МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, КУЛЬТУРЫ И ИССЛЕДОВАНИЙ РЕСПУБЛИКИ МОЛДОВА

Ион Акири Андрей Брайков Ольга Шпунтенко

Математика

Учебник 8 класс

EDITURA PRUT

Manualul a fost aprobat prin ordinul Ministrului Educației al Republicii Moldova nr. 838 din 14 august 2013. Lucrarea este elaborată conform curriculumului disciplinar şi finanțată din Fondul Special pentru Manuale.

Acest manual este proprietatea Ministerului Educației, Culturii şi Cercetării al Republicii Moldova.

Школа/Лицей .... Учебник №				
Год пользования	Фамилия и имя учащегося	Учебный год	Состояние учебника	
			в начале года	в конце года
1				
2				
3				
4				
5				

• Учитель должен проверить правильность написания фамилии и имени ученика.
• Запрещаются записи на страницах учебника.
• Состояние учебника в начале и в конце учебного года определяется оценками: *отлично*, *хорошо*, *удовлетворительно* или *плохо*.

Comisia de evaluare:
Valeriu Baltag, doctor în ştiinţe fizico-matematice, profesor, grad didactic superior, Liceul Academiei de Ştiinţe a Moldovei
Dumitru Cozma, doctor în ştiinţe fizico-matematice, conferenţiar universitar, UST
Victor Iavorschi, profesor, grad didactic superior, Liceul Teoretic „Constantin Stere”, or. Soroca
Lidia Bezniţchi, profesoară, grad didactic I, Liceul Teoretic Lăpuşna, r-nul Hânceşti

Autori: *Ion Achiri*, doctor, conferenţiar universitar, USM
Andrei Braicov, doctor, conferenţiar universitar, UST
Olga Şpuntenco, profesoară, grad didactic superior, Liceul Teoretic „Gaudeamus”, or. Chişinău

Traducere din limba română: *Antonina Erhan*
Corector: *Lidia Paşa*
Copertă: *Adrian Grosu*
Paginare computerizată: *Valentina Stratu*

Editura *Prut Internaţional*, str. Alba Iulia nr. 23, bl. 1 A, Chişinău, MD 2051
Tel.: (+373 22) 75 18 74; tel./fax: (+373 22) 74 93 18; e-mail: office@prut.ro; www.edituraprut.md

Descrierea CIP a Camerei Naţionale a Cărţii

Акири, Ион

Математика: Учебник: 8 класс / Ион Акири, Андрей Брайков, Ольга Шпунтенко; comisia de evaluare: Valeriu Baltag [et al.]; trad. din limba română: Antonina Erhan; M-во образования, культуры и исследований Республики Молдова. – Chişinău: *Prut Internaţional*, 2019 (F.E.-P. „Tipografia Centrală”). – 224 p.

ISBN 978-9975-54-417-7

51(075.3)
A 394

Imprimat la F.E.-P. *Tipografia Centrală*. Comanda nr. 7233

А
Л
Г
Е
Б
Р
А

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

1 глава

Повторение и дополнения

§1. Множество действительных чисел и его подмножества

1.1. Действительные числа. Виды записи

Вспомним

1 Выберите числа, соответствующие коробке под номером ①, затем из оставшихся чисел выберите числа, соответствующие коробке под номером ②. И, наконец, выберите те числа, которые соответствуют коробке под номером ③. Соответствуют ли оставшиеся числа коробке под номером ④?

- Почему для коробки под номером ⑤ не осталось чисел?
- Как называются числа, которые не являются рациональными?

① ② ③ ④ ⑤

$\sqrt{9}$ $\frac{\sqrt{11}}{11}$ 0 $7\sqrt{2}$ $6\frac{1}{3}$ -2 $-\frac{1}{9}$

$4{,}1(8)$ $9{,}(2)$ $-\frac{1}{8}$ $\sqrt{3}$ $0{,}123\ldots$ $-2\sqrt{7}$

$-3\sqrt{3}$ 10 $\frac{2}{5}$ -74 3 216

• Получим ли мы тот же результат, если сначала выберем числа, соответствующие коробке под номером ⑤? Почему?

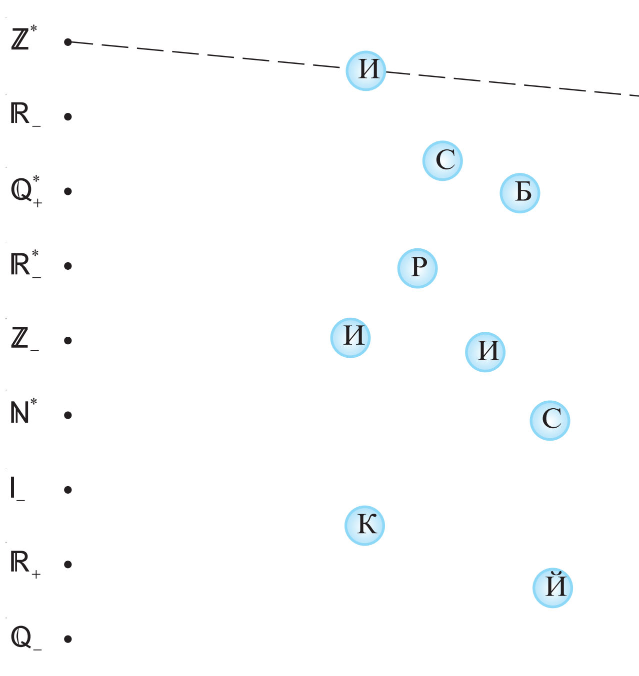
• В каком порядке следует выбрать числа, чтобы коробки под номерами ① и ③ остались пустыми?

• Какие из данных чисел имеют чистый период? А смешанный?

Обобщим

- Действительное число является рациональным или иррациональным числом.
- Любое рациональное число можно записать в виде $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
- Иррациональное число не может быть записано в виде дроби.
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$.

2 Установите соответствие. С помощью линейки проведите соответствующие отрезки и определите, какая буква, на каком отрезке лежит. Правильно расположив буквы по вертикали, вы прочтете имя знаменитого молдавского математика XX века.



Множество чисел:

- ненулевых натуральных
- ненулевых целых И
- неположительных целых
- неположительных рациональных
- положительных рациональных
- отрицательных иррациональных
- неотрицательных действительных
- неположительных действительных
- отрицательных действительных

Обобщим

Пусть M – множество чисел. Обозначаем: $M^* = M \setminus \{0\}$;
M_+ – множество неотрицательных чисел из M; M^*_+ – множество отрицательных чисел из M;
M_- – множество неположительных чисел из M; M^*_- – множество положительных чисел из M.

3 Рассмотрите образец. Запишите дроби в виде десятичного числа, а остальные числа – в виде дроби (если это возможно):

а) $1\frac{2}{9}$; $-\frac{12}{13}$; 4,8; 6,(7); $-5{,}1(4)$;

$\sqrt{8}$; 1,1234…;

б) $\frac{4}{7}$; $-1\frac{3}{4}$; 5,7; 0,1(234); $-\sqrt{2}$;

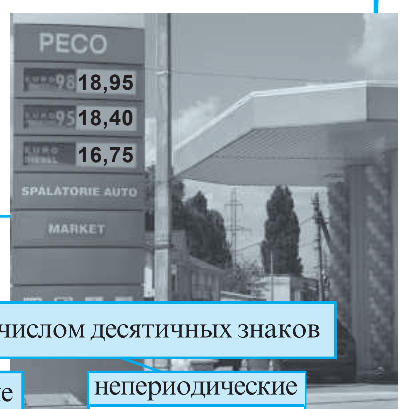
3,5(1); 2,122333…

Образец:

- $2\frac{3}{5}=\frac{2\cdot 5+3}{5}=\frac{13}{5}=13:5=2{,}6$;
- $-\frac{4}{11}=-0{,}3636\ldots=-0{,}(36)$;
- $3{,}7=3\frac{7}{10}$;
- $8{,}(15)=8\frac{15}{99}=8\frac{5}{33}$;
- $6{,}9(23)=6\frac{923-9}{990}=6\frac{914}{990}=6\frac{457}{495}$.

Обобщим

Поскольку любое действительное число является рациональным или иррациональным, то его можно представить:
- в виде десятичного числа с конечным числом десятичных знаков или
- в виде десятичного числа с бесконечным числом десятичных знаков с чистым периодом или
- в виде десятичного числа с бесконечным числом десятичных знаков со смешанным периодом или
- в виде непериодического десятичного числа с бесконечным числом десятичных знаков



Десятичные числа

- **с конечным числом десятичных знаков (или с бесконечным числом нулей)**: 0,1; –0,21; 14,25; –7,5000...
- **с бесконечным числом десятичных знаков**
  - **периодические (период, отличный от 0)**
    - **чистый период**: 0,(3); $-6{,}(12)$
    - **смешанный период**: 4,6(7); $-0{,}1(51)$
  - **непериодические**: $\pi=3{,}1415\ldots$; 0,112113114...

1.2. Приближение и округление действительных чисел

1 Вспомним, как рассчитывается приближение и округление действительных чисел:

- **Приближением с недостатком до десятых (ПНД) положительного** числа a является число, полученное в результате отбрасывания всех цифр, разряд которых меньше разряда десятых числа a.

  Примеры: ПНД(5,27) ≈ 5,2, ПНД(3,12) ≈ 3,1.

- **Приближением с избытком до десятых (ПИД) положительного** числа a является число, которое на 0,1 больше, чем приближение с недостатком до десятых числа a: ПИД = ПНД + 0,1.

  Примеры: ПИД(5,27) ≈ 5,3, ПИД(3,12) ≈ 3,2.

- **Приближением с недостатком (с избытком) отрицательного** числа a, является число, равное противоположному значению приближения с избытком (с недостатком) числа $|a|$.

  Примеры: ПНД(−5,27) ≈ −5,3, ПНД(−3,12) ≈ −3,2, ПИД(−5,27) ≈ −5,2.

- **Округлением до десятых (ОД)** числа a является число, равное одному из приближений ПНД или ПИД числа a, которое расположено на числовой оси ближе к a. Если число a является серединой отрезка [ПНД, ПИД], то округлением до десятых числа a является ПИД.

  Примеры:

ПНД(3,16) ≈ 3,1	ПНД(−3,16) ≈ −3,2	ПНД(7,25) = 7,2	ПНД(−7,25) = −7,3
ПИД(3,16) ≈ 3,2	ПИД(−3,16) ≈ −3,1	ПИД(7,25) = 7,3	ПИД(−7,25) = −7,2
ОД(3,16) ≈ 3,2	ОД(−3,16) ≈ −3,1	ОД(7,25) = 7,3	ОД(−7,25) = −7,2

Замечания. **1.** Приближения числа до единиц, до сотых, до тысячных и т.д. и округления числа до единиц, до сотых, до тысячных и т.д. осуществляются аналогично определениям приближения числа до десятых и округлению до десятых.

2. Пусть a – действительное число (положительное или отрицательное). Тогда ПНД $\le a \le$ ПИД.

3. Округлением до десятых (ОД) положительного числа a является число, равное приближению с недостатком до десятых числа a, если в разряде сотых числа a стоит цифра 0, 1, 2, 3 или 4. Если в разряде сотых числа a стоит цифра 5, 6, 7, 8 или 9, то ОД числа a равно приближению с избытком до десятых числа a.

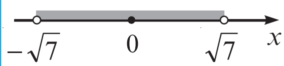
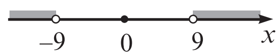
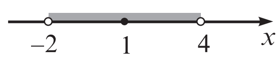
$$\text{ОД} = \begin{cases} \text{ПНД}, & \text{если } c \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \\ \text{ПИД}, & \text{если } c \in \{5, 6, 7, 8, 9\}, \end{cases}$$ где c – цифра сотых числа a.

• Обратите внимание на приближения и округления чисел и заполните аналогично таблицу:

Число	Приближение с недостатком			Приближение с избытком			Округление		
	до единиц	до десятых	до сотых	до единиц	до десятых	до сотых	до единиц	до десятых	до сотых
2,735	2	2,7	2,73	3	2,8	2,74	3	2,7	2,74
–2,735	–3	–2,8	–2,74	–2	–2,7	–2,73	–3	–2,7	–2,73
$\sqrt{5}$									
$-\sqrt{5}$									
–0,(12)									

1.3. Модуль действительного числа. Применения

1 Рассмотрите таблицу и заполните пропуски:

M – множество действительных чисел x	Представление множества M на числовой оси	Расстояния между точками с координатой x и	Аналитическая запись множества M
меньше $\sqrt{7}$ и больше $-\sqrt{7}$		началом координат, меньше $\sqrt{7}$	$-\sqrt{7} < x < \sqrt{7}$ $M = \{x \mid \lvert x\rvert < \sqrt{7}\}$
больше 9 или меньше –9		началом координат $\square$ 9	$x > 9$ или $x < -9$ $M = \{x \mid \lvert x\rvert > \square\}$
?		точкой, с координатой 1, меньше 3	$-2 < x < 4$ $-2-1 < x-1 < 4-1$ $-3 < x-1 < 3$ $M = \{x \mid \lvert x-1\rvert < \square\}$
больше 3 или меньше –7	?	точкой, с координатой –2, больше 5	$x > 3$ или $x < -7$ ➡ $x-(-2) > 3-(-2)$ или $x-(-2) < -7-(-2)$ ➡ $x+2 > \square$ или $x+2 < \square$ $M = \{x \mid \lvert x+2\rvert > \square\}$

Определение. **Модуль действительного числа** a (или **абсолютная величина** числа a) обозначается $|a|$ и определяется следующим образом: $|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a > 0 \\ 0, \text{ если } a = 0 \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$

♦ Расстояние от точки $A(a)$ до начала отсчета равно $|a|$.

Свойства модуля

Для любых действительных чисел a и b:

1° $|a| \geq 0$;

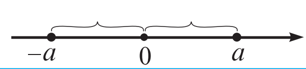
2° $|a| \geq a$;

3° $|a^2| = |a|^2 = a^2$;

4° $|ab| = |a| \cdot |b|$;

5° $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$.

♦ Числа a и $-a$ называются **противоположными**.



2 Раскройте модуль, выбрав необходимое выражение из скобок:

а) $|\sqrt{3}-5| = [\sqrt{3}-5$ или $5-\sqrt{3}]$;

б) $|\sqrt{0,1}-0,1| = [\sqrt{0,1}-0,1$ или $0,1-\sqrt{0,1}]$;

в) $|x-2| = [x-2$ или $2-x]$ при $x<2$;

г) $|4-x| = [4-x$ или $x-4]$ при $x>4$.

Примените свойство 1°.

1.4. Сравнение действительных чисел

1 Сравните числа a и b, если:

а) $a, b \in \mathbb{R}_+$ и $|a|>|b|$;

б) $a, b \in \mathbb{R}_-$ и $|a|>|b|$;

в) $a \in \mathbb{R}_-$, $b \in \mathbb{R}_+$ и $|a|>|b|$;

г) $a \in \mathbb{R}_-$, $b \in \mathbb{R}_+$ и $|a|>|b|$;

д) число a расположено на числовой оси правее числа b.

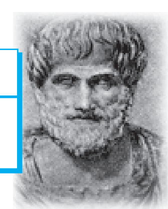
Обобщим

Пусть a и b – два действительных числа.

Если:	то
а) число a расположено на числовой оси левее числа b, б) числа a и b являются положительными и $|a|<|b|$, в) числа a и b являются отрицательными и $|a|>|b|$, г) число a отрицательное, а число b неотрицательное.	$a<b$.

2 Расположите в порядке возрастания числа и узнайте имя известного древнего философа.

Ь	Т	Л	С	Р	Т	А	О	И	Е
$\sqrt{2}$	$-\frac{1}{4}$	$1,4$	$-1,43$	$-1,443$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-1,(4)$	$-0,4$	$-\sqrt{2}$	$\frac{1}{4}$



Упражнения и задачи

1

1. В какой кармашек можно поместить число:

88; $-3,(6)$; $5\frac{1}{6}$; $-\sqrt{7}$; $\sqrt{11}$; 0;

-2008; $17,25$; $-2,7$; $3\sqrt{41}$; $\sqrt{9}$;

$-\sqrt{25}$; $1,2(4)$?

$\mathbb{R}$	$\mathbb{Q}_+$	$\mathbb{Z}_-$
$\mathbb{N}$	$\mathbb{Q}_-$	$\mathbb{Z}^*_+$
$\mathbb{R}_-$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}_+$

2. *Истинно* или *Ложно*?

а) $\mathbb{N} \not\subset \mathbb{Q}$; б) $\mathbb{Z}_- \subset \mathbb{I}_-$; в) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}_-$;
г) $\mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R}$; д) $\mathbb{Q}_+ \subset \mathbb{R}_+$; е) $\mathbb{Q}_- \not\subset \mathbb{R}$;
ж) $\mathbb{Z}_+^* \subset \mathbb{Z}$; з) $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{Z}_+$.

3. Заполните пропуски так, чтобы получить истинное высказывание:

а) $\square \in \mathbb{N}$; б) $\square \in \mathbb{Z}_+$; в) $\square \in \mathbb{R}_-$; г) $\square \in \mathbf{I}_+$;
д) $\square \in \mathbb{Q}_-^*$; е) $\square \in \mathbb{R}_+^*$; ж) $\square \in \mathbb{Z}^*$; з) $\square \in \mathbb{R}^*$.

4. Применив калькулятор, заполните таблицу:

Действительное число	Приближение	с недостатком	с избытком
12,127	до десятых		
$-\sqrt{8}$	до сотых		
7,1(68)	до тысячных		
$-3\frac{2}{3}$	до миллионных		
$\sqrt{13}$	до ста тысячных		

5. Применив калькулятор, округлите: 1) до десятых; 2) до сотых;3) до тысячных данные числа:

а) $\sqrt{12}$; б) $\sqrt{27}$; в) $\sqrt{41}$; г) $\sqrt{19}$; д) $\sqrt{135}$; е) $\sqrt{226}$.

6. Какой товар самый дешевый?

Обменный курс	
1 $	12,40 лея
1 €	16,50 лея
1 RON	3,60 лея
1 UAH	1,52 лея

а)


б)


в)


г)


7. *Истинно* или *Ложно*?

а) $\sqrt{15} > 1 + \sqrt{14}$; б) $3 - \sqrt{2} > \sqrt{7}$;
в) $\sqrt{121} < 11$; г) $\sqrt{400} > 20$;
д) $\sqrt{17} < \sqrt{25}$; е) $\sqrt{625} = 25$.

Указание. Воспользуйтесь калькулятором.

8. Отметьте на числовой оси действительное число a и число, противоположное ему, если число a равно:

а) $2{,}5$; б) $-3\frac{1}{4}$; в) $\sqrt{9}$; г) $\sqrt{11}$; д) $-\sqrt{26}$; е) $5{,}(6)$.

9. Найдите модуль числа:

а) $-7\frac{4}{5}$; б) $\sqrt{36}$; в) $18{,}3(56)$; г) $-5{,}48$; д) $8\frac{1}{3}$; е) $\sqrt{22}$.

10. Расположите в порядке возрастания числа:

$\sqrt{9}$; $|-6,(2)|$; $-\sqrt{20}$; $3{,}27$; $-4{,}5$; $|4{,}28|$; 7; -1.

11. Расположите в порядке убывания числа:

$|-3{,}5|$; $\sqrt{15}$; $-3{,}6$; $|\sqrt{16}|$; $-\frac{21}{6}$; 12; $-5\frac{4}{5}$; $2,(46)$.

2

12. Заполните пропуски так, чтобы высказывание было истинным:

а) $\mathbb{R} \cap \mathbb{Z} = \boxed{}$; б) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}_- = \boxed{}$; в) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{I}_+ = \boxed{}$;

г) $\mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_- = \boxed{}$; д) $\mathbb{Z}_+ \cap \mathbb{N} = \boxed{}$; е) $\mathbb{R}_- \cap \mathbb{R}_+ = \boxed{}$.

13. Запишите пары противоположных чисел, которые на числовой оси расположены друг от друга на расстоянии:

а) $3\frac{1}{2}$; б) $2\sqrt{14}$; в) $6,(4)$; г) $4+\sqrt{10}$.

14. Раскройте модуль:

а) $|\sqrt{19}-4|$; б) $|2-\sqrt{10}|$; в) $|\sqrt{7}-2\sqrt{2}|$; г) $|\sqrt{22}-3\sqrt{2}|$.

15. Раскройте модуль:

а) $|x-2|$; б) $|1-x|$; в) $|3x-6|$; г) $|10-5x|$.

Образец:

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & x \ge 2 \\ 2-x, & x < 2 \end{cases}$$

16. Вычислите:

а) $|\sqrt{5}\cdot(6-8{,}15)| + |(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2| - \left|\dfrac{1-\sqrt{5}}{5-6{,}5}\right|$;

б) $|(3-2\sqrt{2})^2| - |(\sqrt{2}\cdot(8-12{,}44)| + \left|\dfrac{\sqrt{2}-5}{2-3,(6)}\right|$.

17. 1) Изобразите на числовой оси действительные числа, которые:

а) больше $-1\frac{2}{5}$ и меньше $\sqrt{4}$;

б) меньше $-\sqrt{9}$ или больше $\sqrt{9}$;

в) заключены между $-6{,}5$ и $\sqrt{10}$;

г) заключены между $-\sqrt{23}$ и $\sqrt{23}$;

д) меньше $\sqrt{25}$ и больше -2;

е) больше $\sqrt{5}$ или меньше $\sqrt{2}$.

2) Запишите аналитически множества чисел, полученных в пунктах а)–е).

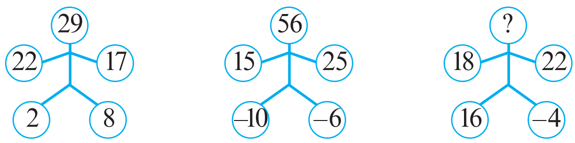
18. Сравните:

а) 20 $ 15 €; б) 12 RON 6 $;

в) 250 UAH 150 $; г) 25,5 € 810 RON.

Обменный курс	
1 $	12,40 лея
1 €	16,50 лея
1 RON	3,60 лея
1 UAH	1,52 лея

19. Определите недостающее число.



3

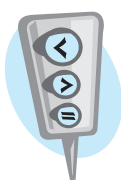
20. Докажите тождество:

а) $\sqrt{t^4+2t^2+1}=t^2+1$; б) $\sqrt{x^2+2|x|+1}=|x|+1$.

21. Постройте в тетради, с помощью линейки и циркуля, отрезок длиной:

а) $\sqrt{10}$ см; б) $\sqrt{8}$ см; в) $\sqrt{6{,}5}$ см; г) $\sqrt{2{,}5}$ см.

22. Сравните:



а) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ $\sqrt{2}-1$;

б) $\sqrt{8-2\sqrt{15}}$ $\sqrt{3}-\sqrt{5}$;

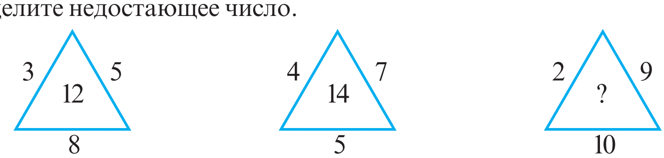
в) $\sqrt{8+2\sqrt{7}}$ $\sqrt{7}+1$;

г) $\sqrt{12-4\sqrt{5}}$ $\sqrt{10}+\sqrt{2}$.

23. Найдите целые значения переменных a и b, при которых имеет место равенство $a^2+b^2-8a+10b+41=0$.

Указание. Примените формулы $x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$ и $x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$.

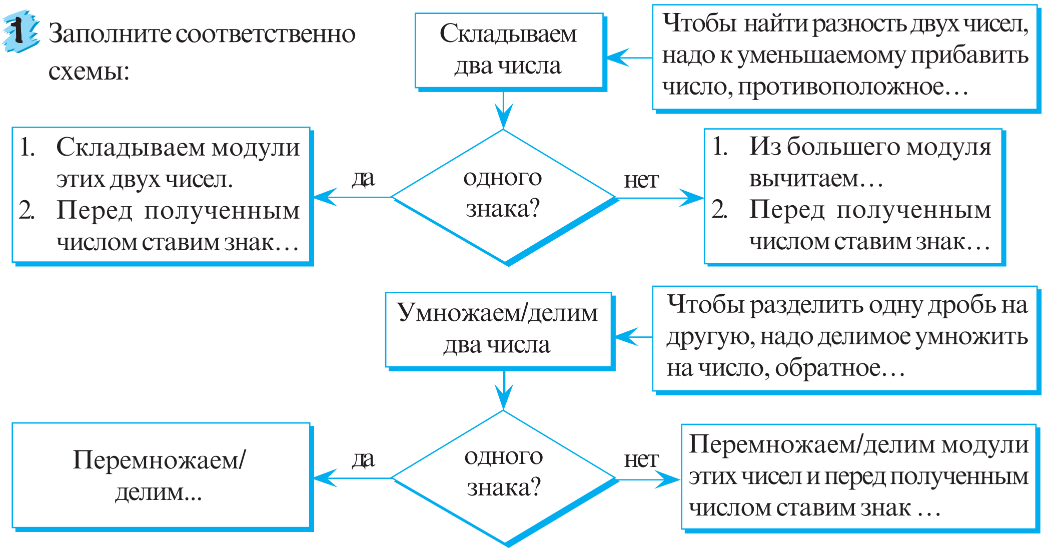
24. Определите недостающее число.



§ 2. Арифметические действия над действительными числами. Действия над промежутками действительных чисел

2.1. Арифметические действия над действительными числами

1 Заполните соответственно схемы:



• Вычислите, округлив до сотых, и назовите правило, примененное при выполнении каждого из арифметических действий:

а) $-4{,}75+3{,}25+\sqrt{6}(2-\sqrt{6}):\left(-\frac{2}{3}\right)$; б) $3{,}5\cdot(-\sqrt{5})+8\sqrt{5}:2-3\sqrt{5}\cdot 2{,}(3)$.

2 Дополните таблицу таким образом, чтобы получить ***свойства арифметических действий над действительными числами***.

Для любых действительных чисел a, b, c:

______ и ______ **коммутативны**.	$a+b=b+a$ $a\cdot b=b\cdot a$
______ и ______ **ассоциативны**.	$a+(b+c)=(a+b)+c$ $a\cdot(b\cdot c)=(ab)\cdot c$
Для действия ______ число 0 – **нейтральный элемент**.	$a+0=0+a=a$
Для действия ______ число 1 – **нейтральный элемент**.	$a\cdot 1=1\cdot a=a$
Для каждого действительного числа a существует единственное число, ему ______, $-a$.	$a+(-a)=(-a)+a=0$
Для каждого действительного числа a существует единственное число, ему ______, $\frac{1}{a}$.	$a\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\cdot a=1,\ a\neq 0.$
Умножение ______ относительно сложения и вычитания.	$a\cdot(b+c)=ab+ac$ $a(b-c)=ab-ac$

3 Может ли сумма двух иррациональных чисел быть рациональным числом? А разность? Произведение? Частное?

***Объясняем на примерах*:**

Иррациональное число a	Иррациональное число b	Результат арифметического действия
$4-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	Сумма чисел a и b: $(4-\sqrt{3})+\sqrt{3}=4\in\mathbb{Q}$;
$4-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	Разность чисел a и b: $(4-\sqrt{3})-(-\sqrt{3})=\square$;
$4-\sqrt{3}$	$4+\sqrt{3}$	Произведение чисел a и b: $(4-\sqrt{3})(4+\sqrt{3})=4^2-(\sqrt{3})^2=\square$;
$2\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	Частное чисел a и b: $2\sqrt{3}:\sqrt{3}=\square$.

Ответ: $\square$.

4 Укажите порядок выполнения действий и найдите значение выражения:

$$\sqrt{15}\overset{\bigcirc}{-}[7\sqrt{3}\overset{⑤}{\cdot}(-5\sqrt{5})\overset{\bigcirc}{+}\overset{③}{5^2}\overset{\bigcirc}{\cdot}(7\sqrt{15}\overset{\bigcirc}{-}\sqrt{5}\overset{①}{\cdot}9\sqrt{3})]\overset{⑦}{:}57.$$

Решаем

① $\sqrt{5}\cdot 9\sqrt{3}=9\sqrt{15}$;

② $7\sqrt{15}-9\sqrt{15}=\square$;

③ $5^2=\square$;

④ $\square\cdot\square=\square$;

⑤ $7\sqrt{3}\cdot(-5\sqrt{5})=\square$;

⑥ $\square+\square=\square$;

⑦ $\square:\square=\square$;

⑧ $\sqrt{15}-\square=\square$.

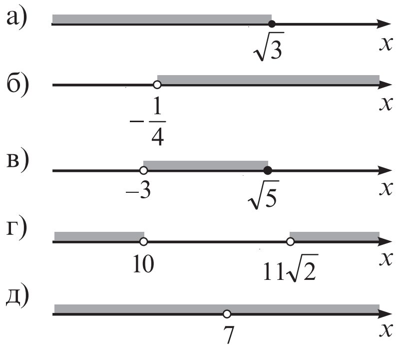
Вспомним

Порядок выполнения действий

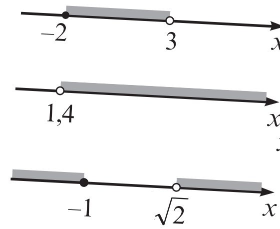
1. Действия в скобках (сначала во внутренних, затем во внешних).
2. Возведение в степень, извлечение квадратного корня.
3. Умножение и деление.
4. Сложение и вычитание.

2.2. Действия над промежутками действительных чисел

1 Известно, что действительное число x принадлежит заштрихованной части. Запишите, используя числовые промежутки, множество, которому принадлежит x:



Образец:



$x \in [-2;\ 3)$

$x \in (1{,}4;\ +\infty)$

$x \in (-\infty;\ -1] \cup (\sqrt{2};\ +\infty)$

• Прочитайте каждый из полученных числовых промежутков.

2 Рассмотрите первую строчку таблицы и аналогично, по образцу, дополните таблицу $(a,\ b \in \mathbb{R},\ a < b)$:

Множество	Числовой промежуток	
	Изображение на оси	Обозначение
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ a \le x \le b\}$		$[a,\ b]$
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ a \le x < b\}$	?	?
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ a < x \le b\}$	?	?
?	?	$(a,\ b)$
?		?
?		$[a,\ +\infty)$
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x < b\}$	?	?
?	?	$(-\infty,\ b]$
$\mathbb{R}$	?	$(-\infty,\ +\infty)$

3 Рассмотрите образец и найдите объединение и пересечение числовых промежутков:

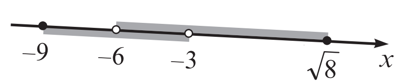
а) $(-8;\ 7]$ и $(-3;\ 8)$;

б) $(-\infty;\ \sqrt{5})$ и $(-\infty;\ -\sqrt{6})$;

в) $(1;\ +\infty)$ и $[-5;\ 4)$;

г) $[-2;\ \sqrt{10}]$ и $[-\sqrt{10};\ +\infty)$.

Образец:



$(-6;\ \sqrt{8}] \cup [-9;\ -3) = [-9;\ \sqrt{8}]$;

$(-6;\ \sqrt{8}] \cap [-9;\ -3) = (-6;\ -3)$.

Упражнения и задачи

1

1. На рынке папа купил 3 кг картофеля по цене 4,5 лея/кг, 1кг моркови по 7,3 лея/кг, 2,5 кг свеклы по 5,2 лея/кг и один арбуз весом 4.5 кг по 5,5 лея/кг. Хватит ли 60 леев, чтобы оплатить всю покупку? Останутся ли еще деньги? Сколько?

2. Даны числа:
а) 0,225; б) 642; в) 1035; г) 705; д) 208; е) 350; ж) 14,4; з) 2013.
Укажите, какие из этих чисел делятся на:
1) 2; 2) 2 и 5; 3) 3;
4) 9; 5) 2 и 3; 6) 3 и 9.

3. Вычислите, найдя наибольший общий делитель знаменателей дробей:
а) $\frac{25}{336}+\frac{2}{135}$; б) $\frac{3}{345}-\frac{7}{546}$; в) $\frac{1}{2013}+\frac{1}{2016}$.

4. Даны числа 108 и 54.
а) Найдите D_{108}, D_{54}. б) Запишите по пять чисел множеств M_{108}, M_{54}.
в) Найдите НОД чисел 108 и 54. г) Найдите НОК чисел 108 и 54.

5. Вычислите:
а) $3{,}75-2:0{,}25+1{,}4\cdot 3{,}55+1{,}2^3$;
б) $6{,}24:0{,}4+7{,}65\cdot 20-1000\cdot 0{,}01\cdot 5^2$;
в) $3\frac{1}{4}\cdot 2\frac{5}{8}-15\frac{1}{2}:3\frac{3}{4}+6,(2)\cdot\frac{9}{23}-11^2\cdot 10^2$;
г) $4{,}1(15)\cdot 99-13,(12)\cdot 100^2+16{,}0(21)\cdot 10000$.

6. Вычислите, округлив значение квадратного корня до сотых (применив калькулятор):
а) $\sqrt{625}-\sqrt{14}$; б) $2\sqrt{7}+0{,}3\sqrt{13}$; в) $\pi-\sqrt{19}$;
г) $(-\sqrt{11})\cdot\sqrt{21}$; д) $(-\sqrt{3})\cdot(-\sqrt{16})$; е) $3\sqrt{2}\cdot(-1{,}5\sqrt{7})$.

7. Используя калькулятор, изображенный на рисунке, значение выражения $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ можно вычислить по следующему алгоритму:

$$a\ \boxed{\sqrt{}}\ \boxed{M+}\ b\ \boxed{\sqrt{}}\ \boxed{M+}\ \boxed{MR}$$

а) Запишите алгоритм, по которому можно подсчитать значение этого выражения, применив калькулятор.
б) Вычислите значение выражения $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, если $a=6{,}8$, $b=8{,}3$, округлив результат до сотых.

8. Используя калькулятор, изображенный на рисунке, значение выражения $a\sqrt{b}-c\sqrt{d}$ можно вычислить по следующему алгоритму:

$$b\ \boxed{\sqrt{}}\ \boxed{X}\ a\ \boxed{=}\ \boxed{M+}\ d\ \boxed{\sqrt{}}\ \boxed{X}\ c\ \boxed{M-}\ \boxed{MR}$$

а) Запишите алгоритм, по которому можно подсчитать значение этого выражения, применив калькулятор.

б) Вычислите значение выражения $a\sqrt{b}-c\sqrt{d}$, если $a=1{,}25$, $b=2{,}5$, $c=0{,}54$, $d=4{,}4$, округлив результат до десятых.

9. Найдите среднее арифметическое действительных чисел a и b, если:

а) $a=1{,}25:0{,}05-2\sqrt{7}\cdot(-2{,}5-4{,}8)$,

$b=5\sqrt{7}\cdot(-2{,}4)+6{,}24:(0{,}04-0{,}24)$;

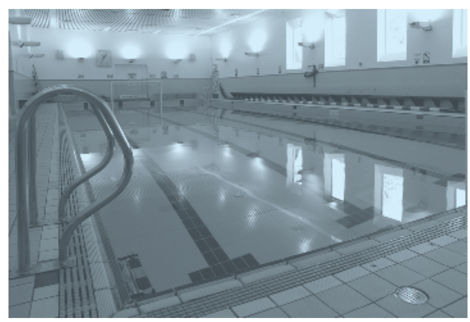
б) $a=3\sqrt{5}[4,(2)-1{,}44\cdot 0{,}05]+\left(-3\frac{1}{4}\right):\left(-\frac{5}{8}\right)$,

$b=3,(25)-4[-2{,}1(15)-7:(-33)]+7\sqrt{5}$.

10. Запишите два последовательных целых числа, между которыми заключено действительное число:

а) $-3+\sqrt{7}$; б) $1+\sqrt{6}$; в) $(-1{,}5)\cdot(-\sqrt{14})$; г) $-7,(2)\sqrt{10}$.

11. ***Работа в парах.*** Измерьте ширину и длину поверхности вашей парты и подсчитайте, сколько квадратных метров бумаги необходимо для покрытия парты.



12. Бассейн имеет измерения 10,5 м × 25 м × 3,2 м. Сколько необходимо керамической плитки для покрытия стен и дна бассейна, если размеры одной плитки 25 см × 40 см?

13. Запишите число, противоположное данному числу, а затем – обратное данному числу:

а) $-\frac{2}{5}$; б) $2\frac{1}{4}$; в) $\sqrt{7}$;

г) $-2\sqrt{26}$; д) $1-\sqrt{3}$; е) $2+\sqrt{5}$.

14. Прочтите числовой промежуток:

а) $(-\infty;\ 1]$; б) $(-\infty;\ -4{,}5)$; в) $(\sqrt{7};\ +\infty)$; г) $[-\sqrt{6};\ +\infty)$;

д) $(-7\frac{2}{5};\ 0)$; е) $[3\sqrt{5};\ 78]$; ж) $[-\sqrt{11};\ 4)$; з) $(-2{,}5;\ \sqrt{2}]$.

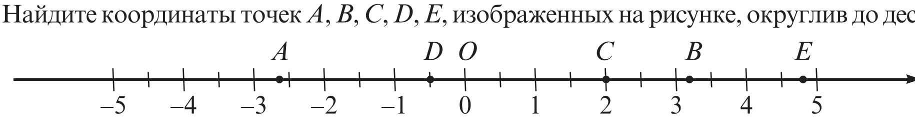
15. Используя числовую ось, найдите объединение и пересечение промежутков:

а) $[-4{,}5;\ 2)$ и $(0;\ \sqrt{5})$; б) $(-\infty;\ 3{,}7)$ и $(-2;\ +\infty)$;

в) $(-\infty;\ 3{,}7)$ и $(-2;\ +\infty)$; г) $(\sqrt{7};\ 15]$ и $[15;\ 2013)$.

2

16. Найдите координаты точек A, B, C, D, E, изображенных на рисунке, округлив до десятых.



17. Запишите число 7 в виде произведения двух:

а) целых чисел; б) рациональных чисел;

в) равных иррациональных чисел; г) различных иррациональных чисел.

18. Площадь поверхности Земли равна 510,1 миллиона км², из которых 149,2 миллиона км² составляет суша.
а) Найдите площадь поверхности, покрытой водой. Выразите результат в квадратных метрах.
б) Какой процент от всей поверхности Земли составляет вода? А суша?

19. Масса Земли равна $5{,}9736 \cdot 10^{24}$ кг. Найдите массу планеты Венеры, если она составляет $\frac{4}{5}$ от массы Земли.

20. За год население Земли в среднем увеличивается на 2%.
а) Сколько людей будет на земном шаре в 2050 году, если в 1990-м население Земли составляло 5,2 миллиарда?
б) Сколько людей будет на земном шаре в 2022 году?

21. Решите задачу, округлив результат до целых. Сергею 9 лет. Возраст каждой из его сестер-близнецов Алисии и Амелии составляет 22% от возраста Сергея, а возраст его двоюродного брата Максима составляет 30% от возраста Сергея. Найдите, через сколько лет сумма возрастов всех детей будет равна 100 годам.

22. Запишите в виде суммы двух иррациональных чисел число:
а) 5; б) –3; в) 8,5; г) $3\sqrt{15}$; д) 0; е) $\frac{1}{4}$.

23. Заполните таблицу и сформулируйте вывод.

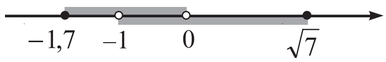
a	b	c	ab	ba	$a(bc)$	$(ab)c$	$a \cdot 1$	$b \cdot (-1)$	$\frac{1}{c}$	$c \cdot \frac{1}{c}$
–4	2,5	10								
$1\frac{1}{4}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{9}{15}$								
$\sqrt{2}$	–5	1,2								
0	$\sqrt{11}$	$-\sqrt{30}$								
$-\pi$	$\sqrt{7}$	2								

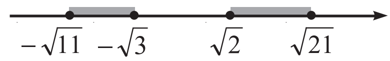
24. Дополните пропуски, таким образом, чтобы получить истинное высказывание:
а) $(\ \square\ ; 2) \cup (-\sqrt{5}, +\infty) = (-10, +\infty)$;
б) $[-\sqrt{5}, \ \square\ ] \cap [\ \square\ , 7) = [1, 6]$;
в) $(-\infty; 2{,}5) \cup [\ \square\ , +\infty) = (-\infty, +\infty)$;
г) $(\ \square\ , \sqrt{37}) \cap (-\infty, 6) = (-3, 6)$.

25. Запишите в виде промежутка или объединения числовых промежутков множества, изображенные на числовой оси:

а) 

б) 

в) 

г) 

26. Найдите: $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, если:

а) $A=(-\infty,\ 5]\cup(-\sqrt{3},\ 10)$; б) $A=\mathbb{R}$, $B=\mathbb{Q}$;

в) $A=\mathbb{Z}$, $B=[-4,\ 5)$; г) $A=(-\sqrt{3},\ \sqrt{3})$, $B=\mathbb{R}$.

3

27. Докажите тождество:

а) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$; б) $\sqrt{7+2\sqrt{10}}=\sqrt{5}+\sqrt{2}$.

28. Докажите, что значение выражения является натуральным числом:

а) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{19-8\sqrt{3}}}$.

29. Решите на множестве действительных чисел уравнение:

а) $\sqrt{2x-3}+|1{,}5y-x|+(z+2\sqrt{5})^2=0$; б) $x^2-6x+y-8\sqrt{y}+25=0$.

30. ***Задача Ньютона***

Купец имел некоторую сумму денег. 100 фунтов из нее он тратил каждый год на содержание своей семьи, прибавляя к оставшейся сумме одну ее треть. Через три года он обнаружил, что его состояние удвоилось. Сколько денег было у купца первоначально?


Исаак Ньютон (1642–1727)

31. Докажите тождество:

$$\sqrt{t^2+2+2\sqrt{t^2+1}}-\sqrt{t^2+2-2\sqrt{t^2+1}}=2.$$

32. Найдите $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, если $a, b\in\mathbb{R}$ и:

а) $A=(-a,\ a)$, $B=(-\infty,\ a]$; б) $A=[a-1,\ a+1]$, $B=[-3,\ 3]$, $a>1$;

в) $A=(-\infty,\ 0)$, $B=(-a-1,\ a+1)$, $a>0$; г) $A=(-\infty,\ a]$, $B=[b,\ +\infty)$.

33. ***Занимательная математика***

Применив арифметические действия и квадратный корень, с помощью шести цифр 4 запишите число:

а) 0; б) 9; в) 11; г) 25.

34. Заполните квадрат наименьшими простыми числами так, чтобы он стал магическим, если известно, что сумма чисел в каждой строчке, столбце или по диагонали равна 121.

67		
31		7

Проверочная работа

Время выполнения работы: 45 минут

Вариант 1

1. а) Впишите в рамку букву И, если высказывание истинно, или букву Л, если оно ложно:

$-\sqrt{900} \in \mathbb{Z}$ $\square$

$3\sqrt{7} \in \mathbb{Q}$ $\square$

$6{,}2(5) \in \mathbb{R}_+$ $\square$

$|4-3\sqrt{3}| \in \mathbb{I}_-$ $\square$

Обоснуйте! **1**

б) Впишите действительное число так, чтобы получить истинное высказывание: **1**

$$6{,}2-\sqrt{900}+4\frac{2}{5}-\square=2013.$$

в) Найдите 25% от числа, полученного в пункте б). **1**

г) Раскройте модуль $|4-3\sqrt{3}|$. **1**

2. Коля экономил два месяца, чтобы купить альбом. За первый месяц он сэкономил сумму денег, составляющую $\frac{3}{5}$ от цены альбома, а за второй месяц – сэкономил 62 лея. **3**

а) Сколько стоит альбом?

б) В каком месяце была сэкономлена бóльшая часть денег?

3. Решите задачу: **3**

Скорость звука в воздухе равна 340 м/сек. На каком расстоянии (в км) прогремел гром, который слышно через 10,5 секунды?

Запишите ответ в виде $a \cdot 10^b$, где $a, b \in \mathbb{N}^*$.

Вариант 2

1. а) Впишите в рамку букву И, если высказывание истинно, или букву Л, если оно ложно:

$\sqrt{400} \in \mathbb{Z}$ $\square$

$5\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ $\square$

$-3{,}0(4) \in \mathbb{R}_-$ $\square$

$|3-2\sqrt{2}| \in \mathbb{I}_+$ $\square$

Обоснуйте!

б) Впишите действительное число так, чтобы получить истинное высказывание:

$$-3{,}5+\sqrt{400}-7\frac{2}{5}+\square=2015.$$

в) Найдите 25% от числа, полученного в пункте б).

г) Раскройте модуль $|3-2\sqrt{2}|$.

2. Автомобиль преодолел расстояние от Кишинева до Унген за 2 часа. За первый час он проехал $\frac{3}{5}$ пути, а за второй час – 48 км.

а) Чему равно расстояние между Кишиневом и Унгенами?

б) За какой час было пройдено большее расстояние?

3. Решите задачу:

На одном CD-ROM можно хранить 650 Мб информации. Вычислите, сколько бит информации можно сохранить на трех CD-ROM-ах.

Запишите ответ в виде $a \cdot 10^b$, где $a, b \in \mathbb{N}^*$.

2 глава Степени и корни

§1. Степень с целым показателем

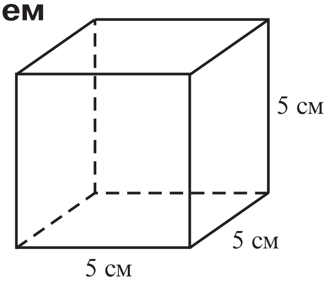
1.1. Степень с натуральным показателем

1 Рассмотрите и заполните соответственно пропуски:

$\mathscr{V}_{\text{куб}} = 5\cdot 5\cdot 5 = 5^3 = 125$ (см³);

$\left(-\frac{1}{5}\right)^4 = \left(-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(-\frac{1}{5}\right) = \square$;

$(\sqrt{2})^5 = \square\cdot\square\cdot\square\cdot\square\cdot\square = \square$.



Определение. Степенью действительного числа a **с ненулевым натуральным показателем** m называется произведение m множителей, каждый из которых равен a.

$a^m = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{m \text{ множителей}}$,

$a\in\mathbb{R},\ m\in\mathbb{N}^*$.

a^m — m: показатель степени; a^m: степень; a: основание степени

$a^0 = 1,\ a\in\mathbb{R}^*$.

0^0 не имеет смысла.

Свойства степени с натуральным показателем

Для любых $a, b\in\mathbb{R}^*$, $k, m\in\mathbb{N}$:	*Проверяем*
1°. $1^m = 1$	$1^3 = 1$
2°. $(-1)^{2m} = 1$	$(-1)^6 = 1$
3°. $(-1)^{2m+1} = -1$	$(-1)^{17} = -1$
4°. $a^k\cdot a^m = a^{k+m}$	$a^3\cdot a^2 = (a\cdot a\cdot a)\cdot(a\cdot a) = a^{3+2} = a^5$
5°. $\frac{a^k}{a^m} = a^{k-m},\ k\ge m$	$\frac{a^4}{a^2} = \frac{a\cdot a\cdot a\cdot a}{a\cdot a} = a^{4-2} = a^{\square}$
6°. $(a\cdot b)^m = a^m\cdot b^m$	$(a\cdot b)^3 = (ab)\cdot(ab)\cdot(ab) = (a\cdot a\cdot a)\cdot(b\cdot b\cdot b) = a^{\square}\cdot b^{\square}$
7°. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$
8°. $(a^k)^m = a^{km}$	$(a^3)^2 = (a\cdot a\cdot a)^2 = (a\cdot a\cdot a)\cdot(a\cdot a\cdot a) =$ $= a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a = a^6 = a^{3\cdot 2}$

Докажем некоторые из свойств 4°–8°. Пусть $a, b \in \mathbb{R}^*$, $k, m \in \mathbb{N}$.

$$4°\quad a^k \cdot a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k \text{ множителей}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ множителей}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{(k+m) \text{ множителей}} = a^{k+m}.$$

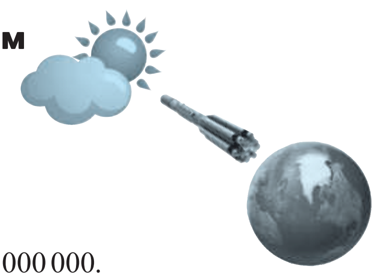
$$6°\quad (a \cdot b)^m = \underbrace{ab \cdot ab \cdot \ldots \cdot ab}_{m \text{ множителей}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ множителей}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{m \text{ множителей}} = a^m \cdot b^m.$$

$$8°\quad (a^k)^m = \underbrace{a^k \cdot a^k \cdot \ldots \cdot a^k}_{m \text{ множителей}} = a^{\overbrace{k+k+\ldots+k}^{m \text{ слагаемых}}} = a^{k \cdot m}.$$

• Вычислите:

а) $\left(1\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{\square^3}{\square^3} = \frac{\square}{\square}$; б) $\frac{2^5 \cdot (2^3)^4}{2^{15}} = \frac{2^5 \cdot 2^{\square}}{2^{15}} = 2^{5+\square-\square} = 2^{\square} = \square$.

1.2. Степень с целым показателем



1 Обратите внимание на применение степени с целым показателем.

а) Расстояние от Земли до Солнца равно

$1{,}495 \cdot 10^8$ км $= 149\,500\,000$ км.

$10^8 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100\,000\,000.$

б) Суточная норма витамина С для подростка равна

$5 \cdot 10^{-2}$ г $= 0{,}05$ г $= 50$ мг.

Объясняем

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{10 \cdot 10} = \frac{1}{100}$$

Число 10^{-2} (равное $\frac{1}{100}$) – это степень с показателем –2 числа 10. Число 10 – это основание степени 10^{-2}.

Обобщаем

$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ множителей}}$, для любых $a \in \mathbb{R}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$. $a^0 = 1$.

$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$, для любых $a \in \mathbb{R}^*$, $m \in \mathbb{Z}$.

• Исследуйте и заполните соответственно пропуски:

а) $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = \square$ $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{\square}$

$2^2 = 2 \cdot 2 = \square$ $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{\square}$

$2^1 = \square$ $2^{-1} = \square$

$2^0 = 1$

б) $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$; $5^{\square} = \frac{1}{5}$; $5^{\square} = 25$; $5^{\square} = 1$; $5^{\square} = \frac{1}{25}$.

2 Рассмотрите и дополните:

а) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}=\dfrac{1}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2}}=1:\dfrac{4}{9}=1\cdot\dfrac{9}{4}=\dfrac{3^2}{2^2}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2}$;

б) $\left(2\dfrac{1}{7}\right)^{-2}=\left(\dfrac{15}{7}\right)^{-2}=\left(\dfrac{\square}{\square}\right)^{2}=\square$;

в) $\left(1\dfrac{2}{3}\right)^{-3}=\left(\dfrac{\square}{\square}\right)^{-3}=\left(\dfrac{\square}{\square}\right)^{3}=\dfrac{\square}{\square}$.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m}=\left(\frac{b}{a}\right)^{m},$$

для любых $a, b \in \mathbb{R}^*$, $m \in \mathbb{Z}$.

Свойства степени с целым показателем

Для любых $a, b \in \mathbb{R}^*$, $k, m \in \mathbb{Z}$:

Проверяем

1°. $1^m=1$	$1^{-1}=\dfrac{1}{1^1}=1$
2°. $(-1)^{2m}=1$	$(-1)^{-4}=\dfrac{1}{(-1)^4}=\dfrac{1}{1}=1$
3°. $(-1)^{2m+1}=-1$	$(-1)^{-17}=\dfrac{1}{(-1)^{17}}=\dfrac{1}{-1}=-1$
4°. $a^k\cdot a^m=a^{k+m}$	$a^3\cdot a^{-5}=a^3\cdot\dfrac{1}{a^5}=\dfrac{a^3}{a^5}=\dfrac{a^3}{a^3\cdot a^2}=\dfrac{1}{a^2}=a^{-2}=a^{3+(-5)}$
5°. $\dfrac{a^k}{a^m}=a^{k-m}$	$\dfrac{a^{-7}}{a^4}=\dfrac{1}{a^{\square}\cdot a^4}=\dfrac{1}{a^{\square}}=a^{\square}=a^{\square-\square}$
6°. $(ab)^m=a^m\cdot b^m$	$(ab)^{-3}=\dfrac{1}{(ab)^3}=\dfrac{1}{a^{\square}\cdot b^{\square}}=\dfrac{1}{a^{\square}}\cdot\dfrac{1}{b^{\square}}=a^{\square}\cdot b^{\square}$
7°. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m=\dfrac{a^m}{b^m}$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-2}=\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\square}=\dfrac{b^{\square}}{a^{\square}}=\dfrac{a^{\square}}{b^{\square}}$
8°. $(a^k)^m=a^{k\cdot m}$	$(a^{-2})^5=\left(\dfrac{1}{a^2}\right)^5=\dfrac{1}{a^{\square}}=a^{\square}=a^{\square\cdot\square}$

• Рассмотрите и дополните:

а) $\dfrac{(\sqrt{2})^4\cdot\dfrac{1}{8}}{16\cdot 2^{-5}}=\dfrac{2^2\cdot 2^{-3}}{2^4\cdot 2^{-5}}=2^{\square+\square-\square-(-5)}=2^{\square}=\square$;

б) $a^{-48}=(a^{\square})^{-8}=(a^{12})^{\square}=(a^{\square})^{24}=(a^{-3})^{\square}$;

в) $\dfrac{a^2+a^7}{a^{-2}+a^3}=\dfrac{a^{\square}(1+a^5)}{a^{\square}(1+a^5)}=a^{\square-\square}=a^{\square}$.

Упражнения и задачи

1

1. Прочтите степень. Укажите основание и показатель степени:

5^7; -7^3; $(-2)^5$; $\left(2\frac{1}{3}\right)^0$; $(-2{,}3)^{21}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$; $(-3)^{-2}$.

2. Заполните таблицу:

a	1	$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{1}{3}$	$-0{,}2$
a^2						
a^3						

3. Заполните рамку так, чтобы получить истинное высказывание:

а) $27=3^{\square}$; б) $1000=10^{\square}=(\sqrt{10})^{\square}$; в) $\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\square}$;

г) $1=(2{,}3)^{\square}$; д) $1=(-1)^{\square}$; е) $-1=(-1)^{\square}$.

4. Запишите в виде степени:

а) $x^5\cdot x^7$; б) $\frac{a^7\cdot a^3}{a^2}$; в) $(-4y)^2\cdot(4y^3)$; г) $a^9b^3\cdot\left(\frac{b^4}{a^2}\right)^2$.

5. *Истинно* или *Ложно*?

Для любых $n\in\mathbb{Z}^*$:

а) $2^{-n}=-2^n$; б) $2^{-n}=\frac{1}{2^{-n}}$; в) $2^{-n}=\frac{1}{2^n}$; г) $2^{-n}=-\frac{1}{2^n}$.

6. Запишите в виде степени с целым отрицательным показателем:

а) $\frac{1}{3^{27}}$; б) $\frac{1}{5}$; в) $\frac{1}{a^6}$; г) $\frac{1}{x^2}$; д) $\left(\frac{2}{3}\right)^{10}$; е) $\frac{1}{y}$.

7. Вычислите:

а) 2^{-4}; б) 10^{-1}; в) 7^{-2}; г) $(-5)^{-3}$;

д) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-2}$; е) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-4}$; ж) $\left(1\frac{2}{3}\right)^{-2}$; з) $\left(-2\frac{2}{7}\right)^{-1}$.

8. Заполните таблицу:

n	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
10^n									
10^{-n}									

9. Запишите в виде десятичного числа.

а) Скорость света равна $3\cdot10^5$ км/сек.

б) Оптический микроскоп позволяет различать предметы длиной $2{,}5\cdot10^{-3}$ см.

в) Диаметр молекулы воды равен $2{,}8\cdot10^{-7}$ мм.

г) Человеческий мозг способен ежедневно запоминать $8{,}6\cdot10^7$ битов информации.

10. Применив свойства степени с целым показателем, выполните действия:

а) $a^4 \cdot a^{-2}$; б) $\dfrac{a^6}{a^{-4}}$; в) $x^{-3} \cdot x^5$; г) $\dfrac{x^{-3}}{x^{-5}}$;

д) $(b^{-2})^6$; е) $((c^{-5})^2)^{-1}$; ж) $(x^2 y^{-3})^{-2}$; з) $\left(\dfrac{c^{-2}}{a^{-1}}\right)^{-3}$.

11. Вычислите:

а) $(3^2 \cdot 3^{-3})^{-1}$; б) $(7^{-1})^4 \cdot (7^{-2})^{-2}$; в) $\dfrac{4^3 \cdot 4^{-5}}{4^{-4}}$; г) $32 \cdot 2^{-6}$; д) $\dfrac{5^{-3} \cdot 5^5}{5^2 \cdot 3}$; е) $49 \cdot (7^{-2})^2$.

12. В таблице указаны массы атомов некоторых химических элементов:

а) Запишите название элемента с наибольшей массой атома; с наименьшей массой.

б) Сравните массы атомов меди и натрия.

в) Запишите в виде таблице названия этих элементов в порядке убывания массы их атомов.

Название элемента	Масса атома (кг)
Алюминий (Al)	$4{,}48 \cdot 10^{-26}$
Гелий (He)	$6{,}64 \cdot 10^{-27}$
Железо (Fe)	$9{,}28 \cdot 10^{-26}$
Золото (Au)	$3{,}27 \cdot 10^{-25}$
Медь (Cu)	$1{,}05 \cdot 10^{-25}$
Натрий (Na)	$3{,}81 \cdot 10^{-26}$

2

13. Запишите число 2^{60} в виде степени с основанием 4; 8; 16; 32.

14. Рассмотрите образец и аналогично докажите, что:

а) $81^3 + 3^{10}$ кратно 10;

б) $5^{13} + 125^5$ кратно 13.

Образец:
$16^5 + 2^{15}$ кратно 33, так как
$16^5 + 2^{15} = (2^4)^5 + 2^{15} =$
$= 2^{20} + 2^{15} = 2^{15}(2^5 + 1) =$
$= 2^{15} \cdot 33.$

15. Заполните рамки так, чтобы получить верное равенство:

а) $3^{\square} = 81$; в) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\square} = \dfrac{1}{125}$; д) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\square} = \dfrac{8}{27}$;

б) $2^{\square} = \dfrac{1}{32}$; г) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\square} = 64$; е) $\left(\dfrac{4}{5}\right)^{\square} = \dfrac{25}{16}$.

16. Найдите значение выражения:

а) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1} + \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$; б) $(-2)^{-2} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3} + \left(\dfrac{1}{7}\right)^{0}$;

в) $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-4} + \left(-1\dfrac{3}{5}\right)^{-2}$; г) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-3} + \left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-2} + \left(-\dfrac{3}{4}\right)^{-1}$.

17. Вычислите:

а) $(2{,}5)^{-5} \cdot (0{,}4)^{-5} + \left(\dfrac{3}{4}\right)^{-3} \cdot \left(1\dfrac{1}{3}\right)^{-3}$; б) $\dfrac{2^6}{(2^{-5} \cdot 8)^{-2}}$; в) $\dfrac{9^{-4} \cdot 4^{-4}}{2^{-9} \cdot 3^{-9}}$;

г) $\dfrac{5^5 \cdot 25^{-2}}{5^{-3} \cdot 125}$; д) $\dfrac{(0{,}1)^5 \cdot (0{,}1)^{-3}}{0{,}001}$; е) $\dfrac{6^{-10}}{81^{-2} \cdot 32^{-2}}$; ж) $\dfrac{15^{-3}}{9^{-2} \cdot 125^{-1}}$.

18. Упростите выражение:

а) $5xy^2 \cdot 0{,}2x^{-3}y^{-1}$; б) $2\frac{1}{3}a^5b^{-8} \cdot \frac{3}{7}a^{-1}b^{12}$; в) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x^{-1}\right)^{-4} \cdot (0{,}5x^{-2})^2$; г) $\frac{(4a^3b^{-4})^{-1}}{0{,}2a^{-4}b^2}$.

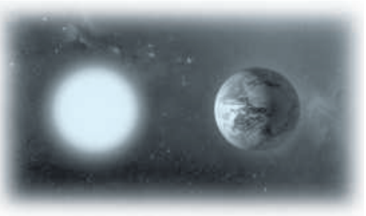
19. Дополните соответствующим выражением:

а) $16x^{-12}y^8 = (\quad)^4$; б) $\frac{1}{27}a^9b^6 = (\quad)^{-3}$;

в) $\frac{x^5}{32y^{10}} = (\quad)^{-5}$; г) $125a^{-15}b^{-3} = (\quad)^3$.

20. Пусть скорость света $c = 3 \cdot 10^5$ км/сек.

а) Найдите, за какое время луч света проходит расстояние 384 000 км от Земли до Луны.



б) Световой год соответствует расстоянию, которое проходит луч света за календарный год.

Будем считать, что календарный год, в среднем, имеет 365,25 дней. Выразите в световых годах расстояние в $8{,}2 \cdot 10^{13}$ км от Земли до звезды Сириус.

21. Плотность меди равна $8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3. Найдите массу бруска меди, который имеет форму прямоугольного параллелепипеда с измерениями $2{,}5 \cdot 10^{-1}$ м, 12 см, $2 \cdot 10^{-2}$ м.

3

22. Запишите в виде степени с основание x:

а) $\frac{(x^3)^{-2} \cdot (x^{-7})^{-1}}{x^{-4}}$; б) $\frac{(x^{-2})^{-4} \cdot (x^2)^{-3}}{x^{-2}}$; в) $\left(\frac{x^{-2}}{x^{-3}}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{x^5}\right)^{-1}$; г) $\left(\frac{3^0 \cdot x^{-1}}{x^2}\right)^5 : (x^{-2})^{14}$.

23. Упростите выражение:

а) $\frac{3^{n-1} \cdot 7^{n+1}}{21^n}$, $n \in \mathbb{N}$; б) $\frac{15^n}{5^{n+1} \cdot 3^{n-1}}$, $n \in \mathbb{N}$.

24. Пусть $2^m = a$, $2^n = b$, где $m, n \in \mathbb{Z}$. Выразите через a и b выражение:

а) 2^{m+n}; б) 2^{m-n}; в) 8^{m+n}; г) 2^{2m-3n}.

25. Вычислите силу притяжения F между Землей и Луной, применив формулу $F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{R^2}$ и следующие данные: $m_1 \cdot m_2 = 1{,}19 \cdot 10^{55}$ кг^2; $R^2 = 2{,}25 \cdot 10^{16}$ км^2; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-20}$.

26. Упростите выражение:

а) $(x^{-2} - y^{-2}) \cdot (x+y)^{-1}$; б) $\left(\frac{1}{x^{-2}} - \frac{1}{y^{-2}}\right) \cdot (x-y)^{-1}$; в) $\left(\frac{a^{-1}-1}{a^{-1}+1}\right)^{-1}$; г) $\left(\frac{1+a^{-1}}{1-a^{-2}}\right)^{-1}$.

27. Вычислите $\left(\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^{-1} - (2\sqrt{2})^{-1}\right)^2 \cdot \left[\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)^{-1} - \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^{-1}\right]$.

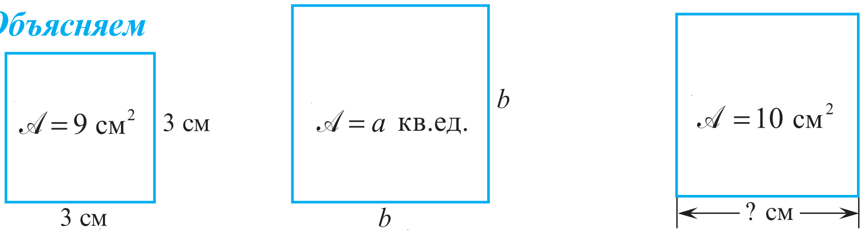
28. Угарный газ вреден для здоровья человека, поэтому его концентрация в помещении не должна превышать $0{,}2 \cdot 10^{-2}$ г/м^3. Какое предельно допустимое количество молекул угарного газа может быть в помещении с измерениями 4 м × 5 м × 2,5 м, если одна молекула состоит из одного атома углерода и одного атома кислорода , то есть ее масса равна $12 + 16 = 28$ (у.е)?

