2. А. **1.** а) 65π см^2, 90π см^2 б) 100π см^3; в) 60 см^2. **2.** 768π см^3. **3.** а) $12{,}5\pi(1+\sqrt{2})$ см^2; б) $\frac{125\pi\sqrt{2}}{12}$ см^3. **4.** 42 листа. **5.** $243\pi\sqrt{3}$ см^3. **6.** $50\pi\sqrt[3]{2}$ см^2. **7.** 34 см; 16 см.

§2. Б. **1.** а) $0{,}5\sqrt{2}R\mathrm{tg}\varphi$; б) $0{,}5\sqrt[3]{4}R\mathrm{tg}\varphi$; в) $0{,}5\sqrt{2}R\mathrm{tg}\varphi$. **2.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{108}\pi$. **3.** $\frac{2\sqrt{2}H^3R^3}{(H+\sqrt{2}R)^3}$. **4.** а) $\frac{\pi a^2}{4\sin^2\alpha}\left(\frac{1}{\cos\varphi}+1\right)$; б) $\frac{a^2\mathrm{tg}\varphi}{4\sin^2\alpha}$; в) $\frac{\pi a^3\mathrm{tg}\varphi}{24\sin^3\alpha}$. **5.** а) $\pi a^2\cos\alpha(1+\mathrm{ctg}\alpha)$; б) $\frac{\pi a^3\cos^2\alpha}{3\sin\alpha}$. **6.** а) $0{,}5\sqrt{2G}$; б) $\frac{\sqrt{2\pi G^3}}{12}$. **7.** πx^2. **8.** $\frac{R^3\sqrt{R^2-2x^2}}{R^2-x^2}$. **9.** $h=\frac{H}{3}$, $r=\frac{2R}{3}$. **10.** $\approx 4{,}15$ см. **12.** ≈ 24 м^2. **14.** 7 см. **16.** $\frac{\pi}{4}$. **17.** 12 см^3.

§3. А. **1.** а) 960π см^2; б) 9408π см^3; в) $10\sqrt{10}$ см. **2.** $27\sqrt{2}\pi$ см^2, 63π см^3. **3.** 8. **4.** 6 см. **5.** $\approx 21{,}9$ л. **6.** 14 см.

§3. Б. **1.** а) $\pi(R+r)\sqrt{h^2+(R-r)^2}$; б) $\mathrm{arctg}\frac{h}{R-r}$; в) $\mathrm{arctg}\frac{2h\sqrt{3}}{3(R-r)}$. **2.** а) $\frac{\pi(R^2-r^2)}{\cos\alpha}$; б) $\frac{\pi(R^3-r^3)\mathrm{tg}\alpha}{3}$. **3.** $\frac{\pi^2(R^2+r^2)(R^2+Rr+r^2)}{3(R+r)}$. **4.** $\frac{37\pi R^2H}{192}$, $\frac{19\pi R^2H}{192}$, $\frac{7\pi R^2H}{192}$. **5.** а) $\frac{H}{R-r}\left(\sqrt{\frac{R^2+r^2}{2}}-r\right)$; б) $\frac{H(\sqrt{Rr}-r)}{R-r}$. **6.** ≈ 107 г. **8.** 5 дм и 1 дм. **9.** $\frac{19}{37}$.

§4. А. **1.** $\frac{1324\pi}{3}$ см^3. **2.** а) $144\sqrt[3]{1225}\pi$ см^2; b) 10080π см^3. **3.** $\frac{6}{\sqrt[3]{\pi}}$ см. **4.** $\frac{50-4\pi}{\pi}$.

§4. Б. **1.** а) $C(-3,4)$, $R=5$; б) $C(-2,3)$, $R=4$; в) $C\left(\frac{7}{2},-\frac{3}{2}\right)$, $R=4$; г) $C\left(-1,\frac{3}{4}\right)$, $R=\frac{\sqrt{17}}{4}$.
2. а) $(x-1)^2+(y-3)^2=8$; б) $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$. **3.** а) $(-4,-3)$, $(3,4)$; б) $(-3,-4)$, $(4,-3)$. **4.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{20}=1$. **5.** а) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$; б) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$. **6.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$. **7.** а) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=9$; б) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{\frac{16}{3}}=1$; в) $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{4}=1$. **8.** $(-6,-4\sqrt{3})$, $(-6,4\sqrt{3})$. **9.** $F(6,0)$; $x+6=0$. **10.** $(9,12)$, $(9,-12)$. **11.** $(-6,9)$, $(2,1)$. **12.** $\frac{5}{27}$. **13.** $\frac{\sqrt{7991}}{4\sqrt{6}}$ см. **14.** $\pi R^2\cos^2\alpha$ кв. ед. **15.** 10,4%. **16.** 73864 кг. **17.** 328 банок. **18.** 558,5 т. **19.** $\approx 814{,}7$ кг. **20.** 160π см^3. **21.** $6r^3\sqrt{3}$. **22.** а) $\frac{1000\pi}{3}(2\sqrt{3}-5)$ см^3; б) $200\sqrt{3}$ см^2. **23.** 192π см^2, 768π см^3. **24.** $144(2\pm\sqrt{3})$ см^3. **25.** $4\mathrm{tg}^3\frac{\varphi}{2}\mathrm{ctg}\varphi$.

Упражнения и задачи на повторение

А. **1.** а) 60°; б) $32\sqrt{3}$ см^2; в) $\frac{96\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$ см^3. **2.** ≈ 2312 м^3. **3.** 144π м^2, 128π м^3. **4.** а) 36 м^2; б) arccos 0,6; в) 96π м^3, 60π м^2. **5.** 6 см.

Б. **1.** а) $R=\frac{s}{2}(1+\cos\varphi)$, $r=\frac{s}{2}(1-\cos\varphi)$; б) $R=\frac{d}{2}\left(1+\frac{1}{\cos\varphi}\right)$, $r=\frac{d}{2}\left(-1+\frac{1}{\cos\varphi}\right)$. **2.** πG^2; $\frac{2\pi R(G^2-R^2)}{3}$. **3.** 14 см. **4.** $\approx 69{,}1$ г. **5.** $0{,}5\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **6.** $\frac{9+\sqrt{17}}{24}\pi R^3$.

Проверочная работа

А. **1.** а) $\pi l^2\cos\alpha$; б) $\frac{\pi l^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{3}$. **2.** а) 252π см^3; б) $\frac{1600\sqrt[3]{7}}{63}$%. **3.** а) 120π см^2; б) 300π см^3; в) $20(5+12\sqrt{2})$ см^2; г) 600 см^3. **4.** 600π см^2.

Б. **1.** а) $\frac{\pi A(2+\mathrm{tg}\alpha)}{2}$; б) $\frac{\pi A\sqrt{A\mathrm{tg}\alpha}}{4}$; в) $2(1+\mathrm{tg}\alpha)\sqrt{\frac{A}{\mathrm{tg}\alpha}}$. **2.** $\frac{4\pi a^3H^3\sin^3\alpha}{3(a\sin\alpha+\sqrt{4H^2+a^2\sin^2\alpha})^3}$. **3.** $\approx 80358{,}88$ км^2.

СОДЕРЖАНИЕ