§2. Корни. Повторение и дополнения

2.1. Квадратный корень. Приближенное значение квадратного корня

1 Как вырезать из картона квадрат, площадь которого равна 9 см²? А квадрат площадью 10 см²?

Объясняем



$3 \geq 0$ и $3^2 = 9$ | $b \geq 0$ и $b^2 = a$

$\sqrt{9} = 3$ | $\sqrt{a} = b$

Определение. Квадратным корнем из неотрицательного действительного числа a (или корнем из a) называется неотрицательное действительное число b, квадрат которого равен a.

квадратный корень из числа a → $\boxed{\sqrt{a}} = \boxed{b}$ ← значение квадратного корня → $\boxed{a, b \in \mathbb{R}_+,\ b^2 = a}$

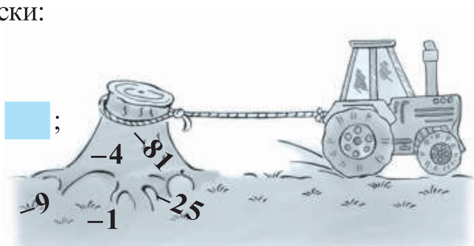
знак корня или радикал

• Исследуйте и заполните соответственно пропуски:

$\sqrt{49} = 7$, так как $7 \geq 0$ и $7^2 = 49$;

$\sqrt{2\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{\square}{\square}} = \square$, так как $\square \geq 0$ и $\square^{\square} = \square$;

$\sqrt{0{,}01} = \square$, так как $\square \geq 0$ и $\square^{\square} = \square$.

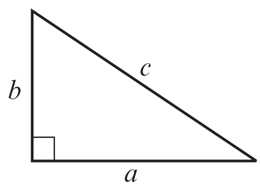


Замечания. **1.** Квадратный корень из любого неотрицательного действительного числа существует и имеет единственное значение.
2. Во множестве действительных чисел квадратный корень из отрицательных чисел не существует.

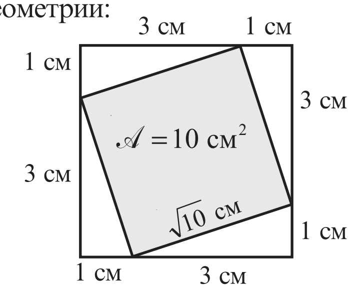
2 Рассмотрите и дополните:

$(\sqrt{a})^2 = a$, для $a \in \mathbb{R}_+$.	$\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$, для любых $a \in \mathbb{R}$.	$\sqrt{a}$ не имеет смысла для $a \in \mathbb{R}^*_-$.
$(\sqrt{3})^2 = 3$	$\sqrt{7^2} = \lvert 7 \rvert = 7$	$\sqrt{2x-1}$ имеет смысл, если
$\left(\sqrt{\frac{5}{19}}\right)^2 = \square$	$\sqrt{(-5{,}1)^2} = \lvert \square \rvert = \square$	$2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow$
$\left(\sqrt{\sqrt{3}-2}\right)^2 = \square$	$\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} = \lvert \sqrt{3}-2 \rvert =$	$\Leftrightarrow 2x \geq \square \Leftrightarrow$
	$= \square$, так как $\square > \square$	$\Leftrightarrow x \geq \square$

3 Из определения квадратного корня следует, что квадрат, площадь которого равна 10 см^2, имеет сторону длиной $\sqrt{10}$ см. Рассмотрите рисунок и обратите внимание на то, как можно из картона вырезать такой квадрат, применив теорему Пифагора, которая в скором времени будет изучена на уроках геометрии:



$c^2 = a^2 + b^2$ – теорема Пифагора



4 Вспомните алгоритм извлечения квадратного корня и объясните, как рассчитан $\sqrt{10}$, с точностью до трех десятичных знаков.

$\sqrt{10{,}000000}$	3,162
9	$61 \cdot 1 = 61$
1 00	$626 \cdot 6 = 3756$
61	$6322 \cdot 2 = 12644$
3900	
3756	
14400	
12644	

Интересно и полезно

В древнем Вавилоне для нахождения приближенного значения квадратного корня применяли формулу $\sqrt{a^2+b} \approx a + \dfrac{b}{2a}$, где $a > 0$ и $|b|$ – достаточно малое число, по сравнению с a. Таким образом, $\sqrt{10} = \sqrt{3^2+1} \approx 3 + \dfrac{1}{6} = 3{,}1(6)$.

• Вычислите $\sqrt{7}$, с точностью до двух десятичных знаков, применив:
а) алгоритм извлечения квадратного корня;
б) формулу, которую использовали в древнем Вавилоне.

Из истории

В древней Греции задача извлечения корня ассоциировалась с задачей нахождения длины стороны квадрата, площадь которого известна. Поэтому квадратный корень назывался „стороной“.

Вероятно, исходя из этих заключений, на латинском языке понятия „сторона“ и „корень“ обозначаются одним и тем же словом – *radix*. От него и произошло слово *радикал* (т.е. *корень*).


Рене Декарт (1596–1650)

В XIII–XV веках европейские математики вместо слова *корень* использовали обозначение R^2. Например, число $\sqrt{3}$ записывали следующим образом: $R^2 3$.

В XVI веке для представления действия извлечения квадратного корня использовали символ $\surd$. Только в XVIII веке известный французский математик Рене Декарт ввел в использование символ $\sqrt{}$, который применяется и по сей день.

2.2. Свойства квадратного корня

1 Выполните действия и сравните результаты:

$\sqrt{36\cdot 25}=\sqrt{900}=30;$ $\qquad \sqrt{36\cdot 25}=\sqrt{36}\cdot\sqrt{25}=6\cdot 5=30;$

$\sqrt{\frac{9}{36}}=\sqrt{\frac{\square}{\square}}=\frac{\square}{\square};$ $\qquad \sqrt{\frac{9}{36}}=\frac{\sqrt{\square}}{\sqrt{\square}}={}^{\square)}\frac{\square}{\square}=\frac{\square}{\square}.$

Свойства квадратного корня

1° $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$, где $a, b\in\mathbb{R}_+$.

2° $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$, где $a\in\mathbb{R}_+$, $b\in\mathbb{R}_+^*$.

Замечание. Свойство 1° верно для трех и более неотрицательных множителей.

2 Рассмотрите и соответственно заполните пропуски:

а) $\sqrt{35}\cdot\sqrt{15}\cdot\sqrt{21}=\sqrt{35\cdot 15\cdot 21}=\sqrt{7\cdot 5\cdot 5\cdot 3\cdot 7\cdot 3}=$

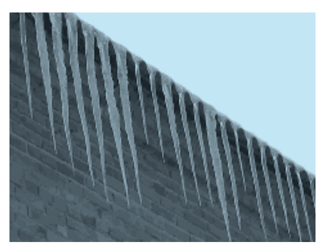
$=\sqrt{7^2\cdot\square^2\cdot\square^2}=\sqrt{7^2}\cdot\sqrt{\square^2}\cdot\sqrt{\square^2}=7\cdot\square\cdot\square=\square;$

б) $\sqrt{82^2-18^2}=\sqrt{(82+18)\cdot(82-18)}=\sqrt{\square\cdot\square}=\sqrt{\square}\cdot\sqrt{\square}=\square\cdot\square=\square;$

в) $\sqrt{18^2+24^2}=\sqrt{(6\cdot 3)^2+(6\cdot 4)^2}=\sqrt{6^2\cdot 3^2+6^2\cdot 4^2}=\sqrt{6^2(3^2+4^2)}=$

$=\sqrt{\square^2\cdot\square}=\sqrt{\square^2}\cdot\sqrt{\square}=\square\cdot\square=\square.$

3 Сколько секунд будет падать ледяная сосулька с карниза, расположенного на высоте 40 м от поверхности земли?



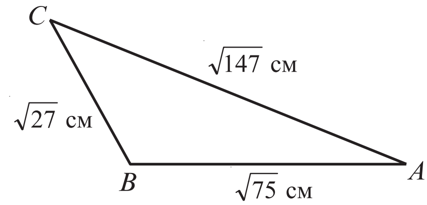
Для выполнения вычислений примените формулу $h=\frac{gt^2}{2}$, где h – высота (в метрах), t – время (в секундах), $g\approx 9{,}8$ м/сек.^{2} – ускорение свободного падения.

Решаем

$t=\sqrt{\frac{2h}{g}};\quad t\approx\sqrt{\frac{2\cdot 40}{9{,}8}}=\sqrt{\frac{40}{4{,}9}}=\sqrt{\frac{4}{0{,}49}}=\frac{\sqrt{\square}}{\sqrt{\square}}=\frac{\square}{\square}=\square.$

Ответ: $t\approx\square$ секунды.

4 Используя данные с рисунка, найдите периметр треугольника ABC.



Решение:

$\mathscr{P} = AB + BC + AC = \sqrt{75} + \sqrt{27} + \sqrt{147} =$

$= \sqrt{25 \cdot 3} + \sqrt{9 \cdot 3} + \sqrt{49 \cdot 3} =$

$= \square\sqrt{3} + \square\sqrt{3} + \square\sqrt{3} = \square\sqrt{3}$ (см).

Ответ: $\mathscr{P} = \square\sqrt{3}$ см.

Правило вынесения множителя из-под знака корня

Если $a, b \in \mathbb{R}$ и $b \geq 0$, то $\sqrt{a^2 b} = |a|\, b$.

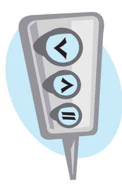
• Рассмотрите и дополните.

Упростим выражение $\sqrt{5b^2} + \sqrt{5a^2}$, где $b > 0$, $a < 0$:

$\sqrt{5b^2} + \sqrt{5a^2} = |b| \cdot \sqrt{5} + |a| \cdot \sqrt{5} = (\square \bigcirc \square)\sqrt{5}.$

5 Сравните $5\sqrt{\frac{3}{5}}$ и $3\sqrt{\frac{5}{3}}$.

Решение:



$5\sqrt{\frac{3}{5}} = \sqrt{25 \cdot \frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{25 \cdot 3}{5}} = \sqrt{5 \cdot 3} = \sqrt{15};$

$3\sqrt{\frac{5}{3}} = \sqrt{\square \cdot \frac{5}{3}} = \sqrt{\frac{\square \cdot 5}{3}} = \sqrt{\square \cdot \square} = \sqrt{\square};$

$5\sqrt{\frac{3}{5}} \bigcirc 3\sqrt{\frac{5}{3}}.$

Правило внесения множителя под знак корня

Если $a, b \in \mathbb{R}$ и $b \geq 0$, то $a\sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{a^2 b}, & \text{если } a \geq 0 \\ -\sqrt{a^2 b}, & \text{если } a < 0. \end{cases}$

• Рассмотрите и дополните.

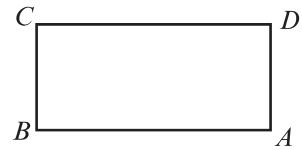
Упростим выражение $ba\sqrt{\frac{3}{a}} \cdot \sqrt{\frac{27a^3}{b^2}}$, где $a > 0$, $b < 0$:

$ba\sqrt{\frac{3}{a}} \cdot \sqrt{\frac{27a^3}{b^2}} = -\sqrt{\frac{3a^2b^2}{a}} \cdot \sqrt{\frac{27a^3}{b^2}} = -\sqrt{\frac{\square}{\square}} = -\sqrt{\square} = \square.$

2.3. Избавление от иррациональности в знаменателе отношения

Площадь прямоугольника $ABCD$ равна 7 см². Найдите длину стороны AB, если:

а) $BC=\sqrt{2}$ см; б) $BC=3-\sqrt{2}$ см.



Решение:

$\mathscr{A}=AB\cdot BC;\quad AB=\dfrac{\mathscr{A}}{BC}.$

а) $AB=\dfrac{7}{\sqrt{2}}=\dfrac{7\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{7\sqrt{2}}{2}=3{,}5\sqrt{2}$ (см);

б) $AB=\dfrac{7}{3-\sqrt{2}}=\dfrac{7\cdot(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}=\dfrac{7(3+\sqrt{2})}{9-2}=\dfrac{7(3+\sqrt{2})}{7}=(3+\sqrt{2})$ (см).

Ответ: а) $AB=3{,}5\sqrt{2}$ см; б) $AB=(3+\sqrt{2})$ см.

В ходе решения задачи было выполнено действие, позволяющее **привести знаменатель отношения к рациональному виду**, то есть, избавиться от иррациональности в знаменателе.

> Если знаменателем отношения действительных чисел является число вида $a\sqrt{b}$, где $a\in\mathbb{Q}^*$, $b\in\mathbb{Q}^*_+$, то для того, чтобы избавиться от иррациональности в знаменателе отношения, необходимо числитель и знаменатель умножить на число $\sqrt{b}$.

• Рассмотрите и дополните:

$\dfrac{5}{\sqrt{3}}=\dfrac{5\cdot\square}{\sqrt{3}\cdot\square}=\square$; $\dfrac{2}{3\sqrt{7}}=\dfrac{2\cdot\square}{3\sqrt{7}\cdot\square}=\square$.

> Числа вида $a+\sqrt{b}$ и $a-\sqrt{b}$, где $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}^*_+$, называются ***сопряженными***.

• Дополните:

Числом, сопряженным числу $3+\sqrt{5}$, является число $\square$.

Числом, сопряженным числу $-2-\sqrt{7}$, является число $\square$.

> Если знаменателем отношения действительных чисел является число вида $a+\sqrt{b}$ (или $a-\sqrt{b}$), где $a\in\mathbb{Q}$, $b\in\mathbb{Q}^*_+$, то для того, чтобы избавиться от иррациональности в знаменателе отношения, необходимо числитель и знаменатель умножить на число $a-\sqrt{b}$ (или $a+\sqrt{b}$) – число, сопряженное знаменателю данного отношения.

• Рассмотрите и дополните:

$$\frac{3}{2+\sqrt{3}}=\frac{3\cdot(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=\frac{3\cdot(2-\sqrt{3})}{4-3}=3(2-\sqrt{3})=6-3\sqrt{3};$$

$$\frac{4\sqrt{2}}{3-\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{2}\cdot(\square)}{(3-\sqrt{5})\cdot(\square)}=\frac{4\sqrt{2}\cdot(\square)}{\square\cdot\square}=\square=\square.$$

Упражнения и задачи

1

1. Вычислите:

а) $\sqrt{49}$; б) $\sqrt{1}$; в) $\sqrt{0{,}01}$; г) $(\sqrt{3{,}2})^2$; д) $(\sqrt{12{,}71})^2$;

е) $\sqrt{(-4{,}21)^2}$; ж) $\sqrt{\frac{9}{169}}$; з) $\sqrt{11\frac{1}{9}}$; и) $\sqrt{2\frac{7}{9}}$; к) $\sqrt{6\frac{1}{4}}$.

2. Пусть $a=144$, $b=25$. Найдите значение выражения:

а) $a\sqrt{b}$; б) $b\sqrt{a}$; в) $\sqrt{ab}$; г) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$;

д) $a+\sqrt{b}$; е) $\sqrt{a}+b$; ж) $\sqrt{a+b}$.

3. Вычислите:

а) $2\sqrt{49}-3\sqrt{25}$; б) $4\sqrt{16}-2\sqrt{81}$; в) $10\sqrt{\frac{81}{100}}$;

г) $5\sqrt{\frac{36}{25}}$; д) $100\sqrt{0{,}04}-\sqrt{144}$; е) $1\frac{4}{7}\cdot\sqrt{4900}$.

4. Используя калькулятор, вычислите квадратный корень и округлите результат до сотых.

а) $\sqrt{7}$; б) $\sqrt{5{,}3}$; в) $\sqrt{50}$; г) $\sqrt{1{,}8}$; д) $\sqrt{12{,}56}$; е) $\sqrt{360}$.

5. Впишите один из знаков „>”, „<”, „≤”, „≥” так, чтобы получить истинное высказывание:

а) $\sqrt{a^2}=a$, при $a \bigcirc 0$; б) $\sqrt{(a+2)^2}=a+2$, при $a \bigcirc -2$;

в) $(\sqrt{1-a})^2=1-a$, при $a \bigcirc 1$; г) $\sqrt{(1-a)^2}=a-1$, при $a \bigcirc 1$.

6. Между какими двумя последовательными натуральными числами расположено число:

а) $\sqrt{7}$; б) $\sqrt{17}$; в) $\sqrt{41}$; г) $\sqrt{151}$?

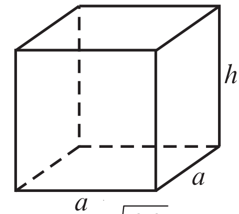
7. Найдите целое число, ближе всех расположенное к числу:

а) $\sqrt{50}$; б) $-\sqrt{35}$; в) $\sqrt{102}$; г) $-\sqrt{80{,}7}$.

8. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{2-x}$, при $x=1$; б) $\sqrt{6x+3}$, при $x=-0{,}5$;

в) $\sqrt{x^2}$, при $x=-5$; г) $\sqrt{(2x+5)^2}$, при $x=-6$.



9. Объем прямоугольного параллелепипеда, в основании которого лежит квадрат со стороной, равной a, вычисляется по формуле $\mathcal{V} = a^2 \cdot h$, где h – высота параллелепипеда. Выразите, из этой формулы, переменную a через $\mathcal{V}$ и h.

10. Вычислите:

а) $\sqrt{16 \cdot 121}$; б) $\sqrt{49 \cdot 25}$; в) $\sqrt{9 \cdot 0{,}36 \cdot 16}$; г) $\sqrt{\dfrac{36}{169}}$;

д) $\sqrt{\dfrac{1}{81} \cdot \dfrac{16}{25}}$; е) $\sqrt{17^2 \cdot 3^2}$; ж) $\sqrt{\dfrac{1}{17}} \cdot \sqrt{\dfrac{17}{49}}$; з) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{48}$.

11. Вычислите:

а) $\sqrt{48 \cdot 27}$; б) $\sqrt{50 \cdot 72}$; в) $\sqrt{98 \cdot 18}$; г) $\sqrt{75 \cdot 243}$;

д) $\sqrt{13^2 - 12^2}$; е) $\sqrt{17^2 - 8^2}$; ж) $\sqrt{25^2 - 24^2}$; з) $\sqrt{117^2 - 108^2}$.

12. Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{72}$; б) $\sqrt{48}$; в) $\sqrt{75}$; г) $\sqrt{90}$; д) $\dfrac{\sqrt{54}}{3}$; е) $5\sqrt{\dfrac{1}{125}}$; ж) $\dfrac{1}{8}\sqrt{96}$; з) $\dfrac{1}{7}\sqrt{147}$.

13. Внесите множитель под знак корня:

а) $3\sqrt{5}$; б) $5\sqrt{3}$; в) $2\sqrt{7}$; г) $-3\sqrt{2}$; д) $6\sqrt{3}$; е) $\dfrac{1}{3}\sqrt{27}$; ж) $-5\sqrt{0{,}2}$; з) $-2\sqrt{\dfrac{1}{8}}$.

14. С какой скоростью упадет кирпич на землю с высоты 1 м? Используйте калькулятор и округлите ответ до десятых.

Указание: $v = \sqrt{2gh}$, где h – высота, а $g = 9{,}8$ м/сек^2 – ускорение свободного падения.

2

15. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе отношения:

а) $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$; б) $\dfrac{5}{3\sqrt{2}}$; в) $\dfrac{12}{5\sqrt{3}}$; г) $\dfrac{10}{3\sqrt{5}}$; д) $\dfrac{14}{9\sqrt{2}}$; е) $\dfrac{3}{2\sqrt{17}}$; ж) $\dfrac{6}{\sqrt{21}}$; з) $\dfrac{2}{3\sqrt{14}}$.

16. Определите, при каких значениях x данное выражение имеет смысл:

а) $\sqrt{x}$; б) $\sqrt{-x}$; в) $\sqrt{\dfrac{1}{x}}$; г) $\sqrt{x^2}$; д) $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}}$; е) $\sqrt{-x^2}$; ж) $\sqrt{x-1}$; з) $\sqrt{x^2+4x+4}$.

17. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$; б) $\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2} + \sqrt{(\sqrt{5}+3)^2}$.

18. Вычислите:

а) $\sqrt{2} + \sqrt{50} - \sqrt{32}$; б) $3\sqrt{48} - 5\sqrt{3} - 2\sqrt{27}$;

в) $\sqrt{3}(\sqrt{27} + 4\sqrt{3})$; г) $\sqrt{2}\,(2\sqrt{2} + \sqrt{72})$;

д) $(\sqrt{3}+2)^2 - \sqrt{12}$; е) $3\sqrt{80} + (6-\sqrt{5})^2 - 40$;

ж) $(\sqrt{45} - \sqrt{5})^2 - 20$; з) $\dfrac{\sqrt{45}-\sqrt{75}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$.

19. Применив алгоритм извлечения квадратного корня, вычислите, с точностью до трех десятичных знаков:

а) $\sqrt{5{,}6644}$; б) $\sqrt{0{,}015129}$; в) $\sqrt{692{,}7424}$; г) $\sqrt{12{,}28}$.

20. Из заданной формулы, описывающей связь между положительными физическими величинами, найдите:

а) l, если $\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$; б) S, если $t=\sqrt{\frac{2S}{a}}$; в) F, если $V=k\cdot\frac{\sqrt{F}}{l}$; г) L, если $\omega=\sqrt{\frac{1}{LC}}$.

21. Вычислите наиболее рациональным способом:

а) $\sqrt{4{,}58^2-4{,}42^2}$; б) $\sqrt{12^2+16^2}$; в) $\sqrt{24^2+32^2}$; г) $\sqrt{42^2+56^2}$.

22. Вычислите:

а) $\sqrt{2\sqrt{3}+1}\cdot\sqrt{2\sqrt{3}-1}$; б) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{6}}$;

в) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3+\sqrt{6}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{6}}$; г) $\frac{1}{2\sqrt{5}-1}-\frac{1}{2\sqrt{5}+1}$.

23. Сократите отношение:

а) $\frac{15}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}$; б) $\frac{5-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$; в) $\frac{3-\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}$; г) $\frac{3\sqrt{8}+2\sqrt{12}+\sqrt{20}}{3\sqrt{18}+2\sqrt{27}+\sqrt{45}}$.

24. Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{32a^3b^{10}}$, при $a>0,\ b\le 0$; б) $\sqrt{27(a-b)^5}$, при $a>b$;

в) $\sqrt{-8(a-3)^3}$, при $a<3$; г) $\sqrt{(x-2)^3(5-x)^5}$, при $2<x<5$.

25. Внесите множитель под знак корня:

а) $a\sqrt{3}$, при $a<0$; б) $x\sqrt{x}$; в) $y\sqrt{-y}$;

г) $(a-b)\sqrt{a-b}$; д) $(x-y)\sqrt{y-x}$; е) $(1-a)\sqrt{\frac{2}{a-1}}$.

26. Упростите выражение:

а) $\sqrt{\frac{a^8b^{12}}{c^2}}$, если $c<0$; б) $-x\sqrt{x^2y^{16}}$, если $x<0$;

в) $m^2\sqrt{m^4n^{14}}$, если $n>0$; г) $\sqrt{x^2-6x+9}$, если $x\ge 3$;

д) $(a-5)\sqrt{\frac{3}{a^2-10a+25}}$, если $a>5$; е) $(a-b)\sqrt{\frac{1}{a^2-2ab+b^2}}$, если $a<b$.

27. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе отношения:

а) $\frac{10}{\sqrt{6}+1}$; б) $\frac{-3}{1-\sqrt{7}}$; в) $\frac{19}{2\sqrt{5}-1}$; г) $\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$; д) $\frac{7-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$; е) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

☐ ☐ **3**

28. Не используя калькулятор, сравните числа $\sqrt{2012}+\sqrt{2014}$ и $2\sqrt{2013}$.

29. Вычислите, применив формулы $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ и $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$:

а) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}+\sqrt{9+4\sqrt{5}}$.

30. Применив формулы „сложных“ радикалов $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$, где $a, b\in\mathbb{R}_+$, $a\ge\sqrt{b}$, упростите выражение:

а) $\sqrt{7-\sqrt{24}}$; б) $\sqrt{7+\sqrt{48}}$.

31*. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе отношения:

а) $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$; б) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{7-\sqrt{2}}}$; в) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$.

32. Упростите выражение:

а) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}$; б) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$.

Упражнения и задачи на повторение

1

1. Вычислите:

а) 7^{-2}; б) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-4}$; в) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3}$; г) $\left(1\dfrac{1}{5}\right)^{-2}$.

2. Упростите выражение:

а) $\dfrac{a^{-12}\cdot a^{6}}{a^{8}}$; б) $\dfrac{(2x^{-3})^{-2}}{2^{-2}(x^{-2})^{-1}}$.

3. *Истинно* или *Ложно*?

а) $16<\sqrt{17}<18$; б) $3<\sqrt{11}<4$;

в) $2\sqrt{3}=3\sqrt{2}$; г) $2\sqrt{18}=3\sqrt{8}$.

4. Вычислите:

а) $\sqrt{810\cdot 40}$; б) $\sqrt{90\cdot 6{,}4}$; в) $\sqrt{16{,}9\cdot 0{,}4}$;

г) $\sqrt{63}\cdot\sqrt{7}$; д) $\sqrt{1{,}2}\cdot\sqrt{3\dfrac{1}{3}}$; е) $\sqrt{1\dfrac{11}{25}}+\sqrt{3\dfrac{6}{25}}$.

5. Упростите выражение:

а) $3\sqrt{20}-3\sqrt{45}+4\sqrt{5}$; б) $(2-\sqrt{3})^2$;

в) $(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)$; г) $(6-\sqrt{2})^2-(5+\sqrt{2})^2$.

6. Упростите выражение:

а) $\sqrt{36x^2y^3}$, если $x<0,\ y>0$; б) $\sqrt{\dfrac{a^6}{25b^2}}$, если $a\ge 0,\ b>0$;

в) $5xy\cdot\sqrt{\dfrac{1}{100xy^2}}$, если $x>0,\ y<0$.

2

7. Площадь круга можно вычислить по формуле $\mathscr{A}=\pi R^2$. Найдите R, если $\mathscr{A}=1\,256$ м^2, и $\pi\approx 3{,}14$.

8. Проверьте, является ли $3+\sqrt{2}$ решением уравнения:

а) $2x-\sqrt{8}=6$; б) $x(3-\sqrt{2})=5$.

9. При каких действительных значениях переменных x и y имеет место равенство:

$$\sqrt{xy}=\sqrt{-x}\cdot\sqrt{-y}\,?$$

10. При каких действительных значениях переменных a и b имеет место равенство:

$$\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}\ ?$$

11. Упростите выражение, при $a,\ b\in\mathbb{R}_+^*$:

а) $\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}-\dfrac{\sqrt{ab}}{a}$; б) $\sqrt{\dfrac{1}{a}}+\sqrt{\dfrac{1}{b}}-\dfrac{\sqrt{a}}{a}+\dfrac{\sqrt{b}}{b}$.

12. Выполните действия: а) $(4a^{-2}-b^{-4})(2b^2-a)^{-1}$; б) $(a^{-2}+1)^{-2}$.

3

13. Вычислите $(a+1)^{-1}+(b+1)^{-1}$, для $a=(2+\sqrt{3})^{-1}$ и $b=(2-\sqrt{3})^{-1}$.

14. Упростите выражение:

а) $(2-\sqrt{5})\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{7-3\sqrt{5}}$; б) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{2}+1$.

15. Упростите выражение $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$, если $1\le x\le 2$.

16. Докажите, что если $a>b$ и $a^2+b^2=4ab$, то $\dfrac{4ab}{a^2-b^2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Проверочная работа

Время выполнения работы: 45 минут

Вариант 1		Вариант 2
1. Запишите число 81 в виде степени с основанием: 3, $\frac{1}{3}$, 9, $\frac{1}{9}$.	1	**1.** Запишите число 16 в виде степени с основанием: 2, $\frac{1}{2}$, 4, $\frac{1}{4}$.
2. *Истинно* или *Ложно*? $\left(\dfrac{2^3a^{-2}b^{-1}}{24ab^{-2}}\right)^{-1}=\dfrac{a^3}{3b}$.	2	**2.** *Истинно* или *Ложно*? $\left(\dfrac{3^3x^{-1}y^{-2}}{54x^{-2}y}\right)^{-1}=\dfrac{2x}{y}$.
3. При каких действительных значениях переменной x имеет смысл выражение $\sqrt{-2x+3}$?	1	**3.** При каких действительных значениях переменной y имеет смысл выражение $\sqrt{5-3y}$?
4. Вычислите наиболее рациональным способом: $\sqrt{52^2-48^2}$.	2	**4.** Вычислите наиболее рациональным способом: $\sqrt{68^2-32^2}$.
5. Упростите выражение: а) $\sqrt{48}-13\sqrt{\dfrac{12}{25}}+\sqrt{4\dfrac{8}{25}}$; б) $(\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{11-6\sqrt{2}})^2$.	4	**5.** Упростите выражение: а) $\sqrt{45}+\sqrt{61\dfrac{1}{4}}-11\sqrt{1\dfrac{1}{4}}$; б) $(\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}})^2$.

3 глава Алгебраические выражения

§1. Действия над действительными числами, представленными буквенными выражениями

1.1. Сложение и вычитание действительных чисел, представленных буквенными выражениями

1 Исследуйте и заполните пропуски:

$-3ab^2+5bc-1{,}5ab^2+\sqrt{10}bc-a=$

$=(-3+(-1{,}5))ab^2+(\square+\square)bc-a = \square\, ab^2+\square\, bc-\square$.

Подобные слагаемые: $-3ab^2$ и $\square$, $\sqrt{10}bc$ и $\square$.

Каждое из алгебраических выражений $-3ab^2$, $5bc$, $-1{,}5ab^2$, $\sqrt{10}bc$, a состоит из **коэффициента** и **буквенной части**. Коэффициент – это действительное число.

$-3ab^2$; $5bc$; $-1{,}5ab^2$; $\sqrt{10}\,bc$; $1a$

■ – коэффициент

■ – буквенная часть

Определение. Слагаемые некоторого алгебраического выражения, имеющие одинаковую буквенную часть, называются **подобными слагаемыми**.

• Перечертите и заполните таблицу:

Выражение	$-\sqrt{5}xy$	ab	$2{,}5x^3y$	$7a^2b$	$\frac{3}{5}t$	$-x^2y$
Коэффициент				7		
Буквенная часть		ab				

Привести подобные слагаемые означает заменить сумму данных слагаемых одним подобным слагаемым, коэффициент которого равен сумме коэффициентов данных слагаемых.

2 Исследуйте и закончите приведение подобных слагаемых:

$2{,}5a^2-\sqrt{7}+\sqrt{5}ab^3+\frac{2}{5}a^2-\frac{1}{2}ab^3+3\sqrt{7}-25=$

$=(2{,}5+\square)a^2+(\square-0{,}5)ab^3+\square\sqrt{7}-25=\square\, a^2+\square\, ab^3+\square\sqrt{7}-25.$

1.2. Умножение, деление и возведение в степень действительных чисел, представленных буквенными выражениями

1 Исследуйте и заполните пропуски:

а) $8a^2b\cdot(-1{,}5ab^3)=8\cdot(-1{,}5)\cdot\square^2\cdot a\cdot\square\cdot b^3=-\square\cdot a^3\cdot\square^4;$

б) $16x^3y^5:4x^5y^2=(16:4)\cdot(x^3:x^5)\cdot(y^5:y^2)=$

$$=\square\cdot x^{\square-\square}\cdot y^{\square-\square}=\square\cdot x^{\square}\cdot y^{\square}=\frac{\square\cdot y^{\square}}{x^{\square}}.$$

Чтобы умножить (разделить) действительные числа, представленные буквенными выражениями, надо:
- умножить (разделить) их коэффициенты;
- умножить (разделить) буквенные части, используя свойства степени.

2 Исследуйте и заполните пропуски:

$$\left(-\frac{2}{5}a^2bc^4\right)^3=\left(-\frac{2}{5}\right)^3\cdot a^{2\cdot\square}b^{\square}c^{4\cdot\square}=\square\cdot a^{\square}\cdot b^{\square}\cdot c^{\square}.$$

Чтобы возвести в степень действительное число, представленное буквенным выражением, надо:
- возвести в эту степень его коэффициент;
- возвести в эту степень каждый множитель буквенной части.

1.3. Раскрытие скобок. Разложение на множители

1 Раскройте скобки и заполните пропуски:

а) $3xy^2\cdot(\sqrt{2}x^2+x^2y)=3xy^2\cdot\square+3xy^2\cdot\square=$

$=(3\cdot\square)\cdot x^{\square+\square}y^{\square}+3\cdot\square^{\square+\square}\cdot\square^{\square+\square}=$

$=\square+\square;$

б) $-1{,}5a^3b^2\cdot(4a^2b-0{,}2ab)=$

$=\square\cdot4a^2b-\square\cdot0{,}2ab=$

$=\square\cdot4\cdot a^{\square+\square}b^{\square+\square}+\square\cdot0{,}2\cdot a^{\square+\square}b^{\square+\square}=$

$=\square a^{\square}b^{\square}+\square a^{\square}b^{\square}.$

Раскрытие скобок

$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c,$

$a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c.$

Вынесение общего множителя a

Умножение действительных чисел, представленных буквенными выражениями, дистрибутивно относительно сложения и вычитания.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c,\quad a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c.$$

• Рассмотрите и дополните:

$(-2x+\sqrt{3}x^2y^2)\cdot(x^2+xy)=$

$=(-2x)\cdot\square+(-2x)\cdot xy+$

$+\square\cdot x^2+\sqrt{3}x^2y^2\cdot\square=$

$=\square+\square+\square+\square.$

Раскрытие скобок

$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

Группирование и вынесение общего множителя за скобки

Для любых действительных чисел a, b, c, d, верно соотношение:

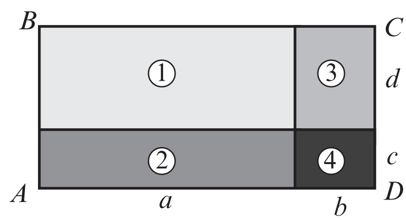
$$(a+b)\cdot(c+d)=ac+ad+bc+bd.$$

Работа в парах

• Обоснуйте формулу

$$(a+b)\cdot(c+d)=ac+ad+bc+bd,$$

вычислив площадь изображенного прямоугольника двумя способами.



2 Запишите в виде произведения выражение $6\sqrt{30}x^2y^3+3\sqrt{6}xy^5$.

Исследуйте и заполните пропуски:

$6\sqrt{30}x^2y^3+3\sqrt{6}xy^5=2\cdot3\cdot\sqrt{5\cdot6}\cdot xy^2\cdot\square+3\sqrt{6}\cdot xy^2\cdot\square=$

$=\square\cdot(2\sqrt{5}\,\square+\square).$

общий множитель

результат деления каждого слагаемого на общий множитель

Вынесение общего множителя:

$3\sqrt{5}+2\sqrt{15}=$

$=3\sqrt{5}+2\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}=$

$=\sqrt{5}(3+2\sqrt{3}).$

- **Разложить на множители** выражение означает представить это выражение в виде произведения.
- Разложить на множители выражение можно вынесением общего множителя за скобки:

$$ab+ac=a(b+c),\ \sqrt{15}-2\sqrt{3}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}-2\sqrt{3}=\sqrt{3}(\sqrt{5}-2).$$

• Заполните соответственно пропуски:

$$2{,}4a^5b^4-1{,}8a^2b=\square\cdot4\cdot a^5b^4-\square\cdot3\cdot a^2b=0{,}6\cdot\square^2\cdot\square(4a^{\square}b^{\square}-3).$$

Упражнения и задачи

1

1. Перечертите и заполните таблицу:

а)

Выражение	$2{,}3x$	$-x^2y$	$\sqrt{5}ab$	ax^3	$-\sqrt{3}by$	$-5{,}(2)x^2yz$	$\frac{1}{5}a^2b^3c$
Коэффициент							
Буквенная часть							

б)

Выражение	$-\sqrt{7}xy$	a^2b	$-x^3z$	$7{,}(8)ax$	$\frac{4}{7}a^2b^3$	$3{,}8tz$	$-2axby$
Коэффициент							
Буквенная часть							

2. Рассмотрите выражение и приведите подобные слагаемые:

а) $3{,}5ax-2ty+\sqrt{3}ax+y^3-\sqrt{7}ty-7{,}3y^3+\sqrt{7}$;

$\boxed{3{,}5ax;\ \dots}$ $\boxed{-2ty;\ \dots}$ $\boxed{y^3;\ \dots}$ $\boxed{\dots}$

б) $\frac{2}{7}ab+\sqrt{13}a^2b-0{,}5ab-ab^3-5a^2b+7{,}5ab^3-3\sqrt{15}$.

$\boxed{-0{,}5ab;\ \dots}$ $\boxed{-ab^3;\ \dots}$ $\boxed{-5a^2b;\ \dots}$ $\boxed{\dots}$

3. Приведите подобные слагаемые:

а) $7\sqrt{7}-3\sqrt{3}+2{,}5\sqrt{7}+15\sqrt{3}-7\sqrt{10}$; б) $5\sqrt{15}-2\sqrt{2}+\sqrt{60}+7\sqrt{8}-6\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}+\sqrt{32}$.

4. Приведите подобные слагаемые:

а) $3x-6y+2{,}7x+35y-2$; б) $-2{,}7a+3b-1\frac{3}{4}a-\frac{2}{5}b+\sqrt{7}$;

в) $\sqrt{3}t-2z+3\sqrt{3}t-5{,}(2)z-\sqrt{7}tz$; г) $-2008+\frac{2}{3}ab^2-78ab+5\frac{1}{3}ab^2+2007-22ab$.

5. Запишите в виде суммы выражение:

а) $4{,}12x^2y$; б) $-3\sqrt{2}tz$; в) $6{,}(15)ab$; г) $-\frac{2}{7}xy^2$.

6. Выполните умножение:

а) $7x^2y^3z\cdot(-3xyz^3)$; б) $(-2{,}8ab)\cdot(-5a^3b)$;

в) $\frac{12}{17}ax\cdot(-1\frac{5}{12}a^3xy)$; г) $\sqrt{5t^2}\cdot(-6\sqrt{5tz^4})$.

7. Выполните деление:

а) $5{,}2x^3y:0{,}4xy^2$; б) $-\frac{3}{17}ab^5:\frac{9}{17}a^2b^3$;

в) $\sqrt{15t^2z^2}:(-\sqrt{5tz})$; г) $2{,}(5)a^3b^2:0{,}(5)a^4b$.

8. Возведите в степень:

а) $(-3xy^2)^2$; б) $(\sqrt{5a^2b})^4$; в) $(-2\frac{1}{5}tz)^{-3}$; г) $(\sqrt{2a^3b^{-2}})^{-2}$.

9. ***Работа в парах***

Истинно или *Ложно*?

а) $-(1-4x)=4x+1$; б) $5t+1=6t$;
в) $x+x+x=x^3$; г) $-3x-7x=-10x$;
д) $|-x|+|x|=0$; е) $\sqrt{3}x-x=\sqrt{3}$;
ж) $\sqrt{9}a+\sqrt{16}a=7a$; з) $\sqrt{5}y+\sqrt{5}y=\sqrt{5}y^2$.

10. Раскройте скобки:

а) $m(m+n)$; б) $z(z-y)$; в) $3a(b-2c)$;
г) $-\sqrt{2}(2x-\sqrt{2}y)$; д) $1{,}7x(x+3y)$; е) $\sqrt{7}(\sqrt{2}a+\sqrt{7})$.

11. Раскройте скобки:

а) $4x^2y(-3xy^5+8yz)$; б) $-7{,}(2)ab(9a^2b^3-18abc)$;
в) $-\sqrt{7}t(\sqrt{14}tz-\sqrt{21}t^2z^3)$; г) $\frac{2}{3}ab(18a^2b^2-15a)$.

12. Вычислите площадь прямоугольника, стороны которого равны:

а) $(\sqrt{7}+4)$ см и $(4-\sqrt{7})$ см; б) $(8-3\sqrt{5})$ см и $(3\sqrt{5}+8)$ см.

13. Раскройте скобки:

а) $(2x-3y)(5x+7y-1)$; б) $(a-b)(a^2+ab+b^2)$; в) $(a+b)(a^2-ab+b^2)$;
г) $(x^2-y^2)(x+y)$; д) $(a+2)(a^2-2a+4)$; е) $(x+1)(x^2-x+1)$.

14. Разложите на множители:

а) $7ab^2+14a^2b$; б) $-3{,}6x^2y^3+0{,}8x^4y^5$; в) $2\sqrt{17}xy^4-\sqrt{17}x^2y$;
г) $-15tz^2-\sqrt{5}t^2z$; д) $x(3-y)+5(y-3)$; е) $2{,}5a(a-1)-(1-a)$.

2

15. Известно, что x и y – действительные числа. Запишите действительное число:

1) $5x+2y$; 2) $-3x+2$; 3) $-\sqrt{2}+2xy$:

а) в виде суммы трех действительных чисел, представленных буквенными выражениями;
б) в виде суммы пяти действительных чисел, представленных буквенными выражениями;
в) в виде разности трех действительных чисел, представленных буквенными выражениями;
г) в виде суммы восьми ненулевых действительных чисел, представленных буквенными выражениями.

16. Выполните действия:

а) $\sqrt{7}x(\sqrt{7}xy-x)-(x-y)(\sqrt{28}x+y)-(\sqrt{7}xy)^2$;

б) $\frac{5}{7}x^{-1}\cdot y^{-2}(xy-49x^{-3})+\frac{1}{7}(x+y^2)(x-y^2)$;

в) $(-3\sqrt{11}a+5\sqrt{7}b)(-3\sqrt{11}a-5\sqrt{7}b)$;

г) $(x^2-3x^{-1})(x^2+3x^{-1})(-x^2-3x^{-1})$.

17. Выполните действия:

а) $15a^3x^4y^5:(-35a^5x^2y^3)\cdot(\frac{1}{7}a^4xy)$; б) $\frac{28a^2x^4y^5}{16ax^2y^7}$; в) $\left(\frac{\sqrt{5a^3b^3c}}{\sqrt{30ab^4c^5}}\right)^{-1}$; г) $\left(\frac{-3\sqrt{7t^3z^2}}{5\sqrt{14tz^6}}\right)^{-2}$.

18. Докажите, что равенство $(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})=2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ верно для любых $a, b\in \mathbb{R}^*$.

19. Выполните действия:

а) $(a-2a)+(3a-4a)+(5a-6a)+(7a-8a)+(8a-9a)+(9a-10a)$;

б) $x-2x+3x-4x+\ldots+199x-200x$.

20. Что больше: площадь прямоугольника, со сторонами $(6-2\sqrt{7})$ см и $(6+2\sqrt{7})$ см, или площадь квадрата, сторона которого равна $(2+\sqrt{3})$ см?

21. У кого из двух шахматистов больше шансов одержать победу в турнире, если известно, что у первого шансы победить, равны $p_1=\frac{7}{13}$, а у второго – $p_2=\frac{4}{7}$?

22. Запишите в виде произведения трех множителей, отличных от 1, данное выражение:

а) $x^3(x-0{,}7)-x^2(x-0{,}7)$;

б) $(2x+y)^2(4x-3)-(2x+y)(4x-3)$;

в) $(x+1)^2(x-1)-(x+1)(x^2-1)$;

г) $x(-x+1)^3+x(x-1)^2-x(-x+1)$.

23. Вычислите a^2, зная что

$$a=\sqrt{\sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{2})-\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}+\sqrt{\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{2})+\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{2})}.$$

24. Найдите наименьшее значение выражения:

а) x^2+5; б) x^2-2; в) $(3x)^2+(4x)^2$; г) $7x^2+1$.

25. ***Работа в парах***

Истинно или *Ложно*?

а) $\sqrt{x}=-x$ для любого $x\in\mathbb{R}_-$;

б) $\sqrt{x}+\sqrt{2x}=0$ при $x=0$;

в) $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=0$ при $x=0$;

г) $\sqrt{x^2}=(\sqrt{x})^2$ для любого $x\in\mathbb{R}$.

В случае ложного высказывания, найдите правильный ответ.

26. Вычислите значение выражения $|1-5a|+3|\sqrt{3}-a|-2\sqrt{3}$, если:

а) $a=0$; б) $a=-1{,}4$; в) $a=-\sqrt{2}$; г) $a=2{,}1(5)$.

27. Найдите значение квадратного корня, не используя калькулятор и не применяя алгоритм извлечения квадратного корня:

а) $\sqrt{1\,587\,600}$; б) $\sqrt{28\,224}$; в) $\sqrt{2\,509\,056}$.

28. Из Кишинева в Джурджулешты отправились одновременно два автомобиля. Скорость первого 65 км/ч, а второго 72 км/ч. Запишите с помощью выражения, чему будет равно расстояние между автомобилями через t часов. Вычислите это расстояние, если:

а) $t = 0{,}5$; б) $t = 1$; в) $t = 1{,}5$; г) $t = 2$.

29. Докажите, что сумма любых трех последовательных чисел кратна 3.

3

30. Докажите, что уравнение $\sqrt{x} = -x - 1$ не имеет действительных решений.

31. Докажите, что выражение $\sqrt{x^2 - 6x + 10}$ имеет смысл для любого $x \in \mathbb{R}$.

32. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) = \sqrt{x}$; б) $\sqrt{x^2} - \sqrt{x} = 0$.

33. При каких натуральных значениях n значением отношения $\dfrac{n^3 + n - 2}{n + 1}$ будет целое число?

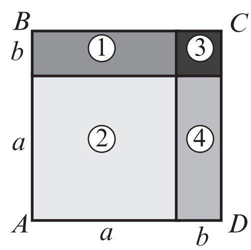
• Задачи для чемпионов

34. Упростите выражение $\sqrt{a - 2\sqrt{a+1} + 2}$.

35. Найдите четыре натуральных последовательных числа, произведение которых равно 570024.

§2. Формулы сокращенного умножения

2.1. Квадрат суммы и квадрат разности



1 Вычислите двумя способами площадь квадрата $ABCD$:

$\mathcal{A}_{ABCD} = (\bigcirc + \square)^2$;

$\mathcal{A}_{ABCD} = \bigcirc^2 + 2 \cdot \bigcirc \cdot \square + \square^2$.

Формула квадрата суммы двух выражений:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) =$
$= a^2 + ab + ba + b^2 =$
$= a^2 + 2ab + b^2$

• Продолжите предложение:
Квадрат суммы двух выражений равен...

2 Рассмотрите и заполните соответственно пропуски:

$(a-b)^2 = [a + (-b)]^2 = \bigcirc^2 + 2 \cdot \bigcirc \cdot \square + \square^2 =$
$= \bigcirc^2 - 2 \cdot \bigcirc \cdot \square + \square^2$.

Формула квадрата разности:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) =$
$= a^2 - ab - ba + b^2 =$
$= a^2 - 2ab + b^2$

• Продолжите предложение:
Квадрат разности двух выражений равен...

• Рассмотрите и заполните соответственно пропуски:

а) $(2x^3+y^2)=\bigcirc^2+2\cdot\bigcirc\cdot\square+\square^2=4x^6+4\cdot\square+\square^4;$

б) $(\underset{\substack{\uparrow\\ a}}{\sqrt{5}xy}-\underset{\substack{\uparrow\\ b}}{y^5})^2=\underset{\substack{\uparrow\\ a^2}}{\bigcirc^2}-2\cdot\underset{\substack{\uparrow\\ a}}{\bigcirc}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\ b}}{\square}+\underset{\substack{\uparrow\\ b^2}}{\square^2}=\square-2\square+\square.$

2.2. Произведение суммы двух выражений на их разность

1 Дедушка попросил Диму подсчитать в уме, сколько всего собрали айвы, если известно, что фрукты разместили в 101 ящике, причем в каждый ящик поместилось 99 штук.

Помогите Диме выполнить соответствующие вычисления!

Решение:

$101\cdot 99=(\square+\square)(\square-\square)=\square-\square=\square.$

Ответ: $\square$ штук айвы.

2 Исследуйте и заполните пропуски:

$(1{,}5t-\sqrt{2}z)(1{,}5t+\sqrt{2}z)=(1{,}5t)^2-\square^2=\square-\square.$

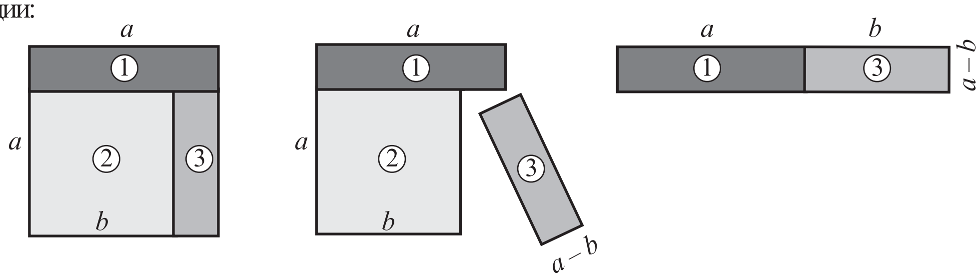
Формула произведения суммы на разность:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

$(a+b)(a-b)=$
$=a^2-ba+ba-b^2=$
$=a^2-b^2$

Работа в парах

• Объясните формулу $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ с помощью геометрической интерпретации:



• Продолжите предложение:

Произведение суммы двух выражений на их разность равно...

• Рассмотрите и дополните пропуски:

$$\Big(\underset{a}{\frac{3}{4}x^{-2}} + \underset{b}{\sqrt{3}y}\Big)\Big(\underset{a}{\frac{3}{4}x^{-2}} - \underset{b}{\sqrt{3}y}\Big) = \underset{a^2}{\bigcirc}^2 - \underset{b^2}{\square}^2 = \bigcirc - \square$$

2.3. Куб суммы и куб разности

1 Исследуйте и заполните пропуски:

а) $(a+b)^3 = (a+b)\cdot(a+b)^{\square} = (a+b)\cdot(\square^2 + 2\square\bigcirc + \bigcirc^2) =$

$= a^3 + 2\square^2\bigcirc + a\cdot\bigcirc^2 + b\cdot\square^2 + 2\square\bigcirc^2 + \bigcirc^3 =$

$= a^3 + 3\square^2\bigcirc + 3\square\bigcirc^2 + b^3;$

б) $(\underbrace{2x}_{a} + \underbrace{y^2}_{b})^3 = \underset{a^3}{\square^3} + 3\underset{a^2}{\square^2}\underset{b}{\bigcirc} + 3\underset{a}{\square}\underset{b^2}{\bigcirc^2} + \underset{b^3}{\bigcirc^3} = \square + \square + \square + \square.$

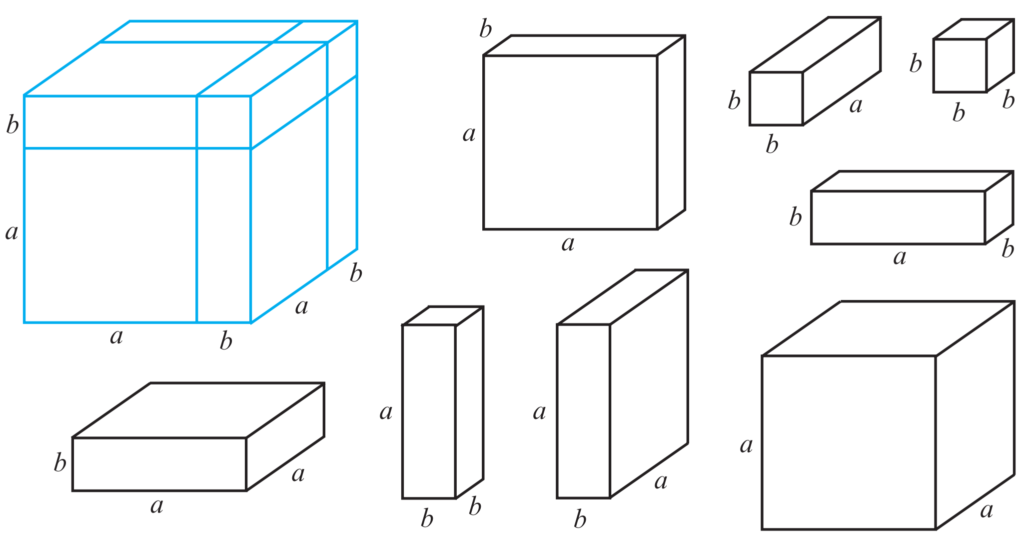
Формула куба суммы двух выражений:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(\square + \bigcirc)^3 = \square^3 + 3\square^2\bigcirc + 3\square\bigcirc^2 + \bigcirc^3.$$

Работа в парах

• Объясните формулу $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ с помощью фигур:



• Продолжите предложение:
Куб суммы двух выражений равен...

• Рассмотрите и заполните соответственно пропуски:

$$(a^3+2ab)^3=(a^3)^{\square}+3(a^3)^{\square}\cdot 2ab+3\cdot a^3\cdot(2ab)^{\square}+(2ab)^{\square}=$$

$$=a^{\square}+6a^{\square}\cdot b^{\square}+12a^{\square}\cdot b^{\square}+8a^{\square}b^{\square}.$$

2 Исследуйте и сделайте вывод:

$$(a-b)^3=[a+(-b)]^3=a^3+3a^2\cdot(-b)+3a(-b)^2+(-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$

Формула куба разности:

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

$$(\square-\bigcirc)^3=\square^3-3\square^2\bigcirc+3\square\bigcirc^2-\bigcirc^3.$$

• Рассмотрите и заполните соответственно пропуски:

$$(a-b)^3=(a-b)(a-b)^2=(a-b)(a^2-2ab+b^2)=a^{\square}-3a^{\square}b+3ab^{\square}-b^{\square}.$$

• Продолжите предложение:
Куб разности двух выражений равен...

3 Исследуйте и заполните пропуски:

$$(\underset{a}{\underbrace{x^2}}-\underset{b}{\underbrace{0{,}5xy}})^3=\underset{a^3}{\square^3}-3\underset{a^2}{\square^2}\underset{b}{\bigcirc}+3\underset{a}{\square}\underset{b^2}{\bigcirc^2}-\underset{b^3}{\bigcirc^3}=\square-\square+\square-\square.$$

Работа в парах

4 Объем куба равен a^3.
а) Длину ребра куба увеличили на b. Чему равен объем нового куба?
б) Если длину ребра куба уменьшить на b, то чему будет равен объем нового куба?

2.4. Сумма кубов. Разность кубов

1 Исследуйте и сделайте вывод:

$$a^3+b^3=(a+b)(\square^2-\square\bigcirc+\bigcirc^2),\text{ так как }(a+b)(a^2-ab+b^2)=$$

$$=\square^3-\square^2\bigcirc+\square\bigcirc^2+\bigcirc\square^2-\square\bigcirc^2+\bigcirc^3=\square^3+\bigcirc^3.$$

• Заполните соответственно пропуски:

$$x^3+27=\underset{\overset{\uparrow}{a^3}}{x^3}+\underset{\overset{\uparrow}{b^3}}{\bigcirc^3}=(\underset{\overset{\uparrow}{a}}{x}+\underset{\overset{\uparrow}{b}}{\bigcirc})(\underset{\overset{\uparrow}{a^2}}{x^{\square}}-\underset{\overset{\uparrow}{a}}{x}\underset{\overset{\uparrow}{b}}{\bigcirc}+\underset{\overset{\uparrow}{b^2}}{\bigcirc^{\square}}).$$

Формула суммы кубов:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$\square^3+\bigcirc^3=(\square+\bigcirc)(\square^2-\square\bigcirc+\bigcirc^2).$$

• Исследуйте и заполните пропуски:

$$8t^3+125z^6=(2t)^3+(5z^2)^3=(\square+\bigcirc)(\square^2-\square\bigcirc+\bigcirc^2)=$$

$$=(\square+\bigcirc)(\square-\square+\square).$$

2 Исследуйте и сделайте вывод:

$a^3-b^3=(a-b)(\square^2+\square\bigcirc+\bigcirc^2)$, так как $(a-b)(a^2+ab+b^2)=$

$$=\square^3-\square^2\bigcirc+\square\bigcirc^2-\bigcirc\square^2-\square\bigcirc^2-\bigcirc^3.$$

• Заполните соответственно пропуски:

$$x^3-27=\underset{\overset{\uparrow}{a^3}}{x^3}-\underset{\overset{\uparrow}{b^3}}{\bigcirc^3}=(\underset{\overset{\uparrow}{a}}{x}-\underset{\overset{\uparrow}{b}}{\bigcirc})(\underset{\overset{\uparrow}{a^2}}{x^{\square}}+\underset{\overset{\uparrow}{a}}{x}\underset{\overset{\uparrow}{b}}{\bigcirc}+\underset{\overset{\uparrow}{b^2}}{\bigcirc^{\square}}).$$

Формула разности кубов:

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$\square^3-\bigcirc^3=(\square-\bigcirc)(\square^2+\square\bigcirc+\bigcirc^2).$$

• Продолжите предложение:

Разность кубов двух выражений равна произведению разности этих выражений на...

• Разложите на множители разность кубов:

$$64t^6-8z^3=(4t^2)^3-(2z)^3=(\square-\bigcirc)(\square^2+\square\bigcirc+\bigcirc^2)=$$

$$=(\square-\square)(\square+\square+\square).$$

Замечание. Формулы сокращенного умножения являются тождествами.

Упражнения и задачи

1

1. Выполните действия:

а) $(x+1)^2$; б) $(1+x)^2$; в) $(2a+3)^2$;
г) $(\sqrt{5}+t)^2$; д) $(0{,}5x^2y+y^4)^2$; е) $(\sqrt{2}+3\sqrt{3}z)^2$.

$$(a+b)^2=(b+a)^2$$
$$(a-b)^2=(b-a)^2$$

2. Выполните действия:

а) $(x-1)^2$; б) $(1-x)^2$; в) $(7a-1{,}1b^2)^2$;
г) $(\sqrt{11}-t^3)^2$; д) $(a^2b-ab)^2$; е) $(\sqrt{5}-2\sqrt{2}t)^2$.

3. Выполните действия:

а) $(-y+5)^2$; б) $(-b^3+5)^2$; в) $(t^2-z^2)^2$; г) $(-\sqrt{3}-2x)^2$;
д) $(-xy-y^3)^2$; е) $(ab-\sqrt{7}b^4)^2$; ж) $(-x^2+y^3)^2$; з) $(-tz+t^5)^2$.

4. *Истинно* или *Ложно*?
Для любых действительных чисел a, b, x, y:

И/Л

а) $(a+b)^2=a^2+b^2$; б) $(x+3)^2=x^2-6x+9$;
в) $(5-x)=x^2-10x+25$; г) $(x-y)^2=(y+x)^2$;
д) $(-a-b)^2=(a+b)^2$; е) $(\sqrt{6}-x^2)=x^2-2\sqrt{6}x+6$;
ж) $(x+2)^2=x^2+4$; з) $(2x-y)^2=4x^2-y^2$;
и) $(-3x+5)=25-30x+9x^2$.

5. Заполните пропуски так, чтобы получить истинное высказывание:

а) $(\sqrt{3}+2x)^2=\square+4\sqrt{3}x+\bigcirc$; б) $(2{,}5x+\sqrt{2}y)^2=\square+2\cdot\square\cdot\bigcirc+2y^2$;
в) $(a^2-2b^3)^2=\square-4\cdot\square\cdot\bigcirc+4b^6$; г) $(t^2-\sqrt{3}z^4)^2=\square-2\cdot\square\cdot\bigcirc+3z^8$.

6. Выполните действия: а) $(x-\sqrt{11})^2$; б) $(-x-\sqrt{11})^2$; в) $(-x+\sqrt{11})^2$;
г) $(x+\sqrt{11})^2$; д) $(\sqrt{11}-x)^2$; е) $(\sqrt{11}+x)^2$.

Сформулируйте вывод.

7. Выполните действия:

а) $(x+5)(x-5)$; б) $(a+\sqrt{7})(a-\sqrt{7})$;
в) $(25-b)(25+b)$; г) $(\sqrt{30}-t)(\sqrt{30}+t)$;
д) $(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})$; е) $\left(\sqrt{5}+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\sqrt{5}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$;
ж) $(-\sqrt{11}+t)(\sqrt{11}+t)$; з) $(t+z^2)(-z^2+t)$.

$$(-x+y)(x+y)=$$
$$=y^2-x^2$$

8. *Истинно* или *Ложно*?

И/Л

а) $(x+4)(x-4)=x^2-16$; б) $(a-5)(a+5)=(a-5)^2$;
в) $(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})=x^2-49$; г) $(t-2)^2(t+2)^2=(t^2-4)^2$;
д) $(z+\sqrt{11})^2(z-\sqrt{11})^2=(z^2+11)^2$; е) $(-a-b)(a-b)=b^2-a^2$.

9. Заполните пропуски так, чтобы получить истинное высказывание:

а) $(\square - t^2)(\square + t^2) = 64z^2 - t^4$; б) $(\sqrt{3}a - b)(\square + b) = 3a^2 - b^2$;

в) $\left(\frac{1}{2}a - \square\right)\left(\frac{1}{2}a + \square\right) = \bigcirc - 25b^4$; г) $(0{,}3y + 2x)(\square - \bigcirc) = 0{,}09y^2 - 4x^2$.

10. Выполните действия:

а) $(3x+1)^3$; б) $(2t+z^2)^3$; в) $(1+3x)^3$;

г) $(z^2+2t)^3$; д) $(2a+\sqrt{2}b)^3$; е) $(0{,}3a^3+5b^2)^3$.

$(a+b)^3 = (b+a)^3$

11. Найдите объем куба, ребро которого равно:

а) $(2+3\sqrt{5})$ см; б) $(1+\sqrt{11})$ см; в) $(10-2\sqrt{2})$ см; г) $(5\sqrt{6}-10)$ см.

12. Выполните действия:

а) $(3t-2z)^3$; б) $(a^2-b^2)^3$; в) $(2z-3t)^3$;

г) $(b^2-a^2)^3$; д) $(0{,}1x^3-\sqrt{2}y)^3$; е) $(\sqrt{5}a-\sqrt{7}b)^3$.

13. Заполните соответственно пропуски:

а) $1000x^3 + y^3 = (10x+y)(\square^2 - \square\bigcirc + \bigcirc^2) =$

$= (\square + \square)(\square + \square + \square)$;

б) $t^{12} + z^9 = (t^{\square})^3 + (z^{\square})^3 = (\square + \bigcirc)(\square^2 - \square\bigcirc + \bigcirc^2) =$

$= (\square + \square)(\square + \square + \square)$;

в) $x^6 + 125y^3 = (x^{\square})^3 + \bigcirc^3) = (\square + \bigcirc)(\square^2 - \square\bigcirc + \bigcirc^2) =$

$= (\square + \square)(\square + \square + \square)$.

14. Заполните соответственно пропуски:

а) $729a^3 - 27b^3 = \square^3 - \bigcirc^3 = (\square - \bigcirc)(\square^2 + \square\bigcirc + \bigcirc^2) =$

$= (\square - \square)(\square + \square + \square)$;

б) $1 - 64t^{15} = \square^3 - \bigcirc^3 = (\square - \bigcirc)(\square^2 + \square\bigcirc + \bigcirc^2) =$

$= (\square - \square)(\square + \square + \square)$;

в) $343x^3 - y^{21} = \square^3 - \bigcirc^3 = (\square - \bigcirc)(\square^2 + \square\bigcirc + \bigcirc^2) =$

$= (\square - \square)(\square + \square + \square)$.

2

15. Вычислите:

а) $(1-\sqrt{3})^2 + (1+\sqrt{3})^2 - (1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})$;

б) $(2\sqrt{5}+\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{5}-\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{5}+\sqrt{2})(2\sqrt{5}-\sqrt{2})$;

в) $\left(\frac{2}{5} - 2\sqrt{3}\right)\left(\frac{2}{5} + 2\sqrt{3}\right) + \left(-\frac{2}{5} - 2\sqrt{3}\right)\left(\frac{2}{5} + 2\sqrt{3}\right)$;

г) $(0{,}7+\sqrt{11})^2 - (0{,}7-\sqrt{11})(-0{,}7-\sqrt{11}) + (\sqrt{11}-0{,}7)(0{,}7+\sqrt{11})$.

16. Вычислите устно:

а) 31^2; б) 51^2; в) 49^2; г) 99^2; д) 26^2; е) 101^2.

17. Вычислите устно:

а) $19 \cdot 21$; б) $98 \cdot 102$; в) $1004 \cdot 96$; г) $45 \cdot 55$.

18. Найдите площадь квадрата, сторона которого равна:

а) $(10+2\sqrt{5})$ см; б) $(3+\sqrt{15})$ см; в) $(25-2\sqrt{5})$ см; г) $(100-5\sqrt{8})$ см.

19. Найдите площадь прямоугольника со сторонами, равными:

а) $(8-2\sqrt{5})$ см и $(8+2\sqrt{5})$ см; б) $(10+\sqrt{10})$ см и $(10-\sqrt{10})$ см.

20. Пусть $x=\sqrt{3}+\sqrt{5}$ и $y=\sqrt{15}-1$. Найдите значение выражения $(x^2+y^2-10)^{2008}$.

21. Пусть $x=\sqrt{6}+1$ и $y=\sqrt{2}+\sqrt{3}$. Найдите значение выражения $(x^2-y^2-2)^{2007}$.

22. Найдите среднее арифметическое и среднее геометрическое чисел:

а) $(\sqrt{2999}-1)^2$ и $(\sqrt{2999}+1)^2$;

б) $(\sqrt{109}+1)^2$ и $(\sqrt{109}-1)^2$.

Образец:
Среднее геометрическое двух чисел $a \geq 0$ и $b \geq 0$ равно $\sqrt{ab}$.
Пусть $a=2{,}5$ и $b=10$.
Тогда $\sqrt{ab}=\sqrt{2{,}5\cdot 10}=\sqrt{25}=5$.

23. Заполните соответственно пропуски:

а) $(\square+x^2)^3=8y^6+3\square^2\bigcirc+3\square\bigcirc^2+\bigcirc^3=\square+\square+\square+\square$;

б) $(ab+\bigcirc)^3=a^3b^3+6\square^2 d+12\square d^2+\bigcirc^3=\square+\square+\square+\square$.

24. Выполните действия:

а) $(x+2y^{-2})^3$; б) $(a^{-3}+ab^2)^3$; в) $\left(a^2+\frac{3}{4}b\right)^3$;

г) $(\sqrt{3}x^3+y^2)^3$; д) $(a^3b+0{,}1b)^3$; е) $(2{,}5z+3t^2)^3$.

25. Заполните соответственно пропуски:

а) $(\square-b^3)^3=64a^{12}-3\square^2\bigcirc+3\square\bigcirc^2-\bigcirc^3=\square-\square+\square-\square$;

б) $(t^{-3}-\bigcirc)^3=\square^3-3\square^2\cdot z^3+3\square\bigcirc^2-\bigcirc^3=\square-\square+\square-\square$.

26. Выполните действия:

а) $(a^2b^2-a^5)^3$; б) $(0{,}2t^2-z^4)^3$; в) $(x^{-3}-3y^2)^3$;

г) $(\sqrt{5}t^2-zt)^3$; д) $\left(\frac{2}{5}a^{-2}-a^2\right)^3$; е) $(z^6-10tz)^3$.

27. Разложите на множители:

а) $1000t^6z^6+t^{12}$; б) $a^9b^9+1728a^{15}$; в) $x^{-3}y^3+64x^{21}$.

28. Разложите на множители:

а) $t^9-27t^{12}z^{-12}$; б) $1331a^6-64b^3$; в) $0{,}027-(xy)^6$.

29. Выполните действия:

а) $(x+y+3)^2$;　б) $(5-\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$;
в) $(2x^2-x+1)^2$;　г) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})^2$;
д) $(a+b)^4$;　е) $(a-b)^4$.

$(a+b+c)^2 =$
$= a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

30. а) Вычислите: $(4m)^2$; $(4m+1)^2$; $(4m+2)^2$; $(4m+3)^2$.
б) Докажите, что остаток от деления на 4 натурального числа, являющегося точным квадратом, равен 0 или 1.

31. а) Вычислите: $(5k)^2$; $(5k+1)^2$; $(5k+2)^2$; $(5k+3)^2$.
б) Каким может быть остаток от деления натурального числа на 5, являющегося точным квадратом?

32. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:
а) $(x+2)^2-x^2=6$;　б) $(2t-1)^2-4y^2=10$;　в) $9x^2-5-(3x+2)^2=0$.

3

33. Докажите, что для любых $a, b \in \mathbb{R}^*$ значение выражения $3a^2-4ab+3b^2$ положительно.

34. Запишите выражение $2t^2+2z^2$ в виде суммы двух квадратов.

35*. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе:
а) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$;　б) $\dfrac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$;　в) $\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}}}$.

36. *Задача Бхаскары II* (1114–1185) – *индийского математика и астронома.*
Докажите, что $\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

37. Вычислите: $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{999}+\sqrt{1000}}$.

38. Число $\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}$ – рационально или иррационально?

39. Пусть a, $a \neq 0$, – целое число. Запишите в виде алгебраической суммы:
а) квадрат числа, предшествующего числу a;
б) квадрат числа, следующего за числом $2a$;
в) квадрат числа, предшествующего числу $2a-1$;
г) квадрат суммы числа a и числа, обратного этому числу.

40. Докажите, что:
а) сумма 11^3+19^3 кратна 30;
б) сумма 19^3+13^3 не является простым числом;
в) разность 83^3-13^3 делится и на 10, и на 7;
г) разность 87^3-36^3 кратна 17.

41. Известно, что $A+\dfrac{1}{A}=2$. Вычислите:　а) $A^2+\dfrac{1}{A^2}$;　б) $A^3+\dfrac{1}{A^3}$.

• *Задача для чемпионов*

42. Докажите, что разность n^5-n^3, $n \in \mathbb{N}$, кратна 6.

§ 3. Способы разложения на множители

3.1. Разложение на множители способом вынесения общего множителя за скобки

• Запишите в виде произведения выражение $8x^2y^3 - 12xy^5$, выявив общий множитель.

Решение:

$$8x^2y^3 - 12xy^5 =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 8x^2y^3 : 4xy^3 = \square\, x^{\square} \\ 12y^5 : 4xy^3 = \square\, y^{\square} \end{array} \right\} =$$

$$= 4xy^3(2x^{\square} - 3y^{\square}).$$

Общий множитель

① Находим НОД коэффициентов 8 и 12:
$(8,12) = 4.$

② Находим наименьший показатель степени каждого общего множителя буквенных частей:
$x \longrightarrow \min(2, 1) = 1.$
$y \longrightarrow \min(3, 5) = 3.$

③ Выносим за скобки общий множитель $4xy^3$. В скобках остается результат, полученный от деления каждого слагаемого на $4xy^3$.

3.2. Разложение на множители при помощи формул сокращенного умножения

1 Рассмотрите и заполните соответственно пропуски:

а) $a^2 + 6ab + \bigcirc^2 = (a + \bigcirc)^2$;

б) $\square^2 + 2\sqrt{2}xy + y^2 = (\square + y)^2$.

Сворачиваем квадрат суммы двух выражений

$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

Раскрываем скобки

2 Исследуйте и сформулируйте вывод:

а) $x^2 - 8xy + 16y^2 = (x - 4y)^2$;

б) $3a^2 - 4\sqrt{3}ab + 4b^2 =$

$= (\sqrt{3}a)^2 - 2(\sqrt{3}a)(2b) + (2b)^2 =$

$= (\square - \bigcirc)^2$.

Сворачиваем квадрат разности двух выражений

$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

Раскрываем скобки

3 Рассмотрите и дополните:

а) $9a^2 - 25b^2 = (3a)^2 - (5b)^2 = (\square - \bigcirc)(\square + \bigcirc)$;

б) $3x^2 - \dfrac{y^4}{4} = (\sqrt{3}x)^2 - \left(\dfrac{y^2}{2}\right)^2 = (\square - \bigcirc)(\square + \bigcirc)$.

• Продолжите предложение:

Разность квадратов двух выражений равна…

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

• Вычислите устно: $\dfrac{2{,}01^2 - 1{,}99^2}{0{,}02} = \dfrac{(\square - \bigcirc)(\square + \bigcirc)}{0{,}02}$.

4 Рассмотрите и дополните пропуски:

а) $x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3=$

$=x^3+3\cdot x^2\cdot(2y)+3\cdot x\cdot(2y)^2+(2y)^3=$

$=(\square+\bigcirc)^3$;

б) $27a^3+3\cdot\square^2\cdot\bigcirc+3\cdot\square\cdot\bigcirc^2+125=$

$=(\square+\bigcirc)^3$.

Сворачиваем куб суммы двух выражений

$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

Раскрываем скобки

• Исследуйте и заполните соответственно пропуски:

а) $a^3-6a^2b+12ab^2-8b^3=$

$=a^3-3\cdot\square^2\cdot\bigcirc+3\cdot\square\cdot\bigcirc^2-\bigcirc^3=$

$=(\square-\bigcirc)^3$;

б) $0{,}001x^3-3\cdot\square^2\cdot\bigcirc+3\cdot\square\cdot\bigcirc^2-125y^3=$

$=(\square-\bigcirc)^3$.

Сворачиваем куб разности двух выражений

$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

Раскрываем скобки

5 Разложите на множители сумму кубов:

а) $8a^3+125b^3=(2a)^3+(5b)^3=$

$=(\square+\bigcirc)(\square^2-\square\bigcirc+\bigcirc^2)$;

б) $64+x^3y^3=\square^3+\bigcirc^3=\ldots$

Раскладываем на множители

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

Раскрываем скобки

6 Разложите на множители разность кубов:

а) $1000-8t^3=\square^3-\bigcirc^3=$

$=(\square-\bigcirc)(\square^2+\square\bigcirc+\bigcirc^2)$;

б) $a^6b^6-27a^3=\square^3-\bigcirc^3=\ldots$

Раскладываем на множители

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

Раскрываем скобки

3.3. Разложение на множители способом группировки

• Разложите на множители, применив способ группировки:

а) $m^3-\sqrt{3}m^2+5m-5\sqrt{3}$; б) $an+pa-bn-pb$.

Решение:

а) $m^3-\sqrt{3}m^2+5m-5\sqrt{3}=(m^3-\sqrt{3}m^2)+(5m-5\sqrt{3})=$

$=m^2(m-\sqrt{3})+5(m-\sqrt{3})=(m-\sqrt{3})(m^2+5)$.

б) $an + pa - bn - pb = (\square + \square) - (\square + \square) =$

$= \square \cdot (\square + \square) + \square \cdot (\square - \square) = (\square + \square) + (\square - \square)$.

Чтобы разложить выражение на множители способом группировки, надо:
- сгруппировать слагаемые выражения так, чтобы выявить общий множитель;
- записать выражение в виде произведения, используя дистрибутивность умножения относительно сложения (вычитания).

Упражнения и задачи

1

1. Запишите в виде квадрата суммы (разности):

а) $x^2 - 10x + 25$; б) $16a^2 - 8a + 1$; в) $36a^2b^2 + 12ab + 1$;
г) $x^2 + 16x + 64$; д) $64x^2y^2 - 16xy + 1$; е) $1 + 18x + 81x^2$.

2. *Истинно* или *Ложно*?

а) $x^2 - 2x + 4 = (x-2)^2$; б) $x^2 - 12x + 36 = (x-6)^2$;
в) $4a^2 + 8ab + b^2 = (2a+b)^2$; г) $a^2 + 0{,}4a + 0{,}04 = (0{,}04 + a)^2$.

3. Выполните действия:

а) $100x^2 - y^2 = (10\square - \bigcirc)(10\square + \bigcirc)$; б) $1 - 64a^2b^2 = (\square - \bigcirc)(\square + \bigcirc)$;
в) $2 - 16x^4 = (\square - \bigcirc)(\square + \bigcirc)$; г) $3a^6 - 225a^2b^4 = (\square - \bigcirc)(\square + \bigcirc)$.

4. Сверните формулу, соответственно заполнив пропуски:

а) $1 + 3x + 3x^2 + x^3$; б) $64a^3 + 48a^2b + 12ab^2 + b^3$;
в) $1000 + \square t + \square t^2 + \bigcirc^3 = (\square + t)^3$; г) $x^3 + \square y + \square y^2 + \bigcirc^3 = (\square + 2y)^3$.

5. Разложите на множители, применив способ вынесения общего множителя за скобки:

а) $26xy - 39z$; б) $-121x^2y + 11xy^2$; в) $12{,}5a^3b^2 - 2{,}5a^4b^2$; г) $2\sqrt{2}t^2 - \sqrt{50}t$.

6. Разложите на множители сумму кубов:

а) $(6a)^3 + (a^6b)^3$; б) $(5x^2)^3 + (x^4y)^3$; в) $(3t)^3 + (tz)^3$.

7. Разложите на множители разность кубов:

а) $(ab)^3 - (a^2)^3$; б) $(t^5)^3 - (2tz)^3$; в) $(x^2y)^3 - (xy^2)^3$.

8. Разложите на множители, применив способ группировки:

а) $a^3 + \sqrt{5}a^2 - 7a - 7\sqrt{5}$; б) $3x^2y - xy^2 - 6x + 2y$.

2

9. Запишите в виде произведения трех множителей:

а) $t(z+1)^2 - t(z-1)^2$; б) $a^3 - ab^2$;
в) $(x^2+5)^2 - 6(x^2+5)$; г) $(x^2+y^2)^2 - 4x^2y^2$.

10. Разложите на множители:

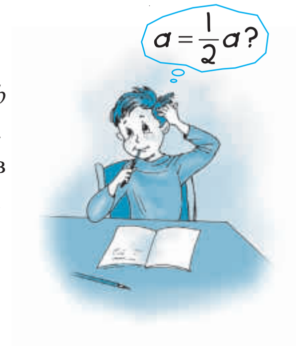
а) x^2-4x+3; б) $x^2+10x+24$; в) $a^2+ab-3a-3ab$;

г) $a^2b^2-5a^2b+6a^2$; д) $a^2-14x+48$; е) $tz^2-6tz+16z$.

11. Найдите ошибку в рассуждениях.

Софизм: *„Любое число равно своей половине“.*

Возьмем два равных числа a и b. Обе части равенства $a=b$ умножим на a и затем вычтем из произведений число b^2. Получим $a^2-b^2=ab-b^2$, или $(a-b)(a+b)=b(a-b)$. Поделив обе части на $a-b$, получим $a+b=b$. Так как $b=a$, то $a+a=a$, или $2a=a$. Значит, $a=\frac{1}{2}a$.



12. Найдите ошибку.

Софизм: *„Все числа равны между собой“.*

Возьмем два произвольных неравных между собой числа m и n и запишем тождество $m^2-2mn+n^2=n^2-2mn+m^2$. Тогда $(m-n)^2=(n-m)^2$. Извлекая из обеих частей последнего равенства квадратный корень, получим $m-n=n-m$, или $2m=2n$. Значит, $m=n$.

13. *Древнеиндийская задача*

Если некоторое число умножить на 3, затем полученное число поделить на 5, результат увеличить на 6, извлечь квадратный корень из последнего числа, затем из полученного результата вычесть 1 и, наконец, то, что получилось, возвести в квадрат, то получим 4. Найдите исходное число.

Указание. Используйте метод обратного хода.

14. Запишите в виде разности квадратов целых чисел заданное число:

а) 13; б) 17; в) 20; г) 60; д) 1001.

15. а) Найдите наименьшее значение выражения x^2-4x+4 при $x\in\mathbb{R}$.

б) Найдите наименьшее значение выражения $x^2+8x+20$ при $x\in\mathbb{R}$.

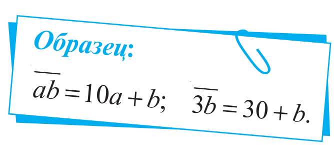
в) Найдите наибольшее значение выражения $-x^2+6x-9$ при $x\in\mathbb{R}$.

г) Найдите наибольшее значение выражения $-x^2-20x-105$ при $x\in\mathbb{R}$.

16. Докажите, что данное число является точным квадратом:

а) $\overline{a4}\cdot\overline{a6}+1$, если a – ненулевая цифра;

б) $\overline{a7}\cdot\overline{a5}+1$, если a – ненулевая цифра.



17. Разложите на множители:

а) $27x^{-3}+64x^{-6}y^3$; б) $512t^{12}+0{,}001t^3z^6$; в) $1+125a^3b^{15}$.

18. Разложите на множители:

а) $8t^{12}z^{-6}-t^3z^{-9}$; б) $729a^{21}b^9-0{,}008a^{15}$; в) $\frac{x^6}{64}-\frac{8x^3y^{24}}{27}$.

19. Квадрат суммы двух последовательных натуральных чисел на 264 больше, чем сумма квадратов этих чисел. Найдите эти числа.

20. Покажите, что $2(a^2+b^2)=(a+b)^2+(a-b)^2$.

21. Найдите действительные числа x и y, если известно, что:

а) $x^2+6x+4y^2-4y+10=0$; б) $0{,}16x^2+0{,}8x+y^2-2y+2=0$.

22. Покажите, что данное число является точным квадратом:

а) $(t^2+t)(t^2+t+2)+1,\ t\in\mathbb{Z}$; б) $x(x+1)(x+2)(x+3)+1,\ x\in\mathbb{Z}$.

23. Докажите, что для любых ненулевых действительных чисел a и b, имеет место неравенство $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ (неравенство о средних).

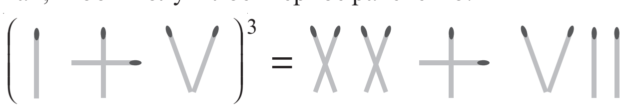
24. Докажите, что если сумма двух чисел кратна некоторому числу, тогда и сумма кубов этих чисел кратна этому числу.

25. ***Занимательная математика***

Поменяйте расположение:

а) одной спички, так, чтобы получилось верное равенство:

б) двух спичек, так, чтобы получилось верное равенство:



§4. Алгебраические отношения. Повторение и дополнения

4.1. Понятие алгебраического отношения

Вспомним

Если a и b – действительные числа, $b\neq0$, то **отношение чисел** a и b – это произведение $a\cdot b^{-1}=a:b=\dfrac{a}{b}$. Элементами отношения являются: числитель (a), знаменатель (b) и значение отношения (c): $\dfrac{a}{b}=c$.

Отношение двух алгебраических выражений называется **алгебраическим отношением**.

Элементами алгебраического отношения являются: числитель и знаменатель.

• Даны алгебраические отношения: а) $\dfrac{a+3}{a-3}$; б) $\dfrac{(2a+5)(a+3)}{a^2-9}$; в) $\dfrac{a}{a^2+1}$. Найдите ОДЗ.

Решение:

а) Отношение $\dfrac{a+3}{a-3}$ имеет смысл при $a-3\neq0$.

Ответ: DVA $=\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

б) Отношение $\dfrac{(2a+5)(a+3)}{a^2-9}$ имеет смысл при $a^2-9\neq 0$, следовательно, $a^2\neq 9$.

Ответ: ОДЗ $=\mathbb{R}\setminus\{-3, 3\}$.

в) Отношение $\dfrac{a}{a^2+1}$ имеет смысл при $a^2+1\neq 0$.

$a^2+1>0$ для любого действительного числа a.

Ответ: ОДЗ $=\mathbb{R}$.

Множество значений, при которых алгебраическое отношение имеет смысл, является **областью допустимых значений** (ОДЗ) отношения. ОДЗ алгебраического отношения от одной переменной является подмножеством множества $\mathbb{R}$, на котором знаменатель отношения не равен нулю.

Даны выражения: $A=(x-1)(2x-1)$ и $B=x^2-1$.

а) Запишите отношение $\dfrac{A}{B}$.

б) Найдите ОДЗ отношения $\dfrac{A}{B}$.

в) Упростите на ОДЗ отношение $\dfrac{A}{B}$.

Решение:

а) $\dfrac{A}{B}=\dfrac{(x-1)(2x-1)}{x^2-1}$.

б) ОДЗ: $x^2-1\neq 0$, следовательно, $x\neq -1$ и $x\neq 1$. ОДЗ: $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$.

в) На ОДЗ имеем: $\dfrac{(x-1)(2x-1)}{x^2-1}=\dfrac{(x-1)(2x-1)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{2x-1}{x+1}$.

Вспомним

Умножение или деление числителя и знаменателя алгебраического отношения выполняется на ОДЗ. При умножении (делении) числителя и знаменателя алгебраического отношения получаем новое алгебраическое отношение, равное данному на ОДЗ обоих алгебраических отношений.

Применяем

• Сократите алгебраическое отношение:

а) $\dfrac{n+1}{n^2-1}$; б) $\dfrac{x^3-1}{x^2+x+1}$.

Решение:

а) $\dfrac{n+1}{n^2-1}$, ОДЗ: $\mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$, $\dfrac{n+1}{n^2-1}=\dfrac{n+1}{(n-1)(n+1)}^{(n+1}=\dfrac{1}{n-1}$;

б) $\dfrac{x^3-1}{x^2+x+1}$, ОДЗ: $\mathbb{R}$, $\dfrac{x^3-1}{x^2+x+1}=\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2+x+1}^{(x^2+x+1}=x-1$.

• Избавьтесь от иррациональности в знаменателе отношения $\dfrac{\sqrt{2}-n}{\sqrt{2}+n}$.

Решение:

$\dfrac{\sqrt{2}-n}{\sqrt{2}+n}$, ОДЗ: $\mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{2}\}$, $\quad {}^{\sqrt{2}-n)}\dfrac{\sqrt{2}-n}{\sqrt{2}+n}=\dfrac{(\sqrt{2}-n)^2}{(\sqrt{2}-n)(\sqrt{2}+n)}=\dfrac{(\sqrt{2}-n)^2}{2-n^2}$.

• Приведите к общему знаменателю отношения: $\dfrac{x^2}{x^3-9x}$; $\dfrac{2}{x+3}$; $\dfrac{2}{3-x}$.

Решение:

Найдем ОДЗ для каждого алгебраического отношения:

$\dfrac{x^2}{x^3-9x}$, ОДЗ: $x^3-9x\neq 0$, $x(x^2-9)\neq 0$, значит, $x\neq 0$, $x\neq -3$, $x\neq 3$. ОДЗ: $\mathbb{R}\setminus\{-3,0,3\}$;

$\dfrac{2}{x+3}$, ОДЗ: $x+3\neq 0$, значит, $x\neq -3$. ОДЗ: $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$;

$\dfrac{2}{3-x}$, ОДЗ: $3-x\neq 0$, значит, $x\neq 3$. ОДЗ: $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Общей областью допустимых значений данных отношений является множество $\mathbb{R}\setminus\{-3,0,3\}$.

На этом ОДЗ сократим отношение: $\dfrac{x^2}{x^3-9x}^{(x}=\dfrac{x}{x^2-9}$.

Общим знаменателем отношений $\dfrac{x}{x^2-9}$, $\dfrac{2}{x+3}$ и $\dfrac{2}{3-x}$ является выражение $(x^2-9)=(x+3)(x-3)$. Умножим числитель и знаменатель отношений $\dfrac{2}{x+3}$ и $\dfrac{2}{3-x}$ соответственно на $(x-3)$ и $(3+x)$.

Получим: ${}^{x-3)}\dfrac{2}{x+3}=\dfrac{2(x-3)}{x^2-9}$; $\quad {}^{3+x)}\dfrac{2}{3-x}=\dfrac{2(3+x)}{9-x^2}=\dfrac{2(3+x)}{-(x^2-9)}=-\dfrac{2(3+x)}{x^2-9}$.

Умножив или поделив числитель и знаменатель алгебраических отношений на ненулевое алгебраическое выражение, можем привести данные отношения к общему знаменателю.

При умножении (делении) числителя и знаменателя алгебраического отношения на одно и то же ненулевое алгебраическое выражение может измениться его ОДЗ.

Сокращением алгебраическое отношение можно привести к несократимому отношению.

4.2. Действия над алгебраическими отношениями

• Выполните действия на ОДЗ:

а) $\frac{d}{10}+\frac{7}{10}$; б) $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}$; в) $m+\frac{m^2n}{m-n}$; г) $\frac{a+b}{a-c}\cdot\frac{a^3-c^3}{a^2-b^2}$.

Решение:

а) $\frac{d}{10}+\frac{7}{10}=\frac{d+7}{10}$;

б) $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$, $b\neq 0$;

в) $m+\frac{m^2n}{m-n}=\frac{m(m-n)}{m-n}+\frac{m^2n}{m-n}=\frac{m^2-mn+m^2n}{m-n}$, $m-n\neq 0$;

г) $\frac{a+b}{a-c}\cdot\frac{a^3-c^3}{a^2-b^2}=\frac{(a+b)}{a-c}\cdot\frac{(a-c)(a^2+ac+c^2)}{(a-b)(a+b)}=\frac{a^2+ac+c^2}{a-b}$,

$a-c\neq 0$, $a-b\neq 0$, $a+b\neq 0$.

Замечание. Действия над действительными числами, представленными буквенными выражениями, и над алгебраическими отношениями на ОДЗ выполняются так же, как и действия над действительными числами. Действия над алгебраическими отношениями на ОДЗ обладают теми же свойствами, что и действия над действительными числами, представленными буквенными выражениями.

Порядок выполнения действий такой же.

Результатом выполнения действий над алгебраическими отношениями является алгебраическое выражение, ОДЗ которого может отличаться от ОДЗ исходных алгебраических отношений.

Упражнения и задачи

1

1. Перечислите элементы алгебраического отношения:

а) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$; б) $\frac{a}{a^2+1}$; в) $\frac{m^3+n^3}{m+n}$; г) $\frac{ac}{a+c}$.

2. Найдите действительные значения переменной x, при которых не имеет смысла алгебраическое отношение:

а) $\frac{1}{2x}$; б) $\frac{x-1}{x+3}$; в) $\frac{x-5}{(x-5)^2}$;

г) $\frac{x^3+8}{x^2-4}$; д) $\frac{x^2-2}{x^2+2}$; е) $\frac{8x}{x(x-1)}$.

3. Найдите ОДЗ алгебраического отношения:

а) $\frac{1}{x-2}$; б) $\frac{a}{a^2-4}$; в) $\frac{15}{\sqrt{2}+b}$; г) $\frac{x+2}{x^3+8}$.

4. Выполните действия:

а) $\frac{x}{2y}+\frac{y}{2y}$; б) $\frac{m}{2m+2n}+1$; в) $\frac{3a^2}{a^2-1}-\frac{a}{9a}$; г) $\frac{a+2}{a}-\frac{a}{a+2}$.

5. Упростите выражение:

а) $\frac{2}{5x}+\frac{3}{5x}-\frac{24}{10x}$; б) $\frac{5x+1}{2y}+\frac{7-3x}{2y}-\frac{4x-1}{4y}$;

в) $\frac{a^2-1}{a+1}\cdot\frac{(q+1)^2}{(q-1)^2}$; г) $\frac{a-b}{4b^3}\cdot\frac{2b^4}{a^2-ab}$.

2

6. Найдите значение выражения:

а) $\frac{a^3-1}{2a^3}\cdot\frac{5a^2}{a^2+a+1}$, если $a=-3$; б) $\frac{a^2-4}{a^2-3a+9}:\frac{a+2}{a^3+27}$, если $a=0{,}5$.

7. Упростите выражение:

а) $\frac{-x}{x-3}+\frac{3}{3-x}+\frac{2x}{x-3}$; б) $\frac{a}{-1+a^2}+\frac{1}{a^2-1}$; в) $\frac{2p}{2p+3}+\frac{5}{3-2p}-\frac{4p^2+9}{4p^2-9}$.

8. Выполните действия:

а) $\frac{3(a+2)}{2(a^3+a^2+a+1)}-\frac{1-3a+a^2}{a^3-1}-\frac{1}{a-1}$; б) $\frac{5}{x^2-1}+\frac{3}{2(x+2)}-\frac{3}{2(x-1)}$.

9. Сократите отношение. Сравните ОДЗ исходного и полученного отношений:

а) $\frac{a^2-10a+25}{(a-4)^2-1}$; б) $\frac{a^2+6a+9}{(a+2)^2-1}$; в) $\frac{(b-6)^2-9}{-81+18p-p^2}$; г) $\frac{9+100p^2-60p}{100p^2-9}$.

3

10. Докажите, что значение отношения равно 2 при любом действительном значении переменной:

а) $\frac{(a+7)^2+(a-7)^2}{a^2+49}$; б) $\frac{(12m+5)^2+(12m-5)^2}{25+144m^2}$.

11. Докажите, что областью допустимых значений отношения является множество $\mathbb{R}$:

$$\frac{(x+2)^2-2(x+7)(x+2)+(x+7)^2}{(x+5)^2-2(x+5)(x-1)+(x-1)^2}.$$

12. Докажите, что отношение принимает одно и то же значение при всех ненулевых действительных значениях x:

$$\frac{(x-3)^2+2(x-3)(x+3)+(x+3)^2}{(x+7)^2+2(x+7)(x-7)+(x-7)^2}.$$

13. Дано отношение $\frac{2a^3-b^3}{a^3+a^2b-3ab^2}=r$. Докажите, что если заменить a на αa и b на αb, $\alpha\in\mathbb{R}^*$, то значение алгебраического отношения не изменится.

• *Задача для чемпионов*

14. Докажите, что значение отношения $\frac{51^3+49^3}{100}$ является натуральным числом, а значение отношения $\frac{51^3+49^3}{200}$ не является целым числом.

Упражнения и задачи на повторение

1

1. Приведите подобные слагаемые:

а) $6xy-3x\sqrt{y}+1{,}5xy+25+3x\sqrt{y}$; б) $-0{,}25a^2b^3+5(3a^2b^3-ab)+1{,}4ab-0{,}7$;

в) $(2a-1)^2-(3a+4)^2$; г) $(1{,}4x+2y)^2+(3x-5y)^2$.

2. *Истинно* или *Ложно*?

а) $6x-y=-(y-6x)$; б) $\sqrt{(a+b)^2}=a+b$;

в) $(3t+z)^3=27^3+z^3$; г) $(1-5x)^2=(5x-1)^2$.

3. Заполните таблицу:

a	b	$(a+b)^2$	$(a-b)^2$	a^2-b^2	$(a+b)^3$	$(a-b)^3$	a^3-b^3	a^3+b^3
1	$8x^3$							
t^6	$-z^3$							
$27x^{-3}$	y^6							
$(ab)^3$	$64b^{12}$							

4. Найдите значение выражения:

а) $(x+1)(x^2-x+1)-x^3$, при $x=9{,}73$; б) $(x-2)(x^2+2x+4)+8$, при $x=2$.

5. Разложите на множители, используя разные способы:

а) x^2-25; б) $4-81t^2$; в) $8+a^3$; г) c^3+8x^3;

д) $\frac{1}{27}+x^{-3}$; е) $-c^6-27x^3$; ж) $0{,}008+y^3z^9$; з) $125m^{-3}-n^{-6}$.

6. Упростите:

а) $(a^3-1)(a^6+a^3+1)$; б) $(m-1)(m^2+m+1)$;

в) $(a^2+1)(a^4-a^2+1)$; г) $(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$.

7. Сократите отношение:

а) $\frac{a^2-16}{8+2a}$; б) $\frac{a^2+6a+9}{5a+15}$.

2

8. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $4x^2-25=0$; б) $\frac{1}{4}z^2-16=0$; в) $0{,}36-x^2=0$; г) $0{,}01t^2-1=0$.

9. Докажите тождество:

а) $a^2+3a+2=(a+1)(a+2)$; б) $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$;

в) $c^2-7c+10=(c-2)(c-5)$; г) $x^2-x+\frac{1}{4}=(x-\frac{1}{2})^2$.

10. Заполните пропуски так, чтобы получить квадрат суммы (разности) двух выражений:

а) $9x^2+x+\bigcirc=(\square+\bigcirc)^2$; б) $t^2+\square+\frac{1}{4}=(\square+\bigcirc)^2$;

в) $9x^2-\square+16=(\square-\bigcirc)^2$; г) $4x^2-\square+1=(\square-\bigcirc)^2$.

11. Докажите, что данное высказывание истинно:

а) $5+2\sqrt{6}=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$; б) $7+2\sqrt{6}=(1+\sqrt{6})^2$;

в) $11-6\sqrt{2}=(3-\sqrt{2})^2$; г) $7-4\sqrt{3}=(2-\sqrt{3})^2$.

12. Найдите ошибку.

Софизм $2\times2=5$.

Возьмем верное равенство 16 – 36 = 25 – 45. Прибавив к обеим частям равенства $\frac{81}{4}$, получим $16-36+\frac{81}{4}=25-45+\frac{81}{4}$,

или $16-2\cdot\frac{9}{2}\cdot4+\frac{81}{4}=25-2\cdot\frac{9}{2}\cdot5+\frac{81}{4}$.

Следовательно, $\left(4-\frac{9}{2}\right)^2=\left(5-\frac{9}{2}\right)^2$, или $4-\frac{9}{2}=5-\frac{9}{2}$.

Значит, $4=5$ или „$2\times2=5$”.

13. Докажите, что:

а) $198\,|\,(321^3-123^3)$; б) $111\,|\,(321^3+123^3)$.

14. Докажите, что последними тремя цифрами числа 2992^3+8^3 являются нули.

15. Разложите на множители:

а) $a-b+b^2-a^2$; б) x^2-x-y^2-y; в) $x+y-x^3-y^3$; г) a^3-b^3+b-a.

16. Упростите:

а) $\frac{x-1}{x^2-x+1}-\frac{2x-2}{x^3+1}$; б) $\frac{2x-1}{x^3-1}-\frac{x}{x-1}+1$.

17. Разложите на множители:

а) $64x^3-(x-1)^3$; б) $\frac{1}{8}t^3+(1+\frac{1}{2}t)^3$; в) $1-(z+1)^6$.

3

18. Докажите, что:

а) $71\,|\,(8^8+8^7-8^6)$; б) $43\,|\,(7^{10}-7^9+7^8)$.

19. а) Покажите, что разность квадратов двух последовательных нечетных чисел кратна 8.

б) Покажите, что разность квадратов двух последовательных четных чисел не кратна 8.

20. Запишите в виде суммы квадратов выражение $x^2+y^2+x-4y+7\frac{1}{4}$.

21. Найдите $\left(a^{-6}+\frac{1}{a^{-6}}\right)^3$, если $a+\frac{1}{a}=5$,

• Задача для чемпионов

22. Докажите, что:

а) 83^4-83^3 – четное число; б) 37^4-37^3 – нечетное число;

в) 53^7-53^6 делится на 26; г) 17^3-17^2 является точным квадратом;

д) 79^6+79^5 кратно 80; е) 11^4+11^2 кратно 121 и 122.

Проверочная работа

Время выполнения работы: 45 минут

Вариант 1

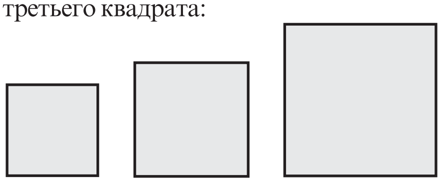
1. Заполните пропуски так, чтобы получить истинное высказывание: 1

$$36t^2 - \ldots + 4 = (\square - \bigcirc)^2.$$

2. Разложите на множители: 1

$$(x+1)^3 - (x-2)^3.$$

3. Найдите действительное значение переменной x, при котором площади первых двух квадратов будут равны площади третьего квадрата: 2



4. Дано выражение: 3

$$E(x) = \frac{8x-16}{x^2+x+1} : \frac{x^2-4x+4}{x^3-1}.$$

а) Найдите ОДЗ выражения $E(x)$.

б) Упростите данное выражение.

в) Вычислите $E\left(\frac{1}{2}\right)$.

г) Найдите натуральные значения x, при которых значение $E(x)$ является натуральным числом.

5. Докажите, что число $4^{2n} + 2^{2n+1} + 1$, $n \in \mathbb{N}$, является точным квадратом. 3

Вариант 2

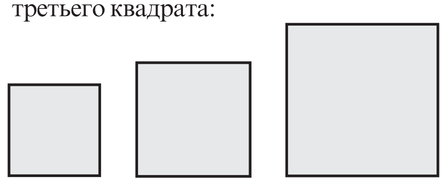
1. Заполните пропуски так, чтобы получить истинное высказывание:

$$9 + \ldots + 25z^4 = (\square + \bigcirc)^2.$$

2. Разложите на множители:

$$(y-3)^3 + (y+1)^3.$$

3. Найдите действительное значение переменной x, при котором площади первых двух квадратов будут равны площади третьего квадрата:



4. Дано выражение:

$$E(x) = \frac{2x^3+2}{x^2+6x+9} : \frac{x^2-x+1}{x+3}.$$

а) Найдите ОДЗ выражения $E(x)$.

б) Упростите данное выражение.

в) Вычислите $E\left(-\frac{1}{2}\right)$.

г) Найдите натуральные значения x, при которых значение $E(x)$ является натуральным числом.

5. Докажите, что число $4^n - 2^{2n+1} + 1$, $n \in \mathbb{N}$, является точным квадратом.

4 глава Уравнения и неравенства. Системы

§1. Уравнения I степени с одним неизвестным

1.1. Уравнения с одним неизвестным

1 У Андрея на счету мобильного телефона было 12 леев. После пополнения счета стало 72 лея. На сколько леев пополнил свой счет Андрей, если при каждом пополнении счета он получает дополнительно 20% от суммы пополнения счета?

Решаем

Пусть счет пополнили на x леев. Тогда на счету будет:

$$\boxed{12+x+0{,}2x=72} \Leftrightarrow x+0{,}2x=72-\square \Leftrightarrow \square\, x=\square \Leftrightarrow x=\square.$$

Ответ: $\square$ леев.

Определение. Равенство вида $A(x)=B(x)$, где $A(x)$ и $B(x)$ – выражения от x, называется **уравнением с одним неизвестным**.

$x^2+2x-3=0$ $\qquad 5-x=2x+14$ $\qquad \dfrac{x}{|x|}=1$ $\qquad \sqrt{x}+5=0$

- Значение x_0, при котором уравнение $A(x)=B(x)$ обращается в истинное высказывание, называется **решением** данного уравнения.
- **Решить уравнение** значит найти множество его решений.
- Множество решений уравнения обозначают, как правило, буквой S.

При решении уравнений применяются **отношения равенства на множестве** $\mathbb{R}$:
Если $a=b,\ a,b\in\mathbb{R}$, то:

1° $a+c=b+c,\ c\in\mathbb{R}$; 2° $a-c=b-c,\ c\in\mathbb{R}$;

3° $ac=bc,\ c\in\mathbb{R}^*$; 4° $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{c},\ c\in\mathbb{R}^*$.

Рассмотрите и дополните:

$x^2+2x-3=0$

- $x=-3$ → $(-3)^2+2\cdot(-3)-3=0$ – $\boxed{\text{И}}$; $x=-3$ – решение уравнения.
- $x=1$ → $\square^2+2\cdot\square-3=0$ – $\boxed{\text{И}}$; $x=1$ – ______

Уравнение с одним неизвестным, на заданном множестве, может не иметь решений, может иметь конечное или бесконечное множество решений.

2 Рассмотрите схемы и приведите примеры уравнений для каждого из следующих случаев:

Нет решений на множестве $\mathbb{R}$.		Имеет бесконечное множество решений на множестве $\mathbb{R}$.		Имеет конечное множество решений на множестве $\mathbb{R}$.	
$\sqrt{x}+5=0$		$\frac{x}{\lvert x\rvert}=1$		$5-x=2x+4$	
$S=\varnothing$	$S=\varnothing$	$S=\mathbb{R}_+^*$	$S=\square$	$S=\{\square\}$	$S=\{\square\}$

Определение. Уравнения называются **равносильными** (**эквивалентными**), если множества их решений равны.

Чтобы получить равносильные уравнения, применяются следующие преобразования:

- Перенос слагаемого из одной части уравнения в другую, изменив при этом знак на противоположный.
- Приведение подобных слагаемых в обеих частях уравнения.
- Умножение/деление обеих частей уравнения на одно и то же ненулевое действительное число.

$$5-x=2x+14 \Leftrightarrow -2x-x=-5+14 \Leftrightarrow -3x=9 \Leftrightarrow x=-3$$

Определения. **Областью допустимых значений (ОДЗ)** уравнения с одним неизвестным называется множество значений неизвестного, при которых имеют смысл выражения, стоящие в обеих частях этого уравнения.

$\frac{x}{\lvert x\rvert}=1$	$x^2+2x-3=0$	$\sqrt{x}+5=0$
ОДЗ: $x\in\mathbb{R}^*$	ОДЗ: $x\in\square$	ОДЗ: $x\in\square$

1.2. Уравнения I степени с одним неизвестным

1 В США для измерения температуры используют шкалу Фаренгейта, а в Европе – шкалу Цельсия. Формула перехода от одной шкалы к другой, следующая:

$$t_F = 1{,}8\ t_C + 32.$$

Найдите температуру по шкале Цельсия, если по шкале Фаренгейта термометр показывает 68°F.

Решаем

Пусть по шкале Цельсия термометр показывает x°C. Тогда

$$1{,}8x + 32 = 68 \Leftrightarrow \boxed{1{,}8x - 36 = 0} \Leftrightarrow 1{,}8x = \square \Leftrightarrow x = \square.$$

уравнение I степени с одним неизвестным

Ответ: $\square$ °C.

Определение. Уравнение вида $ax + b = 0$, $a,\ b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, называется **уравнением I степени с одним неизвестным**.

Уравнение I степени с одним неизвестным имеет единственное решение:

$$S = \left\{-\frac{b}{a}\right\}.$$

2 Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $-3(x-1) + 5x - 4 = 2x$.

$ax + b = 0$, $a,\ b \in \mathbb{R}$ — $a \neq 0$, $S = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$

$a = 0$:
- $b = 0$, $S = \mathbb{R}$
- $b \neq 0$, $S = \varnothing$

Решаем

$-3(x-1) + 5x - 4 = 2x \Leftrightarrow$

$-3x + 3 + 5x - 4 - 2x = 0 \Leftrightarrow$

$x(-3 + 5 - 2) = 4 - 3$

$0 \cdot x = 1$ – уравнение не имеет решений.

Ответ: Уравнение не имеет решений.

Упражнения и задачи

1

1. Покажите, что число –2 является решением уравнения: а) $4x + 5 = x - 1$; б) $x^2 - 4 = 0$.

2. Какие из элементов множества $M = \left\{-2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 2\frac{1}{4}\right\}$ являются решениями уравнения:

   а) $\frac{9}{11}x + 8 = 8$; б) $\frac{x+3}{2} = 2$; в) $\sqrt{x} = \frac{3}{2}$;

   г) $2(x+7) - 15 = 2x - 1$; д) $x \cdot (x+2) = 0$?

3. Выпишите из упражнения **2** в тетрадь уравнения I степени.

4. Найдите ОДЗ уравнения:

а) $\frac{2-x}{x}=3$; б) $x^2-1=0$; в) $\sqrt{x}+2=6$; г) $3x+5=x+1$.

5. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнения:

а) $3-6x=2-4x$; б) $2x+(3-6x)=-17$; в) $2(x+1)=3(x-1)$;

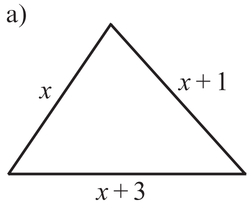
г) $\frac{1}{5}(2x-1)=4$; д) $\frac{2}{3}(4x-\frac{1}{3})=\frac{1}{9}$; е) $2(x+1)=4-(1-2x)$.

6. Решите уравнение $\sqrt{3}x+2=8$: а) на множестве $\mathbb{R}$; б) на множестве $\mathbb{Q}$.

7. Решите уравнение $\frac{x}{2}-\frac{3}{5}=0$: а) на множестве $\mathbb{Q}$; б) на множестве $\mathbb{Z}$.

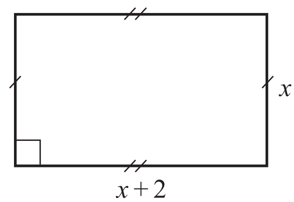
8. Найдите x, используя данные рисунка:

а)



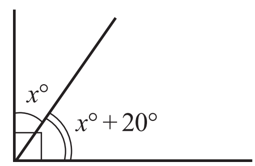
$\mathscr{P}$ = 34 см

б)



$\mathscr{P}$ = 16 см

в)



Образец: 1) → b)

9. Соедините каждое утверждение с соответствующим ему уравнением.

1) Число 12 в 3 раза больше числа x.

2) Среднее арифметическое чисел x и 11 равно 25.

3) Число x в 4 раза больше числа 18.

4) Через 4 года Пете будет 18 лет.

5) Одна из сторон прямоугольника равна 11 см, а его периметр равен 25 см.

а) $\frac{x}{4}=18$.

б) $3x=12$.

в) $(x+11)\cdot 2=25$.

г) $\frac{x+11}{2}=25$.

д) $x+4=18$.

10. Рассмотрите и продолжите решение:

а) $2(x-3)+4=8 \Leftrightarrow 2(x-3)=8-4 \Leftrightarrow$ ______ $\Leftrightarrow$ ______ $\Leftrightarrow x=$ ___ .

б) $6-0{,}5(1-x)=2 \Leftrightarrow 0{,}5(1-x)=$ ______ $\Leftrightarrow$ ______ $\Leftrightarrow$ ______ $\Leftrightarrow x=$ ___ .

2

11. При каких действительных значениях x значение выражения $25x-30$ на 5 больше значения выражения $15x+35$?

12. При каких действительных значениях y значение выражения $4y+6$ в 6 раз больше значения выражения $6y-15$?

13. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $5(3x-6)+4(3-2x)=5x-8$; б) $9(x-3)-4(7-3x)=5-3x$;

в) $2\frac{3}{8}\left(\frac{1}{3}-3x\right)+\frac{5}{8}\left(\frac{1}{3}-3x\right)=1$; г) $\frac{15-x}{6}-\frac{2x+16}{5}=1$;

д) $\frac{5}{12}+\frac{x}{6}=\frac{x}{4}+\frac{1}{3}$; е) $\frac{x-1}{5}+\frac{x-2}{3}=2-\frac{x-2}{15}$;

ж) $5-x\sqrt{5}=3-x\sqrt{3}$; з) $(x-1)\cdot\sqrt{2}=2x-1$.

14. Составьте уравнение с одним неизвестным, множество решений которого равно:

а) $S=\{4\}$; б) $S=\{-3\}$; в) $S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$; г) $S=\{\sqrt{5}\}$; д) $S=\{\sqrt{3}-1\}$; е) $S=\varnothing$; ж) $S=\mathbb{R}$.

15. Является ли число 1,5 решением уравнения:

а) $x-1=|1-x|$; б) $3-x=|-x|$; в) $|-x|+1{,}5=0$?

16. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $|x|+1=5$; б) $3|x|+7=22$; в) $2|x|-1=|x|+6$;

г) $5|x|-2=3|x|+4$; д) $|x-3|=0$; е) $|x+1|=-2$.

17. Если на одну чашу весов положить кирпич, тогда на другую, для равновесия, надо положить гирю весом 1 кг и еще полкирпича.
Сколько весит один кирпич?

18. Моторная лодка преодолевает расстояние между двумя пристанями за 6 часов по течению реки и за 10 часов против течения. Найдите скорость течения реки, если собственная скорость лодки равна 16 км/ч.

3

19. При каких значениях действительного параметра a уравнение имеет множество решений S:

а) $ax=-0{,}2$, $S=\{5\}$; б) $ax+6=0$, $S=\{-2\}$;

в) $ax+5=12$, $S=\varnothing$; г) $2x+a=3$, $S=\{1\}$?

20*. Зная, что уравнения $5x=a-3$ и $2x-7=1$ равносильны, найдите действительные значения параметра a.

21. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $|2x-3|=7$; б) $\sqrt{(7-2x)^2}=1$; в) $|3(x-1)-1|=2$;

г) $\sqrt{16x^2-8x+1}=3$; д) $|3x+1|-4(1+|3x+1|)=5$; е) $|11-x|=x-11$.

22*. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение, где m – действительный параметр:

а) $m-2x=3m$; б) $mx=5$; в) $mx=2m$;

г) $mx-1=2x$; д) $2mx+2m=-4m$; е) $mx+x=m^2-1$.

23. Сергей проезжает на велосипеде расстояние между двумя деревнями за 36 минут, а Евгений – за 45 минут. Скорость Сергея на 4 км/ч больше скорости Евгения. Найдите скорость каждого велосипедиста и расстояние между деревнями.

24. Андрей потратил в супермаркете $\frac{2}{7}$ денег, которые имел, а 30% от сдачи – в книжном магазине. Сколько денег было у Андрея, если у него осталось 175 леев?

25. Составте задачу, решение которой сводится к решению уравнения:

а) $3x=x+20$; б) $\frac{x}{16}+1=\frac{x}{12}$; в) $(x+2)4=(x-2)6$; г) $x-0{,}2=320$.

§2. Системы уравнений I степени

2.1. Уравнения с двумя неизвестными

В интеллектуальном марафоне команды решают задачи по физике и математике. За каждую правильно решенную задачу по физике, команда получает 3 балла, а за каждую правильно решенную задачу по математике – 4 балла. Можно ли однозначно определить, сколько задач по физике и сколько по математике решила команда, если она набрала всего 39 баллов?

Объясняем

Пусть правильно решили x задач по физике и y задач по математике. Тогда получим уравнение

$\boxed{3x+4y=39}$ ← уравнение с двумя неизвестными

Определение. Решением уравнения с двумя неизвестными называется упорядоченная пара чисел $(x_0;\ y_0)$, обращающая данное уравнение в истинное высказывание.

$3x+4y=39$

Решение уравнения → $(1;\ 9)$ $\quad 3\cdot 1+4\cdot 9=39$ – И

$(5;\ 6)$ $\quad 3\cdot\square+4\cdot\square=39$ – $\square$

$(13;\ 1)$ $\quad 3\cdot\square+4\cdot\square=39$ – $\square$

$(\square;\ \square)$ $\quad 3\cdot\square+4\cdot\square=39$ – $\square$

И/Л

Уравнение с двумя неизвестными

$2x+5y=10$			$x^2+y=5$		$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2$		$xy=-1$	
$(-2;\ 2{,}8)$	$(0;\ \square)$	$(\square;\ -2)$	$(-3;\ \square)$	$(\square;\ 5)$	$(3;\ \square)$	$(\square;\ 1)$	$(-\frac{1}{3};\ \square)$	$(\square;\ -1)$

Уравнение с двумя неизвестными может не иметь решений, может иметь конечное или бесконечное множество решений.

Не имеет решений.		Имеет конечное множество решений.		Имеет бесконечное множество решений.	
$\lvert x\rvert+\lvert y\rvert=-2$		$x^2+y^2=0$		$x-y=1$	

Определение. **Областью допустимых значений (ОДЗ)** уравнения с двумя неизвестными называется множество значений неизвестного, при которых имеют смысл все выражения, входящие в это уравнение.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2 \rightarrow \text{ОДЗ: } x\in\mathbb{R}^*,\ y\in\mathbb{R}^*.$$

2.2. Уравнения I степени с двумя неизвестными

1 У Анны есть 30 леев. Она хочет купить яблоки по цене 4 лея за 1кг и груши по 5 леев за 1кг.
Сколько килограммов яблок и груш может купить Анна?

Объясняем

Пусть Анна может купить x кг яблок и y кг груш.
Тогда составим уравнение:

коэффициенты неизвестных

$$\boxed{4x+5y=30}$$

свободный член

неизвестные

Определение. Уравнение вида $ax+by+c=0,\ a, b\in\mathbb{R}^*, c\in\mathbb{R}$, называется **уравнением I степени с двумя неизвестными**.

- Уравнение I степени с двумя неизвестными имеет бесконечное множество решений.
- Чтобы найти решение уравнения I степени с двумя неизвестными, берем любое значение одного неизвестного, затем находим соответствующее значение второго неизвестного.

• Найдите несколько решений полученного уравнения $4x+5y=30$.
Рассмотрите и продолжите решение:

$$4x+5y=30 \Leftrightarrow 5y=30-4x \Leftrightarrow y=6-0{,}8x.$$

При $x=5$ получим $y=6-0{,}8\cdot 5 \Leftrightarrow y=2;$ $(5;\ 2)$
при $x=1{,}5$ получим $y=6-0{,}8\cdot \square \Leftrightarrow y=\square;$ $(1{,}5;\ \square)$ решения уравнения
при $x=0$ получим $y=6-0{,}8\cdot \square \Leftrightarrow y=\square.$ $(0;\ \square)$

• Каким может быть ответ на вопрос задачи?

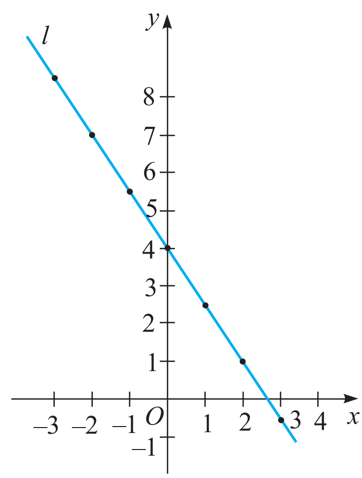
2 Решим уравнение $3x+2y=8$ на множестве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Объясняем

$3x+2y=8 \Leftrightarrow 2y=8-3x \Leftrightarrow y=4-1{,}5x.$

Заполним таблицу:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	8,5	7	5,5	4	2,5	1	–0,5



Отметим в прямоугольной системе координат точки, координаты которых являются решениями данного уравнения.

Точки, соответствующие решениям уравнения $3x+2y=8$, лежат на прямой l и, наоборот, если точка принадлежит прямой l, то ее координаты являются решением уравнения $3x+2y=8$.

Прямая l называется ***графиком уравнения*** или ***прямой решений уравнения*** $3x+2y=8$.

График уравнения I степени с двумя неизвестными $ax+by=c$, $a,\ b\in\mathbb{R}^*$, совпадает с графиком функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{c}{b}$, $a, b\in\mathbb{R}^*$, $c\in\mathbb{R}$.

Число $-\dfrac{a}{b}$ называется **угловым коэффициентом** прямой – графика уравнения $ax+by=c$.

2.3. Понятие системы двух уравнений с двумя неизвестными

1 Клавиатура фортепьяно состоит из 88 клавиш, причем белых клавиш на 16 больше, чем черных.
Сколько белых и сколько черных клавиш у фортепьяно?

Объясняем

Пусть x – число белых клавиш, а y – число черных клавиш. Тогда составим уравнения $x+y=88$ и $x-y=16$.

$(x_0;\ y_0)$

Для решения задачи необходимо найти пару чисел $(x_0;\ y_0)$ – общее решение этих двух уравнений. В этом случае говорят, что надо решить систему двух уравнений с двумя неизвестными и записывают:

$$\begin{cases} x+y=88 \\ x-y=16 \end{cases}$$

первое уравнение системы

второе уравнение системы

знак системы

система двух уравнений с двумя неизвестными

Общим решением двух уравнений является пара чисел $(52;\ 36)$, так как

$$52+36=88 \text{ – Истинно;}$$
$$52-36=16 \text{ – Истинно.}$$

Ответ: 52 белые клавиши и 36 черных клавиш.

Определение. **Решением системы двух уравнений с двумя неизвестными** называется упорядоченная пара чисел, которая обращает каждое уравнение системы в истинное высказывание.

2 Проверьте, является ли пара чисел $(-2;\ 1)$ решением системы уравнений:

а) $\begin{cases} -x+y=3, \\ 3x-y=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+y=-3, \\ -x+3y=-5. \end{cases}$

Объясняем

$-(-2)+1=3$ – И

$3\cdot(-2)-1=1$ – Л

Ответ: Пара чисел $(-2;\ 1)$ не является решением системы уравнений.

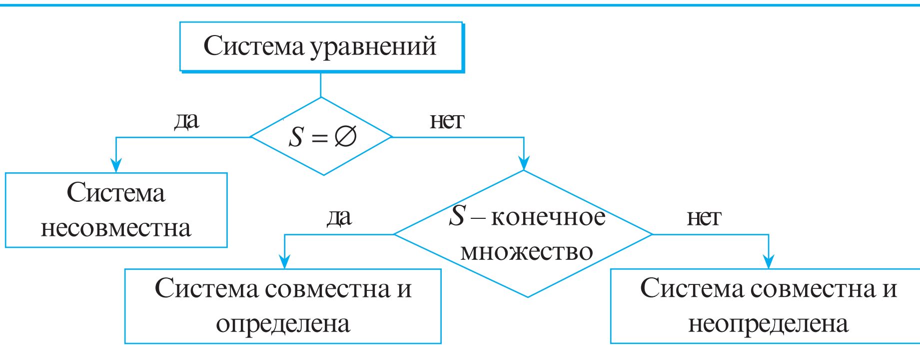
$2\cdot \square + \square = -3 - \square$

$-\square + 3\cdot \square = 1 - \square$

Ответ: $(-2;\ 1)$ – $\square$.

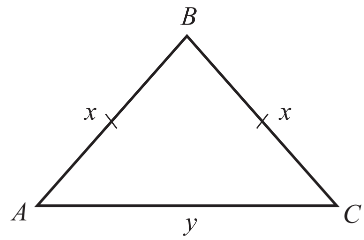
Определение. ♦ **Решить систему двух уравнений с двумя неизвестными** значит найти множество ее решений.

- Множество решений системы уравнений, как правило, обозначается S.
- Система уравнений может не иметь решений, может иметь конечное или бесконечное множество решений.



2.4. Система двух уравнений I степени с двумя неизвестными

В равнобедренном треугольнике, конгруэнтные стороны на 11 см длиннее его основания. Найдите длины сторон треугольника, если его периметр равен 40 см.



Решаем

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x - y = 11 \\ 2x + y = 40 \end{cases}$$

$(17; 6)$ ← решение системы уравнений

Ответ: $AB = \square$ см; $BC = \square$ см; $AC = \square$ см.

• Объясните, как была составлена система уравнений.

Определение. Система уравнений вида $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \end{cases}$ где $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ – действительные числа, называется **системой двух уравнений I степени с двумя неизвестными**.

При решении системы уравнений, как правило, переходят к другой, более простой системе, равносильной данной.

Определение. Системы уравнений называются **равносильными**, если множества их решений равны.

Чтобы получить равносильные системы уравнений, применяются следующие преобразования:

Изменение порядка уравнений в системе.

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 11 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

Замена одного уравнения системы другим, ему равносильным.

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 5x - 3y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - 2x \\ 5x = 2 + 3y \end{cases}$$

Выражение в одном из уравнений системы одного неизвестного через другое и подстановка полученного выражения во второе уравнение системы.

$$\begin{cases} -7x + y = 2 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 + 7x \\ x + 2 \cdot (2 + 7x) = 3 \end{cases}$$

Замена одного уравнения системы другим, которое образуется в результате сложения или вычитания двух уравнений системы (умноженных, если необходимо, на ненулевое число).

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 3x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ 4x = 7 \end{cases}$$

2.5. Методы решения системы двух уравнений I степени с двумя неизвестными

2.5.1. Метод подстановки

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x-3y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\boxed{1-2y} \\ 2\cdot\boxed{(1-2y)}-3y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-2y \\ 2-4y-3y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

подставляем

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1-2y \\ -7y=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-2\cdot 1 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1, \\ y=1. \end{cases}$$

Ответ: $S=\{(-1;\ 1)\}$.

Из одного уравнения выражаем одно из неизвестных через другое и подставляем его во второе уравнение.

• Рассмотрите и продолжите решение:

$$\begin{cases} -3x+y=-1 \\ 5x+2y=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\boxed{} \\ 5x+2\cdot\boxed{()}=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\boxed{} \\ \square\ x=\square \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\square, \\ y=\square. \end{cases}$$

подставляем

Ответ: $S=\{(\square;\ \square)\}$.

2.5.2. Метод сложения

$$\left.\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ 4x+3y=25 \end{cases}\right| \oplus \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y=-1 \\ 6x=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ 2\cdot 4-3y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ -3y=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4, \\ y=3. \end{cases}$$

Ответ: $S=\{(4;\ 3)\}$.

Складываем оба уравнения системы.

Рассмотрите и продолжите решение:

$$\begin{cases} 4x+2y=1 \\ 3x+y=1 \quad \big|\ \otimes(-2) \end{cases} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} 4x+2y=1 \\ -6x-2y=-2 \end{cases}\right| \oplus \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2y=1 \\ \square\ x=\square \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\square \\ 4\cdot\square+2y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\square \\ 2y=\square \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\square, \\ y=\square. \end{cases}$$

Ответ: $S=\{(\square;\ \square)\}$.

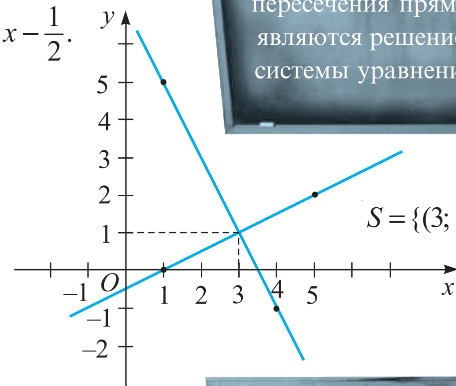
2.5.3. *Графический метод*

$$\begin{cases}2x+y=7\\x-2y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-2x+7\\-2y=-x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-2x+7,\\y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}.\end{cases}$$

x	1	4
$y=-2x+7$	5	–1

x	1	5
$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$	0	2

Координаты точки пересечения прямых являются решением системы уравнений.



$S=\{(3;1)\}$.

Если прямые совпадают, то все их точки (то есть, их координаты) являются решениями системы уравнений. Если прямые параллельны, то система не имеет решений.

Практическая работа

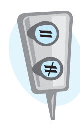
I. Решите графическим методом систему уравнений:

а) $\begin{cases}x+y=4,\\3x+y=6;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x+y=1,\\2x+y=5.\end{cases}$

Сколько решений имеет каждая из систем?

Найдите отношение коэффициентов неизвестных x и y и сравните полученные отношения.

а) $\frac{1}{3}$ ● $\frac{1}{1}$



б) $\frac{\square}{\square}$ ● $\frac{\square}{\square}$

Сделайте вывод.

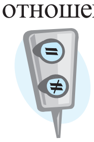
II. Решите графическим методом систему уравнений:

а) $\begin{cases}x-y=2,\\2x-2y=-2;\end{cases}$ б) $\begin{cases}3x+6y=-3,\\4x+8y=2.\end{cases}$

Сколько решений имеет каждая из систем?

Найдите отношение коэффициентов неизвестных x и y и отношение свободных членов и сравните полученные отношения.

а) $\frac{1}{2}$ ● $\frac{-1}{-2}$ ● $\frac{2}{-2}$



б) $\frac{\square}{\square}$ ● $\frac{\square}{\square}$ ● $\frac{\square}{\square}$

Сделайте вывод.

III. Решите графическим методом систему уравнений:

а) $\begin{cases}2x-y=1,\\4x-2y=2;\end{cases}$ б) $\begin{cases}2x-4y=10,\\3x-6y=15.\end{cases}$

Сколько решений имеет каждая из систем?

Найдите отношение коэффициентов неизвестных x и y и отношение свободных членов и сравните полученные отношения.

а) $\frac{2}{4}$ ● $\frac{-1}{-2}$ ● $\frac{1}{2}$

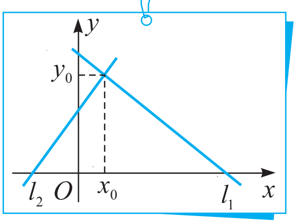
б) $\frac{\square}{\square}$ ● $\frac{\square}{\square}$ ● $\frac{\square}{\square}$

Сформулируйте вывод.

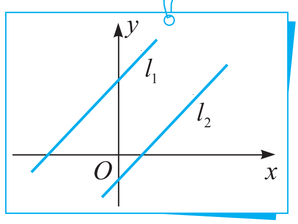
Сравните свои выводы со следующей схемой:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$$
$a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}^*,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

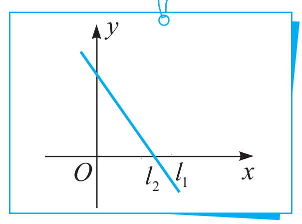
одно решение	нет решений	бесконечное множество решений
Система совместна и определена.	Система несовместна.	Система совместна и неопределена.
$\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$	$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$	$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$



$S=\{(x_0;\ y_0)\}$



$S=\varnothing$



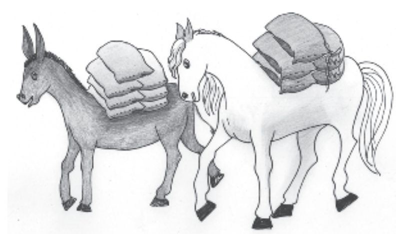
$S=\{(x;\ y)\}$, где $x\in\mathbb{R}$, $y=-\dfrac{a_1}{b_1}x-\dfrac{c_1}{b_1}$

2.6. Решение задач с помощью систем уравнений I степени с двумя неизвестными

Лошадь и осел двигались по дороге с тяжелой ношей на спине. Лошадь жаловалась на свою ношу.

– Почему ты жалуешься? – спросил осел у лошади, – если я заберу у тебя только один мешок, моя ноша станет в два раза тяжелее твоей. А вот если я отдам тебе один мой мешок, то твоя ноша станет равной моей.

Сколько мешков везла лошадь и сколько вез осел?



На математическом языке

Лошадь и осел двигались с тяжелой ношей.	x – количество мешков у лошади, y – количество мешков у осла.
Если осел заберет один мешок у лошади, то его ноша станет в два раза тяжелее.	$2(x-1)=y+1$
Если лошадь заберет у осла один мешок, то их ноши станут равными.	$x+1=y-1$

Получим систему уравнений

$$\begin{cases}2(x-1)=y+1\\ x+1=y-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x-y=3\\ x-y=-2\end{cases}\Bigg| \ominus \Leftrightarrow \begin{cases}2x-y=3\\ x=\square\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\square,\\ y=\square.\end{cases}$$

Ответ: Лошадь везла $\square$ мешков, а осел – $\square$ мешков.

Упражнения и задачи

1

1. Является ли решением уравнения $x+3y=9$ пара чисел:
а) (1; 1); б) (6; 1); в) (0; 3); г) (–4; 4)?

2. Найдите три решения уравнения:
а) $x+y=6$; б) $x+2y=5$; в) $3x-y=2$; г) $3x+2y=10$.

3. Врачи установили, что для нормального развития ребенка или подростка в возрасте x лет $(1 \le x \le 18)$ их сон должен составлять y часов, где $y+\frac{x}{2}=17$.
Определите, сколько часов в день должны спать вы, ваши младшие сестры или братья.

4. Из уравнения $2x+y=5$ выразите:
а) переменную y через переменную x;
б) переменную x через переменную y.

5. Выразите переменную y через переменную x и найдите два решения уравнения:
а) $x-y=7$;
б) $2x+y=5$;
в) $5x-2y=10$.

Образец:
$3x+y=15 \Leftrightarrow y=-3x+15$
$x=0;\ y=-3\cdot 0+15 \Leftrightarrow y=15.$
$x=-1;\ y=-3\cdot(-1)+15 \Leftrightarrow y=18.$
$(0; 15)\quad(-1; 18).$

6. График уравнения $8x-5y=17$ проходит через точку с абсциссой 2. Найдите ординату этой точки.

7. Постройте график уравнения:
а) $x+y=6$; б) $3x-y=0$; в) $2x-y=1$.

8. Определите, является ли решением системы уравнений $\begin{cases}3x+2y=19\\ x+5y=15\end{cases}$ пара чисел:
а) (2; 5); б) (0; 3); в) (5; 2); г) $(6; \frac{1}{2})$.

9. Решите на множестве действительных чисел методом подстановки систему уравнений:
а) $\begin{cases}x-y=2,\\ 2x-3y=2;\end{cases}$ б) $\begin{cases}3x-y=-4,\\ x+2y=8;\end{cases}$ в) $\begin{cases}x+y=6,\\ 3x-5y=2;\end{cases}$ г) $\begin{cases}2y-x=-3,\\ 3y-2x=-7.\end{cases}$

10. Решите на множестве действительных чисел методом сложения систему уравнений:
а) $\begin{cases}4x-y=-1,\\ 2x+y=13;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x+y=4,\\ 3x+y=6;\end{cases}$ в) $\begin{cases}x-y=-5,\\ -x+3y=19;\end{cases}$ г) $\begin{cases}3x+2y=19,\\ x+5y=15.\end{cases}$

11. Решите графическим методом систему уравнений:

а) $\begin{cases} x+y=10, \\ 2x-y=-1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y-2x=1, \\ 6x-y=7; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x-y=2, \\ -2x+y=-4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x+y=4, \\ 6x+2y=1. \end{cases}$

2

12. Найдите одно решение уравнения (если оно существует):

а) $xy=0$; б) $2x^2+y^2=0$; в) $x^2+y^2=4$; г) $|x|+|y|+1=0$.

13. Пара чисел $(3; 2)$ является решением уравнения $2x+by=12$, $b\in\mathbb{R}$. Найдите число b.

14. Пара чисел $(2; 1)$ является решением уравнения $ax+2y=8$, $a\in\mathbb{R}$. Найдите число a.

15. Запишите уравнение I степени с двумя неизвестными, решением которого является пара чисел:

а) $(1; 2)$; б) $(-3; 1)$; в) $(0; -2)$; г) $(5; 7)$.

16. Изобразите в одной прямоугольной системе координат графики уравнений:

а) $x+y=3$ и $x-y=1$; б) $x-y=-2$ и $x-y=2$.

Есть ли у этих уравнений общие решения?

17. Решите двумя способами систему уравнений:

а) $\begin{cases} x+y=5, \\ 3x-5y=-1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-4y=2, \\ 3x-2y=16; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 6x-8y=-2, \\ 5x+2y=1{,}8; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{1}{2}x-\frac{1}{4}y=0, \\ \frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y=10. \end{cases}$

18. Не решая систему уравнений, определите количество решений данной системы и ее тип:

а) $\begin{cases} 4x+y=2, \\ 3x-2y=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-6y=6, \\ x-2y=3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x-2y=3, \\ 2x-4y=6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+3y=4, \\ 4x+y=-5. \end{cases}$

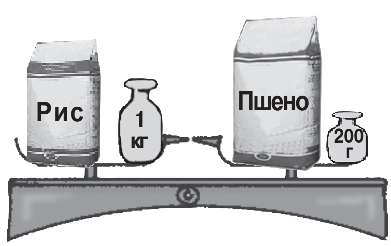
Образец:

$\begin{cases} 3x+2y=1, \\ 6x+4y=3; \end{cases}$ $\frac{3}{6}=\frac{2}{4}\neq\frac{1}{3}$.

Система не имеет решения, значит, она несовместна.

Решите задачи, составив системы уравнений.

19. На обеих чашах весов всего 4 кг крупы. Используя данные рисунка, определите, сколько килограммов риса и сколько пшена в пакетах.



20. Отец старше дочери на 26 лет, а через 4 года он будет старше ее в 3 раза. Сколько лет отцу и дочери?

21. Туристов разместили в 16 двухместных и трехместных номерах. Сколько они заняли двухместных и сколько трехместных номеров, если всего было 42 туриста?

22. Один из клиентов банка решил положить на два счета 1200 леев. На один счет под 8% годовых, а на второй – под 10%. Через год общая сумма его денег увеличилась на 108 леев. Сколько денег было положено на каждый счет?

23. Доход одной фирмы, имеющей два филиала, в прошлом году составил 13 миллионов леев. В текущем году ожидается повышение доходов I филиала на 25%, а II филиала на 40%. Доход же всей фирмы должен составить 17 миллионов леев. Определите доход каждого филиала в прошлом году.

24. Решите на множестве действительных чисел систему уравнений:

а) $\begin{cases} \dfrac{2x+1}{5} = \dfrac{y-1}{2}, \\ 4x+5y=23; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x-y-24=2(5x-2y), \\ 3y-2=4-(x-y); \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2(3x-y)-5=2x-3y, \\ 5-(x-2y)=4y+16. \end{cases}$

3

25. Пусть дана пара чисел $(-2; 1)$. Запишите еще две пары чисел, так, чтобы все три пары были бы решением некоторого уравнения I степени с двумя неизвестными.

26. Запишите уравнение I степени с двумя неизвестными, решением которого являются значения неизвестных x и y, указанные в таблице:

а)

x	–1	0	1	4
y	3	2	1	–2

б)

x	–2	–1	0	1
y	–8	–4	0	4

27. Найдите значения действительного параметра m, при которых система уравнений имеет бесконечное множество решений:

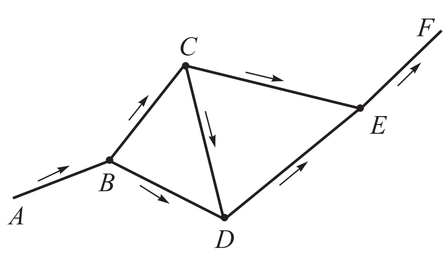
а) $\begin{cases} 3x+my=3, \\ mx+3y=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+my=1, \\ mx-3my=2m+3. \end{cases}$

28. При каких значениях действительного параметра a система уравнений несовместна:

а) $\begin{cases} x+ay=1, \\ x-3y=2a+3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 16x+ay=4, \\ ax+9y=0? \end{cases}$

29. На рисунке изображена схема автомагистрали. Стрелки указывают направление движения.

По направлению AB проехала автоколонна, состоящая из 36 машин. Известно, что по направлению BC продолжило движение на 10 автомобилей больше, чем по направлению DE, а по направлению CD проехало 2 автомобиля. Сколько машин проехало по каждому из направлений BC, BD, DE и CE?



30. Доход одной фирмы, имеющей два филиала, в прошлом году составил 13 миллионов леев. На текущий год ожидается повышение доходов филиалов на 75% и на 140%, соответственно. Таким образом, доход всей фирмы удвоится. Определите доход каждого филиала:

а) в прошлом году; б) в текущем году.

31. Смешали 20%-ный и 50%-ный растворы соляной кислоты и получили 30 литров 40%-ного раствора. Какое количество каждого раствора было использовано?

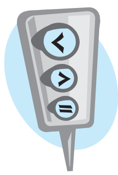
§ 3. Неравенства с одним неизвестным. Системы неравенств с одним неизвестным

3.1. Числовые неравенства

1 Замените $\bigcirc$ одним из знаков >, < так, чтобы получилось верное числовое неравенство:

$\sqrt{5} \bigcirc 2$ $\qquad$ $\pi \bigcirc 3{,}14$ $\qquad$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \bigcirc 1$ $\qquad$ $|7{,}2| \bigcirc |-8{,}1|$

2 Зная, что $x < y$, $m < 0$, $x, y, m \in \mathbb{R}$, и применив свойства числовых неравенств, сравните:



$x + m \bigcirc y + m$

$mx \bigcirc my$

$\frac{x}{m^2} \bigcirc \frac{y}{m^2}$

$|m| \cdot x \bigcirc |m| \cdot y$

$\frac{x}{m^5} \bigcirc \frac{y}{m^5}$

① Если $a, b, c \in \mathbb{R}$ и $a > b$, то $a + c > b + c$.

② Если $a, b \in \mathbb{R}$, $a > b$ и $c \in \mathbb{R}^*_+$, то $ac > bc$.

③ Если $a, b \in \mathbb{R}$, $a > b$ и $c \in \mathbb{R}^*_-$, то $ac < bc$.

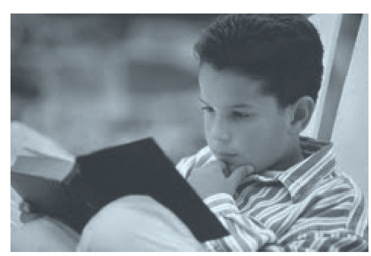
④ Если $a, b \in \mathbb{R}$, $a > b$ и $c \in \mathbb{R}^*_+$, то $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

⑤ Если $a, b \in \mathbb{R}$, $a > b$ и $c \in \mathbb{R}^*_-$, то $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

3.2. Неравенства I степени с одним неизвестным

1 Вова обещал читать в день не меньше 10 страниц книги. В первый день он прочитал на 4 страницы меньше, чем во второй день, а в третий день – в 1,5 раза больше, чем во второй день.

Таким образом, количество страниц, которые Вова прочитал за третий день, оказалось больше, чем за первые два дня вместе взятые. Сдержал ли Вова свое обещание?



Решаем

Пусть во второй день Вова прочитал x страниц, тогда в первый день $(x-4)$ страницы, а в третий день – $1{,}5x$ страниц.

$$\boxed{1{,}5x > x + x - 4} \Leftrightarrow 1{,}5x > 2x - 4 \Leftrightarrow -0{,}5x > -4 \Leftrightarrow x < 8$$

Ответ: Вова $\qquad\qquad$ обещание.

Определение. Неравенства вида $ax+b>0$, $ax+b<0$, $ax+b\geq 0$, $ax+b\leq 0$, $a, b\in\mathbb{R}$, и $a\neq 0$, называются неравенствами **I степени с одним неизвестным**.

Пример:

$2(x-5)>8$

$x=\boxed{15}$ – решение неравенства, так как

$2\cdot(15-5)>8$ – Истинно

Определение. Решением неравенства с одним неизвестным называется значение неизвестного, обращающее это неравенство в верное числовое неравенство.

• Является ли число 7 решением неравенства?

- Решить неравенство значит найти множество его решений.
- Множество решений неравенства обозначается, как правило, буквой S.
- Множество решений неравенства I степени с одним неизвестным записывается в виде числового промежутка.

Вспомним

$x\geq a$

$S=[a;+\infty)$

$x<b$

$S=(-\infty;b)$

$a<x<b$

$S=(a;b)$

2 Рассмотрите и дополните:

а) $x>2$

$S=(2;+\infty)$

б) $x\leq 5$

$S=$

в) $-3\leq x<0$

$S=$

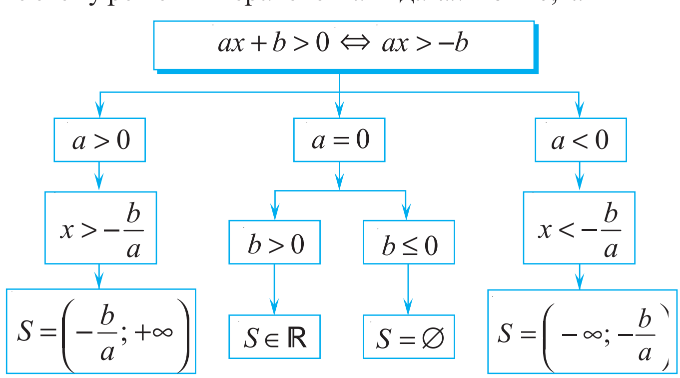
3 Решим на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

$2(x-5)>8 \Leftrightarrow x-5>4 \Leftrightarrow x>9$

Ответ: $S=(9;+\infty)$

Определение. Два неравенства называются **равносильными**, если множества их решений равны.

4 Рассмотрите схему решения неравенства вида $ax+b>0$, $a\in\mathbb{R}$.



• Применив схему из пункта **4**, продолжите решение на множестве $\mathbb{R}$:

а) $3x-6>4+5(x-4) \Leftrightarrow 3x-6>4+5x-20 \Leftrightarrow \square\, x > \square \Leftrightarrow x \bigcirc \square$.

Ответ: $S=\square$.

б) $2(1-3x)>3(5-2x) \Leftrightarrow 2-6x>15-6x \Leftrightarrow \square\, x > \square \Leftrightarrow \square$.

Ответ: $S=\square$.

• Составьте аналогичные схемы для решения неравенств вида $ax+b<0$; $ax+b\geq 0$; $ax+b\leq 0$.

3.3. Системы неравенств I степени с одним неизвестным

В чайник налили воду, температура которой 20°C, и поставили нагреваться. Через каждую минуту температура воды увеличивается на 8°C. Через сколько минут температура воды будет не меньше 60°C и не больше 80°C?

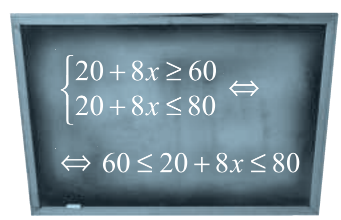
Решаем

Пусть x мин – время, необходимое для соответствующего подогрева воды.

Тогда получим неравенство $20+8x\geq 60$ и $20+8x\leq 80$.

Для решения задачи найдем общие решения этих двух неравенств (пересечение множеств их решений).

В этом случае говорят, что надо решить систему двух неравенств с одним неизвестным, и записывают:



$$\boxed{\begin{cases}20+8x\geq 60\\20+8x\leq 80\end{cases}} \Leftrightarrow \begin{cases}8x\geq 40\\8x\leq 60\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq 5\\x\leq 7{,}5\end{cases} \Leftrightarrow 5\leq x\leq 7{,}5.$$

Ответ: Не меньше 5 мин и не больше 7,5 мин.

- В общем случае система двух неравенств I степени с одним неизвестным имеет вид:
$$\begin{cases}a_1x+b_1\geq 0,\ a_1\in\mathbb{R}^*,\ b_1\in\mathbb{R},\\a_2x+b_2\geq 0,\ a_2\in\mathbb{R}^*,\ b_2\in\mathbb{R}.\end{cases}$$
- Система неравенств может состоять из неравенств, содержащих любой из символов $<, \leq, >, \geq$.

Определение. **Решением системы неравенств I степени с одним неизвестным** называется значение неизвестного, обращающее каждое неравенство системы в верное числовое неравенство.

- Решить систему неравенств значит найти множество ее решений.
- Множество решений неравенства обозначается, как правило, буквой S и является пересечением множеств решений неравенств этой системы.

1 Рассмотрите и дополните:

1) $\begin{cases} x > 2 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3.$

Ответ: $S = (3; +\infty)$.

2) $\begin{cases} x < -1 \\ x \geq 2. \end{cases}$

Система не имеет действительных решений.

Ответ: $S = \varnothing$.

3) $\begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 5.$

Ответ: $S = \square$.

4) $\begin{cases} x < 0 \\ x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \bigcirc \square.$

Ответ: $S = \square$.

2 Рассмотрите образец и закончите решение системы неравенств:

$\begin{cases} 8x - 9 < 6x - 3 \\ 2 - x > 4x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \square x < \square \\ \square x > \square \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \bigcirc \square \\ x \bigcirc \square \end{cases} \Leftrightarrow \square.$

Ответ: $S = \square$.

Образец:

$\begin{cases} 3 - 4x < 5 \\ 6 + 9x \leq 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x < 2 \\ 9x \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -\dfrac{1}{2} \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} < x \leq 1.$

Ответ: $S = \left(-\dfrac{1}{2}; 1\right]$.

Упражнения и задачи

1

1. *Истинно* или *Ложно?*

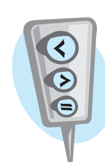
И/Л

$2\sqrt{2} > 3$ $\quad$ $1,(2) < 1,215$ $\quad$ $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3} > 3^{-1}$ $\quad$ $\sqrt{7} < \pi$ $\quad$ $2^3 < 3^2$

2. Известно, что $a, b \in \mathbb{R}$ и $a > b$. Сравните:

$\dfrac{a}{b} \bigcirc \dfrac{b}{3}$; $\quad -a \bigcirc -b$; $\quad a - 15 \bigcirc b - 15$;

$0,01a \bigcirc 0,01b$; $\quad \dfrac{a}{-5} \bigcirc \dfrac{b}{-5}$; $\quad b - a \bigcirc 0.$



3. Запишите три числа, которые принадлежат промежутку:
а) $(50; +\infty)$; б) $(-\infty; -3]$; в) $[1; 2)$.

4. Запишите все целые числа, принадлежащие промежутку:
а) $[-1{,}2; 0{,}3)$; б) $\left[\dfrac{3}{13}; \dfrac{13}{3}\right)$; в) $(\sqrt{3}; \pi]$.

5. Какие из чисел $\boxed{-2}$, $\boxed{3{,}5}$, $\boxed{0}$, $\boxed{5}$, $\boxed{\sqrt{10}}$ являются решениями неравенства $3x+5>15$?

6. Запишите неравенство и числовой промежуток, соответствующие рисунку:
а) 

б) 

в) 

г) 

7. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:
а) $5x-2\ge 13$; б) $8-4x>-32$; в) $2(1-x)\ge 4(3x+2)$; г) $2-3(x+2)\le 5-2x$.

8. Определите, являются ли числа -1; 0; 1; 15 решениями системы неравенств:
а) $\begin{cases} x>-4, \\ x<8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x-5>0, \\ x-14>0. \end{cases}$

9. Решите на множестве $\mathbb{R}$ систему неравенств:
а) $\begin{cases} -3x>9, \\ 4x<1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 11x+1\ge -5, \\ 2-3x<5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3-4x>5, \\ 6+9x\le 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x-6>2x, \\ 2x-6>5x; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 2x+1\le 13, \\ 9-2x<x. \end{cases}$

2

10. Разделите обе части неравенства $x<-6$ на число:
а) 4; б) –4; в) $\dfrac{1}{3}$; г) –3.

11. Известно, что $-3<a<2$. Заполните пропуски:
а) $\square < 2a < \square$; б) $\square < \dfrac{a}{2} < \square$; в) $\square < a-1 < \square$;
г) $\square < -3a < \square$; д) $\square < 2-a < \square$.

12. Составьте неравенство, множество решений которого равно:
а) $S=[-1; +\infty)$; б) $S=(-\infty; 2)$; в) $S=[-3; 1]$; г) $S=(0; 2]$.

13. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:
а) $\dfrac{3x-7}{6}\ge\dfrac{5-6x}{4}$; б) $\dfrac{x-1}{4}+\dfrac{x+3}{2}<1-\dfrac{x}{6}$; в) $(x-3)(x-6)<(x-1)(x-2)$.

14. При каких значениях неизвестного x значение выражения:
а) $-5(3x+2{,}2)-2$ неотрицательно; б) $3(0{,}5x-4)+8{,}5x$ отрицательно?

15. При каких значениях неизвестного y значение выражения $\dfrac{3y-2}{72}$:
а) положительно; б) не больше 3; в) не меньше –5?

16. Найдите наибольшее целое решение неравенства $x-\dfrac{x+1}{2}<\dfrac{x-3}{4}-\dfrac{x-2}{3}$.

17. При каких значениях неизвестного x имеет смысл выражение:
а) $\sqrt{\dfrac{2{,}5x-4}{6}}$; б) $\sqrt{\dfrac{5}{0{,}8x-3}}$?

18. Решите на множестве $\mathbb{R}$ систему неравенств:

а) $\begin{cases} 0{,}7x-3(0{,}2x+1)<0{,}5x+1, \\ 0{,}3(1-x)+0{,}8x>x+5{,}3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 17(3x-1)-50x+1<2(x+4), \\ 2(6-5x)<10(1-1{,}2x); \end{cases}$

в) $\begin{cases} (9x+3)(x-4)>9x^2+x+5, \\ 2x-3-(x-3)\le 5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 12x^2-(2x-3)(6x+1)>x, \\ (5x-1)(5x+1)-25x^2>x-6. \end{cases}$

19. Рассмотрите образец и найдите значения неизвестного x, при которых имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{5x-3}+\sqrt{1-2x}$;

б) $\sqrt{2x+8}-\dfrac{2}{\sqrt{3-12x}}$.

Образец:

Выражение $\dfrac{4}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{2x-1}$ имеет смысл,

если $\begin{cases} x+1>0 \\ 2x-1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x\ge \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x\ge \frac{1}{2}$.

Ответ: $x\in\left[\frac{1}{2};\ +\infty\right)$.

3

20. При каких значениях $a\in\mathbb{R}$ является истинным неравенство:

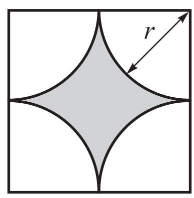
а) $a<|a|$; б) $-a<|a|$;

в) $-a<|-a|$; г) $a<|-a|$?

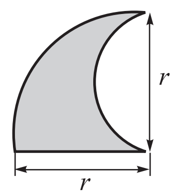
21. Пусть l – длина линии, ограничивающей закрашенную фигуру.

Заполните: $\square < l < \square$, если известно, что $2{,}5<r<2{,}6$.

а)



б)

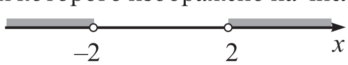


22. Изобразите на числовой оси множество решений неравенства:

а) $|x|>5$; б) $|x|\le 3$; в) $1\le |x|<2$.

23. Запишите неравенство, содержащее переменную под знаком модуля, множество решений которого изображено на числовой оси:

а)



б)

24. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

а) $\dfrac{12-3x}{|x|+6}\ge 0$; б) $\dfrac{-x^2-3}{7x+21}\ge 0$; в) $\left(\dfrac{3x^2+2}{5x-8}\right)^{-1}\le 0$.

25*. Определите значения действительного параметра m, при которых система неравенств $\begin{cases} x\le 2, \\ x\ge a: \end{cases}$

1) не имеет решений; 2) имеет одно решение ;

3) имеет множество решений $S=[a;\ 2]$; 4) имеет множество решений $S=[2;\ a]$.

26. Решите на множестве $\mathbb{R}$ систему неравенств:

а) $\begin{cases} 5x+8<3, \\ |x|\le 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x-7\le 9, \\ |x|>3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} |x|>5, \\ |x|\le 7. \end{cases}$

27. Температура воды, в которой можно купать младенца, должна быть не больше 38°C и не меньше 34°C. Сколько литров воды, температура которой 18°C, необходимо налить в ванную, в которой уже есть 10 л воды с температурой 80°C, чтобы в ней можно было искупать ребенка?

§ 4. Уравнения II степени с одним неизвестным

4.1. Понятие уравнения II степени с одним неизвестным

1 На Рождественские праздники каждый член семьи Григорьевых приготовил подарок для других членов этой семьи. Таким образом, под елкой оказалось 30 подарков. Сколько человек в семье Григорьевых?

Решаем

Пусть семья Григорьевых состоит из x человек. Тогда, каждый член семьи приготовил всего $(x-1)$ подарков. Значит,

$$x\cdot(x-1)=30 \Leftrightarrow \boxed{x^2-x-30=0}$$

уравнение II степени с одним неизвестным

$$x^2-x-30=0 \Leftrightarrow x^2-6x+5x-30=0 \Leftrightarrow x(x-6)+5(x-6)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-6)(x+5)=0 \Leftrightarrow x-6=0 \text{ или } x+5=0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x=6$ или $x=-5$ – не удовлетворяет смыслу задачи.

Ответ: Семья состоит из 6 человек.

Определение. Уравнение вида

$$\boldsymbol{ax^2+bx+c=0},$$

первый коэффициент (a), второй коэффициент (b), свободный член (c)

где $a\neq 0$, $a, b, c\in\mathbb{R}$, называется **уравнением II степени с одним неизвестным**.

При $b=0$, $c\neq 0$ имеем $ax^2+c=0$	При $b\neq 0$, $c=0$ имеем $ax^2+bx=0$	При $b=0$, $c=0$ имеем $ax^2=0$

неполные уравнения II степени с одним неизвестным

2 Рассмотрите и дополните:

а) $5x^2-7x-12=0;$
$a=5;\ b=-7;\ c=-12.$

б) $3x^2+2x-5=0;$
$a=$; $b=$; $c=$.

в) $\sqrt{2}x^2-x=0;$
$a=\sqrt{2};\ b=-1;\ c=0.$

г) $x^2-4=0.$
$a=$; $b=$; $c=$.

• Какие из уравнений а) – г) являются неполными?

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow \underset{\substack{\parallel\\ 1}}{\boxed{\frac{a}{a}}}x^2+\underset{\substack{\parallel\\ p}}{\boxed{\frac{b}{a}}}x+\underset{\substack{\parallel\\ q}}{\boxed{\frac{c}{a}}}=0,\quad a\neq 0,\quad a,b,c\in\mathbb{R}.$$

$x^2+px+q=0$ – приведенное уравнение II степени.

• Рассмотрите и дополните:

а) $3x^2+2x-1=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}=0$

$a=\square$; $b=\square$; $c=\square$; $p=\square$; $q=\square$.

б) $2x^2+6x+5 \Leftrightarrow x^2+\square x+\square=0$

$a=\square$; $b=\square$; $c=\square$; $p=\square$; $q=\square$.

4.2. Решение неполных уравнений II степени

4.2.1. Решение уравнений вида $ax^2+c=0,\ a\neq 0,\ a, c\in\mathbb{R}$

1 Учитель предложил учащимся решить уравнения:

а) Дима сразу же ответил, что первое уравнение не имеет решений. Вы согласны с ним? Обоснуйте.

б) Исследуйте и продолжите решение уравнения $3x^2-48=0$.

Решение:

I способ

$3x^2-48=0 \Leftrightarrow 3(x^2-16)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3(x+4)(x-4)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+4=0$ или $x-4=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\square$ или $x=\square$.

II способ

$3x^2-48=0 \Leftrightarrow 3x^2=48 \Leftrightarrow x^2=16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\square$ или $x=\square$.

Ответ: $S=\{\square;\square\}$.

в) $5x^2=0 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$

Ответ: $S=\{0\}$.

2 Рассмотрите и прокомментируйте схему:

$\boxed{ax^2+c=0}$, $a\neq 0$, $a, c\in \mathbb{R}$

$\Updownarrow$

$\boxed{x^2=-\dfrac{c}{a}}$

$\boxed{-\dfrac{c}{a}>0} \rightarrow \boxed{S=\left\{-\sqrt{-\dfrac{c}{a}};\ \sqrt{-\dfrac{c}{a}}\right\}}$

$\boxed{-\dfrac{c}{a}=0} \rightarrow \boxed{S=\{0\}}$

$\boxed{-\dfrac{c}{a}<0} \rightarrow \boxed{S=\varnothing}$

4.2.2. Решение уравнений вида $ax^2+bx=0,\ a\neq 0,\ a, b\in \mathbb{R}$

Рассмотрите образец и продолжите решение:

$2x^2+18x=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x\cdot(\square+\square)=0 \Leftrightarrow \square=0$

или $\square+\square=0 \Leftrightarrow x=\square$

или $x=\square$.

Ответ: $S=\{\square;\ \square\}$.

Образец:

$3x^2-x=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(3x-1)=0 \Leftrightarrow x=0$

или $3x-1=0 \Leftrightarrow x=0$,

или $x=\dfrac{1}{3}$.

Ответ: $S=\left\{0;\ \dfrac{1}{3}\right\}$.

4.3. Формула решения уравнения II степени с одним неизвестным

1 Рассмотрите решение:

а) $x^2+4x-5=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{(x^2+2\cdot 2x+2^2)}_{(x+2)^2}-2^2-5=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+2)^2-9=0 \Leftrightarrow (x+2)^2=9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+2=3$ или $x+2=-3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=1$ или $x=-5$.

Ответ: $S=\{-5;\ 1\}$.

б) $x^2-7x+15=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[x^2-2\cdot\dfrac{7}{2}x+\left(\dfrac{7}{2}\right)^2\right]-\left(\dfrac{7}{2}\right)^2+15=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x-\dfrac{7}{2}\right)^2-\dfrac{49}{4}+15=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x-\dfrac{7}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x-\dfrac{7}{2}\right)^2=-\dfrac{11}{4}$.

Ответ: $S=\varnothing$.

В общем случае получим:

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \Leftrightarrow \left[x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+\frac{c}{a}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\boxed{b^2-4ac}}{\boxed{4a^2}}$$

b^2-4ac ← ?

$4a^2$ ← положительное число

Δ – *дельта*, буква греческого алфавита → $\boxed{\Delta=b^2-4ac}$ ← **Дискриминант** уравнения $ax^2+bx+c=0,\ \ a\neq 0,\ \ a,\ b,\ c\in \mathbb{R}$

$\boxed{\Delta<0}$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2<0$$

$$\boxed{S=\varnothing}$$

$\boxed{\Delta>0}$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

или $x+\dfrac{b}{2a}=\dfrac{-\sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow$

$$x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ или } x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\boxed{S=\left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a},\ \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}}$$

$\boxed{\Delta=0}$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{x=-\frac{b}{2a}}$$

$$\boxed{S=\left\{-\frac{b}{2a}\right\}}$$

2 Рассмотрите и заполните пропуски, продолжив решение каждого уравнения:

а) $5x^2-3x-2=0;$

$a=5;\ b=-3;\ c=-2.$

$\Delta=(-3)^2-4\cdot5\cdot(-2)=49>0;$

$x_1=\dfrac{3+\sqrt{49}}{10};\ x_2=\dfrac{3-\sqrt{49}}{10}.$

$x_1=1;\ x_2=-\dfrac{2}{5}.$

Ответ: $S=\left\{-\dfrac{2}{5};1\right\}.$

б) $4x^2-12x+9=0;$

$a=4;\ b=-12;\ c=9.$

$\Delta=(-12)^2-4\cdot4\cdot9=0;$

$x=\dfrac{12}{8}.$

$x=\square.$

Ответ: $S=\{\square\}.$

в) $x^2-5x+7=0;$

$a=1;\ b=-5;\ c=7.$

$\Delta=(-5)^2-4\cdot1\cdot7=$

$=-3\ \bigcirc\ \square.$

Ответ: $S=\square.$

Замечание. Если второй коэффициент уравнения II степени с одним неизвестным является четным числом, то есть, $b = 2p$, то для решения уравнения можно использовать формулу: $x_1 = \dfrac{-p + \sqrt{\dfrac{\Delta}{4}}}{a}$; $x_2 = \dfrac{-p - \sqrt{\dfrac{\Delta}{4}}}{a}$, где $\dfrac{\Delta}{4} = p^2 - ac > 0$.

Из истории

Папирусы и другие найденные исторические документы доказывают, что уравнения II степени решали еще в Древнем Вавилоне (около 2000 лет до нашей эры).

Древнегреческие математики решали некоторые виды уравнений II степени с помощью геометрической интерпретации.

Общее правило решения уравнения II степени сформулировал немецкий математик М. Штифель (1486–1567). Французский математик Ф. Виет (1540–1603) вывел формулу решения уравнения II степени, но утверждения ученого распространялись только на положительные решения (он не знал об отрицательных числах).

Франсуа Виет

4.4. Соотношения Виета

1 Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

1) $x^2 - 3x + 2 = 0$; 2) $2x^2 - 7x + 3 = 0$.

Исследуем

Уравнение

1. $x^2 - 3x + 2 = 0$

Решения

$x_1 = 1$; $x_2 = 2$

$-(x_1 + x_2)$ $x_1 \cdot x_2$

$x_1 + x_2 = 3$ $x_1 \cdot x_2 = 2$

Соотношения Виета

Уравнение

2. $2x^2 - 7x + 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - \dfrac{7}{2}x + \dfrac{3}{2} = 0$

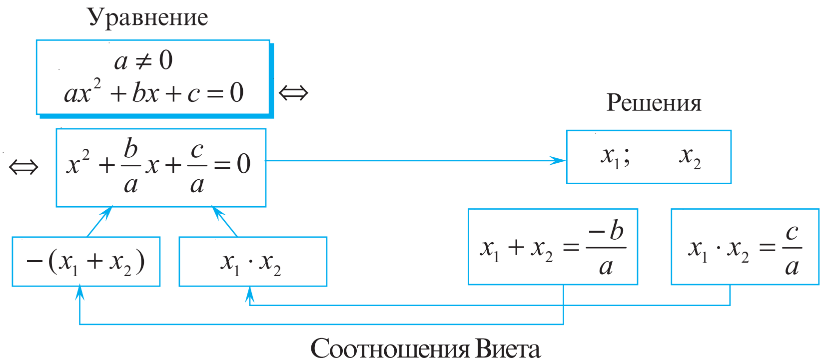
Решения

$x_1 = \dfrac{1}{2}$; $x_2 = 3$

$-(x_1 + x_2)$ $x_1 \cdot x_2$

$x_1 + x_2 = \dfrac{7}{2}$ $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{3}{2}$

Соотношения Виета



Теорема. Если числа x_1 и x_2 являются решениями уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, то $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$

Доказательство:

Если x_1 и x_2 – решения уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, где $\Delta = b^2 - 4ac > 0$.

$$\boxed{x_1 + x_2} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta} - b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \boxed{-\frac{b}{a}};$$

$$\boxed{x_1 \cdot x_2} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{\cancel{b^2} - \cancel{b^2} + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \boxed{\frac{c}{a}},$$

ч.т.д. ►

Для приведенного уравнения II степени $x^2 + px + q = 0$, решениями которого являются x_1 и x_2, имеем $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$

Теорема, обратная теореме Виета. Если действительные числа x_1 и x_2 удовлетворяют соотношениям $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 \cdot x_2 = q$, то x_1 и x_2 являются решениями уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Доказательство:

Имеем, $x^2 + px + q = 0$, $-p = x_1 + x_2$, $q = x_1 \cdot x_2$.

Получим $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$.

При $x = x_1$ имеем: $x_1^2 - (x_1 + x_2) \cdot x_1 + x_1 \cdot x_2 = x_1^2 - x_1^2 - x_1 \cdot x_2 + x_1 x_2 = 0$ – Истинно. Значит, x_1 – решение данного уравнения.

При $x = x_2$ имеем: $\square$ – Истинно, ч.т.д. ►

2 Исследуйте и заполните пропуски:

а) Составим приведенное уравнение II степени по его множеству решений $S = \{-2;\ 7\}$:

$x_1 = -2;\ x_2 = 7.$ $\quad x_1 + x_2 = \square;\quad x_1 \cdot x_2 = \square.$

$$x^2 \bigcirc \square\, x \bigcirc \square = 0.$$

Ответ: $x^2 \bigcirc \square\, x \bigcirc \square = 0.$

б) Применяя соотношения Виета, найдите решения уравнения:

$x^2 - 11x + 24 = 0$

$x_1 + x_2 = 11;\quad x_1 \cdot x_2 = 24$

$3 + 8 = 11 \quad 3 \cdot 8 = 24$

$S = \{3;\ 8\}.$

$x^2 - 3x - 10 = 0$

$x_1 + x_2 = 3;$

$x_1 \cdot x_2 = -10.$

$S = \{\square;\ \square\}.$

$x^2 + 5x - 14 = 0$

$x_1 + x_2 = \square;$

$x_1 \cdot x_2 = \square.$

$S = \{\square;\ \square\}.$

• Дано уравнение $x^2 + px + q = 0$.
Заполните таблицу:

x_1	x_2	p	q
2	–3		
–2		5	
	4	–2	
3			18
	1		–7

Интересно и полезно

Соотношения Виета можно применять в устном счете не только для нахождения решений приведенного уравнения II степени, но и для полного уравнения II степени, у которого есть решения.

Решим уравнение:

а) $\boxed{7}\,x^2 - 2x - 5 = 0$

$y^2 - 2y - 35 = 0$

$y_1 = 7;\ y_2 = -5$

$x_1 = \frac{7}{7};\ x_1 = 1;\ x_2 = -\frac{5}{\boxed{7}}.$

Проверьте!

Ответ: $S = \left\{-\frac{5}{7};\ 1\right\}.$

б) $\boxed{2}\,x^2 + 3x - 9 = 0$

-18

$x_1 = \frac{-6}{2};\ x_1 = -3;\ x_2 = \frac{3}{2}.$

Ответ: $S = \{\square;\ \square\}.$

в) $\boxed{4}\,x^2 + x - 5 = 0$

-20

$x_1 = \frac{\square}{4};\ x_2 = \frac{\square}{4};$

$x_1 = \square;\ x_2 = \square.$

Ответ: $S = \{\square;\ \square\}.$

4.5. Разложение на множители выражений вида $ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$

1 Запишите выражение $3(x-2)\left(x-\frac{1}{3}\right)$ в виде $ax^2+bx+c,\ a\neq 0$.

Решение:

$$3(x-2)\left(x-\frac{1}{3}\right)=3x^2-x-6x+2=\boxed{3x^2-7x+2}.$$

• Разложите на множители выражение $3x^2-7x+2$.

Решение:

Решим уравнение $3x^2-7x+2=0$.

Вычислим $\Delta=49-24=25$. Тогда

$$x_1=\frac{7+5}{6};\quad x_2=\frac{7-5}{6};\quad x_1=2;\ x_2=\frac{1}{3}.$$

Получим $3x^2-7x+2=3(x-2)\left(x-\frac{1}{3}\right)$.

> Если $a\neq 0$ и $\Delta\geq 0$, то $\boldsymbol{ax^2+bx+c=a\,(x-x_1)(x-x_2)}$, где $a\neq 0,\ a, b, c\in\mathbb{R}$, а x_1 и x_2 – действительные решения уравнения $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$.

В каком случае выражение вида $ax^2+bx+c,\ a\neq 0$, нельзя разложить на множители?

2 Рассмотрите и дополните.

Разложим на множители выражения:

а) $-2x^2-3x+2$;

Решим уравнение

$-2x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow 2x^2+3x-2=0$.

$\Delta=9+16=25$. Значит,

$x_1=\frac{1}{2};\ x_2=-2$. Тогда

$$\boxed{-2}x^2-3x+2=\boxed{-2}\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2)=$$

$$a\quad (x-x_1)(x-x_2)$$

$=(-2x+1)(x+2)$.

б) $7x^2+9x+2$.

Решим уравнение $7x^2+9x+2=0$.

$x_1=\square;\ x_2=\square$.

$$\boxed{7}x^2+9x+2=\boxed{}\,(x\ \bigcirc\ \square)(x\ \bigcirc\ \square)=$$

$$a\quad (x-x_1)(x-x_2)$$

$=(\square\ \bigcirc\ \square)(\square\ \bigcirc\ \square)$.

Упражнения и задачи

1

1. Даны уравнения: $\boxed{\sqrt{x}+x-3=0}$ $\boxed{2x^2-3x+1=0}$ $\boxed{3x+5=0}$ $\boxed{3x^2-5=0}$ $\boxed{\frac{x^2}{2}-8x=0}$ $\boxed{(2\sqrt{2}-\sqrt{8})x^2+2x-\sqrt{2}=0}$

Выберите уравнения II степени с одним неизвестным и запишите их в тетрадь.

2. Какие из чисел –7; –5; 5; 7 являются решениями уравнения $x^2+2x-35=0$?

3. Покажите, что числа $1-\sqrt{2}$ и $1+\sqrt{2}$ являются решениями уравнения $x^2-2x-1=0$.

4. Укажите коэффициенты a, b и свободный член c уравнения:
а) $3x^2-4x-4=0$; б) $x^2-x-2=0$; в) $7x^2-1=0$;
г) $5x^2+3x=0$; д) $8x-x^2+2=0$; е) $4x^2+x+\sqrt{5}-2=0$.

5. Запишите уравнения II степени с коэффициентами:
а) $a=3$; $b=6$; $c=-2$; б) $a=2$; $b=-1$; $c=5$; в) $a=1$; $b=2$; $c=-3$;
г) $a=2$; $b=5$; $c=0$; д) $a=-2$; $b=0$; $c=2$.
Определите, какие из полученных уравнений являются полными уравнениями II степени.

6. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неполные уравнения II степени:
а) $3x^2-12=0$; б) $2x^2-5x=0$; в) $5x^2+8=0$;
г) $10x^2=0$; д) $x^2+x=0$; е) $x^2-0{,}99=1{,}01$;
ж) $4x^2-12x=0$; з) $3x^2+\sqrt{3}x=0$; и) $\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{3}=0$.

7. Вычислите дискриминант уравнения, определите, имеет ли уравнение решение на множестве $\mathbb{R}$. Найдите эти решения, в случае, если они существуют:
а) $x^2-7x-18=0$; б) $3x^2-5x+2=0$; в) $3x^2-11x+10=0$;
г) $4x^2-4x+1=0$; д) $x^2+3x+5=0$; е) $2x-x^2+3=0$;
ж) $1-x-6x^2=0$; з) $25x^2+10x+1=0$; и) $x^2+7x-1=0$.

8. Применив соотношения Виета, найдите сумму и произведения решений уравнения:
а) $x^2-14x+13=0$; б) $x^2+12x+35=0$; в) $7x^2-2x-14=0$.

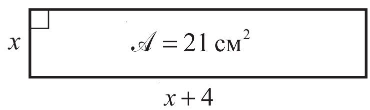
2

9. Найдите действительное значение x, при котором равенство будет верным (округлите результат до десятых):
а) $x^2-6x-1=0$; б) $x^2+5x=x-1$; в) $x^2-x=x+2$.

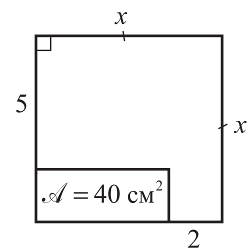
10. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:
а) $3(x-2)^2=2x+4$; б) $(x+2)^2=x(3x+2)$; в) $(3x+4)^2-(x-5)^2=-9$;
г) $(3x-2)(x+6)=-9$; д) $(x+2)^2=8(3x+8)$; е) $\frac{(4x+1)^2}{5}=3x+\frac{7x-1}{3}$.

11. Используя данные рисунка, найдите x:

а)



б)



12. **Практическая работа**

1. Заполните таблицу:

а)

Уравнение	$a+b+c$	Решения
$x^2+x-2=0$		
$x^2-3x+2=0$		
$2x^2-5x+3=0$		
$5x^2-7x+2=0$		

б)

Уравнение	$a-b+c$	Решения
$x^2+5x+4=0$		
$3x^2-7x-10=0$		
$-9x^2-4x+5=0$		
$13x^2+6x-7=0$		

2. Сделайте вывод:

Если $a+b+c=$ ☐, то $x_1=$ ☐, $x_2=$ ☐.

Если $a-b+c=$ ☐, то $x_1=$ ☐, $x_2=$ ☐.

13. Запишите приведенное уравнение II степени по множеству его решений:

а) $S=\{-3;\ 4\}$; б) $S=\{2;\ 7\}$; в) $S=\{-2;\ -5\}$;

г) $S=\{2-\sqrt{3};\ 2+\sqrt{3}\}$; д) $S=\left\{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$; е) $S=\varnothing$.

14. Применив соотношения Виета, решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $x^2-5x+6=0$; б) $x^2+11x+18=0$;

в) $x^2+5x-14=0$; г) $x^2-4x-21=0$;

д) $x^2+6x-40=0$; е) $x^2-x-12=0$;

ж) $x^2+8x+7=0$; з) $x^2-(5-\sqrt{3})x-5\sqrt{3}=0$;

и) $x^2-(8-\sqrt{15})x+5(3-\sqrt{15})=0$.

15. Разложите на множители, если это возможно, выражение:

а) $x^2-10x+21$; б) $6x^2-11x+3$; в) $3x^2+7x-6$;

г) $-2x^2+3x+2$; д) $4x^2+x+1$; е) $2x^2+4x-5$.

16. Упростите отношение:

а) $\dfrac{x^2-1}{5x^2-4x-1}$; б) $\dfrac{x^2+6x+5}{x^2+5x}$; в) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-5x+4}$.

3

17. Камень, брошенный с начальной скоростью 20 м/сек, летит согласно правилу $s = vt - 5t^2$. Через сколько секунд камень окажется на высоте 15 м?

18. ***Задача древности***

Найдите длину стороны квадрата, зная, что, если из значения его площади вычесть значение искомой длины, то получим 870.

19. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнения[1]:

а) $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$;

б) $5x^4 - 2x^2 - 3 = 0$;

в) $6x^4 - 5x^2 + 1 = 0$;

г) $3x^4 - 10x^2 + 3 = 0$.

Образец:

$4x^4 + 7x^2 - 2 = 0$. Fie $x^2 = t,\ t \geq 0$;

$4t^2 + 7t - 2 = 0;\ \Delta = 81$;

$t_1 = \frac{1}{4};\ t_2 = -2$ – не удовлетворяет условию $t \geq 0$.

$x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ или $x = -\frac{1}{2}$.

Ответ: $S = \left\{-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right\}$.

20*. Найдите действительный параметр m и второе решение уравнения, если:

а) $x^2 + mx - 15 = 0$ и $x_1 = -5$; б) $2x^2 + 3x + m = 0$ и $x_1 = 3$.

21. Найдите значения действительного параметра m, при которых уравнение будет иметь одно решение:

а) $x^2 - mx + 9 = 0$; б) $x^2 + 3mx + m = 0$;

в) $2x^2 - 2x + m = 0$; г) $9x^2 - 2x + m = 6 - mx$.

22. Дно бассейна имеет форму прямоугольника со сторонами 6 м и 9 м. Вокруг бассейна проложили дорожки одинаковой ширины. Площадь дорожек равна площади дна бассейна. Найдите ширину дорожек.

23. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $\frac{x^3}{|x|} + x + 2 = 0$; б) $x^2 - \frac{x^2}{|x|} - 6 = 0$;

в) $x^2 - 10 = 3|x|$; г) $x^2 + |x| + x = 63$.

24. x_1 и x_2 – решения уравнения $x^2 - 13x + 14 = 0$. Найдите, не решая уравнения, значение выражения:

а) $(x_1 + x_2)^2$; б) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; в) $x_1^2 + x_2^2$; г) $(x_1 - x_2)^2$.

25. При каких значениях $a \in \mathbb{R}$:

а) $2x^2 - 5x + a = (2x + 3) \cdot E(x)$; б) $-4x^2 + ax + 1 = (x - 1) \cdot E(x)$,

где $E(x)$ – выражение от x.

[1] Уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0,\ a \neq 0,\ a, b, c \in \mathbb{R}$, называется **биквадратным уравнением**.

Упражнения и задачи на повторение

1

1. Выразите переменную y через переменную x и найдите три действительных решения уравнения:

а) $2x-y=7$; б) $x+2y=12$; в) $-8x+2y=6$.

2. Решите на множестве действительных чисел систему уравнений:

а) $\begin{cases} x-y=0, \\ 5x+y=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x-y=1, \\ 8x-2y=3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x+3y=1, \\ 2x-5y=9. \end{cases}$

3. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

а) $2(3-2x)+3(2-x)\le -2$; б) $4(2-3x)-3(4-2x)>2$.

4. Решите на множестве $\mathbb{R}$ систему неравенств:

а) $\begin{cases} 3x+5>11, \\ x+7<12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3(x-4)<-3, \\ 5-2x>1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x-17>13, \\ 19-2x>21. \end{cases}$

5. Для каждого уравнения определите номер соответствующего конверта:

$3x^2+30=0$	$x^2-6x-16=0$	$x^2-6x=0$	$x^2-10x+25=0$

1	2	3	4
Одно из решений равно 0.	Имеет единственное решение.	Не имеет решений на множестве $\mathbb{R}$.	$\begin{cases} x_1+x_2=6, \\ x_1\cdot x_2=16. \end{cases}$

6. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $2x^2+x-6=0$; б) $3x^2+4x-4=0$; в) $7-6x-9x^2=8$;

г) $2(x-1)^2=3x+2$; д) $(x-2)(x+3)=24$; е) $(x-3)(x+2)=14$.

7. Составьте приведенное уравнение II степени по его решениям:

а) $x_1=-5;\ x_2=2$; б) $x_1=-7;\ x_2=-3$; в) $x_1=4;\ x_2=6$.

2

8. Изобразите график уравнения:

а) $4x-3y=6$; б) $2x+3y=3$.

9. Решите графическим методом систему уравнений:

а) $\begin{cases} x+y=4, \\ 3x+y=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=5, \\ x-y=1. \end{cases}$

10. Решите двумя способами систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x-y=3, \\ x+2y=4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-2y=4, \\ 2x+4y=8. \end{cases}$

11. Найдите наименьшее натуральное решение неравенства $\frac{x+4}{7}-\frac{x+7}{4}<-3$.

12. При каких значениях x, $f(x)>0$, $f(x)<3$, $f(x)\ge 5$, если $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=-3x+7$; б) $f(x)=\frac{5-4x}{2}$?

13. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $x-\frac{2x+1}{4}\ge\frac{4x-3}{3}$.

14. Найдите действительные значения x, при которых одновременно имеют место неравенства:

а) $1-2x\geq -3$ и $1+2x\leq 4$; б) $4x-2\geq -1$ и $4x-2<5$.

15. Найдите значения x, при которых имеет смысл выражение $\sqrt{0{,}7+\frac{x}{4}}+\frac{5}{\sqrt{2-0{,}4x}}$.

16. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $(x-1)^2+(x+2)^2-(x-2)(x+2)=24$;

б) $(x-2)^2+(x+1)^2-(x-1)(x+1)=14$;

в) $\frac{1-x^2}{4}=1-\frac{2x+1}{3}$; г) $\frac{x^2-1}{3}-2=\frac{2x-1}{5}$.

17. x_1 и x_2 – решения уравнения $2x^2-7x-3=0$.
Составьте уравнение II степени, решениями которого являются числа:

а) x_1-2 и x_2-2; б) $2x_1+3$ и $2x_2+3$; в) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$.

18. Найдите значение выражения:

а) $\frac{49-x^2}{x^2-6x-7}$ при $x=999$; б) $\frac{x^2-11x+10}{20+8x-x^2}$ при $x=101$.

3

19. При каких значениях m, $m\in\mathbb{R}$, система $\begin{cases}3x-y=5\\x+my=1\end{cases}$ не имеет решений?

20. Для приготовления торта „ Радость” необходимы: мука, сметана, сахар и масло. Известно, что на торт весом 800 г сметаны израсходовали на 180 г меньше, чем муки, и на 40 г больше, чем сахара. Масла понадобилось в 7 раз меньше сметаны. Найдите количество каждого ингредиента.

21. Турист поднимается в гору со скоростью 3 км/ч, спускается со скоростью 5 км/ч. Найдите расстояние, пройденное туристом, если путь в гору на 1 км длиннее пути под гору, а на весь путь турист затратил 3 часа.

22. Сколько килограммов конфет по цене 78 леев за кг можно добавить к 2 кг конфет по цене 54 лея, чтобы цена конфетного ассорти была не меньше 60 леев и не больше 68 леев?

23. В соревнованиях участвуют несколько команд. Каждая команда должна сыграть поочередно со всеми командами. Сколько команд участвуют в соревнованиях, если всего состоятся 45 игр?

24. Найдите значения действительного параметра a, при которых уравнение:

а) $2x^2-5x+a=0$ не имеет решений;

б) $ax^2-(a+1)x+2a-1=0$ имеет одно решение.

Проверочная работа

Время выполнения работы: 45 минут

Вариант 1

1. Найдите одно решение уравнения: 1
$$2x + y = 5.$$

2. Решите на множестве действительных чисел систему уравнений 1 $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ x + y = -4. \end{cases}$

3. Найдите все целые решения системы неравенств 2 $\begin{cases} 3x - 2 < 7, \\ 4 - 2x \le 3x + 14. \end{cases}$

4. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение: 3

   а) $6x^2 + 0{,}5x = 0$;

   б) $3x^2 + 13x - 10 = 0$;

   в) $5x(5x + 2) + 3 = 2$.

5. Составьте уравнение II степени по множеству его решений $S = \{3 - \sqrt{2}; 3 + \sqrt{2}\}$. 1

6. На платформу были погружены дубовые и сосновые бревна, всего 300 бревен. Известно, что все дубовые бревна весили на 1 т меньше, чем все сосновые. Определите, сколько было дубовых и сколько сосновых бревен, если каждое бревно из дуба весит 46 кг, а каждое сосновое бревно – 28 кг. 2

Вариант 2

1. Найдите одно решение уравнения:
$$x - 2y = 1.$$

2. Решите на множестве действительных чисел систему уравнений $\begin{cases} 3x + y = -1, \\ x - y = 5. \end{cases}$

3. Найдите все целые решения системы неравенств $\begin{cases} 2x + 5 \le 11, \\ 4 - 3x < 2x + 9. \end{cases}$

4. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

   а) $5x^2 + 0{,}2x = 0$;

   б) $5x^2 - 6x + 1 = 0$;

   в) $3x(3x - 2) + 7 = 6$.

5. Составьте уравнение II степени по множеству его решений $S = \{1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3}\}$.

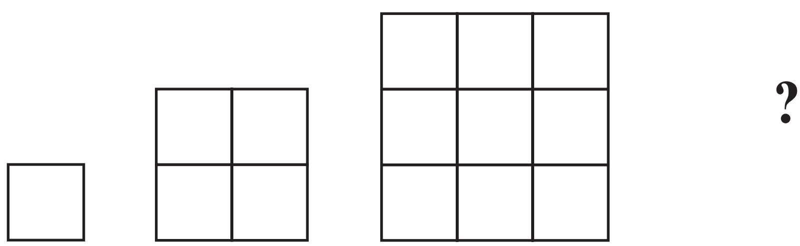
6. В двух баках – 140 л воды. Когда из первого бака взяли 26 л, а из второго – 60 л воды, то в первом баке осталось в 2 раза больше воды, чем во втором. Сколько литров воды было в каждом баке первоначально?

5 глава Функции. Последовательности

§1. Понятие функции. Повторение и дополнения

1.1. Понятие функции

1 Установите закономерность и постройте следующую фигуру.



$(1\ \text{см})^2$ $(2\ \text{см})^2$ $(3\ \text{см})^2$ $(4\ \text{см})^2$

2 В таблице записаны расстояния, пройденные автомобилем за 1 час; 2 часа; 3,5 часа; 4 часа; 4,5 часа.

t, часы	1	2	3	3,5	4	4,5
s, км	85	190	280	330	420	475

В задачах **1** и **2** рассмотрены зависимости между элементами двух множеств $\mathbb{N}^*$ и $\mathbb{N}^*$; $\{1;\ 2;\ 3;\ 3{,}5;\ 4;\ 4{,}5\}$ и $\mathbb{R}$.

Такого вида ***зависимости*** называются ***функциональными***.

Определение. Пусть X и Y – два непустых множества (конечные или бесконечные). Говорят, что **функция определена на множестве** X **со значениями во множестве** Y, если задано правило (закон), по которому каждому элементу из множества X ставится в соответствие единственный элемент множества Y.

Обозначение $f\colon X \to Y$ читают как „функция f, определенная на множестве X, со значениями во множестве Y” или „функция f из X в Y”.

Таким образом, в задачах **1** и **2** можно определить функции $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ и $g: \{1; 2; 3; 3{,}5; 4; 4{,}5\} \to \mathbb{R}$.

• Рассмотрите и дополните:

Элементы функции $f: X \to Y$

Область значений функции

Пусть дана функция $f: X \to Y$ и произвольный элемент x множества X.

Если $y \in Y$ и функция f ставит в соответствие элементу x элемент y, то говорят, что x – **аргумент** (или **независимая переменная**) **функции**, а y – ***значение функции*** f ***в точке*** x.
Обозначают $y = f(x)$ и читают как „y равен f от x“.
Еще говорят „y функция от аргумента x“.

Определение. Множество $E(f) = \{y \mid y = f(x),\ x \in X\}$ называется **множеством значений функции** f.

Имеем $E(f) \subseteq Y$.

1.2. Способы задания функции

• Проанализируйте и дополните.

Способы задания функции

Синтетический способ

Аналитический способ

Таблица, которая называется

Диаграмма

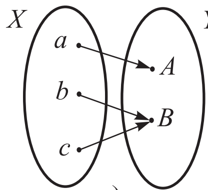
График

• Заполните таблицу значений (см. задачу **1**):

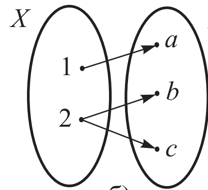
x	1	2	3	4	5	6
$y = f(x)$	1	4	9			

Функцию можно задать и словесно. Приведите примеры!

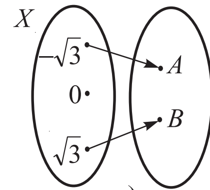
• Какая из следующих диаграмм задает функцию? Объясните.



а)



б)



в)

• а) Какая из следующих таблиц задает функцию?

x	–3	–2	–1	0	1
$f(x)$	6	4	2	0	–2

①

x	5	3	2	1	0	–1
$g(x)$	10	8	7	6	5	4

②

x	A	B	C	D	E	F
$h(x)$	10	10	10	10	10	10

③

б) Запишите с помощью формулы каждую из функций, заданных в пункте а).

Объясняем

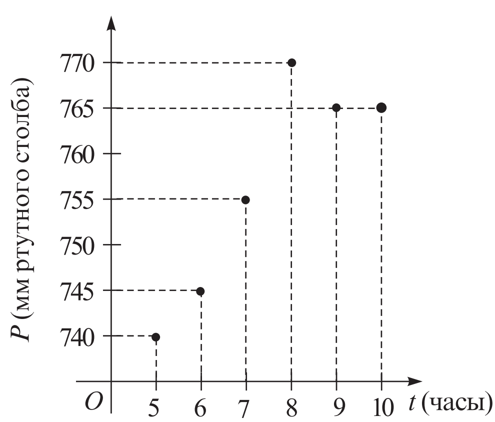
1. $f\colon \underbrace{\{-3, -2, -1, 0, 1\}}_{D(f)} \to \underbrace{\{6, 4, 2, 0, -2\}}_{E(f)},\ \underbrace{f(x) = -2x}_{\text{Формула}};$

2. g: ______ $\to$ ______, $g(x) =$ ______;

3. h: ______ $\to$ ______, $h(x) =$ ______.

1.3. График функции

• Метеорологическая служба регистрировала каждый час атмосферное давление, и результаты были записаны в виде графика.



Минимальное атмосферное давление было зарегистрировано в часов.

Максимальное атмосферное давление было зарегистрировано в часов.

В 7 часов атмосферное давление достигло .

В период с до часов атмосферное давление не менялось.

В какой период времени атмосферное давление поднималось? А в какой – падало?

• Задает ли изображенный график функцию?

Объясняем

Представленный график задает функцию вида $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, так как каждому часу x, $x \in \mathbb{N}$, соответствует единственное значение атмосферного давления y, $y \in \mathbb{N}$.

Определение. Функция $f: X \to Y$, где X и Y – числовые множества, называется **числовой функцией**.

Областью определения числовой функции может быть конечное или бесконечное числовое множество.

$$g: \underbrace{\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}}_{\operatorname{card} D(g) = 7} \to \{5\}; \qquad h: \underbrace{\mathbb{R}}_{D(h) \text{ – бесконечное числовое множество}} \to \mathbb{R}^*_+,$$

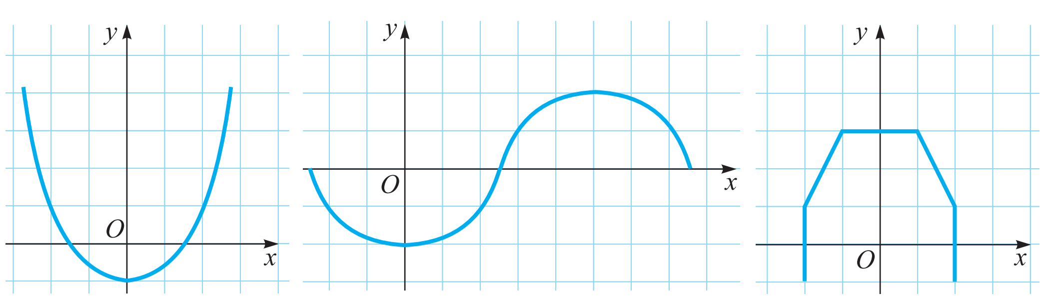
Графиком числовой функции $f: X \to Y$ является фигура, образованная точками (x, y), где $x \in X$ и $y = f(x) \in Y$.

График функции f обозначается через G_f.

Значит, $G_f = \{(x, y) \mid x \in X,\ y = f(x) \in Y\}$.

Равенство $y = f(x)$ называется ***уравнением графика функции*** f.

• Рассмотрите рисунки и определите, какие из следующих графиков задают функцию. Объясните.



① ② ③

Упражнения и задачи

1 □ □

1. 1) Прочтите функцию:

а) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$; б) $g: \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 8, 27, 64\}$;

в) $h: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$; г) $p: \mathbb{R} \to \{10\}$.

2) Укажите элементы функции.

3) Найдите область определения и область значений функции.

2. Заполните соответственно пропуски:

а) $f: \{-1; -0{,}5; 0; 0{,}5; 1\} \to \{-5; \square; \square; \square; \square; \}$, $f(x) = 5x$;

б) $g: \{-\sqrt{5}, -2, 1, \sqrt{5}, \sqrt{7}\} \to \{\square\}$, $g(x) = 2$;

в) $h: \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}\right\} \to \{\square, \square, \square, \square, \square\}$, $h(x) = \frac{1}{x}$.

3. Поезд, движущийся со скоростью 80 км/час, проходит расстояние s км за t часов. Запишите формулу зависимости s от t. Найдите значение функции, соответствующее значению аргумента, равному 2,5; 1,2 и 0,6.

4. Площадь прямоугольника со сторонами 8 см и x см равна A см^2. Задайте формулой зависимость A от x. Найдите значение функции, соответствующее значению аргумента $x \in \{2; 4{,}5; 10\}$.

5. Дана функция $f: \{-4; -0{,}5; 0; 1; 2; 5\} \to \mathbb{R}$:

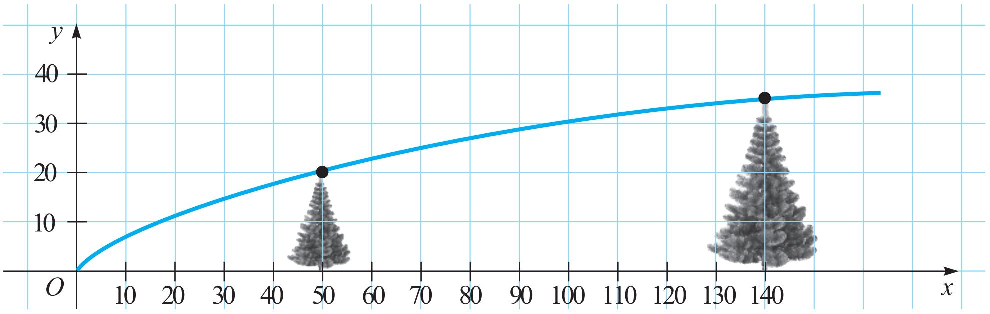
а) $f(x) = 2x + 1$; б) $f(x) = 2x^2$; в) $f(x) = 3 - x$.

1) Заполните таблицу значений функции f.

2) Определите $D(f)$ и $E(f)$.

3) Задайте функцию f в виде диаграммы.

6. Зависимость между высотой елки y (в мм) и ее возрастом (в годах), задана графиком:



а) Найдите высоту елки в возрасте: 10 лет; 30 лет; 100 лет.

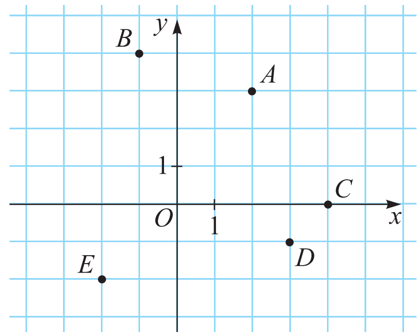
б) На сколько выросла елка в период с 10 до 50 лет; с 30 до 80 лет; от 100 до 140 лет?

7. а) Заполните соответственно пропуски:

$A(\square;\square)$, $B(\square;\square)$, $C(\square;\square)$, $D(\square;\square)$,
$E(\square;\square)$.

б) Отметьте в заданной прямоугольной системе координат точки:

$F(-2;3)$; $G(1{,}5;0)$; $H(0;-4)$;
$K(3{,}5;-2)$; $L(-4;-3)$.



2

8. Составьте и заполните таблицу значений функции:

а) $f: \{a \mid |a| \le 3,\ a \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{Z},\ f(x) = 1 - x$;

б) $g: \left\{\frac{a}{2} \mid a < 5,\ a \in \mathbb{N}\right\} \to \mathbb{Q},\ f(x) = \frac{1}{2x+1}$;

в) $h: \{a^2 \mid -2 \le a < 4,\ a \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{N},\ f(x) = x^2 + 1$.

9. Функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задана аналитически формулой:

а) $f(x) = -2x + 3$; б) $f(x) = x^2 - 2$.

1) Найдите, для каких значений аргумента x значение функции f равно:

а) 2; б) 0; в) 7.

2) Составьте и заполните таблицу значений функции f для $x \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

3) Задайте графически функцию f, используя таблицу значений, составленную в пункте 2).

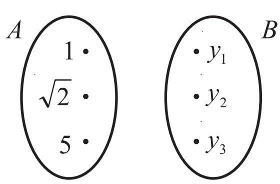
10. Проверьте, принадлежит ли точка:

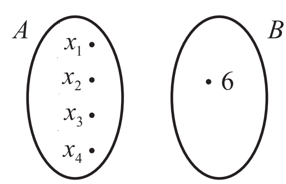
1) $A\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$; 2) $O(0, 0)$; 3) $B(-3, 9)$

графику функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = -\frac{x}{2}$; б) $f(x) = -2x$; в) $f(x) = x^2$.

11. Задайте все функции, определенные на множестве A, со значениями на множестве B, если

а) 

б) 

12. Отметьте графически 8 точек, с координатами (x, y), если:

а) $y = 3x + 2$; б) $y = x^2 + 2$.

Что вы заметили?

13. Найдите множество значений и изобразите графически функцию:

а) $f: \{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{3}{x}$;

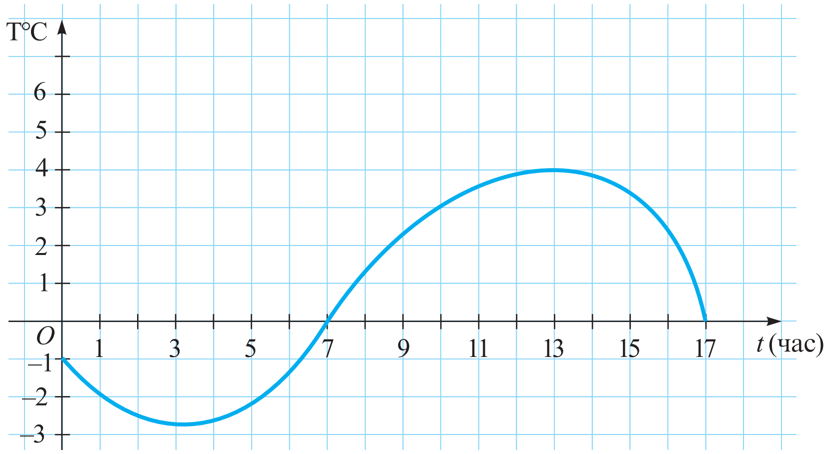
б) $f: \{-5, -3, -1, 1, 3, 5\} \to \mathbb{R},\ f(x) = -\frac{5}{x}$.

Что вы заметили?

14. Найдите область определения функции $f: D \to \mathbb{R}$, если:

а) $f(x) = 3{,}5x + 0,(8)$; б) $f(x) = \frac{1}{1-2x}$; в) $f(x) = 2x^2 + 3$; г) $f(x) = \frac{2x}{x+1}$.

15. На рисунке изображен график температуры воздуха первого дня весны.



а) Какая была температура в 2 ч; 5 ч;7 ч; 10 ч; 14 ч; 16 ч; 17 ч?

б) В какое время дня температура была –1°; 0°; 3°; 4°?

в) В какое время суток температура была минимальной, а в какое время – максимальной?

16. График функции f – ломаная линия $ABCD$, где $A(-1, -2)$, $B(0, 5)$, $C(4, 2)$, $D(7, 1)$. Изобразите график функции f и заполните таблицу

x	–1	0,5		5		6	
y			3		0,5		4

17. Приведите примеры функциональной зависимости:

а) из повседневной жизни; б) из физики; в) из химии; г) из географии.

3

18. Найдите $D(f)$, если:

а) $f(x) = \frac{2}{|x-2|-4}$; б) $f(x) = -\frac{|x|}{3|x|-3}$.

19. Найдите наименьшее значение функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

а) $f(x) = x^2 - 4x + 2$; б) $f(x) = 4x^2 - 4x + 3$.

20. Докажите, что функция $f: D(f) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 + 6x + 10}$, не может принимать отрицательные значения. Найдите $D(f)$.

21. Изобразите графически функцию $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = 3|x| - 1$, где $-4 \le x \le -3$; б) $f(x) = \frac{2}{|x|+2}$, где $-3 \le x \le 3$.

22. Составьте и решите по одному примеру, аналогичному упражнениям 17–21.

§2. Функция I степени

2.1. Понятие функции I степени и постоянной функции

• У Дана было 20 леев. Он приобрел x ручек по 1,5 лея, и у него осталось f леев. Запишите функцию в виде формулы, выражающей зависимость f от x. Какова область определения этой функции?

Решение:

За x ручек Дан заплатил $\square$ леев.

Тогда формулой, задающей функцию, соответственно является $f(x)=20-\square$ или $f(x)=-\square+20$, где $D(f)=\{1, 2, 3, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square\}$.

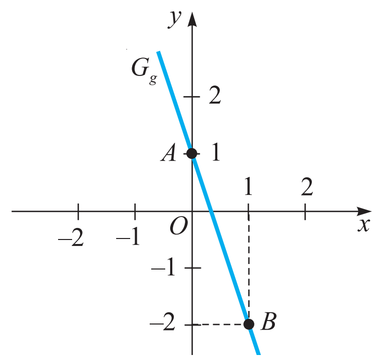
Полученная функция является функцией вида $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b$, где $a\in\mathbb{R}^*$, $b\in\mathbb{R}$.

Определение. Функция вида $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b$, где $a\neq 0$ и $a, b\in\mathbb{R}$, называется **функцией I степени**.

• Постройте график функции I степени $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=-3x+1$.

Решение:

Графиком функции g является прямая. Для построения этой прямой достаточно определить координаты ее $\square$ различных точек:



x	0	$\square$
$g(x)$	$\square$	–2

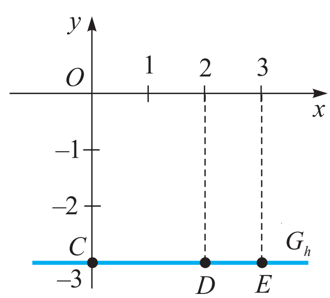
$A(0; \square)$, $B(\square; -2)$.

• Какую геометрическую фигуру представляет график функции $h\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ h(x)=-3$?

Объясняем

Для функции h имеем

x	0	2	3
$h(x)$	–3	–3	–3



Значит, $C(0, -3)$, $D(\square, \square)$, $E(\square, \square)$.

Итак, графиком функции h является прямая, параллельная оси Ox.

Определение. Функция вида $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=b$, где $b\in\mathbb{R}$, называется **постоянной функцией**.

Графиком функции I степени является прямая.
Графиком постоянной функции является прямая, параллельная оси Ox.

2.2. Свойства функции I степени

• а) Постройте в одной прямоугольной системе координат графики функций I степени $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 0{,}5x - 2$, и $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = -0{,}5x + 4$.

б) Найдите координаты точек пересечения графиков функций G_f и G_g с осью Ox и осью Oy.

в) Определите тип угла, образованного графиком каждой функции с положительным направлением оси Ox.

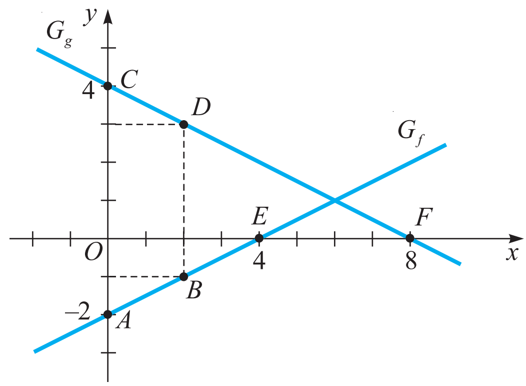
г) Пусть $x_1 > x_2$. Сравните: $f(x_1)$ с $f(x_2)$, $g(x_1)$ с $g(x_2)$.

д) При каких значениях переменной x: $f(x) > 0$, $g(x) > 0$? А $f(x) < 0$, $g(x) < 0$?

Решение:

а)

x	0	2
$f(x)$		
$g(x)$		



Точки с координатами $A(0;\ \square)$ и $B(\square;\ -1)$ определяют прямую, которая является графиком функции $\square$.

Точки с координатами $C(0;\ \square)$ и $D(\square;\ 3)$ определяют прямую, которая является графиком функции g.

б) 1) Найдем координаты точек пересечения графиков G_f и G_g с осью Ox:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \square = 0 \Leftrightarrow x = \square$.

При $y = 0$, получим $E(\square;\ 0)$.

$g(x) = 0 \Leftrightarrow \square = 0 \Leftrightarrow x = \square$.

При $y = 0$, получим $F(\square;\ 0)$.

2) Найдем координаты точек пересечения графиков G_f и G_g с осью Oy:

При $x = 0$, получим:

$$y = f(0) = 0{,}5 \cdot \square - 2 = -2.$$

Значит, $A(0;\ \square)$.

При $x = 0$, получим:

$$y = g(0) = -0{,}5 \cdot \square + 4 = 4.$$

Значит, $C(0;\ \square)$.

в) Угол α, образованный G_f и положительным направлением оси Ox, является острым.

в) Угол β, образованный G_g и положительным направлением оси Ox, является $\square$.

г) Проанализируем графики G_f и G_g и сформулируем вывод.

Для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ и x_1 ___ x_2, имеет место соотношение $f(x_1)$ ___ $f(x_2)$.

Значит, функция f строго возрастающая.

Для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ и x_1 ___ x_2, имеет место соотношение $g(x_1)$ ___ $g(x_2)$.

Значит, функция g строго убывающая.

д) $f(x) > 0 \Leftrightarrow 0{,}5x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 4$.

$f(x) < 0$ для любых ______.

д) $g(x) > 0 \Leftrightarrow -0{,}5x + 4 > 0 \Leftrightarrow x < 8$.

$g(x) < 0$ для любых ______.

Определения. Пусть $f\colon D(f) \to \mathbb{R}$.

- **Нулем функции** f называется значение переменной x, при котором $f(x) = 0$.
- Функция f называется **строго возрастающей на множестве** $D(f)$, если для любых $x_1, x_2 \in D(f)$ и $x_1 < x_2$, $f(x_1) < f(x_2)$.
- Функция f называется **строго убывающей на множестве** $D(f)$, если для любых $x_1, x_2 \in D(f)$ и $x_1 < x_2$, $f(x_1) > f(x_2)$.

Пусть дана функция I степени $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

- Нулем функции f является число $x_0 = -\dfrac{b}{a}$.
- Функция f является:
  строго возрастающей, если $a > 0$;
  строго убывающей, если $a < 0$.
- Число α называется **угловым коэффициентом** графика функции f.

2.3. Прямая пропорциональность

• Для одного полета самолета по маршруту Париж–Нью-Йорк требуется 15 000 тонн кислорода – масса, которая может быть выработана за год на территории одного гектара леса.

а) Задайте аналитически зависимость между массой кислорода и числом рейсов самолета по маршруту Париж–Нью-Йорк.

б) Сколько леса потребуется для выработки кислорода, необходимого для 50 рейсов Париж–Нью-Йорк?

Заполните соответственно пропуски:

а) $f: \mathbb{N} \to$ ___, $f(x) =$ ___ $\cdot x$.

б) Для 50 рейсов необходимо 50 · ___ = ___ тонн кислорода.

Такое количество кислорода может выработать за год лес, занимающий ___ га .

> Число рейсов и количество потребляемого кислорода являются прямо пропорциональными величинами.

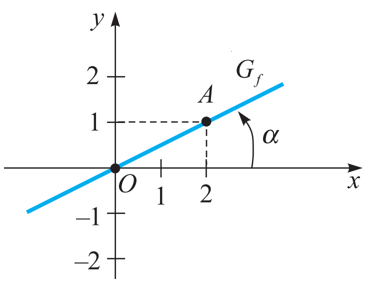
• Постройте график функции:

а) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0{,}5x$; б) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -\frac{1}{2}x$.

Решение:

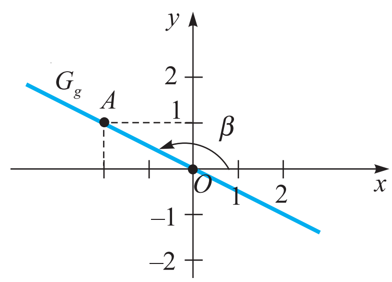
а)

x	0	
$y = f(x)$		



б)

x	0	
$y = g(x)$		



• Рассмотрите графики G_f и G_g, и ответьте на вопросы.

1) Является ли функция f строго возрастающей? А функция g?

2) Какого типа угол α? А угол β?

3) При каких значениях переменной x $f(x) > 0$, $f(x) < 0$, $g(x) > 0$, $g(x) < 0$?

4) Есть ли у функции f нули? А у функции g? В случае, если у функции есть нули, найдите их.

Определения. ♦ Функция вида $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax$, где $a \in \mathbb{R}^*$, называется **прямой пропорциональностью**.

♦ Число a называется **коэффициентом пропорциональности** (или **угловым коэффициентом** графика функции f).

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}^*$

- $a > 0$ → функция f – строго возрастающая
- $a < 0$ → функция f – строго убывающая

> Прямая пропорциональность является частным случаем функции I степени ($b = 0$).

• Дополните предложение:

Графиком прямой пропорциональности является ________, проходящая через ________.

Упражнения и задачи

1

1. Дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Выберите формулы, задающие функцию f:

а) I степени;

б) постоянную;

в) прямую пропорциональность.

$\boxed{f(x) = -4x}$ $\boxed{f(x) = 2{,}5}$ $\boxed{f(x) = 2x - 5}$ $\boxed{f(x) = x^3}$ $\boxed{f(x) = \frac{1}{x}}$ $\boxed{f(x) = -x - 1}$

2. а) Составьте таблицу значений для функции $f: D(f) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 5$, если $x \in \{-1; 0; 0{,}5; 2; 3\}$.

б) Постройте график функции f.

3. Определите угловой коэффициент и постройте график функции:

а) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 8$; б) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2 - x$;

в) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = -1{,}5x$; г) $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = -3{,}5$;

д) $q: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $q(x) = \sqrt{7}$; е) $r: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $r(x) = 10x - 8$.

4. В каких четвертях расположен график функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = 5$; б) $f(x) = -0{,}3$; в) $f(x) = -\sqrt{7}x$; г) $f(x) = \frac{1}{8}x$?

5. Найдите нули функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = 1 - 10x$; б) $f(x) = \sqrt{3}x + 3$; в) $f(x) = 4{,}2 - 2x$; г) $f(x) = -2\sqrt{5}x + \sqrt{10}$.

6. Проверьте, является ли строго возрастающей функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = -2x - 3$; б) $f(x) = \sqrt{2}x + 5$; в) $f(x) = 5 - 4x$; г) $f(x) = 1 + 7x$.

7. Дополните пропуски так, чтобы функция $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ была:

1) строго возрастающей; 2) строго убывающей:

а) $g(x) = \square\, x$; б) $g(x) = -\square\, x$.

8. Определите тип угла, образованного положительным направлением оси Ox и графиком функции:

а) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{21}x + 10$; б) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -3x + 8$;

в) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = 25x$; г) $q: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $q(x) = -3\sqrt{7}x$;

д) $q: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $q(x) = 10$; е) $r: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $r(x) = -\sqrt{7}$.

2

9. Объем куба можно определить по формуле $V = a^3$, где a – длина ребра куба. Задает ли эта формула функцию I степени? Обоснуйте ответ.

10. Периметр равностороннего треугольника вычисляется по формуле $P = 3a$, где a – длина сторон треугольника. Задает ли эта формула функцию I степени? Является ли она прямой пропорциональностью? Обоснуйте ответ.

11. Заполните пропуски так, чтобы точки $A(\square;\ \square)$, $B(0;\ \square)$, $C(\square;\ -1)$, $D(0{,}5;\ \square)$ принадлежали графику функции:

а) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2 - 5x$; б) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = 0{,}2x + 3$;

в) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = 2{,}5x$; г) $r: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ r(x) = -7x$.

12. У отца было 50 леев. Он купил несколько килограммов картофеля по 4,5 лея за кг.

а) Задайте аналитически зависимость между суммой оставшихся денег и количеством килограммов купленного картофеля.

б) Найдите область определения функции, заданной формулой в пункте а).

13. Дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = 2 - 10x$; б) $f(x) = 5x - 2$.

1) Найдите нули функции f.

2) Постройте график функции f.

3) Используя график функции, найдите значения x, при которых: $f(x) > 0$; $f(x) < 0$.

4) Определите тип угла, образованного G_f и положительным направлением оси Ox.

5) Определите, является ли функция f строго возрастающей.

14. Дана функция $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

а) $g(x) = 6x$; б) $g(x) = -\frac{1}{4}x$.

1) Найдите нули функции g.

2) Постройте график функции g.

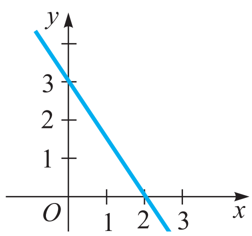
3) Используя график функции, найдите значения x, при которых: $g(x) > 0$; $g(x) < 0$.

4) Определите тип угла, образованного G_g и положительным направлением оси Ox.

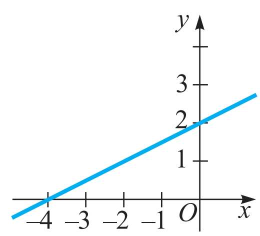
5) Определите, является ли функция g строго возрастающей.

15. Задайте аналитически функцию I степени, график которой изображен на рисунке:

а)

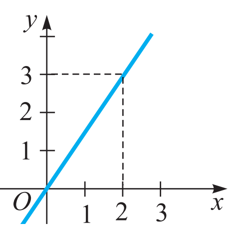


б)

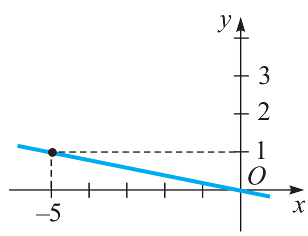


16. Задайте аналитически прямую пропорциональность, график которой изображен на рисунке:

а)



б)



17. Постройте график функции:

а) $f: D(f) \to \mathbb{R},\ f(x) = -2x - 1,$ если $-2 \le x \le 1;$

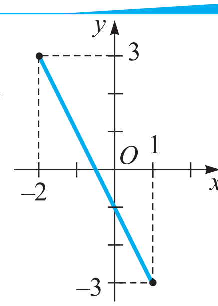
б) $g: D(g) \to \mathbb{R},\ g(x) = 3x - 6,$ если $1 \le x \le 5;$

в) $h: D(h) \to \mathbb{R},\ h(x) = -x,$ если $-3 \le x \le 6;$

г) $q: D(q) \to \mathbb{R},\ q(x) = x,$ если $0 \le x \le 8.$

Образец:

а) $D(f) = [-2; 1].$



3

18. Постройте график функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, если:

а) $f(x) = \begin{cases} 5x + 2, & \text{при } x \le -1 \\ 3x, & \text{при } x > -1; \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{при } -1 \le x \le 1 \\ 1, & \text{при } x < -1 \\ 2x - 1, & \text{при } x > 1. \end{cases}$

19. Графиком функции f является прямая, проходящая через точки $A(2; 6)$ и $B(-1; 3)$. Задайте аналитически функцию f.

20. Постройте график функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

а) $f(x) = 2|x| - 1;$ б) $f(x) = 3 - |x|.$

§ 3. Обратная пропорциональность

• Если автобус проходит 120 км за t часов, то его скорость равна $v = \dfrac{120}{t}$ км/ч. Скорость v является функцией от времени t.

• Пусть площадь прямоугольника равна 25 м², а одна из сторон – x м. Тогда длина второй стороны – $y = \dfrac{\quad}{\quad}$ м. Значит, длина y второй стороны является функцией от длины x.

Величины v и t; y и x являются величинами ______.

В обоих случаях получим функции вида $f(x) = \dfrac{k}{x}$.

Определение. Функция вида $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ f(x) = \dfrac{k}{x}$, где $k \in \mathbb{R}^*$, называется **обратной пропорциональностью**.

• Постройте график функции:

а) $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ f(x) = \dfrac{3}{x};$ б) $g: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ g(x) = -\dfrac{3}{x}.$

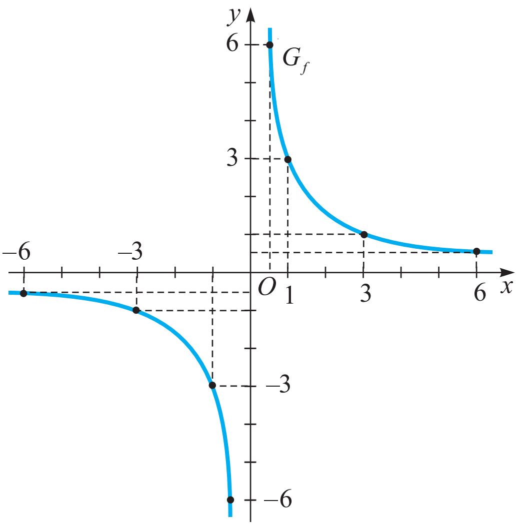
Решение:

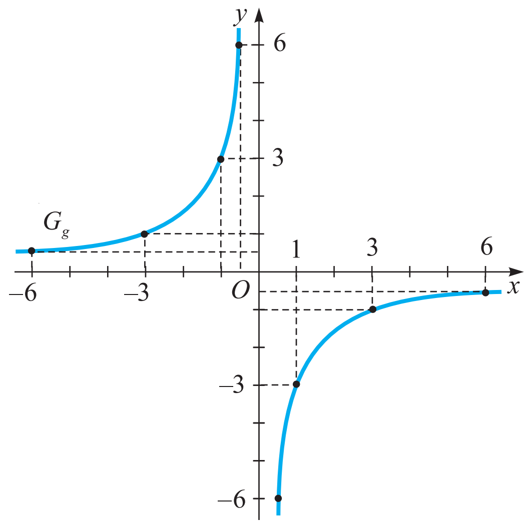
а)

x	-6	-3	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	3	6
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	-1	-3	-6	6	3	1	$\frac{1}{2}$

б)

x	-6	-3	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	3	6
$g(x)$								





• Рассмотрите графики G_f и G_g и соответственно заполните пропуски:

а) Функция f не имеет нулей.

б) График G_f не пересекает ни ось Ox, ни ось Oy.

в) $f(x) > 0$ при x ______;

$f(x) < 0$ при x ______.

г) Функция f строго убывает на интервалах $(-\infty, 0)$ и ______.

а) Функция g ______.

б) График G_g ______.

в) $g(x) > 0$ при x ______;

$g(x) < 0$ при x ______.

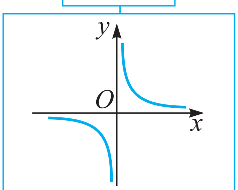
г) Функция g строго возрастает на интервалах ______ и $(0, +\infty)$.

Графиком обратной пропорциональности является ***гипербола***.
Гипербола состоит из двух ветвей.

$$f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ f(x) = \frac{k}{x},\ k \in \mathbb{R}^*$$

График обратной пропорциональности симметричен относительно начала координат O прямоугольной системы координат.

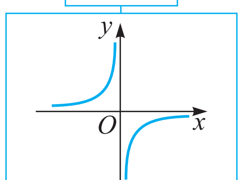
$k > 0$



функция f строго убывающая на $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$; ветви гиперболы расположены в I и III четвертях

$f(x) > 0$ при $x \in (0, +\infty)$
$f(x) < 0$ при $x \in (-\infty, 0)$

$k < 0$



функция f строго возрастающая на $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$; ветви гиперболы расположены в II и IV четвертях

$f(x) > 0$ при $x \in (-\infty, 0)$
$f(x) < 0$ при $x \in (0, +\infty)$

Упражнения и задачи

1

1. Выберите формулы, которыми можно задать обратную пропорциональность.

$\boxed{f(x)=\frac{1}{x}}$ $\boxed{f(x)=\frac{1}{x^2}}$ $\boxed{f(x)=\frac{5}{x}}$ $\boxed{f(x)=-\frac{7}{x}}$ $\boxed{f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}}$ $\boxed{f(x)=x+1}$

2. Дана функция $f: \{-5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5\} \to \mathbb{R}^*$, $f(x)=-\frac{4}{x}$.

а) Составьте таблицу значений функции f. б) Постройте график функции f.

3. Дана функция $g: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $g(x)=\frac{\sqrt{2}}{x}$. Заполните таблицу.

x	$-\sqrt{8}$	-2			1	$\sqrt{2}$	2	
$g(x)$			-1	$-\sqrt{2}$				$\frac{1}{2}$

4. *Истинно* или *Ложно*?

Пусть $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $f(x)=\frac{5}{x}$.

а) $A(1, -5) \in G_f$; б) $B(1, 5) \in G_f$; в) $C(10, 2) \in G_f$;

г) $D(-5, 1) \in G_f$; д) $O(0, 0) \in G_f$; е) $F\left(-25, -\frac{1}{5}\right) \in G_f$.

5. В каких четвертях расположены ветви гиперболы, если:

а) $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $f(x)=-\frac{\sqrt{10}}{x}$; б) $g: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $g(x)=\frac{100}{x}$?

2

6. Постройте график функции:

а) $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $f(x)=\frac{6}{x}$; б) $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $f(x)=-\frac{10}{x}$.

Заполните соответственно пропуски:

1) Функция f – строго ____________;

2) $f(x)>0$ при $x \in$ ______;

$f(x)<0$ при $x \in$ ______.

3) Ветви гиперболы расположены в ____ и ____ четвертях.

7. Постройте график функции:

а) $f: D(f) \to \mathbb{R}^*$, $f(x)=\frac{12}{x}$, при $x \in [-4, 4] \setminus \{0\}$;

б) $g: D(g) \to \mathbb{R}^*$, $g(x)=-\frac{20}{x}$, при $x \in [-10, 10] \setminus \{0\}$.

8. График функции $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $f(x)=\frac{k}{x}$, проходит через точку $A(2, 1)$. Проходит ли график G_f через точки:

а) $B(1, 2)$; б) $C(-2, -1)$; в) $D(-1, -2)$; г) $E\left(-2, \frac{1}{2}\right)$?

9. Постройте в одной прямоугольной системе координат графики функций $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $f(x)=\frac{1}{x}$, и $g\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $g(x)=-\frac{1}{x}$. Сформулируйте вывод.

10. Задайте формулой обратную пропорциональность, зная, что ее график проходит через точку:

а) $A(-3, 12)$; б) $B(8, 4)$.

11. Приведите примеры обратной пропорциональности из различных областей.

3

12. Постройте график функции $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$:

а) $f(x)=\frac{2}{|x|}$; б) $f(x)=-\frac{2}{|x|}$.

Сформулируйте вывод.

13. Решите на множестве $\mathbb{R}^*$ графическим способом уравнение:

а) $\frac{6}{x}=5+x$; б) $-\frac{3}{x}=4x-1$; в) $\frac{2}{|x|}=x+1$.

14. Докажите, что при $k<0$ и $a<0$ графики функций $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $f(x)=\frac{k}{x}$, и $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x)=ax+3$, пересекаются в II и IV четвертях.

15. Составьте и решите по одному примеру, аналогичному упражнениям **8**, **10**, **11**, **12**.

§4. Функция $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ f(x)=\sqrt{x}$

$\mathcal{A}=a^2$

• Задайте аналитически зависимость между длиной a стороны квадрата и его площадью.

Объясняем

Так как площадь квадрата со стороной длины a равна $\mathcal{A}=a^2$, то получим $a=$ ____ .
Значит, длина стороны квадрата является функцией от его площади.

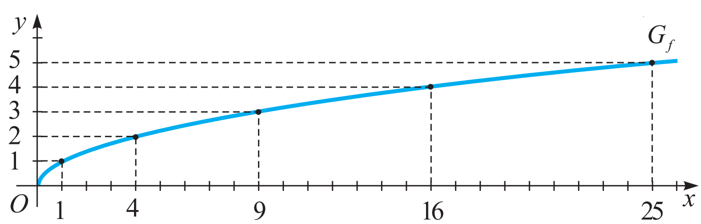
Формулой, выражающей соответствующую зависимость, является формула $y=\sqrt{x}$.

Определение. Функция $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(x)=\sqrt{x}$, называется **функцией радикал (квадратный корень)**.

• Постройте график функции $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(x)=\sqrt{x}$.

Решение:

x	0	1	4	9	16	25
$f(x)$		1				



Свойства функции $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ f(x)=\sqrt{x}$:

- $f(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=0 \Leftrightarrow \square$ – нули функции f;
- $f(x)>0$ при $x \in \square$;
- для любых положительных чисел x_1 и x_2, где $x_1<x_2$, имеем $\sqrt{x_1}\ \square\ \sqrt{x_2}$, значит, функция f является строго $\square$;
- $O(0,\ 0) \in G_f$.

• *Истинно* или *Ложно*?

а) Точка $A(36,\ 6)$ принадлежит графику функции радикал.

б) Точка $B(10,\ -3)$ принадлежит графику функции радикал.

Решение:

а) $x=36,\ y=\sqrt{\square}=\square$. *Ответ*:

б) $x=10,\ y=\sqrt{\square}\neq\square$. *Ответ*:

Упражнения и задачи

1

1. Дана функция $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ f(x)=\sqrt{x}$. Найдите x, если $y \in \left\{1{,}5;\ 3\frac{1}{3};\ 5;\ 7;\ 8{,}1\right\}$.

2. Используя график функции радикал, вычислите y для $x \in \{1{,}5;\ 2;\ 7;\ 8;\ 20;\ 24\}$. (Округлите до десятых.)

3. *Истинно* или *Ложно*?
Пусть G_f – график функции радикал.

а) $A(1,\ 2)\in G_f$; б) $B(100,\ 10)\in G_f$;
в) $C(1,\ -1)\in G_f$; г) $D(81,\ 9)\notin G_f$;
д) $E(3,\ \sqrt{3})\in G_f$; е) $F(0{,}01;\ 0{,}1)\in G_f$.

4. Установите, пересекает ли график функции радикал прямую:
а) $y=\sqrt{2}$; б) $y=3{,}5$; в) $y=101$; г) $y=-\sqrt{5}$.

2

5. Используя график функции радикал, сравните числа:

а) $\sqrt{4{,}5}$ и $\sqrt{7}$; б) $\sqrt{13{,}5}$ и 3;
в) $\sqrt{4\frac{1}{2}}$ и 2,1; г) $-\sqrt{11}$ и $-2{,}5$;
д) $-\sqrt{29}$ и $-\sqrt{27}$; е) 0 и $\sqrt{1{,}1}$.

6. График функции $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(x)=\sqrt{x}$, проходит через точку с абсциссой:
а) 49; б) 0,04; в) 121; г) 625.
Найдите ординату этой точки.

7. Найдите все целые значения аргумента x, при которых значения $y=\sqrt{x}$ меньше 10.

8. Постройте график функции $f: D \to \mathbb{R}_+$, $f(x)=\sqrt{x}$, если:
а) $0 \le x \le 9$; б) $4 \le x \le 16$.

3

9. Постройте график функции $f: D \to \mathbb{R}$:
а) $f(x)=\sqrt{x^2}$; б) $f(x)=\sqrt{|x|}$; в) $f(x)=(\sqrt{x})^2$; г) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x}}$.

10. Постройте график функции $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$:
а) $f(x)=\sqrt{x}-3$; б) $f(x)=\sqrt{x}+1$; в) $f(x)=5-\sqrt{x}$; г) $f(x)=1-\sqrt{x}$.

11. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:
а) $\sqrt{x}=x-2$; б) $\sqrt{x}=\frac{8}{x}$; в) $\sqrt{x}=6-x$; г) $x+\sqrt{x}+1=0$.

12. Составьте и решите по одному примеру, аналогичному упражнениям 9–11.

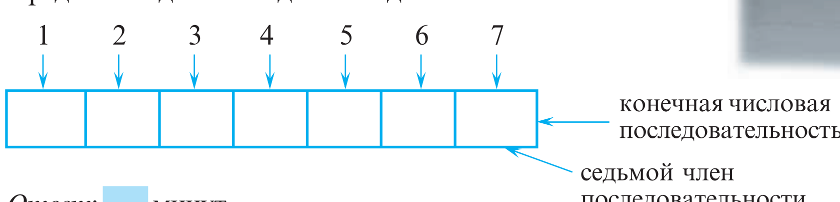
§5. Числовые последовательности

5.1. Понятие числовой последовательности

1 Чтобы участвовать в лицейских соревнованиях по баскетболу, Вася начал тренироваться каждый день. Первый день он тренировался 20 минут, а каждый следующий день, в течение недели, он увеличивал время тренировок на 5 минут. Сколько длилась тренировка Васи на седьмой день?

Объясняем

Представим данные задачи в виде схемы:



Ответ: ___ минут.

2 Запишем в порядке возрастания нечетные натуральные числа:

$\boxed{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \ldots}$ ← бесконечная числовая последовательность

Обозначим: $a_1 = 1,\ a_2 = \square,\ a_6 = \square$ ← члены последовательности

3 Дана функция $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Значит, $f(1) = 1,\ f(2) = \dfrac{1}{2},\ f(3) = \dfrac{1}{3},\ \ldots,\ f(n) = \dfrac{1}{n},\ \ldots$

$\boxed{1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \ldots,\ \dfrac{1}{n},\ \ldots}$ ← числовая последовательность $\square$

Обозначим: $a_2 = \square,\ a_7 = \square,\ a_{53} = \square,\ a_n = \square$.

Определения. ♦ **Числовой последовательностью** называется функция, заданная на множестве $\mathbb{N}^*$, со значениями во множестве E, $E \subset \mathbb{R}$.

♦ Если функция f определена на конечном подмножестве последовательных элементов множества $\mathbb{N}^*$, то получаем **конечную числовую последовательность**. В противном случае, последовательность называется **бесконечной числовой последовательностью**.

Числовая последовательность обозначается (a_n), а ее члены – $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$

соседние члены

$a_1,\quad \underbrace{a_2,\quad a_3}_{}, \ \ldots,\quad a_{n-1},\quad a_n,\quad a_{n+1},\ \ldots$

a_1 ↓ предшествующий член a_2

a_{n+1} ↓ член, следующий за a_n

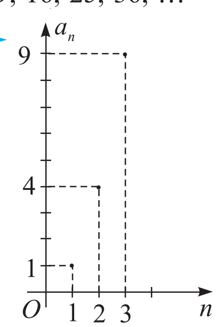
5.2. Способы задания последовательности

Объясняем

1 Так как числовая последовательность – это функция, то ее, как и функцию, можно задать:

синтетически → *перечислением всех ее членов* → $1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ \ldots$

синтетически → *графически* →



аналитически → *формулой n-ого члена* → $a_n = n^2$

словесно → например, последовательность квадратов натуральных чисел

Определение. Формула, при помощи которой любой член последовательности выражается через его порядковый номер, называется **формулой общего члена** или **формулой n-ого члена** последовательности.

2 Рассмотрите и продолжите:

а) Запишите первые пять членов последовательности (a_n), заданной формулой n-ого члена: $a_n = 3^n - 2$.

$a_1 = 3^1 - 2 = 1,\ \ a_2 = 3^{\square} - 2 = \square,\ \ a_3 = \square,\ \ a_4 = \square,\ \ a_5 = \square.$

б) Запишите формулу n-ого члена последовательности, заданной перечислением своих членов: $2,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \ldots$

Так как $2 = \frac{2}{1}$, то получим (a_n): $\frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \ldots$, где $a_n = \frac{\square}{n}$.

Замечание. Для последовательности, заданной несколькими ее первыми членами, можно привести, как правило, не одну формулу общего члена.

Дана числовая последовательность: 0, 7, 14, 21, …

$a_1 = 0,\ \ a_2 = 0 + 7 = 7,\ \ a_3 = 7 + 7 = 14,\ \ a_4 = 14 + 7 = 21,\ \ldots$

Эту последовательность можно записать в виде: $a_1 = 0,\ a_{n+1} = a_n + 7$.

Такой способ задания последовательности называется ***рекуррентным*** (от латинского слова *recurrere* – возвращаться).

3 Исследуйте и продолжите:

Чтобы задать последовательность рекуррентным способом, надо:

задать один или несколько первых членов последовательности →	$a_1 = 1,\ \ a_2 = 1$
указать формулу, позволяющую получить последующие члены, зная предыдущие →	$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

$$a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2;$$
$$a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3;$$
$$a_5 = a_4 + a_3 = \square + \square = \square;$$
$$a_6 = \square + \square = \square + \square = \square.$$

Получим последовательность 1, 1, 2, 3, $\square$, $\square$, ..., которая называется последовательностью Фибоначчи.

Интересно и полезно

Последовательность Фибоначчи встречается во многих разделах математики: в геометрии, в комбинаторике, в теории чисел, в математическом анализе. Несколько столетий математики пытались задать последовательность Фибоначчи формулой общего члена. Наконец эта формула была найдена:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Леонардо Пизанский (Фибоначчи) (1175–1250)

5.3. Возрастающие и убывающие последовательности

- Рассмотрите последовательности:

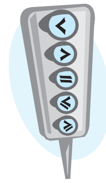
(a_n): 2, 4, 6, 8, …, $2n$, …

(b_n): 3, $\frac{3}{2}$, 1, $\frac{3}{4}$, …, $\frac{3}{n}$, …

(c_n): 1, 1, 1, 1, …

(x_n): 1, 1, 2, 3, 5, 8, …

последовательность Фибоначчи



Сравните:

$a_{n+1} \quad a_n$

$b_{n+1} \quad b_n$

$c_{n+1} \quad c_n$

$x_{n+1} \quad x_n$

Определения. ♦ Числовая последовательность называется **строго возрастающей**, если каждый ее последующий член больше предыдущего, то есть, $a_{n+1} > a_n$.

- ♦ Числовая последовательность называется **возрастающей**, если каждый ее последующий член не меньше предыдущего, то есть, $a_{n+1} \geq a_n$.
- ♦ Числовая последовательность называется **строго убывающей**, если каждый ее последующий член меньше предыдущего, то есть, $a_{n+1} < a_n$.
- ♦ Числовая последовательность называется **убывающей**, если каждый ее последующий член не больше предыдущего, то есть, $a_{n+1} \leq a_n$.
- ♦ Числовая последовательность называется **постоянной**, если каждый ее последующий член равен предыдущему, то есть, $a_{n+1} = a_n$.

Применив соответствующие определения, заполните пропуски:

(a_n) – строго возрастающая числовая последовательность;

(b_n) – ;

(c_n) – ;

(x_n) – .

Определение. Возрастающие, строго возрастающие, строго убывающие и убывающие последовательности называются **монотонными**.

Последовательность (y_n): 2, 1, 4, 3, 6, …, $n+(-1)^n$, … не является монотонной.

Упражнения и задачи

1

1. Запишите в порядке возрастания последовательность однозначных нечетных натуральных чисел.
2. Запишите в порядке возрастания пять первых членов последовательности натуральных чисел, кратных 3.
3. Запишите в порядке убывания последовательность правильных дробей со знаменателем 5.

4. Запишите пять первых членов последовательности, общий член которой выражается формулой:

а) $a_n = 5-3n$; б) $a_n = n^2 - n$; в) $a_n = \frac{2n}{n+1}$; г) $a_n = 3\cdot(-1)^n$.

5. Дана последовательность (x_n). Запишите:

а) два последовательных члена, которые предшествуют члену x_{n+1};

б) два последовательных члена, которые следуют за членом x_{n+1}.

6. Найдите третий, седьмой и сотый члены последовательности (c_n), заданной формулой общего члена $c_n = \frac{3}{n+1}$.

7. По образцу, определите, принадлежат ли числа 3, 5, 17 числовой последовательности, заданной формулой общего члена:

а) $a_n = 3n-1$; б) $b_n = 2n^2+1$.

Образец:
а) $a_n = 3n-1$. Решим на множестве $\mathbb{N}^*$ уравнение: $3n-1=3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3n=4 \Leftrightarrow n=\frac{4}{3} \notin \mathbb{N}^*$.
Ответ: Число 3 не является членом последовательности (a_n).

8. Последовательность (b_n) задана рекуррентным способом: $b_1 = 2,\ b_{n+1} = 3b_n + 1$. Запишите первые пять членов этой последовательности.

2

9. Запишите первые пять членов последовательности:

а) натуральных чисел, которые при делении на 4 дают остаток 3;

б) в которой член a_n равен остатку от деления n на 3.

10. Запишите и изобразите точками в прямоугольной системе координат первые пять членов последовательности, заданной формулой:

а) $a_n = 2\cdot(-1)^n$; б) $a_n = 1-n$.

11. Найдите третий, седьмой и двенадцатый члены последовательности, заданной формулой:

а) $a_n = \frac{(-1)^n + (-1)^{n+1}}{2}$; б) $b_n = \frac{2^n}{2n+1}$; в) $c_n = \frac{(-1)^n}{2n}$.

12. Определите, какая из заданных последовательностей имеет формулу общего члена $a_n = \frac{2n-1}{n^2+1}$:

а) $\frac{1}{3}, \frac{3}{7}, \frac{7}{13}, \frac{13}{21}, \ldots$; б) $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{7}{11}, \ldots$; в) $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}, \frac{7}{17}, \ldots$

13. Принадлежит ли числовой последовательности, заданной формулой общего члена $a_n = n^2 - 7n + 23$, число:

а) 11; б) 31; в) 46?

14. Сколько отрицательных членов содержит последовательность, заданная формулой $a_n = 5n - 21$?

15. Запишите первые пять членов последовательности, заданной рекуррентно:

а) $a_1 = 27,\ a_{n+1} = \frac{81}{a_n}$; б) $a_1 = 0{,}1,\ a_2 = -0{,}1,\ a_{n+2} = 3a_n + a_{n+1}$;

в) $a_1 = a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$; г) $a_1 = 3,\ a_{n+1} = 2a_n - 5$.

16. Докажите, по образцу, что последовательность, заданная формулой:

а) $a_n = 2 - 3n$ является строго убывающей;

б) $a_n = 2n - 5$ является строго возрастающей.

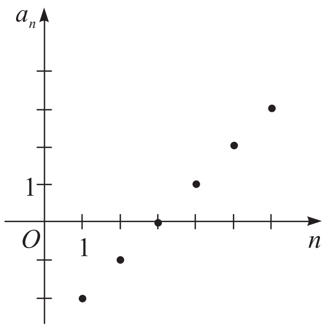
Образец:
Докажите, что последовательность, заданная формулой $a_n = \frac{1}{5}n + 2$, является строго возрастающей.
Доказательство:
$a_{n+1} = \frac{1}{5}(n+1) + 2;$
$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{5}n + \frac{1}{5} + 2 - \frac{1}{5}n - 2 = \frac{1}{5} > 0;$
$a_{n+1} - a_n > 0 \Leftrightarrow a_{n+1} > a_n.$
Значит, последовательность (a_n) строго возрастающая.

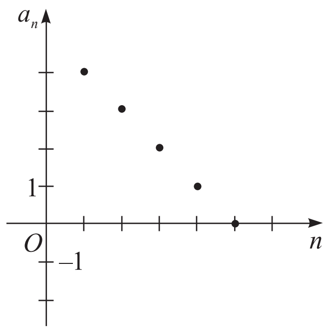
3

17. Задайте при помощи формулы для n-ого члена последовательность:

а) 1, –2, 3, –4, 5, …;   б) 2, 4, 8, 16, 32, …;   в) $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \ldots$

18. Конечная последовательность задана графически. Задайте аналитически эту последовательность.

а)


б)


19. Задайте рекуррентным способом последовательность:

а) 5, –5, 5, –5, …;

б) 1, 2, –1, –3, 2, 5, –3, –8, …

20. Последовательности (x_n) и (y_n) заданы формулами n-ого члена: $x_n = 2n - 1$ и $y_n = n^2$. Если записать в порядке возрастания общие члены этих двух последовательностей, то получится новая последовательность (c_n). Задайте эту последовательность формулой n-ого члена.

21. Докажите, что последовательность, заданная формулой:

а) $a_n = \dfrac{n+1}{2n-1}$ является строго убывающей;

б) $c_n = \dfrac{3n+4}{n+2}$ является строго возрастающей.

22. Последовательность (a_n) задана формулой общего члена $a_n = 2^n$.
Верно ли равенство $a_{n+1} + a_{n+2} = 6a_n$?

Упражнения и задачи на повторение

1

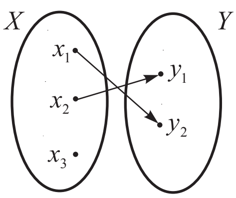
1. Назовите три элемента функции:

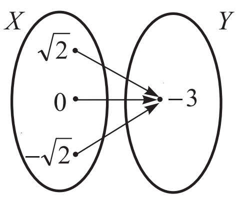
а) $f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \{0, 1, 4\},\ f(x) = x^2$;

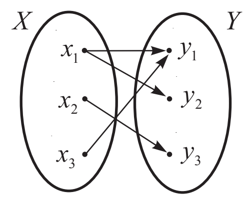
б) $g: \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q},\ g(x) = \dfrac{1}{x}$;

в) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = 3x - 10$.

2. Какая из диаграмм задает функцию?

а)


б)


в)


3. Выберите формулы, задающие функцию:

а) I степени;

б) постоянную;

в) прямую пропорциональность;

г) обратную пропорциональность;

д) радикал.

$\boxed{f(x) = 2 - 3x}$ $\boxed{g(x) = -\sqrt{10}}$ $\boxed{p(x) = x^2 + 1}$ $\boxed{h(x) = 6,(7)x}$ $\boxed{r(x) = \sqrt{x}}$ $\boxed{g(x) = -\dfrac{1}{3x}}$

4. Задайте таблицей функцию:

а) $f: \{-3, -2, 0, 1, 3, 5\} \to \mathbb{Z},\ f(x) = 2x + 4$;

б) $f: \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{N},\ f(x) = |x|$;

в) $f: \{x \in \mathbb{N} \mid -2x \geq 9\} \to \mathbb{Z},\ f(x) = x^2 + 1$.

5. Вычислите $f(1),\ f(-2),\ f(5),\ f(0{,}1)$, если:

а) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x - 8$;

б) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2,(3)$;

в) $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ f(x) = \dfrac{21}{x}$;

г) $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ f(x) = \sqrt{x}$.

6. *Истинно* или *Ложно*?

Все следующие функции заданы верно:

а) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2|x|$;

б) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$;

в) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -\dfrac{3}{x}$;

г) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{N},\ f(x) = x + 1$.

Объясните.

7. Найдите область определения функции, заданной формулой:

а) $f(x) = \sqrt{x} + 2$;

б) $f(x) = \dfrac{1}{x - 3}$;

в) $f(x) = (x - 3)^2 + 1$;

г) $f(x) = -5\sqrt{x - 2}$;

д) $f(x) = 2\sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$;

е) $f(x) = \dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{1}{x + 1}$.

8. Впишите соответствующее число:

а) $A\left(\frac{2}{3}; \square\right) \in G_f$, где $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x + 10$;

б) $B(2{,}5; \square) \in G_f$, где $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -20x$;

в) $C(\square; -11) \in G_f$, где $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ f(x) = \frac{8}{x}$;

г) $D(\square; 100) \in G_f$, где $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ f(x) = \sqrt{x}$.

9. Запишите первые шесть членов последовательности (c_n), заданной рекуррентным способом: $c_1 = 2,\ c_2 = 1,\ c_{n+1} = 2c_{n-1}$.

10. Последовательность (a_n) задана формулой общего члена $a_n = 3n - 4$.
а) Запишите первые десять членов последовательности.
б) Изобразите полученные члены в прямоугольной системе координат.

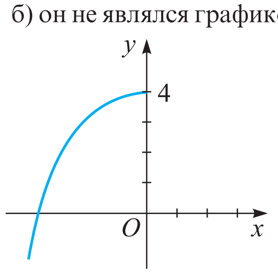
11. Найдите седьмой член последовательности (a_n): $-7,\ -3,\ 1,\ 5,\ \ldots$

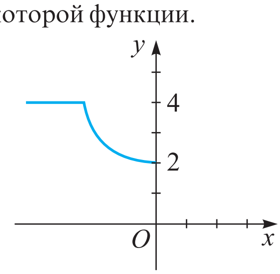
□ **2** □

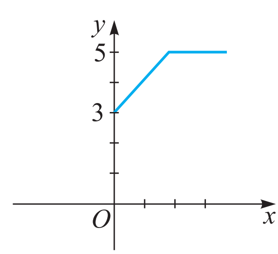
12. Постройте график функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$, если:
а) $a = 5,\ b = -2$;
б) $a = 0,\ b = 0$;
в) $a = 0,\ b = -3{,}5$;
г) $a = -5,\ b = 0$;
д) $a = 2{,}5,\ b = 0$;
е) $a = b = -1$;
ж) $a = b = 8$.

13. Натуральное число m при делении на 4 дает частное n и остаток 0. Выразите в виде формулы зависимость между m и n.
а) Найдите значение функции при $n = 100$.
б) Найдите область определения и множество значений функции.

14. Дополните график так, чтобы:
а) он являлся графиком некоторой функции;
б) он не являлся графиком некоторой функции.







15. Постройте график функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
а) $f(x) = 1{,}5x - 2$;
б) $f(x) = -2x - 3$;
в) $f(x) = -x + 3{,}6$.
Определите свойства функции f.

16. Постройте график функции $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ f(x) = \frac{k}{x}$, если:
а) $k = -\frac{1}{2}$;
б) $k = 0{,}2$;
в) $k = -\frac{2}{5}$;
г) $k = 1\frac{2}{3}$.
Определите свойства функции f.

17. Впишите такое число, при котором функция f будет:

1) строго возрастающей; 2) строго убывающей.

а) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \boxed{} \cdot x + 1;$ б) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \boxed{} \cdot x;$

в) $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ f(x) = \dfrac{\boxed{}}{x};$ г) $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ f(x) = -\dfrac{\boxed{}}{x};$

д) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -\boxed{} \cdot x - \sqrt{5};$ е) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -\boxed{} \cdot x.$

18. Постройте график функции $f\colon D(f) \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = \dfrac{1}{4}x + 2$, если $-5 \le x \le 5;$

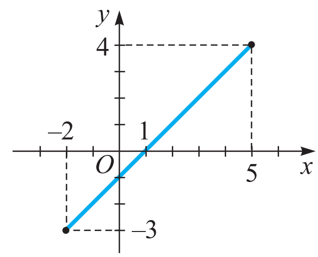
б) $f(x) = -3{,}8x$, если $0 \le x \le 7;$

в) $f(x) = -\dfrac{1}{4x}$, если $1 \le x \le 6;$

г) $f(x) = \dfrac{5}{x}$, если $-7 \le x \le -1;$

д) $f(x) = -3$, если $-5 \le x \le 2.$

Образец:
$f\colon D(f) \to \mathbb{R},\ f(x) = x - 1,$
если $-2 \le x \le 5.$



19. Впишите такое число, при котором график функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = \boxed{} \cdot x - 5;$ б) $f(x) = -\boxed{} \cdot x + \sqrt{11};$

в) $f(x) = \boxed{} \cdot x;$ г) $f(x) = -\boxed{}\, x$

образует с положительным направлением оси Ox:

1) острый угол; 2) тупой угол.

20. График функции $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ f(x) = \sqrt{x}$, проходит через точку с абсциссой:

а) 25; б) 100; в) 144.

Найдите ординату этой точки.

21. Определите, принадлежит ли точка, у которой абсцисса равна ординате, графику функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = -3x + 1;$ б) $f(x) = x - 0{,}8;$

в) $f(x) = -5x;$ г) $f(x) = 2x + \sqrt{5}.$

22. Известно, что сумма денег, выдаваемая в кредит на t лет под $r\%$, вычисляется по формуле $S = L(1 + rt)$, где L – сумма денег без годового процента. Пусть L и r – постоянные величины.

а) Какая зависимость существует между S и t? Обоснуйте.

б) Господин Михайлов инвестировал в строительство 10 000 леев под 17% годовых. Какую сумму денег он получит по истечении: 1 года; 2 лет; x лет? Выразите зависимость S от t в случае инвестиции денег на x лет.

в) Чему равен угловой коэффициент графика функции, полученной в пункте б)? По условию задачи, какой смысл имеет угловой коэффициент?

23. Последовательность (x_n) задана формулой общего члена $x_n = -n^2 + 4n$. Найдите, под каким номером в этой последовательности стоит число –45.

24. Начиная с какого номера все члены последовательности, заданной формулой общего члена, будут больше 100?

25. Дана функция $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x$.
а) Найдите шестой член последовательности, соответствующий данной функции.
б) Определите, под каким номером в этой последовательности стоит число 64.

3

26. Принадлежит ли графику функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 5$, точка пересечения графиков функций $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + 5$, и $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = -2x - 5$? Обоснуйте.

27. Постройте в одной прямоугольной системе координат графики функций:
а) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, и $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -|x|$;
б) $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{3}{|x|}$, и $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -\dfrac{3}{|x|}$;
в) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{|x|}$, и $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -\sqrt{|x|}$.
Сформулируйте вывод.

28. Дана функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -3x + 1$.
а) Вычислите $f(f(-2))$; $f(f(f(0)))$.
б) При каких значениях x имеет место равенство $f(x) = f(f(x))$?

29. Постройте график функции $f\colon D(f) \to \mathbb{R}$:
а) $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x + 4} - 5$;
б) $f(x) = \dfrac{9x^2 - 6x + 1}{1 - 3x} + 2$;
в) $f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{при } x \le 4 \\ 2\sqrt{x}, & \text{при } x > 4; \end{cases}$
г) $f(x) = x\sqrt{x^2}$.

30. Мяч катится по склону вниз. В первую секунду он проходит 0,6 м, а за каждую следующую секунду его скорость увеличивается на 0,6 м/с. Сколько времени будет катиться мяч, если длина склона 6 метров?

Проверочная работа

Время выполнения работы: 45 минут

Вариант 1

4 **1.** а) Заполните пропуск так, чтобы функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\square\, x+3$, была строго убывающей.
б) Постройте график функции f.
в) Найдите нули функции f.
г) Определите знак функции f.
д) Укажите угловой коэффициент графика функции f.

1 **2.** *Истинно* или *Ложно*?

Дана функция
$$f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*,\ f(x)=-\frac{7}{x}.$$
$$A\left(\frac{1}{7},\ 49\right)\in G_f.$$

1 **3.** Найдите значения функции $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, $f(x)=\sqrt{x}$, при заданном значении аргумента 961.

2 **4.** а) Запишите формулу, выражающую зависимость длины окружности от ее радиуса.
б) Является ли эта зависимость прямо пропорциональной? Ответ обоснуйте.

2 **5.** Последовательность (x_n) задана формулой общего члена:
$$x_n=n^2-7n+6.$$
а) Запишите первые пять членов этой последовательности.
б) Определите, под каким номером в этой последовательности стоит число 24.

Вариант 2

1. а) Заполните пропуск так, чтобы функция $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=\square\, x-5$, была строго возрастающей.
б) Постройте график функции g.
в) Найдите нули функции g.
г) Определите знак функции g.
д) Укажите угловой коэффициент графика функции g.

2. *Истинно* или *Ложно*?

Дана функция
$$g:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*,\ g(x)=\frac{15}{x}.$$
$$B\left(-\frac{1}{3},\ -5\right)\in G_g.$$

3. Найдите значения функции $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, $f(x)=\sqrt{x}$, при заданном значении аргумента 841.

4. а) Запишите формулу, выражающую зависимость скорости v от времени t при заданном расстоянии s.
б) Является ли эта зависимость обратно пропорциональной? Ответ обоснуйте.

5. Последовательность (x_n) задана формулой общего члена:
$$x_n=n^2-n.$$
а) Запишите первые пять членов этой последовательности.
б) Определите, под каким номером в этой последовательности стоит число 6.

6 глава Элементы теории вероятности и математической статистики

Довольно часто на практике мы используем термины: *события*, *случайно*, *возможно*, *вероятно*, *достоверно*, *шанс*, *вероятность*. Что означают эти термины? Зачем нужно их знать? Когда и как мы можем их применять?

Ответы на эти вопросы найдем в данной главе.

§1. Понятие события

Исследуем

1. Бросают игральную кость. Какая грань выпадет при проведении эксперимента „Бросание игральной кости“?

2. Даниела приобрела лотерейный билет. Этот билет может быть выигрышным или не выигрышным. Существуют ли другие возможные исходы?

3. Рассмотрим эксперимент „ Бросание баскетбольного мяча в корзину“. Каковы возможные результаты этого эксперимента?

Решение:

1. Нельзя предусмотреть с точностью, какая из граней с очками 1, 2, 3, 4, 5 или 6 выпадет.

2. Конечно, билет может быть выигрышным или не выигрышным, других возможностей не существует.

3. Результатами эксперимента „Бросание баскетбольного мяча в корзину“ могут быть: попадание или нет.

Бросание игральной кости, приобретение лотерейного билета, бросание баскетбольного мяча в корзину являются примерами экспериментов.

Определения. ♦ Повторение некоторого эксперимента называется **испытанием**.
♦ Результат эксперимента называется **событием**.

Например, „Выпадение грани с 5 очками“ – это событие эксперимента „Бросание игральной кости“; „Билет не выигрышный“ – это событие эксперимента „Участие в лотерее“.

Существует много событий, о которых нельзя сказать с точностью, наступят они или нет. Например, события „Выпадение грани с 3 очками“, „Попадание мяча в корзину“

нельзя предугадать с полной уверенностью. Они зависят от многих случайных факторов и называются *случайными событиями*.

Определение. **Случайным событием** называется событие, которое в результате эксперимента может наступить, а может и не наступить.

Событие „Выпадение одной из граней с 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очками при бросании игральной кости“ является достоверным, а событие „Извлечение двух зеленых карандашей из коробки с синими или красными карандашами“ является невозможным событием. Событие „Кошка разговаривает“ также является невозможным событием.

Определения. ♦ **Невозможным событием** называется событие, которое в результате эксперимента не может наступить. Невозможное событие обозначается $\varnothing$.
♦ **Достоверным событием** называется событие, которое обязательно наступит в результате любого испытания. Достоверное событие, как правило, обозначается E.

Например, событие „После вторника следует воскресенье“ является невозможным, а событие „После июня следует июль“ является достоверным.

События могут быть достоверными, невозможными или случайными.
События обозначаются, как правило, заглавными буквами латинского алфавита: $A, B, C, \ldots$
Событие взаимосвязано с соответствующим экспериментом.

Внимание! В рамках одного эксперимента выделяют общее число возможных исходов и число благоприятствующих событию исходов из общего числа возможных исходов.

Примеры. **1.** При бросании монеты выделяют два исхода: {орел, решка}. Значит, имеем два случайных события: A = {выпал „орел“}; B = {выпала „решка“}.

Таким образом, и событие A, и событие B имеют по одному благоприятствующему исходу из двух возможных исходов.

2. При бросании игральной кости может выпасть одна из граней: с 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очками. Значит, всего существуют шесть исходов: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Замечание. При бросании игральной кости могут быть определены и другие события, не только выпадение грани с 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очками. Такие события будут рассмотрены ниже.

Существуют события, имеющие равновозможные исходы. Например, если в коробке содержится одинаковое количество синих и красных карандашей, то событие B = {извлечен синий карандаш} и событие C = {извлечен красный карандаш} имеют одинаковые шансы наступить. В случае, когда количество красных карандашей в коробке больше, чем количество синих карандашей, событие C более возможно, чем событие B.

Применим

При бросании игральной кости рассмотрим события:

A_1 = {выпадение грани с 1 очком};
A_2 = {выпадение граней с 3 или 4 очками};
A_3 = {выпадение граней с 1, 2 и 3 очками};
A_4 = {выпадение грани с чётным числом очков};
A_5 = {выпадение грани с нечётным числом очков};
A_6 = {выпадение грани с количеством очков, меньше 5};
A_7 = {выпадение одной из грани с 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очками}.

1) Сопоставьте понятия „ достоверное событие“, „возможное событие“, „событие, более возможное, чем“, „невозможное событие“, „равновозможные события“ с событиями A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7.

2) Определите число благоприятствующих исходов к каждому из событий $A_1 - A_7$.

Решение:

1) События A_1, A_2, A_4, A_5, A_6 являются возможными; событие A_3 – невозможное; событие A_7 – достоверное; событие A_2 – более возможное, чем событие A_1; событие A_6 – более возможно, чем событие A_2; события A_4 и A_5 – равновозможные. (Предложите и другие сопоставления.)

2) Событие A_1 имеет только один благоприятствующий исход; событие A_2 – 2 благоприятствующих исхода; событие A_3 не имеет благоприятствующих исходов; событие A_4 имеет 3 благоприятствующих исхода; событие A_5 – 3 благоприятствующих исхода; событие A_6 – 4 благоприятствующих исхода; событие A_7 – 6 благоприятствующих исходов из 6 возможных исходов.

Элементы множества возможных исходов случайного эксперимента называются **элементарными событиями**.

Примеры. а) При бросании игральной кости элементарными являются события $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$. Событие „выпадение нечётного количества очков“ не является элементарным.

б) При бросании монеты рассматриваются 2 элементарных события: {выпадение „орла“}, {выпадение „решки“}.

События случайного эксперимента являются **равновозможными**, если с уверенностью можно сказать, что все они имеют одинаковые шансы произойти.

Примеры. **1.** События A_4 и A_5 при бросании игральной кости равновозможны.

2. При бросании игральной кости имеем 6 равновозможных событий, относящихся к выпадению каждой из граней с 1, 2, 3, 4, 5, 6 очками.

Замечание. Понятие *равновозможные события* позволяет сравнивать два случайных события с точки зрения шанса наступления. Достоверные и невозможные события встречаются не очень часто. Фактически мы живем в мире экспериментов и случайных событий. Поэтому важно знать, существуют ли какие-то закономерности в мире случайных событий. Можем ли мы заранее определить шанс наступления интересующего нас случайного события?

Ответы на такие вопросы дает важный раздел математики, который называется **теорией вероятностей**.

Упражнения и задачи

1

1. Укажите несколько событий эксперимента:

а) выбирают наугад одно число из множества $\{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100\}$;

б) бросают монету три раза;

в) нагревают воду до температуры $100°$;

г) играют партию в шахматы.

2. Определите и запишите элементарные события эксперимента:

а) выбирают один день недели;

б) выбирают старосту класса из двух кандидатов;

в) наугад извлекают шар из урны, содержащей 10 шаров, пронумерованных числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10;

г) наугад извлекают шар из урны, содержащей белые и черные шары.

3. Определите, какие из следующих событий являются достоверными, невозможными, случайными:

а) В 2020 году население Земли будет составлять 8 млрд. человек.

б) В 2016 году в Молдове родятся 25 000 мальчиков.

в) После среды наступит вторник;

г) День рождения друга 30 февраля;

д) За субботой следует воскресенье;

е) После октября идет декабрь.

2

4. Сравните шансы наступления событий A и B, используя выражения: „более возможно, чем“, „менее возможно, чем“, „равновозможные“.

а) Вы проснулись утром:

$A = \{$наступил будний (рабочий) день$\}$; $B = \{$наступил выходной (праздничный) день$\}$.

б) Сборная Республики Молдова играет футбольный матч со сборной Бразилии:

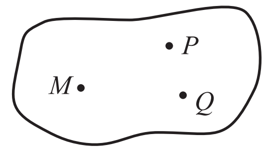
$A = \{$выиграет сборная Республики Молдова$\}$; $B = \{$выиграет сборная Бразилии$\}$.

в) Подбрасывают игральную кость:

$A = \{$выпадет грань с 6 очками$\}$; $B = \{$выпадет грань не с 6 очками$\}$.

г) Выполняли тест по математике:

$A = \{$все ученики получили отметку 10$\}$; $B = \{$некоторые ученики получили отметку 10$\}$.



5. Наугад соединяют 3 неколлинеарные точки. Какие геометрические фигуры можно получить? Каков шанс получить треугольник?

6. Подбрасывают одновременно две игральные кости и записывают сумму выпавших очков. Учитывая возможные результаты, приведите по два примера:
а) достоверных событий; б) невозможных событий; в) случайных событий.

7. Приведите примеры достоверных, невозможных, случайных событий из различных школьных дисциплин.

3

8. Приведите по 3 примера случайных, достоверных, невозможных событий некоторых случайных экспериментов из повседневной жизни.

9. В урне 5 белых, 8 черных, 10 красных шаров. Определите, какое наименьшее количество шаров необходимо извлечь наугад из урны, чтобы среди них были:
а) 2 красных шара; б) 3 черных шара; в) 1 белый;
г) 2 шара различных цветов; д) 3 шара различных цветов.

10. Подбрасываются одновременно 2 игральных кубика. Определите множество, элементы которого представляют события „получение суммы в 6 очков".

11. В отделе работают 8 мужчин и 4 женщины. Наугад выбирают двух работников. Каков шанс, что отобранные работники являются мужчинами?

§2. Понятие вероятности

2.1. Классическое определение вероятности

Исследуем

1 При бросании игральной кости, вычислите шанс выпадения:
а) 1 очка; б) числа очков, кратных 2; в) числа очков, меньше 5; г) 8 очков.

Решение:

а) Шанс, что при бросании игральной кости выпадет 1 очко, равен одному из шести, или $1:6=0{,}1(6)$.

б) При бросании игральной кости может выпасть любая из граней с 1, 2, 3, 4, 5, 6 очками. Среди них только три числа (2, 4, 6) кратны 2. Следовательно, существуют три шанса из шести, что выпадет число, кратное 2, то есть, шанс этого события равен $3:6=0{,}5$.

в) Среди чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, которые могут выпасть при бросании кости, только четыре числа (1, 2, 3 и 4) меньше 5. Следовательно, существуют четыре шанса из шести, чтобы выпавшее число очков было меньше 5, то есть шанс равен $4:6=0,(6)$.

г) Так как ни одна грань игральной кости не содержит 8 очков, следовательно, шанс выпадения грани с 8 очками равен 0.

2 Бросают монету. Вычислите шанс наступления события:

а) выпадение „орла“; б) выпадение „решки“.

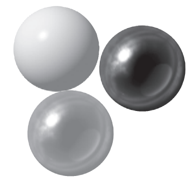
Решение:

а) Есть один шанс из двух, что выпадет „орел“ при бросании монеты, или $1:2=0{,}5$.

Обозначаем: $P(s)=0{,}5$.

б) Для выпадения „решки“ при бросании монеты также есть один шанс из двух, то есть, $1:2=0{,}5$.

Обозначаем: $P(b)=0{,}5$.



3 В урне 3 белых, 5 черных и 4 красных шара. Извлекают наугад один шар. Вычислите шанс события, что выбранный шар будет:

а) белым; б) черным; в) красным.

Решение:

а) Шанс извлечения белого шара может быть представлен в виде отношения числа белых шаров и общего количества шаров в урне: $\frac{3}{12}=\frac{1}{4}=0{,}25$.

Обозначаем: $P(a)=0{,}25$.

б) Из 12 шаров 5 шаров – черные. Значит, шанс извлечения черного шара равен $\frac{5}{12}=0{,}41(6)$.

Обозначаем: $P(n)=0{,}41(6)$.

в) Шанс извлечения красного шара равен $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}=0,(3)$.

Обозначаем: $P(r)=0,(3)$.

Замечаем, что для вычисления шанса наступления некоторого события находят значение отношения числа благоприятствующих исходов к общему числу исходов эксперимента. Полученное число является **вероятностью случайного события**.

> **Определение.** **Вероятностью** случайного события A называется отношение числа m равновозможных исходов, благоприятствующих A к общему числу n всех равновозможных исходов эксперимента.

Вероятность события A обозначается $P(A)$.

Согласно определению,

$$\boxed{P(A)=\frac{m}{n}.} \qquad (1)$$

Формула (1) – ***классическое определение вероятности***.

Примеры. **1.** Вероятность выпадения „орла“ при бросании монеты равна $P(s)=0{,}5$, а вероятность выпадения „решки“ равна $P(b)=0{,}5$, так как $m=1$, а $n=2$.

2. Вероятность выпадения грани с 4 очками при бросании игральной кости равна $P(4)=\frac{1}{6}$, так как $m=1$, а $n=6$.

Замечание. Иногда вероятность выражается в процентах.

Тогда для события „выпадение „орла“, $P(s) = 50\%$, а для события „выпадение „решки“, $P(b) = 50\%$.

Вероятность широко используется в жизненной практике, экономике, социологии и т.д. Например, если метеослужба объявила, что „на завтра ожидается дождь с вероятностью 70%“, то это не означает, что обязательно будет дождь, но шансы довольно велики. Поэтому, выходя из дома, следует взять с собой зонтик.

2.2. Свойства вероятности

Из определения вероятности выведем следующие ***свойства вероятности***:

1° Вероятность достоверного события E равна 1. Значит, $P(E) = 1$.

Действительно, так как $m = n$, то, согласно (1), получим $P(E) = \frac{n}{n} = 1$.

2° Вероятность невозможного события равна 0. Значит, $P(\varnothing) = 0$.

Действительно, так как $m = 0$, то, согласно (1), получим $P(\varnothing) = \frac{0}{n} = 0$.

3° Вероятность случайного события – это число, содержащееся между 0 и 1.

Действительно, число m исходов, благоприятствующих случайному событию A, удовлетворяет двойному неравенству $0 < m < n$, откуда $0 < \frac{m}{n} < 1$. Следовательно, $0 < P(A) < 1$.

1. Вероятность любого события A удовлетворяет двойному неравенству $0 \le P(A) \le 1$.
2. Чем вероятность больше, тем чаще наступает случайное событие при проведении соответствующего эксперимента.

Применим

1 Вычислите вероятность события:

а) A = {выпадение при бросании игральной кости одной грани с 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очками};

б) B = {выпадение 9 очков при бросании игральной кости};

в) C = {извлечение наугад белого шара из урны, содержащей 3 белых и 7 черных шаров}.

2 Расположите полученные вероятности в порядке возрастания.

Решение:

1. а) Так как для события A число благоприятствующих исходов равно $m = 6$, а число всех возможных исходов равно $n = 6$, получим $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{6} = 1$.

Итак, событие A является достоверным событием, и его вероятность равна 1.

б) Так как при бросании игральной кости число исходов, благоприятствующих событию B, равно $m=0$, а число всех возможных исходов равно $n=6$, то получим:

$$P(B)=\frac{\square}{\square}=\square.$$

Событие B является невозможным событием, и его вероятность равна 0.

в) Так как в урне $3+7=10$ (шаров), то число исходов, благоприятствующих событию C, равно $m=3$, а число возможных исходов равно $n=10$. Тогда:

$$P(C)=\frac{m}{n}=\frac{\square}{\square}=\square.$$

Событие C является случайным событием, вероятность которого равна $\square$.

2. Расположив в порядке возрастания вычисленные вероятности, получим $0<0{,}3<1$ или $P(B)<P(C)<P(A)$.

Замечание. Равновозможные события еще называются ***равновероятными событиями***. Вероятность каждого из равновероятных событий одна и та же.

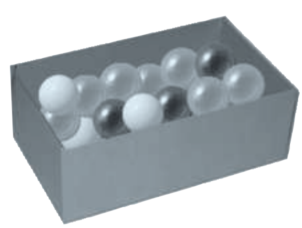
Например, события {выпадение „орла“} или {выпадение „решки“} равновероятны при бросании ровной монеты. Но если подбрасывать деформированную монету, эти события уже не равновероятны, и вероятность каждого из них может быть вычислена только при проведении испытаний.

Вероятность событий можно вычислить без выполнения экспериментов, только если точно известно, что все возможные результаты эксперимента являются равновероятными.

Упражнения и задачи

1

1. Каков шанс того, что при бросании игральной кости выпадет грань с:
   а) 6 очками; б) 0 очков; в) 10 очками; г) 3 очками?
2. В наборе из 20 квадратов количество красных квадратов равно количеству синих квадратов. Каков шанс извлечения наугад красного квадрата? А синего квадрата?
3. Вычислите при бросании игральной кости шанс выпадения грани с количеством очков:
   а) меньше 2; б) больше 2; в) меньше 3; г) меньше 6; д) больше 10.
4. Найдите вероятность извлечения шара из урны, содержащей 15 одинаковых шаров.
5. Бросают игральную кость. Вычислите вероятность выпадения числа очков:
   а) кратного 2; б) кратного 3; в) кратного 4; г) кратного 1.
6. Какова вероятность того, что после воскресенья последует понедельник?
7. В урне 4 белых, 5 черных и 11 красных шаров. Вычислите вероятность того, что извлеченный наугад шар:
   а) белый; б) черный; в) красный.



8. Какова вероятность того, что рыба заговорит?

9. Найдите вероятность того, что взятое наугад натуральное ненулевое число, меньше 91, является числом:
а) простым; б) четным; в) нечетным.

2

10. В корзине три пары рукавиц разного цвета. Вынимают наугад две рукавицы. Какова вероятность того, что пара рукавиц одного цвета?

11. В урне находятся 5 белых, 6 красных и 7 зеленых шаров. Наугад извлекают один шар. Какова вероятность того, что этот шар не будет белым?

12. В VIII классе 14 юношей и 17 девушек. Для дежурства в классе выбирают наугад одного ученика. Какова вероятность того, что этот ученик:
а) юноша; б) девушка?

13. В урне 6 белых, 5 желтых и 13 зеленых шаров. Определите, какое минимальное количество шаров нужно одновременно извлечь наугад из урны, чтобы среди них были:
а) два зеленых шара; б) два белых шара;
в) два желтых шара; г) два шара разных цветов.

14. В урне 30 шаров, пронумерованных числами 1, 2, 3, ..., 30. Выбирают наугад один шар. Найдите вероятность событий:
A = {на шаре – число, которое при делении на 5 дает в остатке 1};
B = {на шаре – число, которое является точным квадратом}.

3

15. Найдите вероятность того, что взятое наугад ненулевое натуральное число, меньше 501, имеет сумму цифр, равную 13.

16. В урне 50 жетонов, пронумерованных числами 1, 2, 3, ..., 50. Извлекают наугад один жетон. Найдите вероятность событий:
A = {на жетоне – число, взаимно простое с 15};
B = {на жетоне – число, взаимно простое с 25};
C = {на жетоне – число, взаимно простое с 30}.

17. 1) Приведите примеры трех экспериментов с:
а) равновероятными событиями;
б) с событиями, которые не являются равновероятными.
2) Вычислите вероятность событий из пункта а).

18. Составьте и решите по одной задаче, подобной упражнениям 6, 7, 8, 10, 14, 15, 16.

§ 3. Элементы математической статистики

Исследуем

• Ученики VIII класса получили следующие отметки за тест по математике: две 3, одну 4, семь 5, четыре 6, пять 7, три 8, четыре 9 и две 10. Представьте в виде таблицы соответствие между отметками от 1 до 10 включительно и количеством полученных отметок по тесту.

Решение:

Таблица содержит результаты тестирования учащихся VIII класса по математике.

Отметка	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Частота	0	0	2	1	7	4	5	3	4	2

Рис. 1

В этом случае говорят, что выполнен статистический анализ, сбор и регистрация некоторых данных.

Математическая статистика – это наука, занимающаяся сбором, регистрацией, обработкой, анализом и интерпретацией данных, относящихся к некоторому явлению (из экономической деятельности или социальной жизни, из физики, биологии, метрологии, сельского хозяйства и др.).

Определения. ♦ Любое множество, элементами которого являются предметы статистического анализа, называется **статистической совокупностью.** Число элементов статистической совокупности называется **объемом совокупности**.

- Каждый элемент статистической совокупности называется **статистической единицей** (или **индивидуумом**).
- Общая черта всех статистических единиц совокупности называется **статистическим признаком**.
- Статистический признак, который может быть измерен (отметка, возраст, рост, объем и т.д.), называется **количественным признаком** (**числовым**).
- Статистический признак, который нельзя измерить (цвет глаз, предпочтения и т.д.), называется **качественным признаком**.
- Статистический признак, принимающий только некоторые изолированные значения из соответствующего множества значений, называется **дискретным признаком** (отметка, количество учащихся в классе и т.д.).
- Статистический признак, принимающий любое значение из определенного числового промежутка, называется **непрерывным признаком** (рост, объем, площадь и т.д.).

1 Укажите в примере, приведенном в начале параграфа:

а) статистическую совокупность;

б) статистические единицы;

в) статистический признак и его тип.

Решение:

а) Статистическая совокупность – множество учащихся класса.

б) Статистическая единица – каждый учащийся класса.

в) Статистический признак – отметка, полученная при тестировании; тип – дискретный признак.

2 Представьте в виде столбчатой диаграммы результаты тестирования по математике из примера, приведенного выше.

Решение:

Графическое представление изображено на рисунке 2.

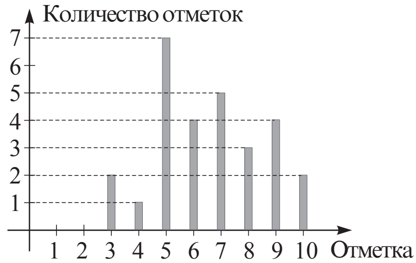


Рис. 2

Результаты, полученные при статистическом анализе, могут быть представлены в виде таблицы (*таблица статистических данных* (рис.1)) или с помощью графиков (*столбчатые, круговые и квадратные диаграммы, диаграммы структурного типа* (*структурный круг, квадрат*) и т.д.).

Например, на рисунке 3 (структурный круг) представлена возможная структура сельскохозяйственной площади и способ ее распределения.

Рисунок 4 (квадратная диаграмма) представляет динамику изменения количества книг в библиотеке за определенный период времени.

Выпуск продукции некоторого предприятия за квартал (год, месяц, неделю, день) можно представить в виде графика, названного ***графиком производственной деятельности*** (рис. 5).

Рис. 3

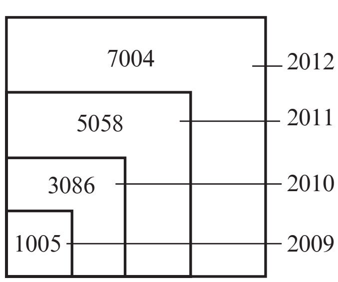


Рис. 4

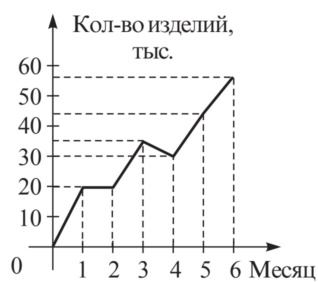


Рис. 5

Замечание. При построении графиков, представляющих результаты некоторого статистического анализа, важно придерживаться соответствующей пропорциональности между статистическими данными.

Упражнения и задачи

1 □ □

1. При статистическом анализе посещаемости уроков учащимися V–IX классов в ноябре, получены следующие результаты: в V A классе – 10 пропусков уроков, в V Б – 8 пропусков, вVI A – 4 пропуска, в VI Б – 2 пропуска, в VII –14 пропусков, в VIII – 7 пропусков, в IX A – 8 пропусков, в IX Б –3 пропуска.

   а) Укажите: статистическую совокупность, статистические единицы, статистический признак и его тип.

   б) Представьте полученные результаты:

   1) в виде таблицы; 2) в виде столбчатой диаграммы.

2. Пусть зарегистрированы статистические данные относительно роста учащихся вашего класса.

   а) Укажите: статистическую совокупность, статистические единицы, статистический признак.

   б) Представьте полученные статистические данные в виде таблицы.

□ **2** □

3. Изобразите с помощью структурного круга количество юношей и количество девушек в вашем классе.

4. Представьте, используя квадратные диаграммы, площади континентов (данные можно найти в учебнике по географии).

5. Изобразите в виде столбчатой диаграммы распределение учащихся вашей школы по классам.

6. Зарегистрируйте данные относительно почасового изменения температуры воздуха за воскресный день. Представьте полученные результаты в виде графика.

□ □ **3**

7. Выполните статистический анализ некоторого события (эксперимента) из социальной жизни, экономики и т.д. Соберите, зарегистрируйте и представьте полученные данные в виде таблицы, графика или диаграммы.

Упражнения и задачи на повторение

1 □ □

1. В коробке конфеты красного, желтого и зеленого цвета: половина конфет красного цвета, треть – желтого цвета, а остальные – зеленого цвета. Какой цвет менее вероятен при извлечении наугад одной конфеты из коробки?

2. В урне 12 шаров, пронумерованных числами 1, 2, 3, ..., 12. Опыт состоит в извлечении наугад одного шара. Перечислите элементарные события этого опыта.

3. В корзине 7 зеленых и 14 красных яблок. Какова вероятность, что наугад извлеченное яблоко:

   а) зеленое; б) красное?

4. Грани кубика окрашены в красный и желтый цвет. Вероятность выпадения грани желтого цвета при бросании кубика равна $\frac{1}{6}$, а грани красного цвета – $\frac{5}{6}$. Сколько желтых и сколько красных граней имеет кубик?

5. В урне 10 шаров, пронумерованных числами 1, 2, 3, ..., 10. Извлекают наугад один шар. Найдите вероятность того, что номер выбранного шара является числом:

а) простым;
б) четным;
в) нечетным;
г) больше, чем 4;
д) меньше, чем 7;
е) больше, чем 11;
ж) меньше, чем 11;
з) кратным 3.

2

6. Найдите вероятность того, что взятое наугад ненулевое натуральное число, меньше 151, является:

а) степенью с показателем, больше 1;
б) точным квадратом.

7. В ящике находятся 150 деталей. Известно, что 2% деталей – бракованные. Найдите вероятность того, что взятая наугад деталь будет без брака.

8. Из колоды в 36 карт наугад достают одну карту. Найдите вероятность того, что выбранная карта – туз.

9. Найдите вероятность того, что взятое наугад натуральное ненулевое число, меньше 121, имеет сумму цифр, равную 9.

10. В корзине 6 красных и 12 зеленых яблок. Какое наименьшее количество яблок нужно взять одновременно, чтобы быть уверенным, что среди них хотя бы одно красное яблоко?

11. Равновероятны ли события:

а) A = {из 30 билетов, пронумерованных числами 1, 2, 3 , …, 30, наугад извлекается билет с номером 2};
B = {из 30 билетов, пронумерованных числами 1, 2, 3, …, 30, наугад извлекается билет с номером 20}.

б) A = {выигрыш в лотерее}; B = {невыигрыш в лотерее}.

3

12. Дима выиграет в игре, если извлеченный из урны шар будет белым. Какую урну должен выбрать Дима, чтобы вероятность выигрыша была наибольшей:

а) с 12 белыми шарами из 38;
б) с 45 белыми шарами из 105;
в) с 18 белыми и 54 красными шарами;
г) с одинаковым количеством белых, красных и черных шаров?

13. В урне шары, пронумерованные числами, состоящими из цифр 5, 6 и 7. Найдите вероятность того, что номер выбранного наугад шара начинается с цифры 5.

14. Монету подбрасывают 3 раза. Какова вероятность, что:

а) „орел“ выпадет 2 раза;
б) „орел“ выпадет хотя бы один раз?

Проверочная работа

Время выполнения работы: 45 минут

Вариант 1

1. В урне 3 белых, 1 черный, 2 красных шара и 1 синий. Эксперимент состоит в извлечении наугад одного шара из урны.
а) Перечислите элементарные события этого эксперимента.
б) Равновероятны ли эти события? Обоснуйте ответ.

2. В корзине 3 красных и 1 желтое яблоко. Найдите количество исходов, благоприятствующих событию „извлечение яблока“:
а) красного цвета; б) желтого цвета.

3. В лотерее участвуют 20 выигрышных билетов и 360 невыигрышных. Лиза приобрела лотерейный билет. Какова вероятность того, что этот билет выигрышный?

4. Какова вероятность того, что после 31 декабря последует 1 января?

5. В книге 150 страниц. Найдите вероятность того, что открыв наугад книгу вы увидите, что номер страницы будет точным квадратом.

6. Бросают кубик, грани которого окрашены в синий и желтый цвет. Вероятность выпадения грани синего цвета равна $\frac{1}{3}$, а грани желтого цвета – $\frac{2}{3}$. Сколько синих и сколько желтых граней имеет кубик?

Баллы

1 — 2; 2 — 1; 3 — 2; 4 — 1; 5 — 2; 6 — 2

Вариант 2

1. В коробке 2 зеленых, 1 красный, 3 синих и 1 черный карандаш. Эксперимент состоит в извлечении наугад одного карандаша из коробки.
а) Перечислите элементарные события этого эксперимента.
б) равносильны ли эти события? Обоснуйте ответ.

2. В урне 1 белый и 2 красных шара. Определите количество исходов, благоприятствующих событию „извлечение шара“:
а) белого цвета; б) красного цвета.

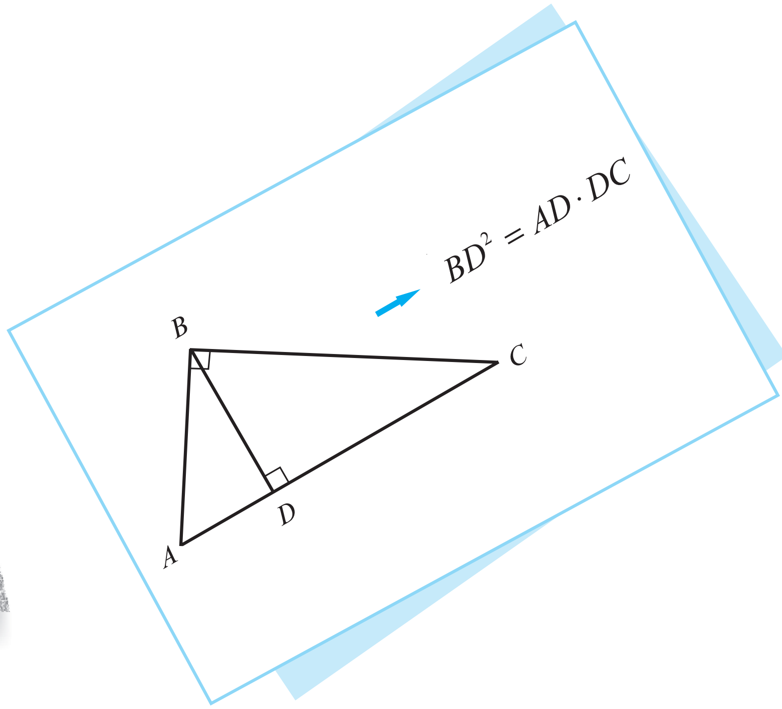
3. В лотерее участвуют 200 билетов, из которых 15 невыигрышных. Найдите вероятность того, что участник лотереи не выиграет?

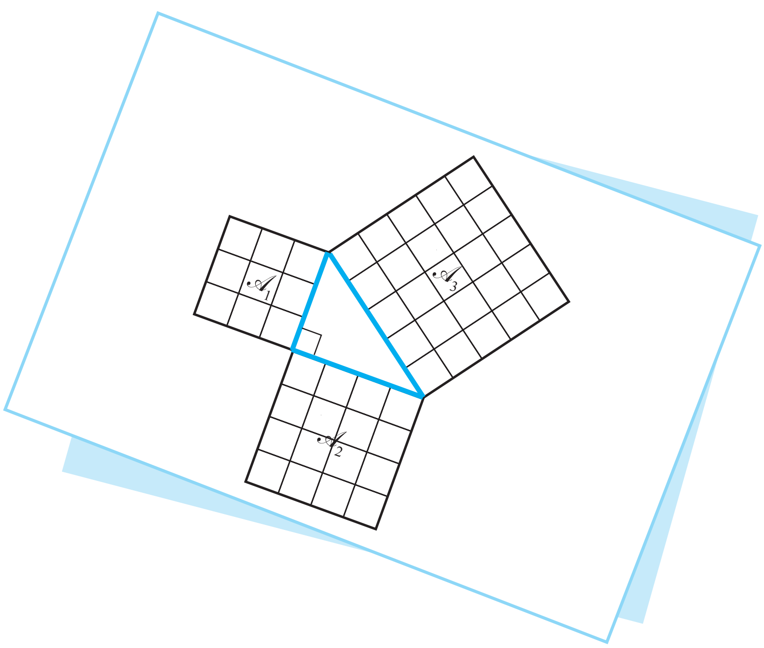
4. Какова вероятность того, что после четверга последует воскресенье?

5. В книге 200 страниц. Найдите вероятность того, что открыв наугад книгу вы увидите, что номер страницы будет точным квадратом.

6. Бросают кубик, грани которого окрашены в коричневый и зеленый цвет. Вероятность выпадения грани коричневого цвета равна $\frac{2}{3}$, а грани зеленого цвета – $\frac{1}{3}$. Сколько коричневых и сколько зеленых граней имеет кубик?

ГЕОМЕТРИЯ





1 глава

Повторение и дополнения

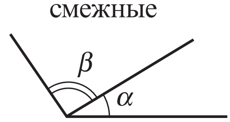
§1. Линии, углы, треугольники, окружности

1 Рассмотрите схемы и прокомментируйте их.

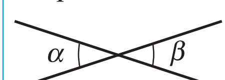
Линии
- прямые
  - некомпланарные
  - компланарные
    - параллельные
    - пересекающиеся
- полупрямые
- ломаные линии
  - замкнутые
  - незамкнутые
- отрезки

Углы
- нулевые $\alpha = 0$
- острые $0 < \alpha < 90°$
- прямые $\alpha = 90°$
- тупые $90° < \alpha < 180°$
- развернутые $\alpha = 180°$

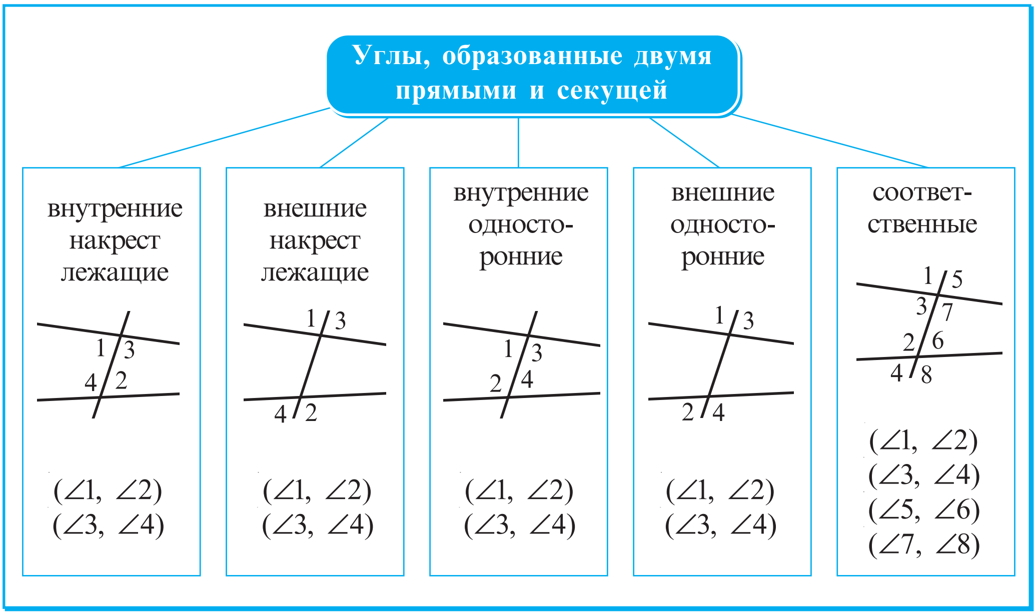
Пары углов (α, β)
- дополнительные до 90° $\alpha + \beta = 90°$
- смежные



- дополнительные до 180° $\alpha + \beta = 180°$
- вертикальные

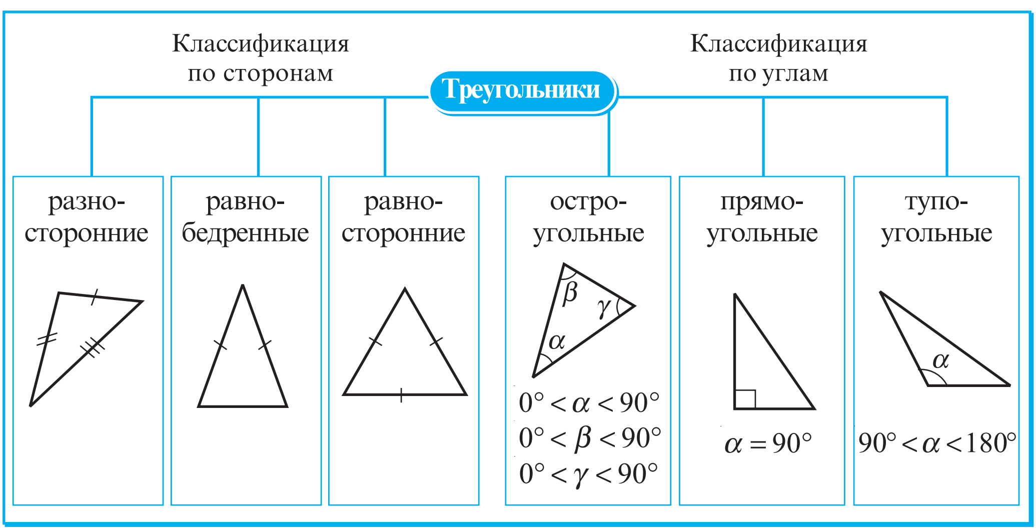


$\alpha = \beta$



• Сформулируйте верные утверждения об углах, образованных двумя прямыми и секущей.

Примеры. Если внутренние накрест лежащие углы, образованные двумя прямыми a и b и секущей, конгруэнтны, то $a \parallel b$.



• Сформулируйте верные утверждения о замечательных линиях треугольника.

Примеры. Медиана, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, является биссектрисой этого треугольника.

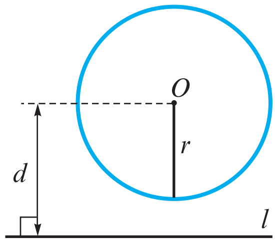
2 Для каждого понятия из первой колонки найдите описание (или определение) из второй колонки.

Образец: 1 → 4

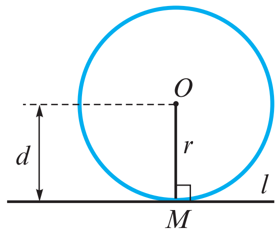
1. Прямой угол
2. Коллинеарные точки
3. Нулевой угол
4. Параллельные прямые
5. Углы, дополнительные до 90°
6. Условие
7. Тупой угол
8. Конгруэнтные фигуры
9. Точка
10. Противоположные полупрямые
11. Истина
12. Аксиома
13. Компланарные
14. Контрпример
15. Доказательство
16. Перпендикулярные прямые
17. Развернутый угол
18. Пересекающиеся прямые
19. Длина
20. Средняя линия треугольника
21. Математическое высказывание
22. Полупрямая
23. Ложно
24. Теорема
25. Смежные углы
26. Углы, дополнительные до 180°
27. Угол
28. Прямая
29. Отрезок
30. Биссектриса угла
31. Обратная теорема
32. Острый угол
33. Заключение

1. Обоснование истинности теоремы.
2. Угол величиной 180°.
3. Истинностное значение ложного высказывания.
4. Угол величиной 90°.
5. Математическое высказывание, истинность которого надо доказать.
6. Пересекающиеся прямые, образующие при пересечении прямой угол.
7. Геометрическая фигура, образованная двумя полупрямыми с общим началом.
8. То, что дано в теореме.
9. Полупрямая, исходящая из вершины угла, принадлежащая внутренней области угла и образующая со сторонами угла два конгруэнтных угла.
10. Часть прямой, заключенная между двумя точками.
11. Два угла, сумма величин которых равна 90°.
12. Истинное математическое высказывание, которое принимают без доказательства.
13. Утверждение, о котором с уверенностью можно сказать истинно оно или ложно, и которое не может быть одновременно и истинным, и ложным.
14. Пример, который противоречит высказыванию, тем самым доказывая, что высказывание не является истинным.
15. Три или более точки, лежащие на одной прямой.
16. Фигуры, лежащие в одной плоскости.
17. Угол величиной 0°.
18. Часть прямой, ограниченная с одной стороны.
19. Компланарные прямые, не имеющие общих точек.
20. Угол, величина которого больше 90° и меньше 180°.
21. Две различные прямые, имеющие одну общую точку.
22. Два угла, сумма величин которых равна 180°.
23. Истинностное значение теоремы.
24. Угол, величина которого больше 0° и меньше 90°.
25. Через две различные точки можно провести только одну.
26. Часть теоремы, которая является условием обратного высказывания данной теоремы.
27. Фигуры, которые при наложении совпадают.
28. Высказывание, которое получается, если поменять местами условие и заключение некоторой теоремы.
29. Две полупрямые с общим началом, образующие прямую.
30. Два компланарных угла с общей вершиной и общей стороной, лежащей между двумя другими сторонами.
31. Величина отрезка.
32. Самая простая геометрическая фигура.
33. Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника.

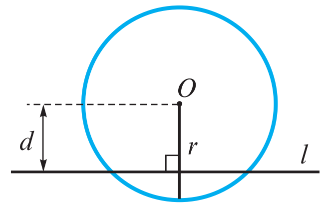
3 Рассмотрите рисунки (точка O – центр окружности). Обратите внимание, как называется прямая l в каждом случае.



прямая является **внешней** по отношению к окружности



прямая является **касательной** к окружности; M – точка касания



прямая является **секущей** по отношению к окружности

• Сколько общих точек имеют окружность и прямая, если расстояние от центра окружности до прямой равно $3\sqrt{8}$ см, а радиус окружности равен:

а) $6\sqrt{2}$ см; б) $4\sqrt{5}$ см; в) $2\sqrt{10}$ см; г) $5\sqrt{3}$ см?

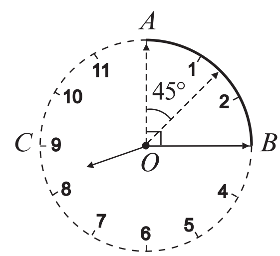
4 За какое время минутная стрелка описывает:

а) угол величиной 45°;

б) часть окружности, длина которой равна $\frac{1}{4}$ длины всей окружности циферблата;

в) полуокружность?

Ответ: а) 7 мин и 30 сек; б) 15 мин; в) 30 мин.



Замечание. В геометрии части окружности имеют специальные названия и обозначения.

Определения. ♦ Угол с вершиной в центре окружности называется **центральным углом**.

♦ Часть окружности, расположенная во внутренней области центрального угла, называется **меньшей дугой** окружности. *Обозначаем*: $\smile AB$, где A и B – точки пересечения центрального угла с окружностью.

♦ Часть окружности, расположенная во внешней области центрального угла, называется **большей дугой** окружности. *Обозначаем*: $\smile ACB$, где C – точка, принадлежащая окружности, но не принадлежащая меньшей дуге.

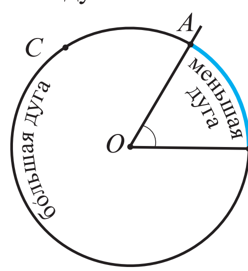
♦ Точки A и B называются **концами дуг**. Дуги $\smile AB$ и $\smile ACB$ называются **дополнительными дугами**.

♦ **Градусная мера меньшей дуги** равна градусной мере соответствующего ей центрального угла.

$$m(\smile AB) = m(\angle AOB)$$

♦ **Градусная мера большей дуги** равна 360° минус градусная мера дополнительной ей дуги.

$$m(\smile ACB) = 360° - m(\angle AOB)$$

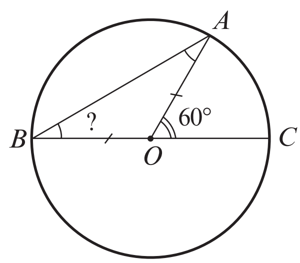


$\angle AOB$ – центральный угол

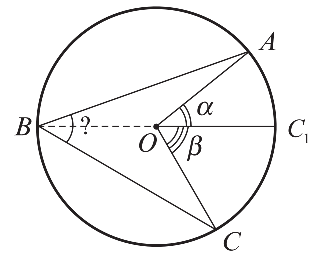
• Найдите градусную меру дуги, зная, что градусная мера дополнительной ей дуги равна:

а) $80°$; б) $130°$; в) $150°45'$; г) $212°17$.

5 Рассмотрите рисунок, найдите $m(\angle ABC)$.



а)



б)

Решение:

а) ΔAOB – равнобедренный, значит, $\angle ABO \equiv \angle BAO$. (*)

$\angle AOC$ – внешний угол треугольника AOB.

Итак, $m(\angle AOC) = m(\angle ABO) + m(\angle BAO) \overset{(*)}{=} 2 \cdot m(\angle ABO)$.

Следовательно, $m(\angle ABO) = \frac{1}{2} m(\angle AOC) = 30°$, то есть, $m(\angle ABC) = 30°$.

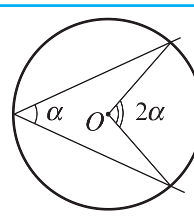
б) Аналогично пункту а) получим

$m(\angle ABC_1) = \frac{\alpha}{2}$, $m(\angle CBC_1) = \frac{\beta}{2}$, то есть, $m(\angle ABC) = \frac{\alpha + \beta}{2}$.

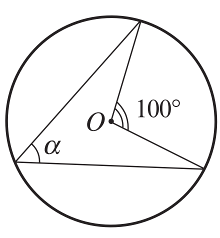
Замечание. Угол ABC, изображенный на каждом из рисунков задания **5**, является **углом, вписанным в окружность**.

Определение. Углом, вписанным в окружность, называется угол, вершина которого лежит на окружности, а его стороны пересекают окружность.

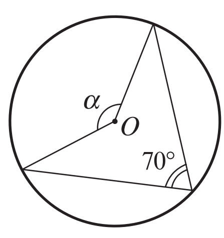
- Градусная мера угла, вписанного в окружность, равна половине градусной меры дуги, на которую он опирается.



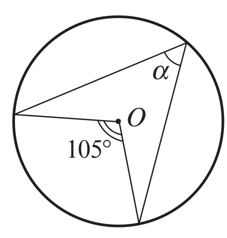
• Найдите величину угла α (точка O – центр окружности):



а)



б)



в)

Упражнения и задачи

1

1. Прочтите:

а) $A \in b,\ M \notin c,\ N \in [AM;$ б) $a \parallel b,\ a \cap c = \{M\},\ b \cap c = \{N\};$

в) $MN > AB,\ AB \perp MN,\ A \in MN,\ B \in MN;$ г) $d \parallel l,\ AB \perp m,\ \{A, B, C\} \subset d.$

2. Изобразите рисунки, соответствующие каждому из случаев а)–г) упражнения **1**.

3. Заполните пропуски:

а) 24 дм = ___ см; б) 890 мм = ___ дм; в) 7,5 м = ___ см;

г) 64 900 см = ___ км; д) 0,065 км = ___ дм; е) 7,05 м = ___ мм.

4. Величина одного из углов, образованных при пересечении двух прямых, равна 44°. Найдите величины остальных углов.

5. Найдите величины двух углов, зная, что они являются:

а) вертикальными и дополнительными до 180°;

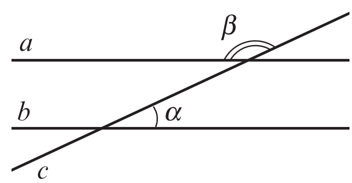
б) дополнительными до 90°, и величина одного на 10° больше другого;

в) дополнительными до 180°, и величина одного в 9 раз больше другого;

г) конгруэнтными, смежными, и величина угла, образованного биссектрисами этих углов, равна 50°.

6. Точки M, N, K лежат на одной прямой в данном порядке, и $MN : NK = 3 : 4$.

Найдите: а) $\dfrac{MK}{MN}$; б) $\dfrac{NK}{MK}$.



7. Прямые a и b, изображенные на рисунке, параллельны. Найдите величины углов (α или β), образованных секущей и прямыми, если:

а) $\alpha = 25°$; б) $\beta = 120°$; в) $\beta - \alpha = 40°$.

8. Проверьте, могут ли следующие три числа являться сторонами некоторого треугольника (выраженные одной единицей измерения):

а) 9, 10, 16; б) 8, 12, 20; в) $\sqrt{5},\ \sqrt{6},\ \sqrt{11}$; г) $\sqrt{6},\ \sqrt{7},\ \sqrt{14}$.

9. Изобразите рисунок, соответствующий описанной ситуации:

а) Точка M – середина основания тупоугольного равнобедренного треугольника ABC.

б) Треугольники ABC и CMB – равнобедренные, и $AM \cap BC = \{D\}$.

в) Треугольники ABF и GDE – равносторонние, и $G \in [AF],\ F \in [GE]$.

г) $\Delta BAE \equiv \Delta DEA,\ [BE] \cap AD = \{C\}$.

10. Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 – медианы треугольника ABC. Найдите периметр треугольника ABC, если:

а) $BC_1 = 9$ см, $BA_1 = 10$ см, $AB_1 = 12$ см;

б) $BA_1 = 3\sqrt{5}$ см, $AC_1 = \sqrt{125}$ см, $CB_1 = 2\sqrt{20}$ см.

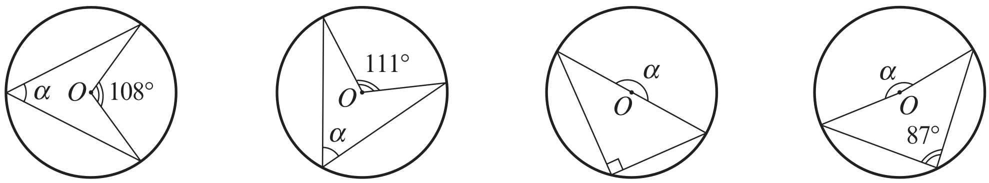
11. Сколько общих точек у окружности и прямой, если радиус окружности равен $5\sqrt{12}$ см, а расстояние от центра окружности до прямой равно:

а) $6\sqrt{8}$ см; б) $10\sqrt{3}$ см; в) $12\sqrt{5}$ см; г) $15\sqrt{2}$ см?

12. Точки A, B, C лежат на окружности в данном порядке. Найдите:

а) $m(\smile AB)$, если $m(\smile ACB) = 100°$;
б) $m(\smile ACB)$, если $m(\smile AB) = 140°$;
в) $m(\smile AC)$, если $m(\smile ABC) = 25°$;
г) $m(\smile BC)$, если $\smile AB \equiv \smile BC \equiv \smile AC$.

13. Найдите величину угла α (точка O – центр окружности):



а) б) в) г)

14. Дан треугольник ABC. Величина угла A в 2 раза больше величины угла B и в 3 раза меньше величины угла C. Найдите величины углов треугольника.

15. Постройте треугольник со сторонами, равными 6 см, 7 см, 8 см.

16. Постройте треугольник, две стороны которого равны 8 см и 9 см, а угол между ними равен 45°.

17. Постройте треугольник со стороной, равной 10 см, и прилежащими к ней углами 30° и 80°.

18. Вычислите периметр треугольника:

а) равнобедренного, одна сторона которого равна 7 см, а другая 15 см;
б) равностороннего, средняя линия которого равна 12 см;
в) разностороннего, стороны которого являются последовательными натуральными числами, и наибольшая из них имеет длину равную 28 см.

19. Вычислите:

а) $31°40'29'' + 46°24'37''$;
б) $118°27'35'' + 36°27'18''$;
в) $90° - 17°55'56''$;
г) $142° - 72°34'56''$.

20. Точка M_1 – ортогональная проекция точки M (a, b) на ось абсцисс прямоугольной системы координат. Найдите координаты точки M_1, если:

а) $a = 3$; $b = -\sqrt{8}$;
б) $a = -0{,}4$; $b = 2\sqrt{5}$.

21. Точка M принадлежит биссектрисе угла AOB. Найдите расстояние от точки M до полупрямой $[OA$, если расстояние от точки M до полупрямой $[OB$ равно:

а) $|\sqrt{7} - 3|$ см;
б) $|3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}|$ см.

22. Найдите величины внешних углов треугольника:

а) прямоугольного, один из углов которого равен 40°;
б) равнобедренного, один из углов которого равен 110°;
в) один из углов которого равен 30°, а другой 80°.

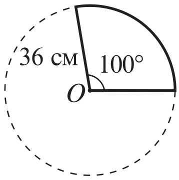
23. Медианы $[AM]$ и $[BN]$ треугольника ABC пересекаются в точке P.
Найдите:

а) PM и PN, если $AP = 24$ см, $BP = 30$ см;
б) AP и BP, если $PM = \sqrt{6}$ см, $PN = \sqrt{7}$ см.

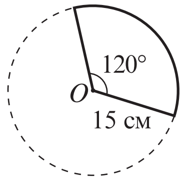
2

$$L_{\circ} = 2\pi R$$

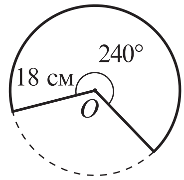
24. Рассмотрите рисунок. Вычислите длину дуги окружности, зная величину центрального угла, опирающегося на эту дугу, и радиус окружности (точка O – центр окружности):



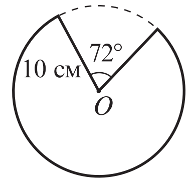
а)



б)



в)



г)

25. На прямой, на одинаковом расстоянии друг от друга, отметили 20 точек, причем первая и последняя точки определяют отрезок длиной x. На другой прямой аналогично (на таком же расстоянии) отметили 200 точек, причем первая и последняя точки определяют отрезок длиной y. Во сколько раз x меньше y?

26. Найдите периметр равностороннего треугольника, средняя линия которого равна $\dfrac{9}{\sqrt{3}}$ см.

27. Найдите величины углов, образованных при пересечении:
а) двух медиан равностороннего треугольника;
б) трех высот равностороннего треугольника.

28. Медиана $[AA_1]$ и биссектриса $[BB_1]$ равностороннего треугольника ABC пересекаются в точке M. Найдите площадь треугольника A_1BM, если площадь треугольника ABC равна 216 см^2.

29. Если увеличить на 8 см ширину прямоугольника, то получим квадрат, периметром 96 см. Найдите периметр прямоугольника.

3

30. Дан равнобедренный треугольник ABC, у которого $[AB] \equiv [BC]$. Точки M и N принадлежат внешней области треугольника ABC, причем треугольники ABM и BCN являются равносторонними. Докажите, что $MN \parallel AC$.

31. Сумма расстояний от вершин треугольника ABC до прямой d равна 30 см. Найдите сумму расстояний от середин сторон треугольника ABC до прямой d.

32. Точка O принадлежит внутренней области квадрата $ABCD$.
Докажите, что если $m(\angle OCD) = m(\angle ODC) = 15°$, то треугольник AOB – равносторонний.

§2. Элементы математической логики. Применение

Вспомним

- **Высказывание** (математическое) – это утверждение, о котором с уверенностью можно сказать истинно оно или ложно.
- Истинные математические высказывания, которые принимаются без доказательств, называются **аксиомами**.
- Математическое высказывание, истинность которого надо доказать, называется **теоремой**.

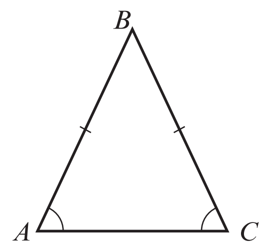
1 Теорема: *Углы при основании равнобедренного треугольника конгруэнтны.*
Чтобы выделить условие и заключение этой теоремы, запишем ее так:

Если $\underbrace{\textit{треугольник является равнобедренным}}_{\text{Условие}}$, то $\underbrace{\textit{углы при его основании конгруэнтны}}_{\text{Заключение}}$.

Рассмотрите схему. Обратите внимание на связь между упомянутой прямой теоремой и теоремой, обратной ей.

Прямая теорема
Условие: ΔABC, $[AB]\equiv[BC]$
Заключение: $\angle A\equiv\angle C$

Обратная теорема
Условие: ΔABC, $\angle A\equiv\angle C$
Заключение: $[AB]\equiv[BC]$



а) Определите условие и заключение теоремы:
Вертикальные углы конгруэнтны.
б) Сформулируйте теорему, обратную данной теореме, и найдите ее истинное значение.

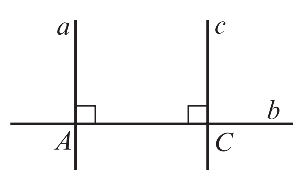
Из истории

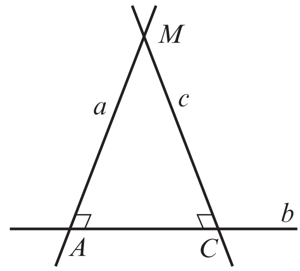
Слово „теорема" происходит от греческого слова *theoreo* (в переводе: *исследовать*, *рассматривать*), а в древности имело смысл зрелища, представления. Это слово укоренилось, так как в те времена доказательства теорем публично демонстрировались на площадях, ярмарках, и часто носили характер пари или серьезных споров.

2 Теорема: *На плоскости – две прямые, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны между собой.*
Докажем эту теорему.

Условие: $a\perp b$, $c\perp b$

Заключение: $a\parallel c$





Доказательство:

Обозначим $a \cap b = \{A\}$, $c \cap b = \{C\}$. Предположим, что $a \nparallel c$, то есть, $a \cap c = \{M\}$.

Получим, что треугольник AMC имеет два угла величиной 90°: $m(\angle MAC) = m(\angle MCA) = 90°$, что невозможно (сумма углов треугольника равна 180°).

Это противоречие доказывает, что предположение было неверным, значит, $a \parallel c$, ч.т.д. ►

Комментарий. Теорема была доказана **методом от противного**. Этот метод применяется не только в математических доказательствах, но и в повседневных логических рассуждениях.

• Докажите методом от противного следующие верные утверждения:

а) Углы при основании любого равнобедренного треугольника являются острыми.

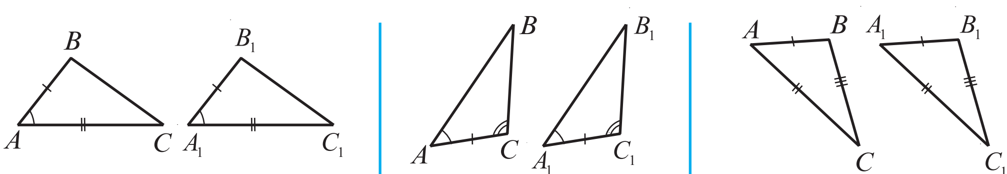
б) Крокодил – это не птица.

в) Слово *спорт* не является глаголом.

г) Если сторона квадрата больше 10, то его площадь больше 100.

3 Вспомним

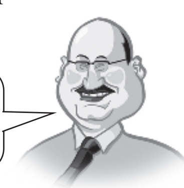
Признаки конгруэнтности двух произвольных треугольников



СУС УСУ ССС

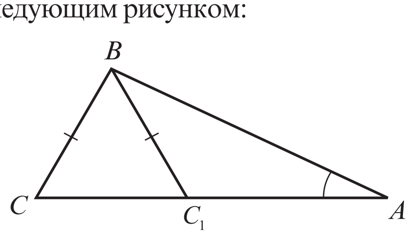
$\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$

Господин X считает, что существует еще один признак конгруэнтности двух треугольников, а именно:



Если две стороны и угол одного треугольника соответственно конгруэнтны двум сторонам и углу другого треугольника, то такие треугольники конгруэнтны.

Андрей Полонидей опроверг это утверждение следующим рисунком:



Заметим, что $\angle A \equiv \angle A$, $[AB] \equiv [AB]$, $[BC] \equiv [BC_1]$, но $\Delta ABC \not\equiv \Delta ABC_1$

Приведенный пример называется **контрпримером**, так как он противоречит утверждению господина X, доказывая тем самым, что оно ложно.

• Приведите контрпример утверждения:

а) Все простые числа являются четными.

б) Все птицы умеют летать.

в) Для любых $a \in \mathbb{R}$, $|a| > 0$.

г) Сумма двух иррациональных чисел есть число иррациональное.

Упражнения и задачи

1

1. Выберите математические высказывания и установите их истинностное значение:

а) Существуют простые четные числа.
б) Зимой идет снег.
в) Весной иногда идет дождь.
г) Существуют составные нечетные числа.
д) Кто заказывает, тот и платит.
е) Не курите!

2. Установите истинностное значение высказывания:

а) Если $a \perp b$ и $a \perp c$, то $b \perp c$.

б) Последней цифрой числа $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 42$ будет 0.

в) Число 123456 делится на 4.

г) В латинском алфавите всего 5 гласных.

д) Любые три различные точки, лежащие на окружности, неколлинеарны.

3. Сформулируйте отрицание высказывания:

а) $8 \cdot 8 = 64$.
б) $3\sqrt{5} > 4\sqrt{3}$.

в) Число 5 является решением уравнения $2x^2 - 3x - 35 = 0$.

г) Число 7 не является решением неравенства $x - 1 > 5$.

д) Любое утверждение является математическим высказыванием.

4. Определите истинностное значение:

а) высказываний предыдущего упражнения;

б) отрицания высказываний из предыдущего упражнения.

5. Укажите условие и заключение теоремы:

а) Если натуральное число делится на 4, то оно делится и на 2.

б) Если $a > b$, то $a + c > b + c$, для любых действительных чисел a, b, c.

в) Если натуральное число заканчивается 0, то оно делится на 5.

г) В равностороннем треугольнике все углы конгруэнтны.

д) Если сторона $[AC]$ треугольника ABC имеет наибольшую длину, то угол B имеет наибольшую градусную меру.

6. Сформулируйте теоремы, обратные теоремам из предыдущего упражнения.

7. Приведите контрпример утверждения:

а) Произведение любых двух рациональных чисел не является целым числом.

б) Все натуральные решения неравенства $|x| < 4$ являются четными числами.

в) Для любых действительных чисел a и b, если $a > b$, то $a^2 > b^2$.

г) Любое число вида $2^n - 1$, где $n \in \mathbb{N}^*$, является простым числом.

8. Докажите методом от противного следующие истинные утверждения:
а) Прямая и окружность могут иметь не больше двух общих точек.
б) Если сегодня среда, то завтра будет четверг.
в) Любая точка, лежащая на биссектрисе угла, равноудалена от сторон этого угла.

2

9. Укажите условие и заключение теоремы:
а) Медиана, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, является его биссектрисой.
б) Соответственные углы, образованные двумя параллельными прямыми и секущей, конгруэнтны.
в) Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон.
г) Диагонали параллелограмма при пересечении делятся пополам.
д) Точки, лежащие на медиатрисе отрезка, равноудалены от концов этого отрезка.

10. Пусть d – расстояние от центра окружности $\mathscr{C}(O, r)$ до прямой l. Установите истинностное значение высказывания:
а) Прямая l является внешней прямой по отношению к окружности, тогда и только тогда, когда $d > r$.
б) Если $d < r$, то прямая l является секущей по отношению к окружности.
в) Если $d = r$, то прямая l является касательной к окружности.

11. Даны высказывания:
A: *Число 24 делится на 8.* B: *Число 24 делится на 9.*
Установите истинностное значение сложных высказываний:
а) A или B. б) A и B. в) $\overline{B}$ и A.
г) $\overline{A}$ или $\overline{B}$. д) $\overline{A}$ и B.

Если X – высказывание, то $\overline{X}$ – его отрицание.

12. Даны утверждения:
A: Натуральное число a является составным. B: Натуральное число a является четным.
Установите истинностное значение высказывания:
а) Если A, то B. б) Если B, то A.
в) Если $\overline{A}$, то $\overline{B}$. г) Если $\overline{B}$, то $\overline{A}$.

13. Покажите, приведя контрпримеры, что следующие утверждения ложны:
а) $\dfrac{\sqrt{a}}{b} = \sqrt{\dfrac{a}{b^2}}$, для любых действительных чисел a, b, где $b \neq 0$.
б) $\sqrt{\dfrac{a^2}{b^2}} = \dfrac{a}{b}$, для любых действительных чисел a, b, где $b \neq 0$.

14. Даны утверждения:
A: *Господин X играет на пианино.* B: *Господин X – музыкант.*
Установите истинностное значение высказывания:
а) Если A, то B. б) Если B, то A.
в) Если $\overline{A}$, то $\overline{B}$. г) Если $\overline{B}$, то $\overline{A}$.

3

15. Известно, что высказывание „Если A, то B“ – истинно. Определите истинностное значение высказывания „Если $\overline{B}$, то $\overline{A}$“. Обоснуйте, приведя пример.

Занимательная математика

16. На листе бумаги записаны следующие 10 высказываний:
Одно из записанных высказываний ложно.
Два записанных высказывания ложны.
Три записанных высказывания ложны.
. . .
Десять записанных высказываний ложны.
Какое из этих высказываний истинно?

17. Правдолюб всегда говорит правду, а Лгун всегда врет. На какой вопрос они дадут один и тот же ответ?

Проверочная работа

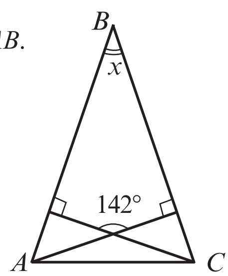
Время выполнения работы: 45 минут

Вариант 1

1. Изобразите рисунок, соответствующий описанной ситуации:
$AB\cap CD=\{M\}$,
$EF\cap CD=\{N\}$,
$AB\parallel EF$, $MN\perp AB$.

2

2. Рассмотрите рисунок ($[AB]\equiv[BC]$) и вычислите x:



2

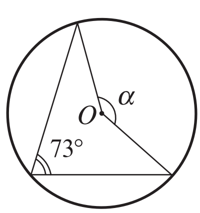
3. Запишите углы треугольника ABC в порядке убывания величин его углов, если:
$$\frac{AC}{AB}<0{,}7,\quad \frac{BC}{AB}>1{,}1.$$

2

4. Найдите длину дуги окружности, градусная мера которой равна 40, зная, что радиус окружности равен 27 см.

2

5. Вычислите величину угла α (точка O – центр окружности):

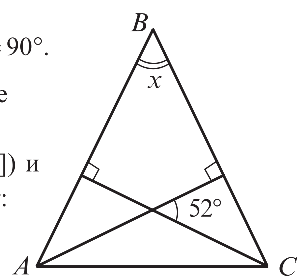


2

Вариант 2

1. Изобразите рисунок, соответствующий описанной ситуации:
$a\cap b=\{A\}$, $a\cap c=\{B\}$,
$b\cap c=\{C\}$,
$m(\angle BAC)=90°$.

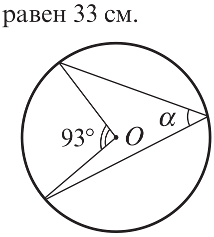
2. Рассмотрите рисунок ($[AB]\equiv[BC]$) и вычислите x:



3. Запишите стороны треугольника ABC в порядке возрастания их длин, если:
$$\frac{m(\angle B)}{m(\angle A)}<0{,}85.$$

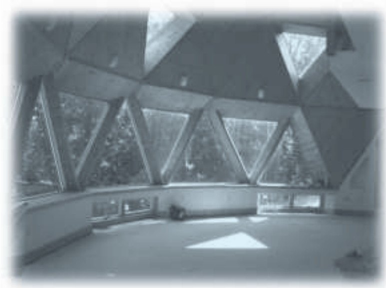
4. Найдите длину дуги окружности, градусная мера которой равна 60, зная, что радиус окружности равен 33 см.

5. Вычислите величину угла α (точка O – центр окружности):



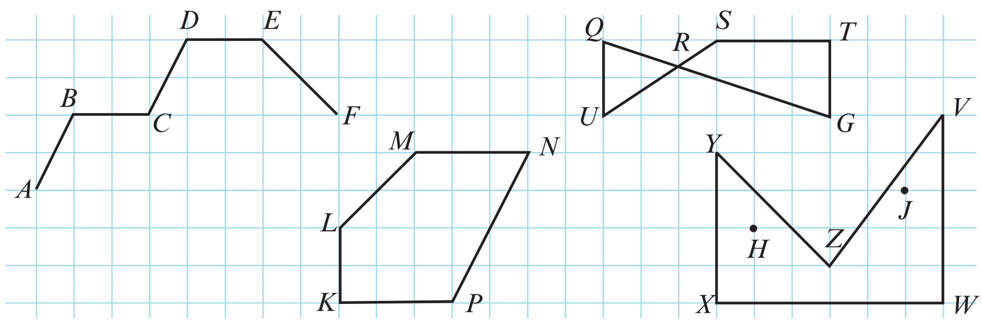
2
глава

Четырехугольники



§1. Выпуклые многоугольники

1 Рассмотрите ломаные линии, изображенные на рисунке.



Заполните пропуски:

а) $ABCDEF$ – это ________.

б) ________ замкнутые ломаные линии.

в) Замкнутые линии ________ являются многоугольниками, так как...

г) Многоугольники ______ называются ________, так как они имеют 5 сторон.

д) Многоугольник ______ имеет диагонали ________.

Определения. ♦ Пусть $A_1, A_2, ..., A_n$ – различные точки, любые три из которых – последовательные неколлинеарные точки. Объединение отрезков $[A_1, A_2], [A_2, A_3], ..., [A_{n-1}, A_n]$ называется **ломаной линией**. Точки $A_1, A_2, ..., A_n$ называются **вершинами ломаной линии**, а отрезки $[A_1, A_2], [A_2, A_3], ..., [A_{n-1}, A_n]$ – **звеньями** или **сторонами** ломаной линии.

♦ Замкнутая ломаная линия без самопересечений называется **многоугольником**.

♦ Часть плоскости, ограниченная сторонами многоугольника, называется **внутренней областью многоугольника**. Другая часть плоскости называется **внешней областью многоугольника**.

• На рисунке, изображенном выше, найдите многоугольник, у которого любые две точки его внутренней области определяют отрезок, принадлежащий этой области.

Определения. ♦ Многоугольник называется **выпуклым**, если любые две точки его внутренней области определяют отрезок, принадлежащий этой области.

- Многоугольник называется **невыпуклым**, если существуют две точки его внутренней области, определяющие отрезок, пересекающийся с его внешней областью.
- **Диагональю** выпуклого многоугольника называется отрезок, соединяющий две вершины, не лежащие на одной стороне.
- Многоугольники с 4 сторонами (соответственно, с 5 сторонами, с 6 сторонами) называются **четырехугольниками** (соответственно, **пятиугольниками**, **шестиугольниками**).

Многоугольник $KLMNP$ – выпуклый, а многоугольник $XYZVW$ – невыпуклый, так как $[HJ]$ пересекается с внешней областью многоугольника.

• Для какого из многоугольников $KLMNP$ и $XYZVW$ прямые, содержащие стороны многоугольника, не пересекают его внутреннюю область? Сделайте вывод.

2 Зная, что сумма величин углов треугольника равна 180°, перечертите и заполните таблицу.

Название многоугольника	*Количество сторон*	*Количество диагоналей, исходящих из одной вершины*	*Сумма величин углов многоугольника*
Выпуклый четырехугольник	4		
Выпуклый пятиугольник			
Выпуклый шестиугольник			

Теорема. Сумма величин углов выпуклого многоугольника с n сторонами равна $180° \cdot (n-2)$.

Упражнения и задачи

1

1. Постройте и обозначьте ломаную линию:
   а) незамкнутую, с 5 звеньями, без самопересечений;
   б) незамкнутую, с 6 звеньями, с самопересечением;
   в) замкнутую, с 5 звеньями, без самопересечений;
   г) замкнутую, с 7 звеньями, с самопересечением.
2. Постройте многоугольник:
   а) выпуклый с 5 сторонами; б) невыпуклый с 6 сторонами;
   в) выпуклый с 7 сторонами; г) невыпуклый с 8 сторонами.

3. Сколько диагоналей можно провести из одной вершины многоугольника с:
а) 5 сторонами; б) 6 сторонами; в) 7 сторонами; г) 10 сторонами?

4. Вычислите сумму углов выпуклого многоугольника с:
а) 6 сторонами; б) 7 сторонами; в) 8 сторонами; г) 10 сторонами.

5. Вычислите периметр выпуклого многоугольника со сторонами, равными:
а) $7\frac{1}{3}$ см; 6,(2) см; 6 см; 7,(8) см;
б) $8\sqrt{3}$ см; $\sqrt{300}$ см; $\sqrt{192}$ см; $\sqrt{243}$ см.

6. Найдите величины углов выпуклого четырехугольника с двумя параллельными сторонами, зная, что два противоположных угла четырехугольника имеют величины:
а) 60° и 100°; б) 110° и 90°.

7. Найдите величины углов выпуклого многоугольника с n конгруэнтными сторонами, если:
а) $n = 4$; б) $n = 5$; в) $n = 6$; г) $n = 10$.

8. Углы A и B выпуклого четырехугольника $ABCD$ дополнительны до 180°. Каково взаимное расположение прямых AD и BC?

9. Периметр четырехугольника равен 50 см. Вычислите длины сторон четырехугольника, зная, что их длины, выраженные в сантиметрах, являются последовательными натуральными числами.

2

10. Существует ли выпуклый многоугольник со сторонами:
а) 1 см, 2 см, 3 см, 4 см, 9 см; б) 2 см, 4 см, 10 см, 4 см;
в) 0,6 см; 0,1 см; $\frac{1}{3}$ см; $\frac{1}{9}$ см?

11. Найдите величины углов выпуклого четырехугольника, зная, что они прямо пропорциональны числам:
а) 2, 3, 4, 6; б) 2, 3, 6, 7; в) 6, 8, 10, 12.

12. Найдите величины углов выпуклого четырехугольника, зная, что они обратно пропорциональны числам:
а) 2, 3, 6, 9; б) 1, 2, 3, 6.

3

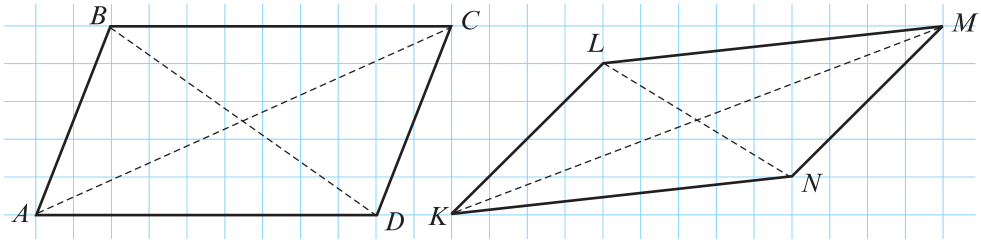
13. Сколько диагоналей у выпуклого многоугольника с:
а) 5 сторонами; б) 6 сторонами; в) 7 сторонами; г) 10 сторонами?

14. Докажите, что выпуклый многоугольник с n сторонами имеет $\frac{n(n-3)}{2}$ диагоналей.

15. **Внешним углом** выпуклого многоугольника называется угол, смежный внутреннему углу многоугольника при этой вершине. Докажите, что внешний угол выпуклого четырехугольника равен сумме внутренних углов четырехугольника, несмежных ему, минус 180°.

§ 2. Параллелограммы

1 Рассмотрите рисунок.



Используя необходимые инструменты, установите:

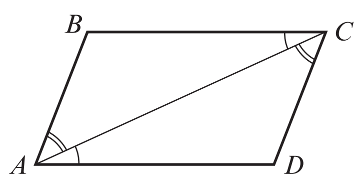
а) какая связь существует между сторонами каждого четырехугольника, между противолежащими углами, между двумя углами, прилежащими к одной стороне?

б) свойство точки пересечения диагоналей каждого четырехугольника.

Определение. Четырехугольник, у которого две пары параллельных сторон, называется **параллелограммом**.

Четырехугольники $ABCD$ и $KLMN$ являются параллелограммами.

Теорема 1. Противолежащие стороны параллелограмма конгруэнтны.



Докажем теорему 1.

Условие: $ABCD$ – параллелограмм, $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$.

Заключение: $[AB] \equiv [CD]$, $[AD] \equiv [BC]$.

Доказательство:

① $\Delta ABC \equiv \Delta CDA$ (Признак УСУ: $[AC]$ – общая сторона, $\angle BAC \equiv \angle DCA$, $\angle ACB \equiv \angle CAD$ – пары внутренних накрест лежащих углов при параллельных прямых).

② Из ① следует, что $[AB] \equiv [CD]$, $[AD] \equiv [BC]$, ч.т.д. ►

• Заполните пропуски так, чтобы получить теорему, обратную теореме 1, которая также верна: *Если противолежащие стороны выпуклого четырехугольника* __________, *то четырехугольник является* __________.

• Аналогично доказательству теоремы 1, покажите правомерность следующих высказываний:

Теорема 2. Противолежащие углы параллелограмма конгруэнтны.

Теорема 3. Два угла параллелограмма, прилежащие к одной стороне, дополнительны до 180°.

Теорема 4. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

Обратные теоремам 2–4 также являются теоремами. Для того, чтобы установить, является ли четырехугольник параллелограммом, можно воспользоваться определением параллелограмма или одной из теорем, обратным теоремам 1–4.

Признаки параллелограмма

Выпуклый четырехугольник является параллелограммом, если выполняется хотя бы одно из условий:

1. у четырехугольника две пары параллельных сторон;
2. у четырехугольника одна пара параллельных и конгруэнтных сторон;
3. у четырехугольника противолежащие стороны конгруэнтны;
4. у четырехугольника противолежащие углы конгруэнтны;
5. у четырехугольника пары прилежащих к одной стороне углов дополнительны до 180°;
6. у четырехугольника середины диагоналей совпадают.

2 Впишите одно из понятий *квадрат*, *прямоугольник*, *ромб*, чтобы получить истинное высказывание:

а) Параллелограмм, у которого один угол прямой, называется ______.

б) Прямоугольник, у которого смежные стороны конгруэнтны, является ______.

в) Параллелограмм, у которого смежные стороны конгруэнтны, является ______.

г) У ______ все углы прямые.

д) У ______ все стороны конгруэнтны.

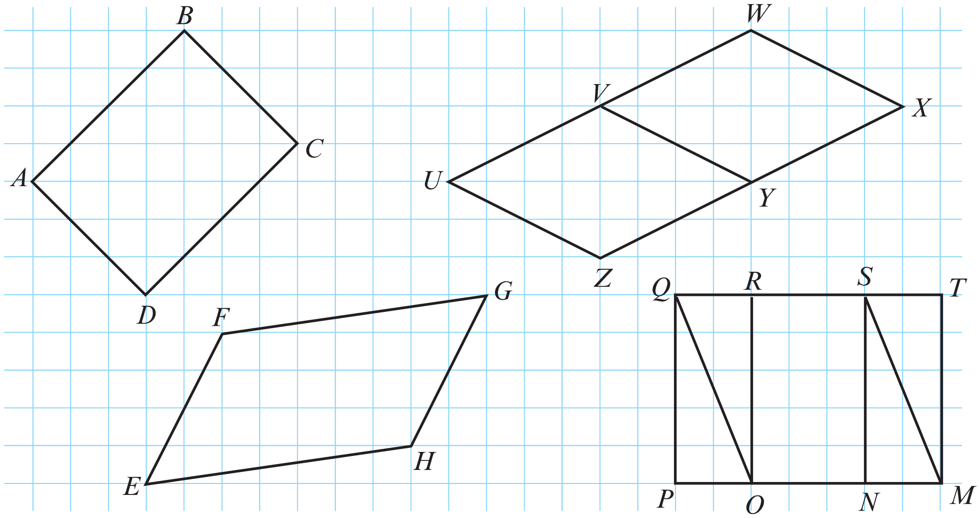
• Рассмотрите схему и сформулируйте теоремы.

Упражнения и задачи

1

1. Рассмотрите рисунок и выберите:

а) квадраты; б) прямоугольники; в) параллелограммы; г) ромбы.



2. Найдите периметр параллелограмма со сторонами:

а) 3,5 см и 4,5 см; б) $9\sqrt{5}$ см и $\sqrt{180}$ см.

3. Найдите периметр ромба со сторонами: а) 8,2 см; б) 7,(6) см.

4. Изобразите рисунок, для которого истинно высказывание:

а) Отрезки $[AB]$ и $[CD]$ являются диагоналями параллелограмма.

б) Длина прямоугольника $ABCD$ в 1,5 раза больше его ширины.

в) $ABCD$ – прямоугольник, а $AEFD$ – параллелограмм.

г) У четырехугольника $ABCD$ диагонали конгруэнтны, но он отличается от параллелограмма.

5. *Истинно* или *Ложно*?

а) Длина стороны ромба составляет 25% от его периметра.

б) Ромб, у которого диагонали конгруэнтны, является квадратом.

в) Параллелограмм, у которого все стороны конгруэнтны, является квадратом.

г) Если диагонали четырехугольника перпендикулярны, то этот четырехугольник является ромбом.

6. Градусная мера одного из углов параллелограмма равна 35°. Найдите величины остальных углов параллелограмма.

7. Один из углов параллелограмма имеет величину в 5 раз больше величины его другого угла. Найдите величины остальных углов параллелограмма.

8. Один из углов ромба имеет величину на 20° меньше величины другого угла ромба. Найдите величины остальных углов ромба.

2

9. У прямоугольника $ABCD$ диагональ равна 10 см. Найдите радиус окружности, которой принадлежат точки A, B и C.

10. Диагонали ромба $ABCD$, сторона которого равна 12 см, пересекаются в точке O. Найдите радиус окружности, которой принадлежат точки A, B, O.

11. Периметр четырехугольника равен 1 м. Найдите длины сторон четырехугольника, зная, что, выраженные в сантиметрах, они являются четными последовательными числами.

12. Если увеличить на 11 см ширину прямоугольника, то получим квадрат, периметр которого равен 112 см. Чему равен периметр прямоугольника?

13. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 50 см. Найдите расстояние между прямыми AD и BC, зная, что $m(\angle A) = 30°$ и $BC = 16$ см.

14. Периметр прямоугольника равен 70 см. Найдите измерения прямоугольника, если известно, что, увеличив длину на 10 см, получим удвоенную ширину прямоугольника.

3

15. Вычислите площадь треугольника ABC (угол B – прямой), если $AB = 8$ см, $BC = 12$ см.

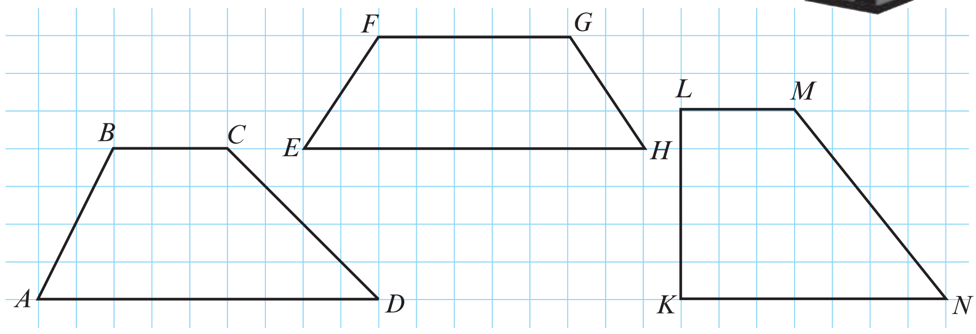
16. Найдите координаты четвертой вершины параллелограмма $ABCD$, если:
а) $A(0, 0)$, $B(1, 3)$, $C(7, 1)$;
б) $A(-7, -3)$, $B(5, 2)$, $C(17, -3)$;
в) $A(-5, -3)$, $B(5, 4)$, $C(9, 3)$.

§3. Трапеция

1 Рассмотрите рисунок.

а) Какая связь существует между элементами каждого четырехугольника

б) Существует ли что-то общее у этих трех четырехугольников?



Определения. ♦ Четырехугольник, у которого две противолежащие стороны параллельны, а две другие не параллельны, называется **трапецией**. Параллельные стороны называются **основаниями**.

- Трапеция, у которой непараллельные стороны конгруэнтны, называется **равнобокой трапецией**.
- Трапеция, у которой одна из непараллельных сторон перпендикулярна основанию, называется **прямоугольной трапецией**.
- Отрезок, концы которого лежат на прямых, содержащих основания трапеции, и перпендикулярный им, называется **высотой трапеции**.

• Исследуйте четырехугольники, изображенные выше, и заполните пропуски:

а) Четырехугольник $ABCD$ является ______.

б) Четырехугольник ______ является прямоугольной трапецией.

в) Четырехугольник ______ является равнобокой трапецией.

г) Диагонали трапеции ______ конгруэнтны.

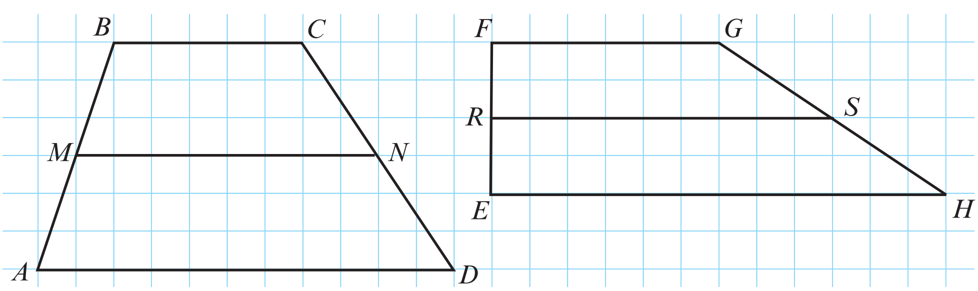
д) У трапеции ______ две пары конгруэнтных углов.

Теорема 1. Диагонали равнобокой трапеции конгруэнтны.

Теорема 2. Углы при основаниях равнобокой трапеции конгруэнтны.

• Докажите теоремы 1 и 2.

2 Рассмотрите рисунок.



• Дополните:

а) Точки M, N, R, S являются серединами отрезков ______ соответственно.

б) Отрезки $[BC]$, $[MN]$ и $[AD]$ являются ______.

в) Отрезки $[EH]$, $[FG]$ и $[RS]$ являются ______.

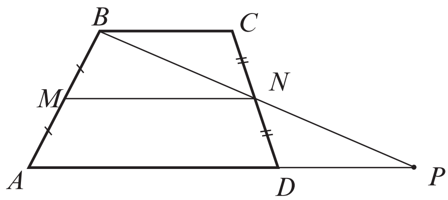
• Вычислите $\frac{AD+BC}{MN}$ и $\frac{EH+FG}{RS}$.

Определение. Отрезок, соединяющий середины непараллельных сторон трапеции, называется **средней линией трапеции**.

Отрезки $[MN]$ и $[RS]$ являются средними линиями трапеций $ABCD$ и, соответственно, $EFGH$.

Теорема 3. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна полусумме длин оснований.

Докажем теорему 3.



Условие: $ABCD$ – трапеция, точки $AD \parallel BC$, M и N – середины сторон $[AB]$ и соответственно $[CD]$.

Заключение: 1) $MN \parallel AD$, $MN \parallel BC$;

2) $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$.

Доказательство:

① Пусть P – точка пересечения прямых BN и AD.

② $\Delta BCN \equiv \Delta PDN$ (Признак УСУ: $[CN] \equiv [DN]$,
$\angle BNC \equiv \angle PND$ – вертикальные углы;
$\angle BCN \equiv \angle PDN$ – внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых).

Следовательно, $[BC] \equiv [PD]$, точка N – середина отрезка BP.

③ Отрезок $[MN]$ – средняя линия треугольника ABP.

Следовательно, $MN \parallel AP$ (∗), $MN = \frac{1}{2}AP = \frac{1}{2}(AD + DP) = \frac{1}{2}(AD + BC)$.

Согласно (∗), $MN \parallel AD$. Так как $AD \parallel BC$, следует, что $MN \parallel BC$, ч.т.д. ▶

Упражнения и задачи

1 ☐ ☐

1. Изобразите рисунок, для которого истинно высказывание:
   а) Трапеция $ABCD$ имеет основания AB и CD.
   б) Угол C трапеции $ABCD$ – прямой.
   в) У прямоугольной трапеции $ABCD$ одно из оснований в два раза меньше другого.
   г) Диагонали трапеции $ABCD$ перпендикулярны.
   д) У равнобокой трапеции $ABCD$ боковая сторона конгруэнтна меньшему основанию.

2. Найдите величины углов прямоугольной трапеции $ABCD$ с бóльшим основанием $[AD]$, если:
   а) $m(\angle A) + m(\angle D) = 160°$;   б) $m(\angle B) + m(\angle D) = 130°$.

3. Найдите величины углов равнобокой трапеции $ABCD$ с бо́льшим основанием $[AD]$, если:

а) $m(\angle A)+m(\angle D)=160°$; б) $m(\angle B)+m(\angle C)=220°$.

4. Вычислите длину средней линии трапеции, с основаниями:

а) 8 см и 4 см; б) $2\sqrt{7}$ см и $6\sqrt{7}$ см; в) 6,(3) см и 9,(3) см.

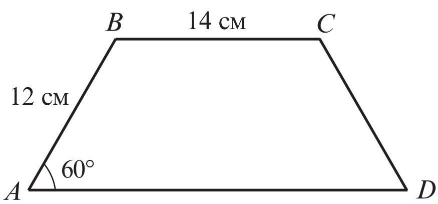
5. Отрезок $[MN]$ – средняя линия трапеции $ABCD$ с бо́льшим основанием $[AD]$. Найдите:

а) AD, если $MN=10$ см и $BC=6$ см;

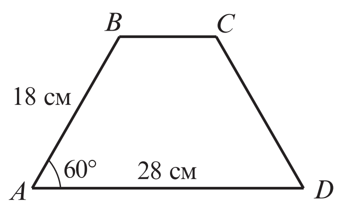
б) BC, если $MN=12{,}5$ см и $AD=15$ см.

6. Найдите длины сторон равнобокой трапеции, периметр которой равен 100 см, зная, что боковая сторона конгруэнтна меньшему основанию и в два раза меньше большего основания.

7. Используя данные рисунка, найдите периметр равнобокой трапеции $ABCD$.



а)



б)

8. Отрезок $[MN]$ – средняя линия трапеции $ABCD$ с бо́льшим основанием $[AD]$. Найдите:

а) периметр трапеции, если $AB=8$ см, $CD=9$ см, $MN=12$ см;

б) отрезок MN, если $AB=3\sqrt{5}$ см, $DC=4\sqrt{5}$ см, а периметр трапеции равен $21\sqrt{5}$ см.

9. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ с бо́льшим основанием $[AD]$. Найдите $AC+BD$, если $BD=10$ см.

2

10. Диагональ трапеции делит ее среднюю линию на два отрезка. Отношение длин этих отрезков равно $\frac{2}{3}$. Найдите длины оснований трапеции, если длина средней линии трапеции равна 15 см.

11. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ с бо́льшим основанием $[AD]$. Вычислите периметр трапеции, если $AD=18$ см, $BC=11$ см и $[AC$ – биссектриса угла BAD.

12. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ с бо́льшим основанием $[AD]$. Найдите величины углов треугольника, если $AD=2BC$ и $[AC$ – биссектриса угла BAD.

3

13. Точка E принадлежит большему основанию $[AB]$ трапеции $ABCD$ так, что $[AE]\equiv[DC]$. Докажите, что отрезки AC и DE делятся пополам точкой пересечения.

14. Пусть отрезок $[MN]$ – средняя линия трапеции $ABCD$ с бо́льшим основанием $[AD]$. Найдите MN, если: $MN+AD=31$ см, $MN+BC=25$ см.

Упражнения и задачи на повторение

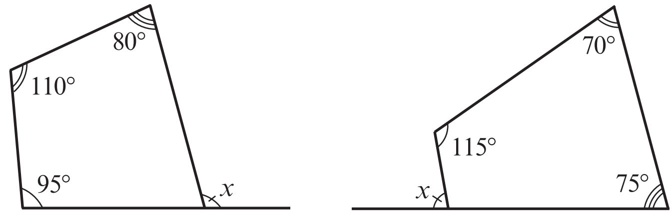
1

1. Постройте линию:
а) кривую, незамкнутую; б) ломаную, замкнутую;
в) ломаную, замкнутую, с 6 звеньями; г) ломаную, незамкнутую, с 5 звеньями.

2. Сколько диагоналей можно провести из одной вершины выпуклого многоугольника с:
а) 8 сторонами; б) 9 сторонами; в) 12 сторонами; г) 18 сторонами?

3. Сколько сторон у выпуклого многоугольника, если сумма величин его углов равна:
а) 1260°; б) 1800°; в) 3240; г) 2700?

4. Вычислите величину угла, обозначенного через x.



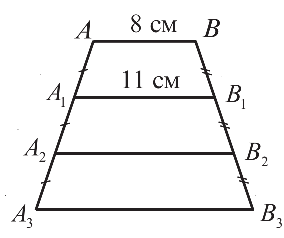
а) б)

5. Постройте:
а) параллелограмм, у которого диагонали равны 6 см и 8 см, а угол, образованный ими, имеет величину 40°;
б) квадрат с диагоналями 7 см;
в) ромб с диагоналями 8 см и 10 см;
г) прямоугольник, сторона которого равна 5 см и образует с диагональю угол 50°.

6. Постройте:
а) квадрат, периметр которого равен 20 см;
б) ромб со стороной 6 см и одним из углов, величиной 60°;
в) прямоугольную трапецию, у которой высота равна 5 см и основания 4 см и 6 см;
г) равнобокую трапецию, у которой высота равна 5 см и основания 3 см и 7 см.

7. Вершины четырехугольника $MNKP$ являются серединами сторон квадрата $ABCD$, а вершины четырехугольника $VXYZ$ являются серединами сторон четырехугольника $MNKP$. Вычислите:
а) XY, если $AB = 8\sqrt{2}$ см;
б) площадь квадрата $ABCD$, если $XY = 2\sqrt{5}$ см.

8. Используя данные рисунка, найдите длину отрезков A_2B_2 и A_3B_3, если $AB \parallel A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$.



2

9. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в начале координат прямоугольной системы координат. Найдите координаты:
а) точек A и B, если $C(4, 6)$, $D(3, -2)$;
б) точек C и D, если $A(1, 1)$, $B(5, -1)$.

10. Пусть $ABCD$ – параллелограмм, $M \in [AD]$, причем $BM \perp AD$. Найдите площадь параллелограмма, если $BM = 8$ см, $AD = 12$ см.

Указание. Пусть $N \in [AD$, причем $CN \perp AD$. Докажите, что $\Delta ABM \equiv \Delta DCN$.

3

11. Найдите площадь ромба, диагонали которого равны 10 см и 12 см.

12. Вычислите площадь равнобокой трапеции, у которой:
а) высота равна 5 см, а основания 6 см и 14 см;
б) высота равна 8 см, а основания 5 см и 7 см.

13. Вычислите сумму величин внешних углов:
а) выпуклого четырехугольника;
б) выпуклого пятиугольника;
в) выпуклого шестиугольника.

14. Какого вида четырехугольник образуют биссектрисы произвольного прямоугольника?

Проверочная работа

Время выполнения работы: 45 минут

Вариант 1

1. Сколько диагоналей можно провести из одной вершины выпуклого многоугольника , если сумма его углов равна 2700°? (2)

2. Найдите величины углов ромба, если одна из его диагоналей образует со стороной угол величиной 20°. (2)

3. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в начале прямоугольной системы координат. Найдите координаты точек A, B, C, если точка D имеет координаты $(-3, 2)$ и стороны прямоугольника параллельны осям координат. (3)

4. Вычислите сумму углов выпуклого многоугольника с 7 сторонами. (3)

Вариант 2

1. Сколько диагоналей можно провести из одной вершины выпуклого многоугольника, если сумма его углов равна 1980°? (2)

2. Найдите величины углов ромба, если одна из его диагоналей образует со стороной угол величиной 70°. (2)

3. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в начале прямоугольной системы координат. Найдите координаты точек A, B, C, если точка D имеет координаты $(1, -5)$ и стороны прямоугольника параллельны осям координат. (3)

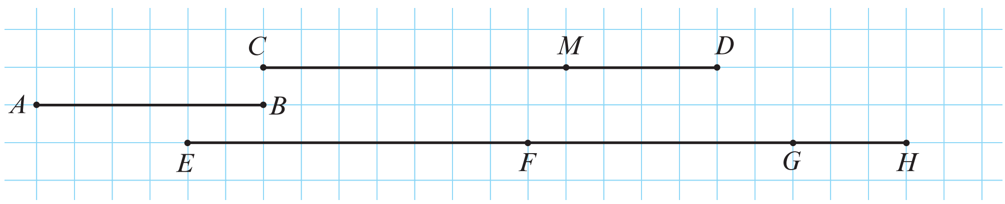
4. Вычислите сумму углов выпуклого многоугольника с 8 сторонами. (3)

3 глава Подобие треугольников

§1. Теорема Фалеса

1.1. Пропорциональные отрезки

1 Рассмотрите рисунок и заполните:



а) $\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{3\,\text{см}}{6\,\text{см}}=0{,}5,\quad \dfrac{CD}{EG}=\square,\quad \dfrac{EF}{CD}=\square,\quad \dfrac{GH}{MD}=\square;$

б) $\dfrac{AB}{CM}=\dfrac{\square}{CD}=\dfrac{GH}{\square}=\dfrac{\square}{EG}.$

- **Отношение двух отрезков** – это отношение их длин (выраженных одной единицей измерения).
- **Отрезки** $[A_1B_1]$, $[A_2B_2]$, $[A_3,B_3]$ **пропорциональны** отрезкам $[C_1D_1]$, $[C_2D_2]$, $[C_3,D_3]$, если $\dfrac{A_1B_1}{C_1D_1}=\dfrac{A_2B_2}{C_2D_2}=\dfrac{A_3B_3}{C_3D_3}=k$, где $k\in\mathbb{R}$.
  Число k называется **коэффициентом пропорциональности**.
- Аналогично определяется пропорциональность двух последовательностей, состоящих из 4, 5, ... отрезков.

• Найдите на рисунке задания **1** две последовательности по 4 пропорциональных отрезка. Чему равен их коэффициент пропорциональности?

2 Разделите отрезок длиной 18 см на три части, пропорциональные числам 2, 3, 4.

Решаем

Пусть x, y, z – последовательность искомых длин $(x+y+z=18)$.

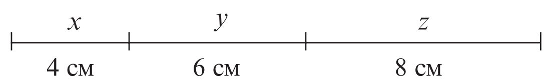
Тогда между величинами x, y, z и 2, 3, 4 существует прямо пропорциональная зависимость.

Итак, $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}=\frac{x+y+z}{2+3+4}=\frac{18}{9}=2.$

Получим: $x=4$ (см),

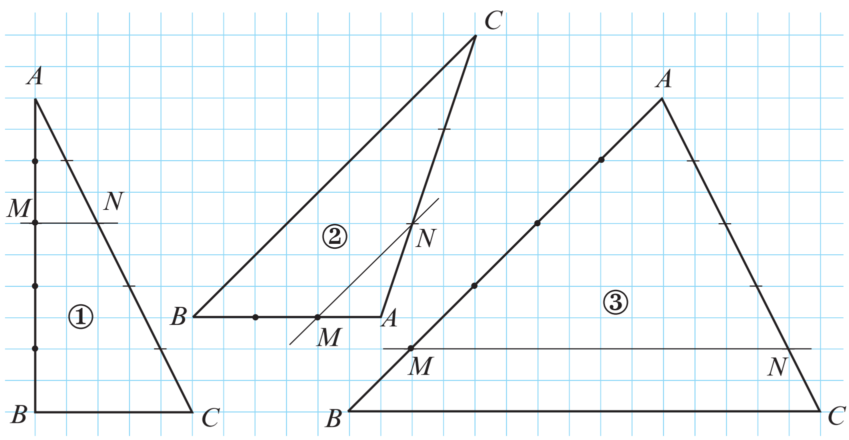
$y=6$ (см),

$z=8$ (см).

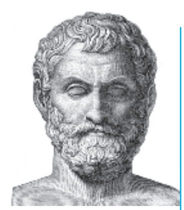


1.2. Теорема Фалеса. Применения

1 Рассмотрите рисунок и сравните в каждом случае значения отношений $\frac{AM}{MB}$ и $\frac{AN}{NC}$. Что вы заметили?



Теорема Фалеса. Прямая, параллельная одной из сторон треугольника, образует на остальных его сторонах пропорциональные отрезки.

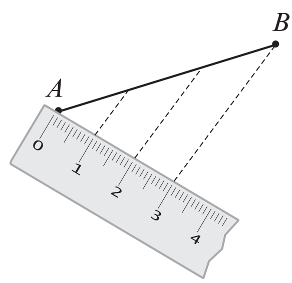


Фалес Милетский – древнегреческий философ (624–546 г. до н.э.)

• Для каждого случая задания **1** составьте другие равные отношения отрезков.

2 Продолжите утверждение так, чтобы получить теорему, обратную теореме Фалеса: *Если прямая образует с двумя сторонами треугольника пропорциональные отрезки, то...*

3 Рассмотрите рисунок и объясните, как можно разделить отрезок на 3 равные части.

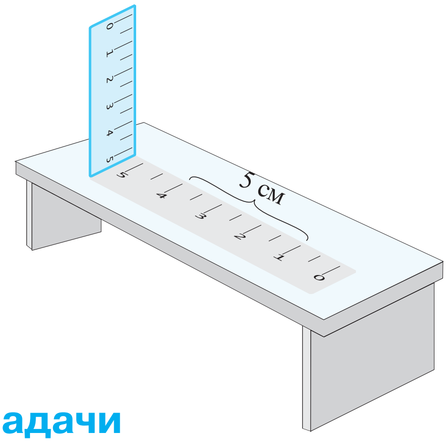


• Постройте отрезок длиной $2\frac{1}{7}$ см.

Теорема (эквидистантных параллельных прямых). Если три или более параллельные прямые образуют на секущей конгруэнтные отрезки, то они образуют на любой другой секущей конгруэнтные отрезки, и расстояние между каждыми двумя смежными прямыми одинаково (то есть, прямые – эквидистантные).

• Рассмотрите рисунок.

На прозрачной линейке отмечены деления 0 см, 1 см, …, 5 см. Найдите коэффициент пропорциональности отношений длин делений и их теней, если расстояние тени от деления **4 см** до деления **1 см** равно 5 см.



Упражнения и задачи

1

1. Существует ли прямо пропорциональная зависимость между последовательностями:

а) 1, 2, 3, 4 и 5, 6, 7, 8;

б) 2, 3, 4, 5 и 4, 6, 8, 10;

в) $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$ и 5, 6, 7;

г) $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ и 2,5; 2; 1?

2. Проверьте, будут ли числа из первой строки пропорциональны числам из второй:

а)

2	4	6	10	12
5	10	15	25	30

б)

1,(3)	0,7	11	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$
8	4,2	66	1	0,(3)

3. Заполните пропуски так, чтобы числа из первой строки были бы пропорциональны числам из второй:

а)

4	6	10	12	
	18			27

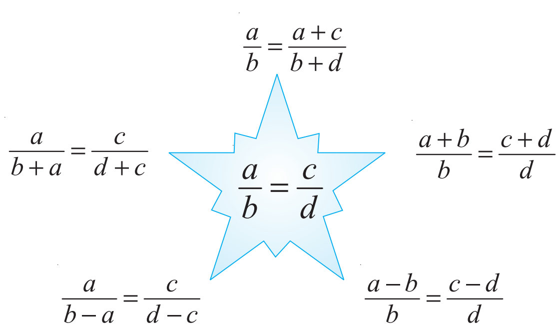
б)

0,2		1,8		3,2	
	5	9	10		12

4. Рассмотрите схему и составьте по 5 пропорций, отталкиваясь от пропорции:

а) $\frac{2,4}{3,6} = \frac{4}{6}$;

б) $\frac{0,8}{0,2} = \frac{10}{2,5}$.



5. Заполните таблицу:

а)

Количество кирпичей	Масса (кг)
1	2,5
3	...
5	...
...	100
60	...
...	150

б)

Расстояние (км)	Количество бензина (л)
100	6
150	...
50	...
...	15
350	...
...	28,5

в)

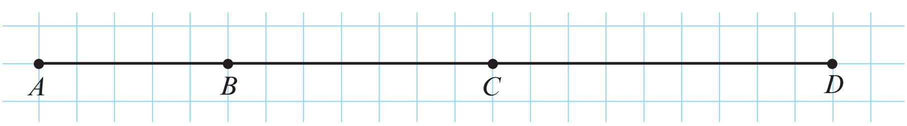
Расстояние (км)	Время (часы)
60	1
40	...
...	5
90	...
...	4,5
510	...

г)

Количество краски (л)	Площадь ($м^2$)
1	12
...	8
...	14
3,5	...
6	...
...	100

6. Рассмотрите рисунок. Вычислите отношение отрезков:

а) AB и CD; б) AC и AD; в) BC и BD; г) AD и AB.



7. Точка C принадлежит отрезку AB, причем $\frac{AC}{BC} = \frac{3}{4}$. Вычислите отношение:

а) $\frac{AB}{AC}$; б) $\frac{BC}{AB}$; в) $\frac{AB}{AB - AC}$; г) $\frac{AB - BC}{AB + AC}$.

8. Вычислите:

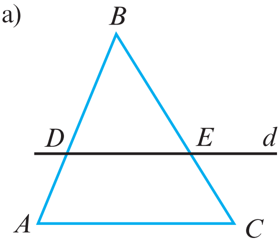
а) MN, если отношение отрезков MN и KP равно 2,4 и $KP = 4$ см;

б) KP, если отношение отрезков MN и KP равно 4,2 и $MN = 21$ см;

в) отношения отрезков MN и KP, если $[MN]$ в 3 раза короче $[KP]$.

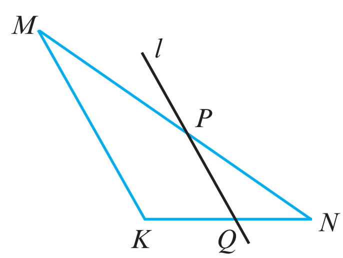
9. Прямая, на рисунке, параллельна стороне треугольника. Заполните соответственно пропуски:

а)



$\frac{BD}{DA} = \frac{\square}{\square}$, $\frac{EC}{BC} = \frac{\square}{\square}$;

б)

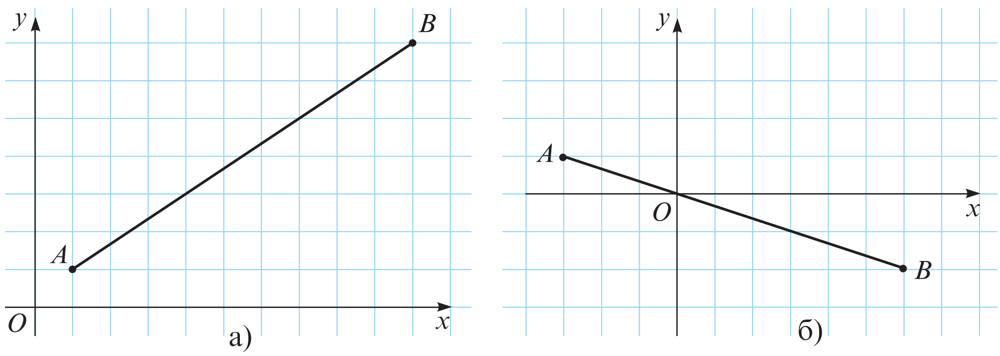


$\frac{MP}{PN} = \frac{\square}{\square}$, $\frac{KN}{QN} = \frac{\square}{\square}$.

10. Разделите отрезок 12 см на 3 части, пропорциональные числам 1, 2, 3.

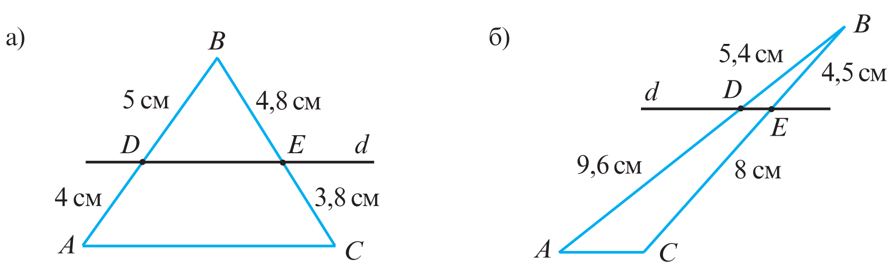
11. Разделите отрезок 13,5 см на 3 части, пропорциональные числам 2, 4, 3.

12. Найдите координаты двух точек, которые делят отрезок AB на 3 равные отрезка.

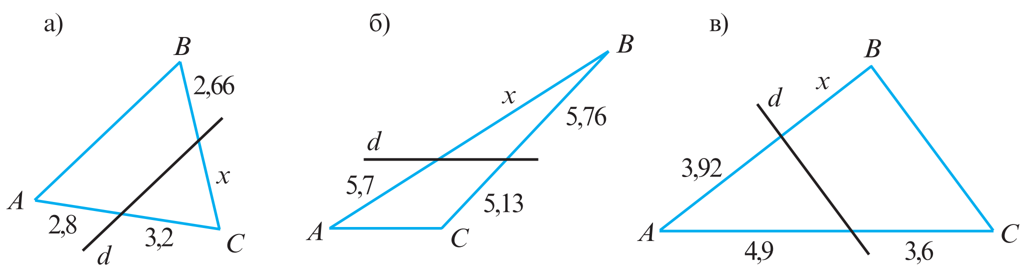


2

13. Рассмотрите рисунок. Установите, параллельна ли прямая d стороне треугольника:



14. Рассмотрите рисунок. Прямая d параллельна стороне треугольника. Найдите x.

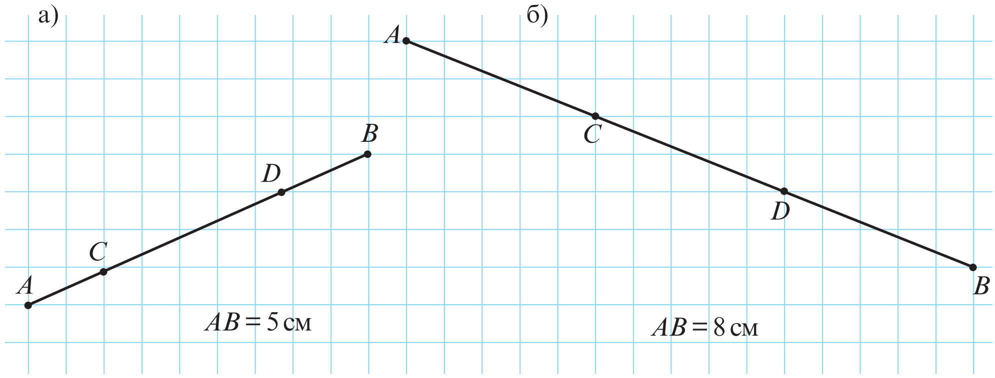


15. С помощью линейки без делений можно построить эквидистантные параллельные прямые. Взяв это на заметку, разделите с помощью линейки:

а) отрезок, равный 6 см, на 4 конгруэнтных отрезка;

б) отрезок, равный 7 см, на 3 конгруэнтных отрезка.

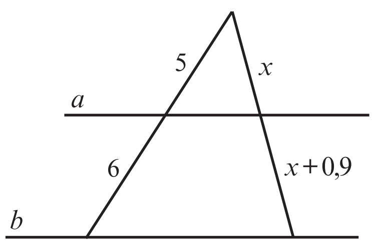
16. Точки A, B, C, D принадлежат горизонтальным линиям клеточной сетки. Рассмотрите рисунок и найдите длину отрезков AC, CD и BD:



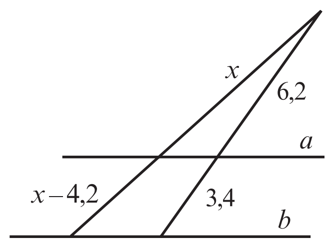
3

17. Прямые a и b, изображенные на рисунке, параллельны. Найдите значение x.

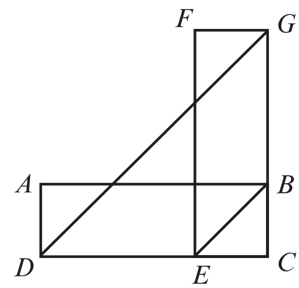
а)



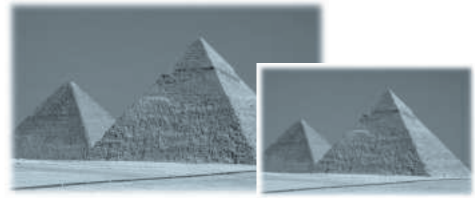
б)



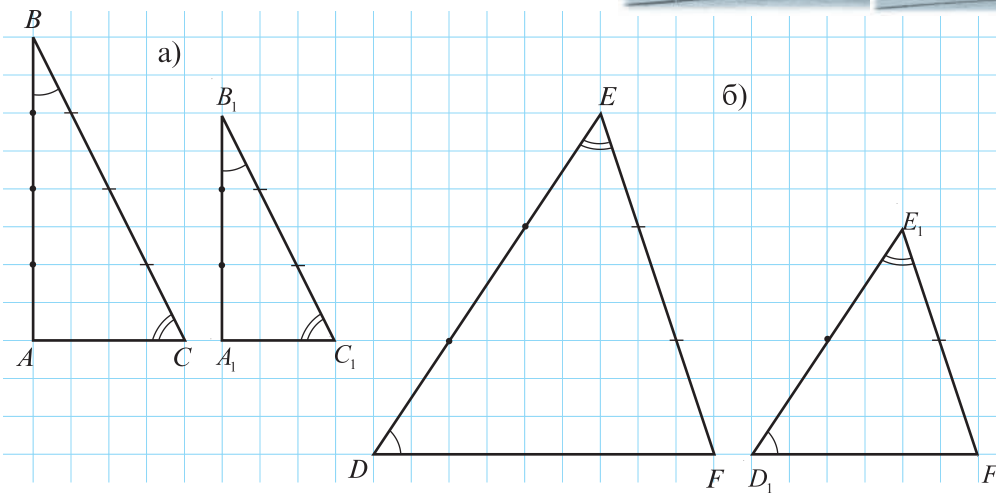
18. Прямоугольники $ABCD$ и $EFGC$ имеют одинаковую площадь. Докажите, что $[DG] \parallel [BE]$.



§ 2. Подобные треугольники



1 Рассмотрите рисунок и заполните пропуски:



а) $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{4}{3}$, $\dfrac{AC}{A_1C_1}=\square$, $\dfrac{BC}{B_1C_1}=\square$, $\angle A\equiv\angle A_1$, $\angle B\equiv\angle B_1$, $\angle C\equiv\square$.

б) $\dfrac{DE}{\square}=\dfrac{EF}{E_1F_1}=\dfrac{\square}{D_1F_1}=\dfrac{3}{2}$, $\angle D\equiv\angle D_1$, $\angle E\equiv\square$, $\square\equiv\angle F_1$.

• Какие общие свойства двух пар треугольников вы заметили?

Определение. Два **треугольника** называются **подобными**, если их углы соответственно конгруэнтны и стороны соответственно пропорциональны.

Обозначение $\Delta ABC\sim\Delta A_1B_1C_1$ читается „Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны“ и означает, что $\angle A\equiv\angle A_1$, $\angle B\equiv\angle B_1$, $\angle C\equiv\angle C_1$, $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1}=\dfrac{AC}{A_1C_1}=k$.

Число k называется ***коэффициентом пропорциональности*** (или ***коэффициентом подобия***).

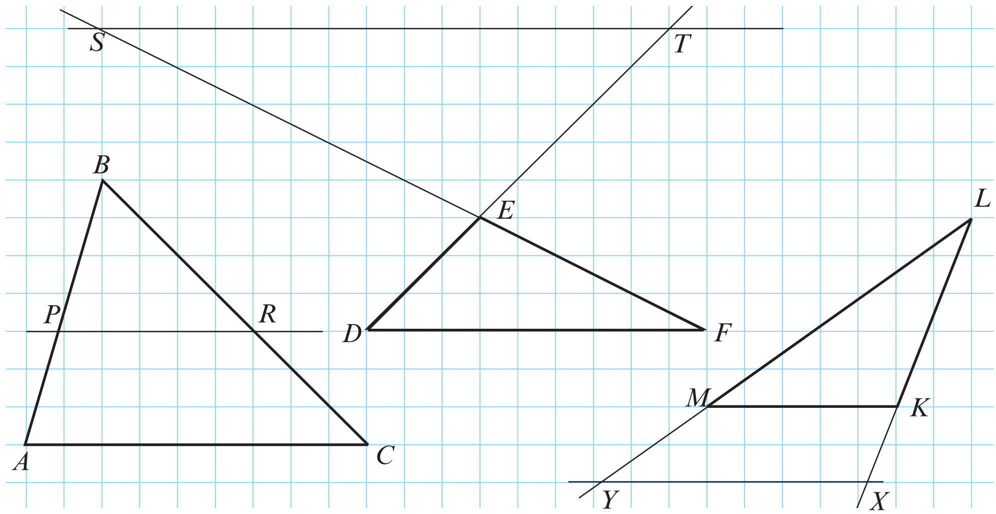
Напомним, что в общем из соотношения $\Delta ABC\sim\Delta A_1B_1C_1$ не следует, например, что $\Delta ABC\sim\Delta A_1C_1B_1$.

• Докажите теорему:

Теорема (транзитивности подобий). Если $\Delta ABC\sim\Delta A_1B_1C_1$ и $\Delta A_1B_1C_1\sim\Delta A_2B_2C_2$, то $\Delta ABC\sim\Delta B_2A_2C_2$.

Замечание. Два конгруэнтных треугольника являются подобными и их коэффициент подобия равен 1.

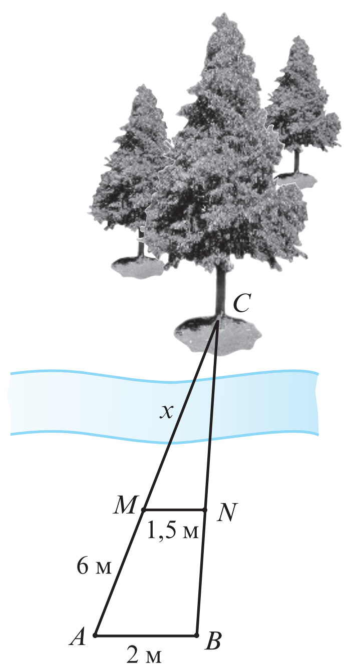
2 Рассмотрите рисунки. Применив теорему Фалеса и используя геометрические принадлежности, найдите пары подобных треугольников. Сформулируйте утверждение, касающееся прямой, параллельной одной из сторон треугольника.



Основная теорема подобия (ОТП). Прямая, параллельная одной из сторон треугольника, образует с прямыми, содержащими остальные две стороны, треугольник, подобный данному.

• Рассмотрите рисунок ($MN \parallel AB$).

Пусть расстояние от дерева до точки M найти нельзя, но можно найти длины отрезков AM, MN и AB. Применив ОТП, найдите MC.



Объясняем

① Так как $MN \parallel AB$, согласно ОТП: $\Delta MCN \sim \Delta ACB$.

② $\dfrac{MC}{AC} = \dfrac{MN}{AB}$ (согласно ①). Обозначаем: $MC = x$.

$\dfrac{x}{x+6} = \dfrac{1{,}5}{2}$ ➞ $2x = 1{,}5(x+6)$

➞ $2x - 1{,}5x = 9$

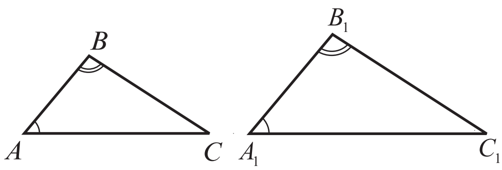
➞ $0{,}5x = 9$

Следовательно, $x = 9 : 0{,}5 =$ ☐ (м).

Ответ: ☐ м.

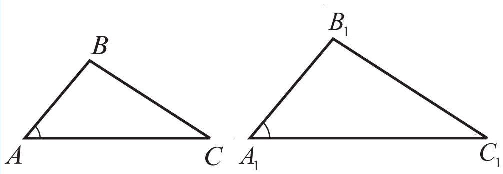
3 Признаки подобия двух треугольников

1. **Признак УУ.** Если два угла одного треугольника соответственно конгруэнтны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.



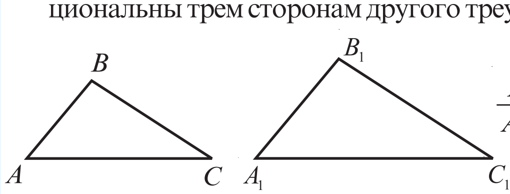
$\angle A \equiv \angle A_1$, $\angle B \equiv \angle B_1$ $\rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$

2. **Признак СУС.** Если две стороны одного треугольника соответственно пропорциональны двум сторонам другого треугольника, и углы между этими сторонами конгруэнтны, то треугольники подобны.



$\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$, $\angle A \equiv \angle A_1$ $\rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$

3. **Признак ССС.** Если три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то эти треугольники подобны.



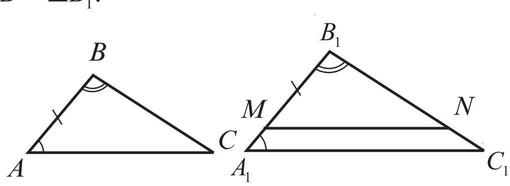
$\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1}$ $\rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$

Докажем признак подобия УУ.

Условие: ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$, $\angle A \equiv \angle A_1$, $\angle B \equiv \angle B_1$.

Заключение: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Доказательство:



① Отметим точки M и N, $M \in [A_1B_1]$, $N \in [B_1C_1]$, причем $[MB_1] \equiv [AB]$ и $MN \parallel A_1C_1$.

② $\angle B_1MN \equiv \angle A_1$ (как соответственные углы, образованные секущей A_1B_1 и параллельными прямыми MN и A_1C_1). Следовательно, $\angle B_1MN \equiv \angle A$ (транзитивность конгруэнтности).

③ $\Delta ABC \equiv \Delta MB_1N$ (Признак УСУ), значит, $\Delta ABC \sim \Delta MB_1N$ (согласно замечанию, с. 175).

④ $\Delta MB_1N \sim \Delta A_1B_1C$ (По основной теореме подобия, то есть, так как $MN \parallel A_1C_1$).

⑤ Из ③ и ④ следует, что $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ (согласно транзитивности подобий),

ч.т.д. ►

4 Так как любой прямоугольный треугольник имеет прямой угол, то два прямоугольных треугольника подобны, если две пары соответствующих сторон пропорциональны или соответствующие острые углы конгруэнтны.

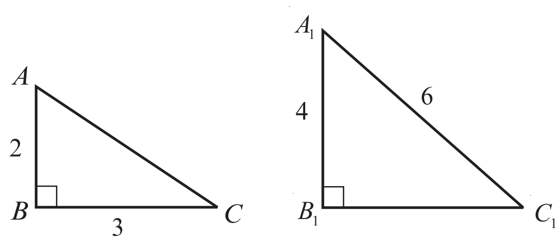
Признаки подобия двух прямоугольных треугольников

1. **Признак У.** Если острый угол одного прямоугольного треугольника конгруэнтен острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники подобны.

2. **Признак КК.** Если два катета одного прямоугольного треугольника соответственно пропорциональны двум катетам другого прямоугольного треугольника, то треугольники подобны.

3. **Признак КГ.** Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно пропорциональны гипотенузе и катету другого прямоугольного треугольника, то треугольники подобны.

• Рассмотрите рисунок. Определите истинностное значение высказывания „Если две стороны одного прямоугольного треугольника соответственно пропорциональны двум сторонам другого прямоугольного треугольника, то треугольники подобны”.

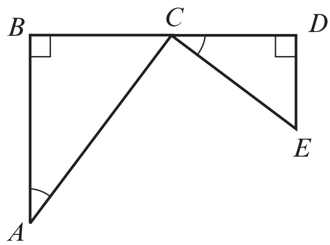


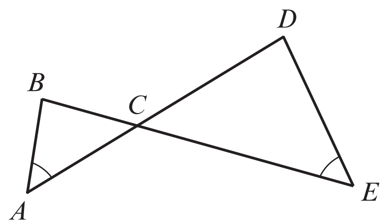
Упражнения и задачи

1

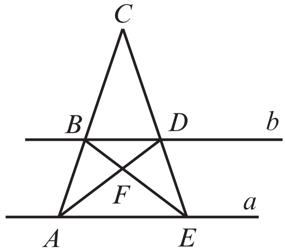
1. Запишите соотношения конгруэнтности и равенства, которые следуют из соотношения:
   а) $\Delta TRI \sim \Delta OPT$; б) $\Delta POC \sim \Delta SAT$.

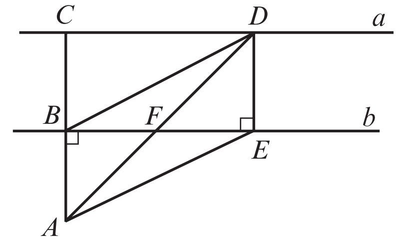
2. Рассмотрите рисунок. Определите подобные треугольники:
   а) б)





3. Прямые a и b параллельны. Найдите подобные треугольники.

а) 

б) 

4. Найдите величины углов треугольника ABC, если:

а) $m(\angle B)=90°$, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ и $m(\angle F)=35°$;

б) $\angle A \equiv \angle B$, $\Delta ABC \sim \Delta MNK$ и $m(\angle K)=40°$;

в) $\angle A \equiv \angle B$, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ и $\angle D \equiv \angle F$.

5. *Истинно* или *Ложно*?

а) Равнобедренные прямоугольные треугольники подобны.

б) Если $\Delta ABC \sim \Delta BAC$, то ΔCBA – равносторонний.

в) Если $\Delta ABC \sim \Delta CBA$ и $m(\angle A)=60°$, то ΔABC – равносторонний.

6. Треугольники ABC и DEF подобны. Найдите:

а) периметр треугольника ABC, если периметр треугольника DEF равен 22 см и $\frac{AB}{DE}=1{,}5$;

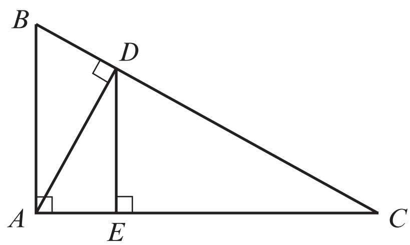
б) коэффициент пропорциональности, если периметр треугольника ABC в $\sqrt{5}$ раз больше периметра треугольника DEF.

7. Диагонали трапеции $ABCD$ с бóльшим основанием AD пересекаются в точке O. Запишите пары образованных подобных треугольников.

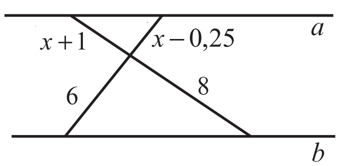
8. $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ и $[BM]$, $[EN]$ – высоты треугольников ABC и DEF, $M \in AC$, $N \in DF$. Найдите другие подобные треугольники.

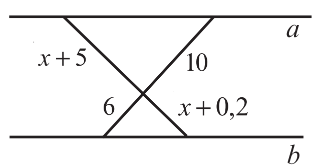
2

9. Рассмотрите рисунок. Найдите подобные треугольники.

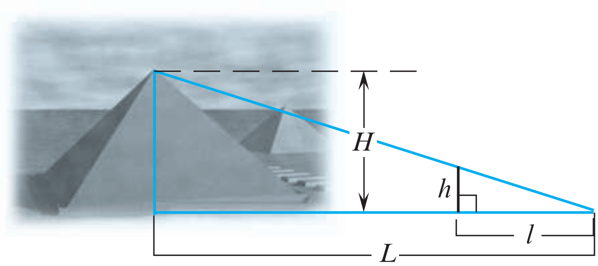


10. Прямые a и b параллельны. Найдите x.

а) 

б) 

11. Рассмотрите рисунок. Найдите высоту (H) пирамиды, если L – длина тени пирамиды, h – длина палки, а l – длина тени палки и:
а) $L = 90$ м, $h = 1{,}5$ м, $l = 2$ м;
б) $L = 120$ м, $h = 1{,}2$ м, $l = 1{,}8$ м.

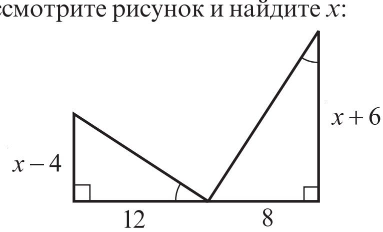


12. Найдите длины сторон треугольника, периметр которого равен 52 см, если он подобен треугольнику со сторонами 15 см, 20 см и 30 см.

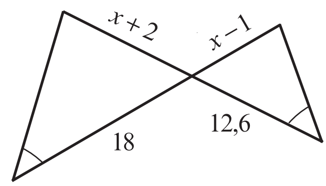
3

13. Рассмотрите рисунок и найдите x:

а)



б)



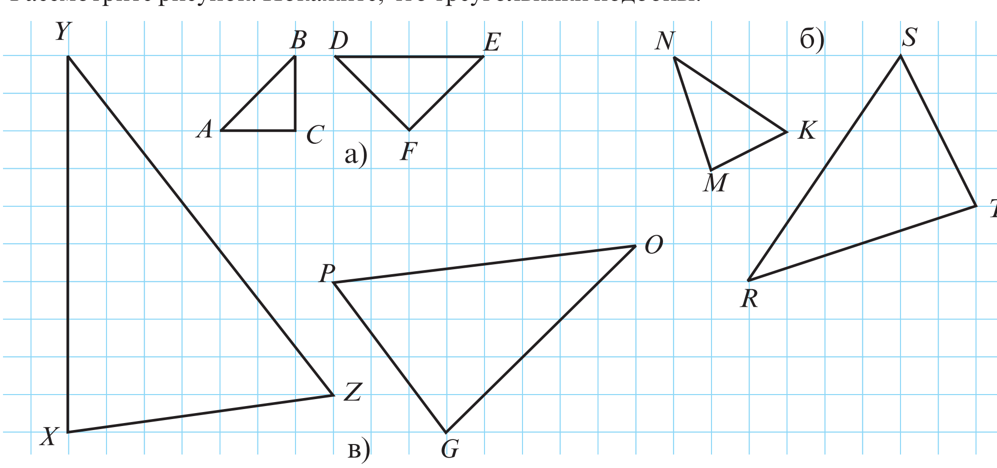
14. Точки A, B, C, D, E, F принадлежат окружности. Какие два треугольника с вершинами в данных 6 точках подобны, если:
а) $\dfrac{AF}{CD} = \dfrac{FE}{DB} = \dfrac{AE}{CB}$;
б) $\angle DFE \equiv \angle ABC$, $\angle DEF \equiv \angle BCA$;
в) $\dfrac{DE}{DA} = \dfrac{CF}{CB}$ и $\angle ADE \equiv \angle BCF$?

Упражнения и задачи на повторение

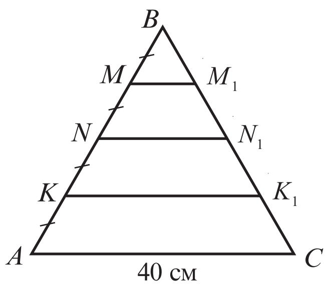
1

1. Запишите отношения, которые следуют из соотношения:
а) $\Delta SAT \sim \Delta ROC$;
б) $\Delta LMN \sim \Delta FED$.

2. Рассмотрите рисунок. Покажите, что треугольники подобны.



3. Рассмотрите рисунок.
$MM_1 \parallel NN_1 \parallel KK_1 \parallel AC$.
Найдите MM_1, NN_1, KK_1.



4. Через середину большей стороны треугольника проходит прямая, которая отсекает от данного треугольника подобный ему треугольник. Найдите длину меньшей стороны образованного треугольника, если стороны исходного треугольника имеют длины, равные:
а) 8 см, 9 см, 10 см; б) 12 см, 15 см, 18 см.

5. Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 12$ см, $AC = 6$ см. Постройте отрезок MK, где $M \in [AB]$, $K \in [AC]$ и $AM = 4$ см, $AK = 2$ см. Покажите, что треугольник с вершинами в точках A, M, K подобен треугольнику ABC и найдите коэффициент подобия.

6. Дан треугольник ABC, у которого $m(\angle A) = 74°$ и $m(\angle B) = 76°$. Постройте отрезок AK, где $K \in [BC]$, так, чтобы треугольник с вершинами в точках A, B, K был подобен треугольнику ABC. Найдите $m(\angle BAK)$ и $m(\angle AKB)$.

7. Точка пересечения диагоналей трапеции делит одну из диагоналей на два отрезка длиной 4 см и 6 см. Найдите длину большего основания трапеции, если длина меньшего основания равна 10 см.

8. Точка M принадлежит стороне AC треугольника ABC, причем $\angle ACB \equiv \angle ABM$. Найдите AB, если $AM = 5$ см, $MC = 15$ см.

2

9. Из шести отрезков длиной 8 см, 12 см, 16 см, 18 см, 24 см и 36 см были образованы два подобных треугольника. Найдите коэффициент подобия этих треугольников.

10. Дан треугольник ABC. Докажите, что треугольник, вершинами которого являются середины сторон треугольника ABC, подобен треугольнику ABC.

11. Даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, причем $\angle B \equiv \angle B_1$, $\angle C \equiv \angle C_1$ и $\frac{AB}{A_1B_1} = 3$. Найдите длину медианы A_1M_1, если длина медианы AM равна 12 см.

12. Два подобных неконгруэнтных треугольника имеют две пары конгруэнтных сторон, длины которых равны 6 см и 9 см. Найдите длины других сторон треугольников.

13. Диагональ трапеции делит эту трапецию на два подобных треугольника. Во сколько раз большее основание длиннее меньшего основания, если одна боковая сторона трапеции в 3 раза длиннее другой боковой стороны?

14. Дан треугольник ABC, у которого $m(\angle A) = 40°$. Биссектриса угла A делит треугольник ABC на два треугольника так, что один из них подобен треугольнику ABC. Найдите величину наибольшего угла треугольника ABC.

3

15. Пусть $[AA_1]$ и $[BB_1]$ – высоты треугольника ABC. Докажите, что треугольник с вершинами в точках A_1, B_1 и C подобен треугольнику ABC.

Проверочная работа

Время выполнения работы: 45 минут

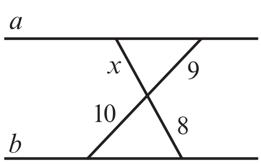
Вариант 1

1. Запишите отношения, которые следуют из соотношения:

$$\Delta PRO \sim \Delta EVA.$$

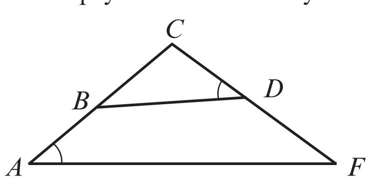
1

2. Рассмотрите рисунок. Найдите значение x $(a \parallel b)$.



2

3. Рассмотрите рисунок. Найдите два подобных треугольника. Обоснуйте.



2

4. Разделите отрезок AB длиной 18 см на части, пропорциональные числам 2, 2, 5.

2

5. Дан параллелограмм $ABCD$, у которого $AB = 42$ см, $E \in [BC]$, причем $\dfrac{BE}{BC} = \dfrac{5}{7}$. Прямая DE пересекает прямую AB в точке F. Найдите BF.

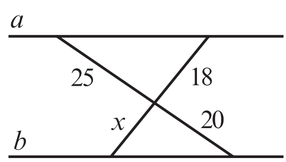
3

Вариант 2

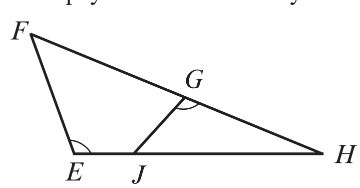
1. Запишите отношения, которые следуют из соотношения:

$$\Delta CON \sim \Delta RAS.$$

2. Рассмотрите рисунок. Найдите значение x $(a \parallel b)$.



3. Рассмотрите рисунок. Найдите два подобных треугольника. Обоснуйте.



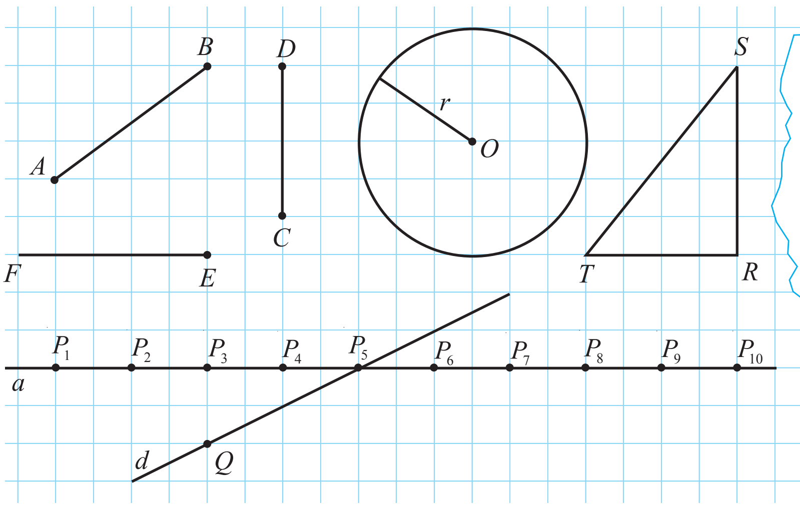
4. Разделите отрезок MN длиной 15 см на части, пропорциональные числам 3, 3, 4.

5. Дан квадрат $ABCD$ со стороной 10 см. Точка E принадлежит стороне CD, причем $\dfrac{CE}{ED} = 0{,}5$. Найдите расстояние от точки C до прямой AE.

4 глава Метрические отношения в прямоугольном треугольнике

§1. Теорема высоты. Теорема катетов

1 Рассмотрите рисунок и заполните таблицу.

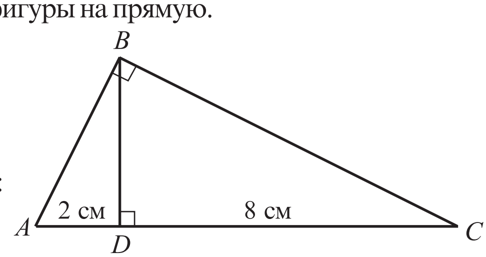


Ортогональная проекция фигуры на прямую – это множество ортогональных проекций точек этой фигуры на прямую.

Геометрическая фигура	$[AB]$	$[CD]$	$\mathscr{C}(O,r)$	ΔSTR	$[EF$	d	P_8	$[QP_5]$
Ортогональная проекция фигуры на прямую a	$[P_1P_3]$							

Замечание. В дальнейшем, под проекцией некоторой фигуры на прямую будем понимать ортогональную проекцию этой фигуры на прямую.

2 Рассмотрите рисунок и вычислите BD.



Объясняем

① Рассмотрим треугольники ADB и BDC:

$\angle ADB \equiv \angle BDC$ (прямые углы),

$\angle ABD \equiv \angle BCD$ (имеют один и тот же угол, дополнительный до $90°$, $\angle CBD$).

Следовательно, $\Delta ABD \sim \Delta BCD$ (признак УУ). (*)

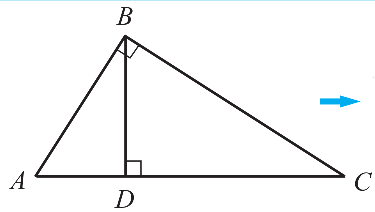
② Из (∗) следует, что $\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{BD}{\square}$ или

$BD^2 = \square \cdot \square$.

$BD = \sqrt{\square} = \square$ (см).

Ответ: $\square$ см.

Теорема высоты. Квадрат длины высоты, проведенной к гипотенузе прямоугольного треугольника, равен произведению проекций катетов на гипотенузу.



$\rightarrow BD^2 = AD \cdot DC$

Решение задачи **2** на самом деле доказывает теорему высоты. Тем не менее, докажем эту теорему еще раз.

Условие: ΔABC, $m(\angle B) = 90°$, $D \in [AC]$, $BD \perp AC$.

Заключение: $BD^2 = AD \cdot DC$.

Доказательство:

① $\angle ADB \equiv \angle BDC$ (прямые углы).

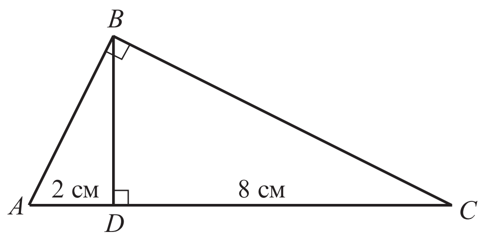
② $\angle ABD \equiv \angle BCD$ (имеют один и тот же угол, дополнительный до 90°, $\angle CBD$).

③ $\Delta ABD \sim \Delta BCD$ (Из ① и ②, признак УУ или признак У).

④ Из ③ следует, что $\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{BD}{CD}$ или $BD^2 = AD \cdot CD$, ч.т.д. ►

• Число $\sqrt{ab}$ называется ***средним геометрическим*** (или ***средним пропорциональным***) действительных положительных чисел a и b. Применив это понятие, дайте другую формулировку теоремы высоты.

3 Рассмотрите рисунок и вычислите AB.



Объясняем

① Рассмотрим треугольники ABC и ADB:

$\angle ABC \equiv \angle ADB$ (прямые углы),

$\angle ACB \equiv \angle ABD$ (имеют один и тот же угол, дополнительный до 90°, $\angle A$).

Следовательно, $\Delta ABC \sim \Delta ADB$ (Признак УУ). (∗)

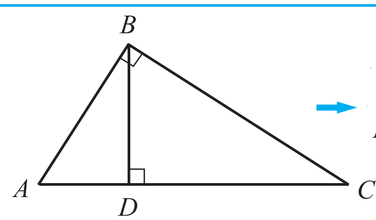
② Из (∗) следует $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{\square}{AB}$ или

$AB^2=\square\cdot\square$.

$AB=\sqrt{\square}=\square$ (см).

Ответ: $\square$ см.

Теорема катета. Квадрат длины катета прямоугольного треугольника равен произведению длины гипотенузы и проекции этого катета на гипотенузу.



$$AB^2=AD\cdot AC$$
$$BC^2=CD\cdot AC$$

Замечание. Решение задачи **3**, на самом деле, доказывает теорему катета.

• Докажите теорему катета.

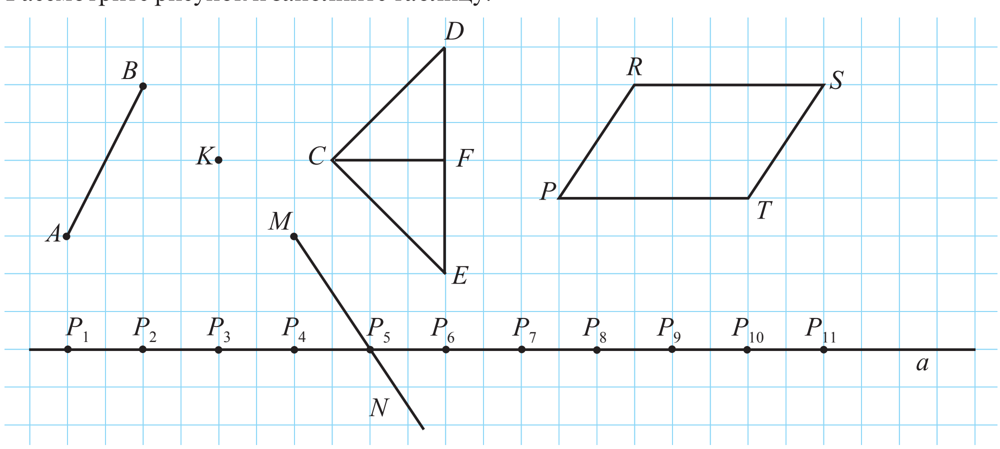
• Применив понятие среднего геометрического, дайте другую формулировку теоремы катета.

• Вычислите длину катета BC.

Упражнения и задачи

1 ☐ ☐

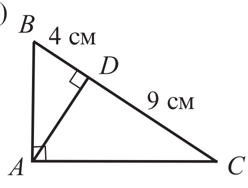
1. Рассмотрите рисунок и заполните таблицу.



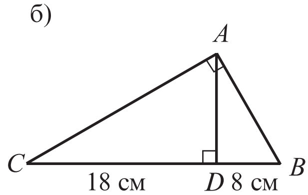
Геометрическая фигура	$[AB]$	K	ΔCDE	$[MN$	ΔCFE	$[P_5P_9]$	$PRST$	S
Ортогональная проекция фигуры на прямую a								

2. Рассмотрите рисунок и вычислите AD:

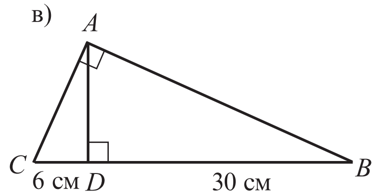
а)



б)

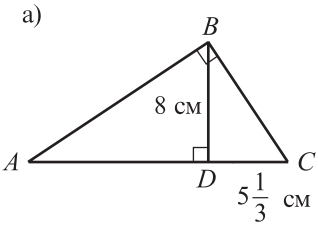


в)

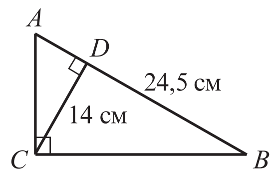


3. Рассмотрите рисунок и вычислите AD:

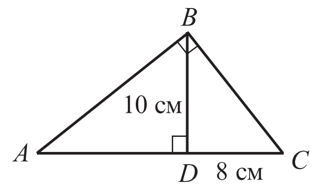
а)



б)



в)



4. Найдите длины катетов прямоугольного треугольника, если высота треугольника, проведенная из вершины прямого угла, делит гипотенузу на два отрезка длинами:

а) 6 см и 24 см; б) 12 см и 16 см;

в) 8 см и 10 см; г) $\sqrt{3}$ см и $2\sqrt{3}$ см.

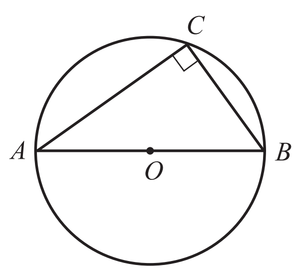
2

5. Отношение катетов прямоугольного треугольника равно $\frac{5}{6}$, а длина гипотенузы равна 122 см. Найдите длины отрезков, на которые высота, проведенная из вершины прямого угла, делит гипотенузу.

6. Отношение катетов прямоугольного треугольника равно $\frac{3}{7}$, а длина высоты, проведенной из вершины прямого угла, равна 42 см. Найдите длины отрезков, на которые это высота делит гипотенузу.

7. Известно, что, если $[AB]$ – диаметр окружности, а C – точка, принадлежащая окружности, то $m(\angle ACB) = 90°$. Постройте с помощью линейки и циркуля на клеточной сетке тетради по математике отрезок длиной:

а) $\sqrt{15}$ см; б) $\sqrt{24}$ см; в) $3\sqrt{4}$ см.

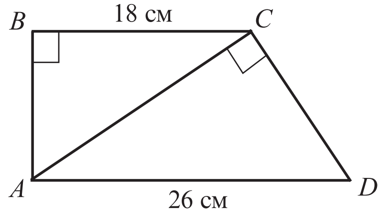


8. Пусть дана трапеция $ABCD$ с бóльшим основанием $[AD]$. Найдите CD, если $BC \perp CD$, $BD \perp AB$, $[AB] \equiv [BC]$ и $AD = 10$ см.

9. Докажите, что в любом прямоугольном треугольнике проекции катетов на гипотенузу пропорциональны квадратам катетов.

10. Треугольник ABC – равнобедренный, прямоугольный, с гипотенузой $[AC]$. Найдите длины катетов, если $AC = 10$ см.

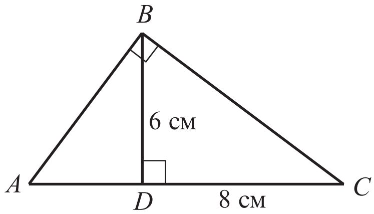
11. Рассмотрите рисунок и найдите длину высоты трапеции $ABCD$.



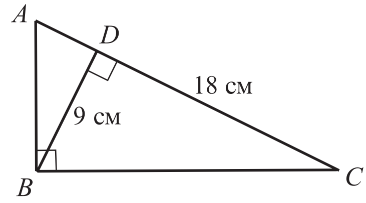
12. Отношение проекций катетов на гипотенузу прямоугольного треугольника равно 0,25. Найдите длину высоты, проведенной из вершины прямого угла, если длина гипотенузы равна 20 см.

13. Рассмотрите рисунок и найдите AD.

а)



б)



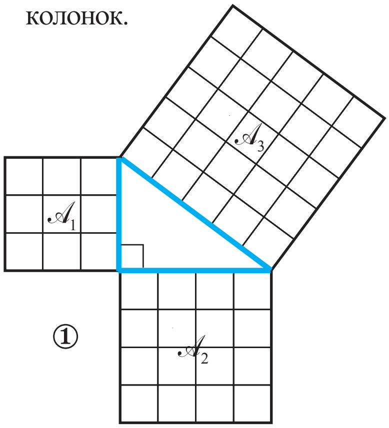
3

14. Длина гипотенузы прямоугольного треугольника равна 30 см, а длина проекции одного катета составляет 80% от длины гипотенузы. Найдите длины катетов.

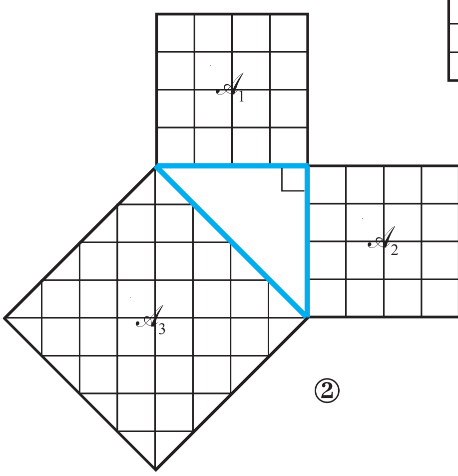
15. Точка M – середина стороны $[BC]$ треугольника ABC, и треугольник ABM – равносторонний. Докажите, что точка A – проекция точки C на AB.

§ 2. Теорема Пифагора. Применения

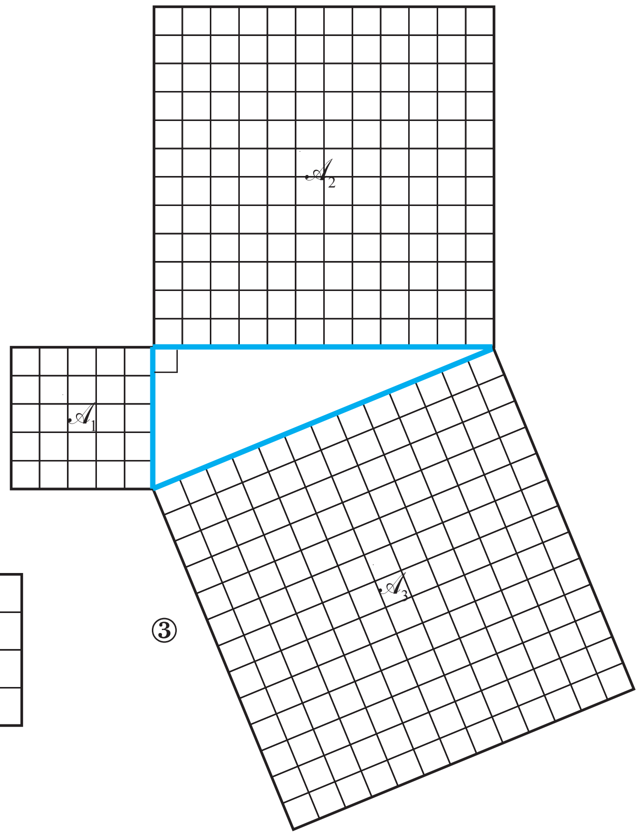
1 Рассмотрите рисунки и заполните таблицу. Сравните значения последних двух колонок.



①



②

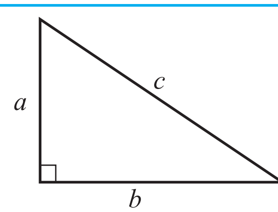


③

Фигура	Площадь $\mathscr{A}_1$	Площадь $\mathscr{A}_2$	Площадь $\mathscr{A}_3$	Площадь $\mathscr{A}_1$ + Площадь $\mathscr{A}_2$
①		16		
②			32	
③				

• Обозначив через a и b длины катетов, а c – длину гипотенузы прямоугольного треугольника, сформулируйте истинное математическое высказывание, выражающее зависимость c от a и b.

Теорема Пифагора. Квадрат длины гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов длин его катетов.



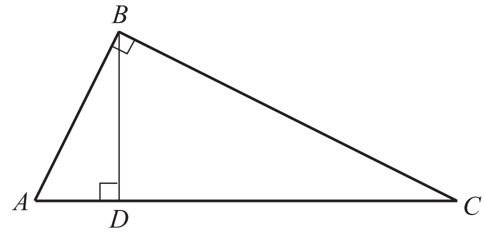
$$c^2 = a^2 + b^2$$

Докажем теорему Пифагора.

Условие: ΔABC, $m(\angle B) = 90°$.

Заключение: $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

Доказательство:



① Проведем высоту $[BD]$, $D \in (AC)$.

② Применим теорему катета для каждого из катетов треугольника ABC:

$AB^2 = AD \cdot AC$, (1)

$BC^2 = CD \cdot AC$. (2)

③ Сложив соотношения (1) и (2), получим

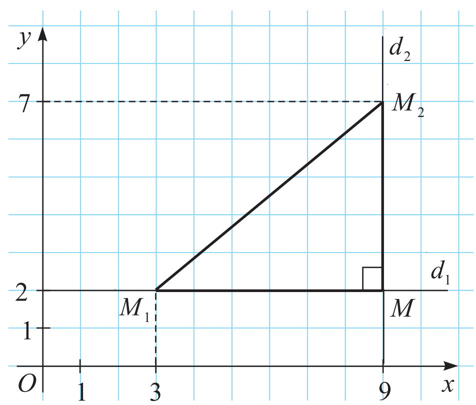
$AB^2 + BC^2 = AD \cdot AC + CD \cdot AC = AC(AD + CD) = AC \cdot AC = AC^2$.

④ Из ③ следует, что $AC^2 = AB^2 + BC^2$, ч.т.д. ►

• Длина гипотенузы прямоугольного треугольника равна 10 см, а один из катетов равен 8 см. Найдите длину другого катета.

• Продолжите утверждение так, чтобы получить теорему, **обратную теореме Пифагора**: *Если квадрат длины одной стороны равен сумме квадратов длин двух других сторон треугольника, то...*

2 Пусть $M_1(3, 2)$ и $M_2(9, 7)$ – две точки, заданные в прямоугольной системе координат xOy. Найдите расстояние между точками M_1 и M_2.



Объясняем

① Отметим точки M_1 и M_2 в системе xOy.

② Проведем через точку M_1 прямую d_1 параллельно оси Ox, а через точку M_2 – прямую d_2 параллельно оси Oy.

③ Пусть M – точка пересечения прямых d_1 и d_2.

ΔM_1MM_2 – прямоугольный, $m(\angle M) = 90°$.

④ По теореме Пифагора,

$$M_1M_2 = \sqrt{M_1M^2 + M_2M^2} = \sqrt{(9 - \square)^2 + (\square - 2)^2} = \square \text{ (л.е.)}.$$

Ответ: $M_1M_2 = \square$ линейных единиц.

• Докажите следующую теорему.

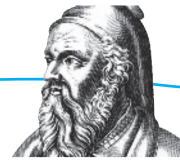
Теорема. Если $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ – две точки, заданные в прямоугольной системе координат, то $M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

• Применив теорему Пифагора, постройте отрезок, длина которого равна:

а) $3\sqrt{2}$ см; б) $\sqrt{19}$ см.

Интересно и полезно

Существует около 300 способов доказательства теоремы Пифагора. В школе Пифагора эта теорема называлась „мостом ослов”.



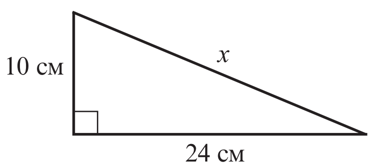
Пифагор (570 – 495 г. до н.э.) – древнегреческий философ и математик

Упражнения и задачи

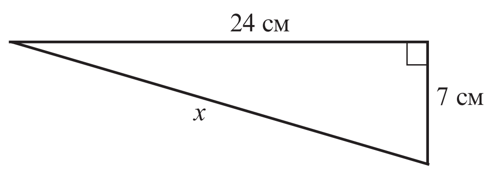
1

1. Рассмотрите рисунок и вычислите x:

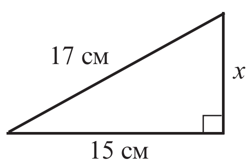
а)



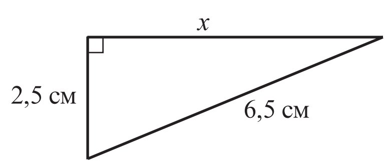
б)



в)



г)



2. Найдите длину диагонали прямоугольника, стороны которого равны 16 см и 30 см.
3. Чему равна длина стороны квадрата, диагональ которого $\sqrt{14}$ см?
4. Найдите длину гипотенузы равнобедренного прямоугольного треугольника , площадь которого равна 100 см^2.
5. Определите длину стороны ромба, диагонали которого равны:
   а) 30 см и 70 см; б) 140 см и 48 см.
6. Найдите высоту равностороннего треугольника со сторонами: а) 10 см; б) $12\sqrt{3}$ см.
7. Вычислите расстояние между точками:
   а) $A(-1; 4)$ и $B(4; 12)$; б) $C(4; -3)$ и $D(7; -2)$;
   в) $E(7; 5)$ и $F(-5; 11)$; г) $G(9; -9)$ и $H(-1; -4)$.
8. Найдите длину стороны равностороннего треугольника, высота которого равна:
   а) 8 см; б) $\sqrt{3}$ см.
9. Проверьте, является ли треугольник прямоугольным, зная, что длины его сторон равны:
   а) 16 см, 30 см, 34 см; б) 8 см, 12 см, 16 см;
   в) 9 см, 15 см, $3\sqrt{34}$ см; г) 15 см, 20 см, 25 см.

2

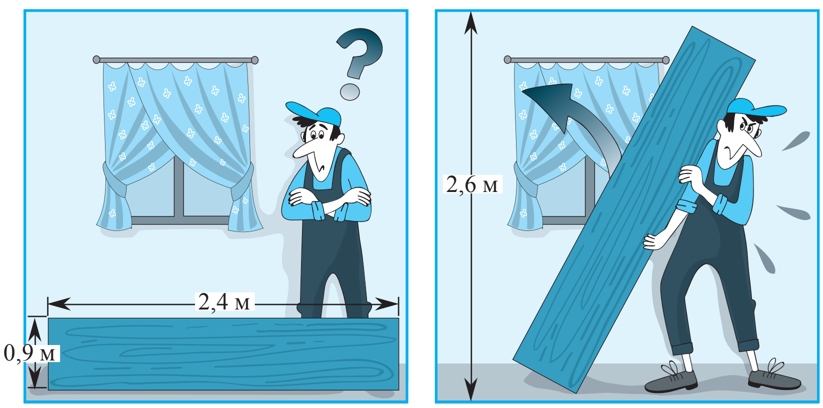
10. Прямоугольник, периметр которого равен 544 см, имеет измерения, пропорциональные числам 5 и 12. Найдите длину диагонали прямоугольника.

11. Найдите длину диагонали прямоугольника, у которого площадь равна 480 см², и периметр 92 см.

12. Пусть $[CD]$ – высота треугольника ABC. Найдите AC, если $AB = 3$ см, $CD=\sqrt{3}$ см, $AD=BC$.

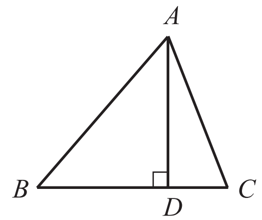
13. Одна сторона прямоугольного треугольника на 10 см длиннее второй, а вторая на 10 см короче третьей. Найдите длину гипотенузы.

14. Боковая сторона шкафа имеет форму прямоугольника (см. рисунок), измерения которого равны 2,4 м и 0,9 м. Высота стен комнаты равна 2,6 см. Учитывая размеры шкафа, определите можно ли его приподнять и прикрепить к стене. Какой максимальной ширины может быть боковая сторона шкафа, чтобы его можно было приподнять?



3

15. Рассмотрите рисунок и найдите AD, если $\dfrac{DB}{CD}=3,(3)$, $AB = 50$ см, $AC = 41$ см.



16. Длины сторон треугольника равны 10 см, 17 см и 21 см. Найдите длину высоты, проведенной к большей стороне.

17. Докажите, что в прямоугольной трапеции разность квадратов длин диагоналей равна разности квадратов длин оснований.

18. ***Занимательная математика***

Если $a^2+b^2=c^2$, где a, b, c – натуральные ненулевые числа, то a, b, c называются **пифагоровы числа**, а (a, b, c) – **пифагоровы тройки**.

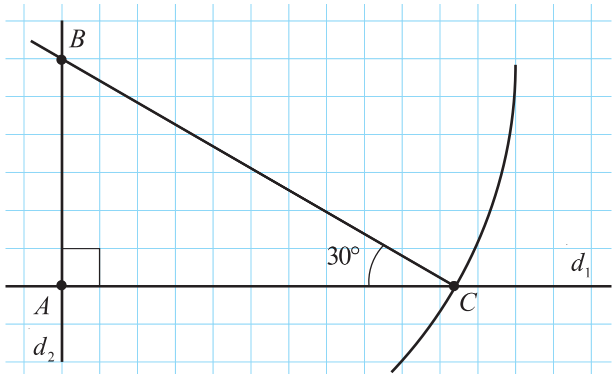
Составьте пять пифагоровых троек из чисел 7, 8, 9, 15, 17, 24, 25, 35, 36, 39, 40, 41, 112, 113 (каждое число можно использовать несколько раз).

§ 3. Элементы тригонометрии в прямоугольном треугольнике

1 Постройте на клеточной сетке тетради, используя только линейку и циркуль, угол величиной 30°.

Объясняем

① Клеточная сетка позволяет с помощью линейки построить только параллельные или перпендикулярные прямые.



Построим перпендикулярные прямые d_1 и d_2, где $\{A\} = d_1 \cap d_2$.

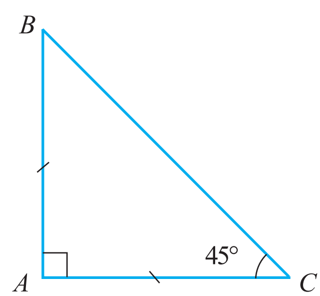
② Отметим на прямой d_2 произвольную точку B.

③ Построим окружность $\mathscr{C}(B,\ 2AB)$, где $\{C, C_1\} = \mathscr{C}(B,\ 2AB) \cap d_1$ (точка C_1 не отмечена на рисунке).

④ Построим $[CB$.

⑤ $m(\angle ACB) = 30°$ (ΔBAC – прямоугольный, $m(\angle A) = 90°$, $\frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$).

• При решении задачи был использован тот факт, что в треугольнике BAC с прямым углом A имеет место $\frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$, тогда $m(\angle BCA) = 30°$. Применив рисунок и теорему Пифагора, определите, при каком значении отношения $\frac{AB}{BC}$ построенный угол BCA будет равен 45°.



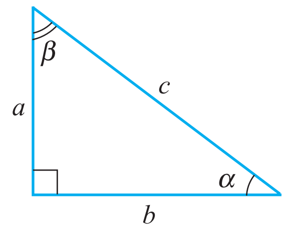
Замечание. Каждому острому углу прямоугольного треугольника соответствует единственное значение отношения противолежащего катета к гипотенузе, независимо от измерений треугольника и, наоборот.

Это утверждение будет истинным и в случае отношений между другими сторонами прямоугольного треугольника. Так как упомянутые отношения определяют единственным образом величину угла, то часто удобнее использовать эти отношения, чем углы. Поэтому отношения сторон прямоугольного треугольника имеют специальные названия и обозначения.

Определения. ♦ **Синусом** острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Синус угла α обозначается символом $\sin\alpha$.

Согласно рисунку, $\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$.



♦ **Косинусом** острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Косинус угла α обозначается символом $\cos\alpha$. Согласно рисунку, $\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$.

♦ **Тангенсом** острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему катету.

Тангенс угла α обозначается символом $\mathrm{tg}\alpha$. Согласно рисунку, $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$.

♦ **Котангенсом** острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к противолежащему катету.

Котангенс угла α обозначается символом $\mathrm{ctg}\alpha$. Согласно рисунку, $\mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{b}{a}$.

• Запишите отношения, определяющие синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла β треугольника, изображенного в определениях.

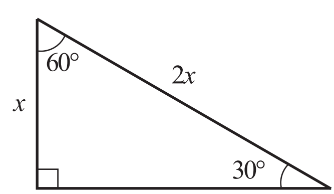
Замечания. 1. Так как длина катета меньше длины гипотенузы, синус и косинус острого угла – это положительные числа, меньше 1.

2. Синус, косинус, тангенс, котангенс называются **тригонометрическими функциями**.

3. Тригонометрические функции *синус* и *косинус* являются **кофункциями** по отношению друг к другу, так же, как и функции *тангенс* и *котангенс*.

Практическая работа

1. Так как катет, противолежащий углу 30°, в два раза короче гипотенузы, то $\sin 30° = \dfrac{1}{2}$.



Рассмотрите рисунок.

Применив теорему Пифагора и определения тригонометрических функций, вычислите:

$\cos 30°,\ \mathrm{tg}30°,\ \mathrm{ctg}30°,\ \sin 60°,\ \cos 60°,\ \mathrm{tg}60°,\ \mathrm{ctg}60°.$

2. Взяв на заметку, что, если один из углов прямоугольного треугольника равен 45°, то его катеты конгруэнтны, вычислите:

$$\sin 45°,\ \cos 45°,\ \mathrm{tg}45°,\ \mathrm{ctg}45°.$$

3. Заполните таблицу:

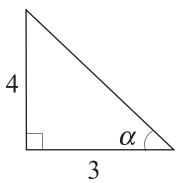
α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$30°$	$\frac{1}{2}$			
$45°$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
$60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	

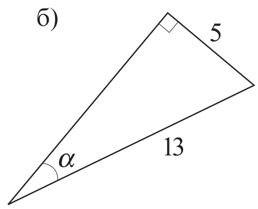
Замечание. Таблица значений тригонометрических функций коротко называется ***тригонометрической таблицей***.

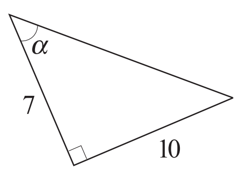
Упражнения и задачи

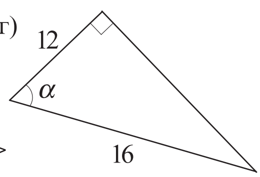
1

1. Вычислите, используя данные с рисунка, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$:

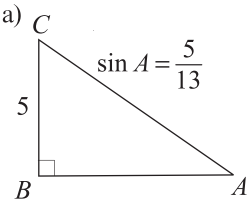
а)


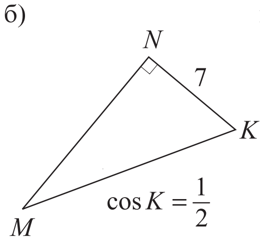
б)


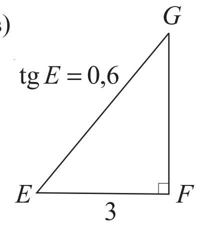
в)


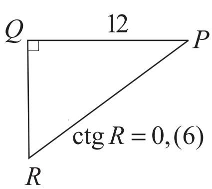
г)


2. Вычислите длины неизвестных сторон:

а)


б)


в)


г)


3. Вычислите, применив тригонометрическую таблицу:

а) $\sin 45° + \cos 45°$; б) $\sin 60° \cdot \operatorname{tg} 60°$; в) $\cos 30° \cdot \operatorname{ctg} 30°$; г) $\frac{\sin 30°}{\cos 60°}$; д) $\frac{\cos 30°}{\sin 60°}$.

4. Сравните, с помощью тригонометрической таблицы:

а) $\frac{\sin 30°}{\cos 30°}$ и $\operatorname{tg} 30°$; б) $\frac{\sin 45°}{\cos 45°}$ и $\operatorname{tg} 45°$; в) $\operatorname{ctg} 60°$ и $\frac{\cos 60°}{\sin 60°}$;

г) $\operatorname{ctg} 30°$ и $\frac{\cos 30°}{\sin 30°}$; д) $\operatorname{tg} 30°$ и $\frac{1}{\operatorname{ctg} 30°}$.

5. Применив тригонометрическую таблицу, расположите в порядке возрастания числа:

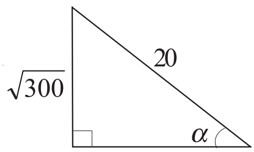
а) $1,\ \sin 45°,\ \sin 30°,\ 0,\ \sin 60°$; б) $0,\ \cos 45°,\ \cos 30°,\ 1,\ \cos 60°$;

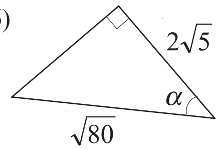
в) $\operatorname{tg} 60°,\ \operatorname{tg} 30°,\ \operatorname{tg} 45°,\ 1,\ 0$; г) $\operatorname{ctg} 30°,\ \operatorname{ctg} 60°,\ \operatorname{ctg} 45°,\ 0,\ 1$.

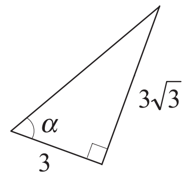
6. Постройте треугольник DEF с прямым углом E и:

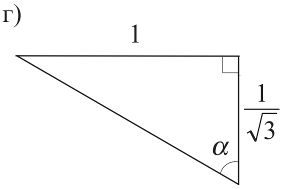
а) $\sin F = 0{,}7$; б) $\cos D = 0{,}5$; в) $\operatorname{tg} F = 1{,}4$; г) $\operatorname{ctg} D = 4\frac{1}{3}$.

7. Найдите величину угла α треугольника, применив тригонометрическую таблицу:

а)


б)


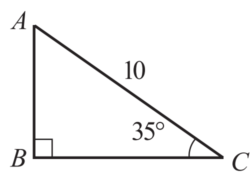
в)


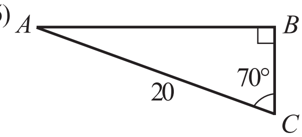
г)


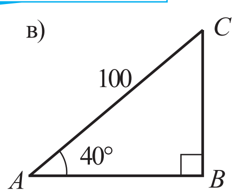
2

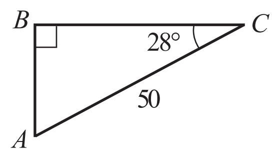
8. Рассмотрите рисунок и табличку, затем найдите длины неизвестных сторон треугольника ABC:

$\sin 35^\circ \approx 0{,}574$
$\cos 70^\circ \approx 0{,}342$
$\sin 50^\circ \approx 0{,}766$
$\cos 62^\circ \approx 0{,}469$

а)


б)


в)


г)


9. Треугольник ABC с прямым углом B, $AB = 15$ см, $BC = 9$ см. Вычислите:

а) $\sin^2 A + \cos^2 A$; $\sin^2 C + \cos^2 C$;

б) $\frac{\sin A}{\cos A}$, $\operatorname{tg} A$; $\frac{\sin C}{\cos C}$, $\operatorname{tg} C$;

в) $\frac{\cos A}{\sin A}$, $\operatorname{ctg} A$; $\frac{\cos C}{\sin C}$, $\operatorname{ctg} C$;

г) $\frac{1}{\cos^2 A}$, $1 + \operatorname{tg}^2 A$; $\frac{1}{\cos^2 C}$, $1 + \operatorname{tg}^2 C$;

д) $\frac{1}{\sin^2 A}$, $1 + \operatorname{ctg}^2 A$; $\frac{1}{\sin^2 C}$, $1 + \operatorname{ctg}^2 C$.

10. Периметр треугольника ABC с прямым углом B равен $\mathscr{P}$. Найдите длины сторон треугольника, если:

а) $\mathscr{P} = 120$ см, $\operatorname{tg} C = 2{,}4$; б) $\mathscr{P} = 28{,}8$ см, $\sin C = 0{,}6$;

в) $\mathscr{P} = 42$ см, $\operatorname{ctg} A = 1{,}05$; г) $\mathscr{P} = 57{,}2$ см, $\cos A = 0{,}352$.

11. Установите, истинно ли высказывание:

а) „Существует острый угол α, для которого $\sin\alpha = \sqrt{2-\sqrt{3}}$“;

б) „Существует острый угол α, для которого $\cos\alpha = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$“;

в) „Существует острый угол α, для которого $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3} + 2$“;

г) „Существует острый угол α, для которого $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$“.

3

12. Докажите, что $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ для любого острого угла α.

13. Докажите, что для любого острого угла α имеют место соотношения:
а) $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$, $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$; б) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$, $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.

14. Взяв на заметку соотношения из упражнения 12, 13, вычислите $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, зная, что $\sin\alpha=0{,}8$

15. Дан треугольник MNK с прямым углом N. Вычислите:
а) $\sin M$, $\cos M$, $\operatorname{tg} M$, $\operatorname{ctg} M$, $\sin K$, $\operatorname{tg} K$, $\operatorname{ctg} K$, если $\cos K=0{,}6$;
б) $\cos M$, $\operatorname{tg} M$, $\operatorname{ctg} M$, $\sin K$, $\cos K$, $\operatorname{tg} K$, ctg K, если $\sin M=\dfrac{5}{13}$;
в) $\sin M$, $\cos M$, $\operatorname{tg} M$, $\operatorname{ctg} M$, $\sin$ K, $\cos K$, $\operatorname{ctg} K$, если $\operatorname{tg} K=2{,}4$;
г) $\sin M$, $\cos M$, $\operatorname{tg} M$, $\sin K$, $\cos K$, $\operatorname{tg} K$, $\operatorname{ctg} K$, если $\operatorname{ctg} M=1$.

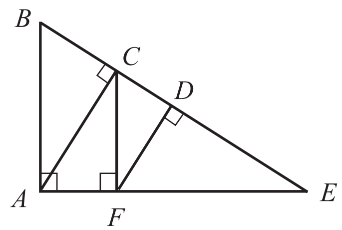
16. а) Известно, что $\sin 19°\approx 0{,}33$. Вычислите $\sin 71°$.
б) Известно, что $\cos 64°\approx 0{,}44$. Вычислите $\cos 36°$.
в) Известно, что $\sin 25°\approx 0{,}42$. Вычислите $\operatorname{tg} 65°$.
г) Известно, что $\cos 40°\approx 0{,}77$. Вычислите $\operatorname{ctg} 50°$.

17. Зная, что для любого острого угла α, $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$, найдите значение выражения: $\dfrac{2\sin\alpha+\cos\alpha}{3\cos\alpha-2\sin\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=2$.

Упражнения и задачи на повторение

1

1. Рассмотрите рисунок и найдите проекцию:
а) точки C на прямую AE;
б) точки F на прямую BE;
в) отрезка AC на прямую AE;
г) отрезка AF на прямую BE.



2. Найдите длину высоты прямоугольного треугольника, если длины проекций катетов на гипотенузу равны: а) 24 см и 54 см; б) 36 см и 49 см.

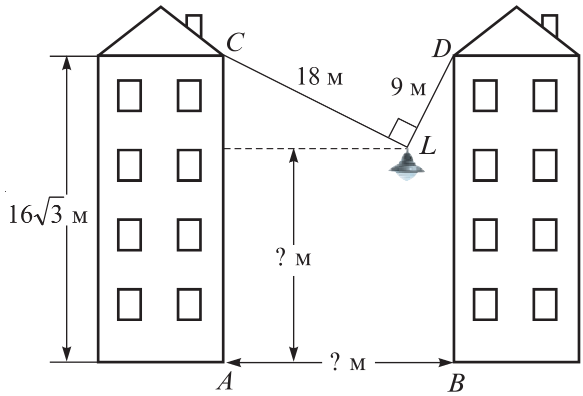
3. Найдите длины катетов прямоугольного треугольника, если длины проекций катетов на гипотенузу равны: а) 16 см и 36 см; б) 0,25 см и 2 см.

4. Сумма длин катетов прямоугольного треугольника равна 34 см, а длина гипотенузы равна 26 см. Найдите длины катетов.

5. Площадь прямоугольного треугольника равна 15 см^2, а длина гипотенузы равна $\sqrt{61}$ см. Найдите длины катетов.

6. Найдите длину высоты равностороннего треугольника, сторона которого равна 18 см.

7. Лампа, освещающая улицу, подвешена на двух перпендикулярных кабелях (см. рисунок, L – лампа, $m(\angle CLD)=90°$) длиной 18 м и 9 м, прикрепленных на высоте $16\sqrt{3}$ м от земли (точки C и D находятся на одинаковой высоте от земли).
а) Найдите ширину улицы (то есть AB).
б) Найдите, на какой высоте от земли подвешена лампа.



8. Найдите радиус окружности, которой принадлежат вершины равностороннего треугольника со сторонами, равными 9 см.

9. Найдите длину высоты равностороннего треугольника, площадь которого равна $36\sqrt{3}$ см^2.

10. Вершины квадрата $MNKP$ делят каждую сторону квадрата $ABCD$ в отношении 3:4. Найдите:
а) сторону квадрата $MNKP$, если $AB = 28$ см;
б) сторону квадрата $ABCD$, если $MN = 10$ см.

2

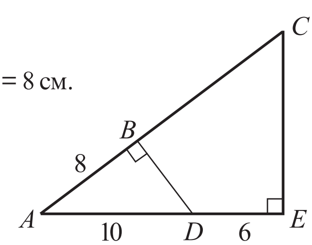
11. Найдите длину основания равнобедренного треугольника, если высота, проведенная к основанию, равна 10 см, а проведенная к боковой стороне – 12 см.

12. Дана трапеция $ABCD$ с бóльшим основанием AD, $AB = 6$ см, $CD = 8$ см, $AD = 20$ см, $BC = 10$ см. Найдите высоту трапеции.

13. Найдите длины катетов прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна 10 см, если длина высоты, проведенной к гипотенузе, составляет 40% от длины гипотенузы.

14. Пусть BD – высота треугольника ABC.
Найдите BD и DC, если $AB = 12$ см, $BC = 14$ см, $AD = 8$ см.

15. Рассмотрите рисунок и вычислите BC.
Указание. Примените $\cos A$.

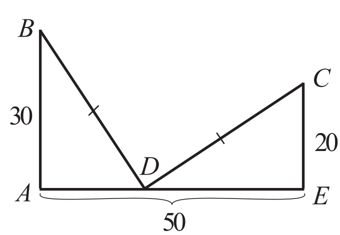


3

16. Найдите длины катетов прямоугольного треугольника, один из углов которого равен 30°, если один из катетов на 30 см короче гипотенузы.

17. Рассмотрите рисунок и найдите AD.

18. Докажите, что в прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла является биссектрисой угла, образованного медианой и высотой, проведенных из этой же вершины.

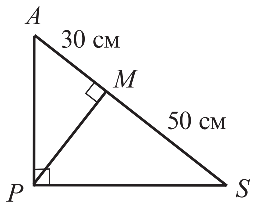


Проверочная работа

Время выполнения работы: 45 минут

Вариант 1

1. Рассмотрите рисунок и найдите:
а) проекцию точки P на прямую AS;
б) проекцию катета PS на прямую AS.



2. Рассмотрите рисунок задания 1 и найдите:
а) PM;
б) AP и PS.

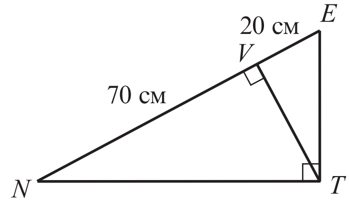
3. Найдите длину диагонали квадрата, площадь которого равна 20 см^2.

4. Дана прямоугольная трапеция $ABCD$ с бóльшим основанием AD, $m(\angle A) = 90°$. Найдите длину высоты трапеции, если: $AD = 25$ см, $BC = CD = 13$ см.

2 2 3 3

Вариант 2

1. Рассмотрите рисунок и найдите:
а) проекцию точки T на прямую NE;
б) проекцию катета ET на прямую NE.



2. Рассмотрите рисунок задания 1 и найдите:
а) VT;
б) NT и ET.

3. Найдите длину гипотенузы равнобедренного прямоугольного треугольника, площадь которого равна 20 см^2.

4. Дана равнобедренная трапеция с меньшим основанием 34 см и бóльшим основанием 66 см. Найдите длину высоты трапеции.

5 глава Векторы на плоскости

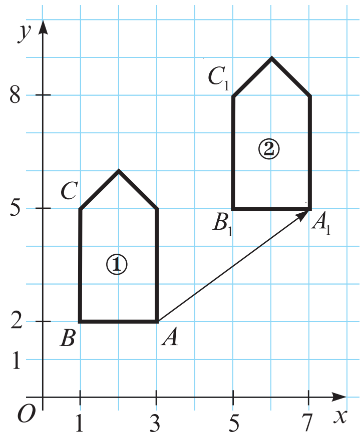
§1. Параллельный перенос. Понятие вектора

1.1. Параллельный перенос

1 Фигура ② получена из фигуры ① 1переносом на 4 линейные единицы вправо и на 3 линейные единицы вверх каждой ее точки.

Рассмотрите рисунок и заполните пропуски:

- Точка $A(3;\ 2)$ переходит в точку $A_1(7;\ 5)$.
- Точка $B(1;\ 2)$ переходит в точку $B_1(\ \ ;\ \ )$.
- Точка $C(\ \ ;\ \ )$ переходит в точку $C_1(5;\ 8)$.
- Если точка $M(x;\ y)$ переходит в точку $M_1(x_1;\ y_1)$, то $x_1 = x + 4$, $y_1 = y + \ \ $.



Замечание. Говорят, что фигура ② получена из фигуры ① в результате параллельного переноса, заданного формулами $x_1 = x + 4$, $y_1 = y + 3$.

Определение. Отображение плоскости на себя, при котором каждая точка $M(x;\ y)$ плоскости отображается в точку $M_1(x + a;\ y + b)$, где a и b – действительные числа, называется **параллельным переносом**.
Точка M_1 называется **образом** точки M при данном параллельном переносе.

2 Установите истинное значение следующих высказываний и сформулируйте выводы.

а) Параллельный перенос сохраняет расстояние между точками.

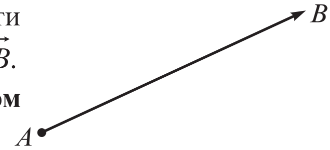
б) При параллельном переносе образом отрезка является конгруэнтный ему отрезок.

в) При параллельном переносе образом прямой является параллельная ей прямая.

г) При параллельном переносе образом окружности является конгруэнтная ей окружность.

1.2. Понятие вектора

Любая упорядоченная пара точек A и B на плоскости определяет **направленный отрезок**, обозначенный $\overrightarrow{AB}$. Точка A называется **началом**, а точка B – **концом** направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$.



Кроме начала и конца, направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ характеризуется:

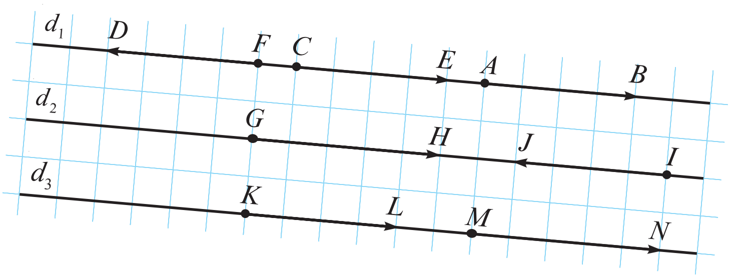
1. **модулем (абсолютной величиной)** – длиной отрезка AB (обозначается $|\overrightarrow{AB}|$);
2. **направлением**, определенным прямой AB или любой другой прямой, параллельной AB и стрелкой.

Замечание. Если A и B – две различные точки, то $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ – два отрезка с **разными направлениями** (или **противоположно направленные**).

1 Рассмотрите рисунок. Выберите все направленные отрезки, имеющие одинаковые модуль и направление, как у отрезка $\overrightarrow{AB}$.

Объясняем

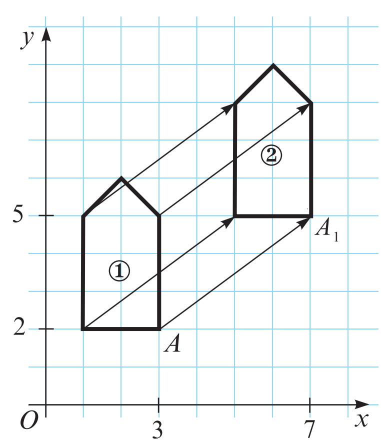
Зная, что прямые d_1, d_2 и d_3 параллельны, получим, что $\overrightarrow{CE}$ и $\overrightarrow{KL}$ имеют одинаковые модуль и направление, как у направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$.



Определение. Вектором называется множество всех направленных отрезков, имеющих одинаковые модуль и направление, как у заданного направленного отрезка.

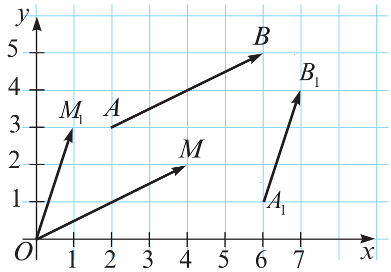
Вектор обозначается маленькой буквой латинского алфавита и над буквой ставится стрелка или одним из направленных отрезков, которые определяют этот вектор. Таким образом, направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CE}$ и $\overrightarrow{KL}$ (изображенные на рисунке задачи **1**) определяют один и тот же вектор, который можно обозначить $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{v}$ или $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{KL}$ и т.д.

Замечание. Анализируя пример **1** из раздела 1.1. данного параграфа, заметим, что каждый направленный отрезок с началом, принадлежащим фигуре ①, и концом (принадлежащим фигуре ②), являющимся образом этого начала, определяет один и тот же вектор, что и вектор $\overrightarrow{AA_1}$ (см. рисунок, изображенный рядом).



Следовательно, это преобразование на плоскости можно назвать **параллельным переносом, заданным вектором** $\overrightarrow{AA_1}$.

2 Рассмотрите рисунок. Сравните изменение координат при перемещении по направленным отрезкам AB и A_1B_1 с координатами точек M и M_1 соответственно. Что вы заметили?



Объясняем

$A(2;\,3)$, $B(6;\,5)$.

Координата x увеличивается на $6-2=4$ (единицы), а y – на $5-3=2$ (единицы).

$M(4;\,2)$

$A_1(6;\,1)$, $B_1(7;\,\boxed{}\,)$

Координата x увеличивается на 1 (единицу), а y на $\boxed{}-1=\boxed{}$ (единицы).

$M_1(1;\,\boxed{}\,)$

Заметим, что $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{OM}$ изображают один и тот же вектор, а $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{OM_1}$ – другой вектор.

Говорят, что вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $(4;\,2)$, а вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ – координаты $(1;\,\boxed{}\,)$.

Определение. Даны точки $A(x_1;\,y_1)$, $B(x_2;\,y_2)$. **Координатами вектора** $\overrightarrow{AB}$ являются числа x_2-x_1 и y_2-y_1.

Обозначаем $\overrightarrow{AB}(x_2-x_1,\,y_2-y_1)$.

Замечания. **1.** В примере **2** векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ можно обозначить соответственно $\overrightarrow{AB}(4;\,2)$ и $\overrightarrow{A_1B_1}(1;\,3)$.

2. **Нулевой вектор** имеет координаты $(0;\,0)$. Обозначаем $\vec{0}(0,\,0)$.

3. **Равные векторы** имеют равные соответствующие координаты: $\vec{u}(a,\,b)=\vec{v}(c,\,d)$, если $a=c$ и $b=d$.

4. **Модулем** (или **длиной**) **вектора** называется модуль (длина) направленного отрезка, изображающего этот вектор.

5. Для краткости высказывания, вместо выражения „вектор, изображением которого является направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$“, будем говорить „вектор $\overrightarrow{AB}$“.

6. **Коллинеарные векторы** одинаково направлены или противоположно направлены (то есть лежат на совпадающих или параллельных прямых).

7. Даны точки $A(x_1;\,y_1)$ и $B(x_2;\,y_2)$. Так как модуль вектора $\overrightarrow{AB}$ равен длине отрезка AB, следует, что $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

8. Для изображения вектора, заданного координатами, для удобства, в качестве начала этого вектора будем брать точку $(0;\,0)$.

Применяем

Найдите длину вектора:

а) $\overrightarrow{AB}$, если $A(-2; 1)$, $B(6; 16)$;

б) $\vec{a}(3; 4)$.

Решение:

а) $AB = \sqrt{(6-(-2))^2 + (16-1)^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{289} = 17.$

б) Рассмотрим $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$, где O – начало прямоугольной системы координат.

Следовательно, точка M имеет координаты $(3, 4)$.

$OM = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$ То есть, $|\vec{a}| = 5.$

Заключение. Модуль вектора $\vec{a}(a_1; a_2)$ можно вычислить по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

Упражнения и задачи

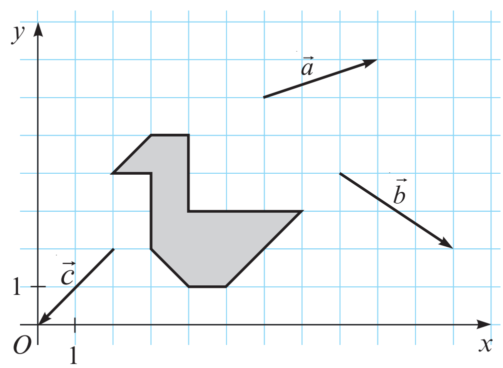
1

1. Найдите образы точек A, B, C при параллельном переносе, заданном формулами $x_1 = x - 3$ и $y_1 = y + 5$, если:

а) $A(1; 2)$, $B(-2; 5)$, $C(4; -6)$;

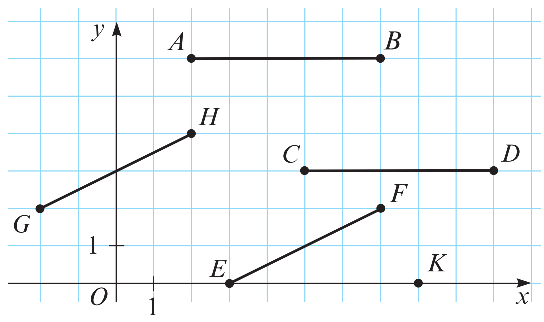
б) $A(2; 9)$, $B(-3; 7)$, $C(-8; -5)$;

в) $A(0; 4)$, $B(4; -9)$, $C(-11; 7)$.



2. Скопируйте рисунок и постройте образ закрашенной фигуры, который получится при параллельном переносе заданным вектором:

а) $\vec{a}$; б) $\vec{b}$; в) $\vec{c}$.



3. Рассмотрите рисунок. Запишите формулы, которыми задан параллельный перенос, при котором:

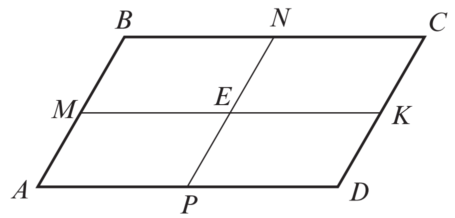
а) отрезок AB переходит в отрезок CD;

б) отрезок EF переходит в отрезок GH;

в) отрезок AB переходит в отрезок EK.

4. При параллельном переносе, точка $A(3; 0)$ переходит в точку $B(0; 3)$. В какую точку при этом параллельном переносе, перейдет точка:

а) $M(1; 4)$; б) $N(4; 1)$; в) $K(1; -1)$; г) $P(-3; 7)$?



5. Точки M, N, K, P являются серединами сторон параллелограмма $ABCD$ (см. рисунок), а точка E – точка пересечения отрезков MK и NP. Запишите все векторы (которые можно взять на рассмотрение на данном рисунке), равные вектору:
а) $\overrightarrow{AM}$; б) $\overrightarrow{BN}$; в) $\overrightarrow{AE}$; г) $\overrightarrow{DE}$.

6. Изобразите в прямоугольной системе координат вектор с началом в точке $O(0;\, 0)$ и координатами:
а) $(3;\, 5)$; б) $(-2;\, 4)$; в) $(-4;\, 2)$; г) $(-7;\, -3)$.

7. Изобразите в прямоугольной системе координат вектор:
а) с началом в точке $A(1;\, 2)$ и координатами $(2;\, 2)$;
б) с началом в точке $B(-1;\, 1)$ и координатами $(4;\, -3)$;
в) с началом в точке $C(3;\, -4)$ и координатами $(-3;\, 4)$.

8. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если:
а) $A(1;\, 1)$, $B(4;\, 5)$; б) $A(-4;\, 5)$, $B(1;\, 17)$; в) $A(2;\, -5)$, $B(13;\, 55)$; г) $A(-7;\, 6)$, $B(28;\, 18)$.

9. Найдите модуль вектора $\overrightarrow{AB}$ из упражнения **8**.

10. Найдите модуль вектора:
а) $\vec{a}(5;\, 12)$; б) $\vec{b}(8;\, 15)$; в) $\vec{c}(7;\, 24)$; г) $\vec{d}(9;\, 40)$.

2

11. Найдите координаты точек A, B, C, если при параллельном переносе, заданном формулами $x_1 = x + 2$, $y_1 = y - 7$, они переходят соответственно в точки:
а) $A_1(0;\, 2)$, $B_1(3;\, 1)$, $C_1(-1;\, 1)$; б) $A_1(3;\, 10)$, $B_1(8;\, -4)$, $C_1(6;\, 0)$;
в) $A_1(0;\, -3)$, $B_1(3;\, 8)$, $C_1(-9;\, 6)$.

12. Существует ли параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку B, а точка C – в точку D, если:
а) $A(3;\, 3)$, $B(7;\, 5)$, $C(3;\, 1)$, $D(7;\, 3)$; б) $A(-1;\, 3)$, $B(1;\, 2)$, $C(-1;\, -2)$, $D(-1;\, -1)$;
в) $A(-2;\, -1)$, $B(6;\, 1)$, $C(2;\, -2)$, $D(10;\, 0)$?

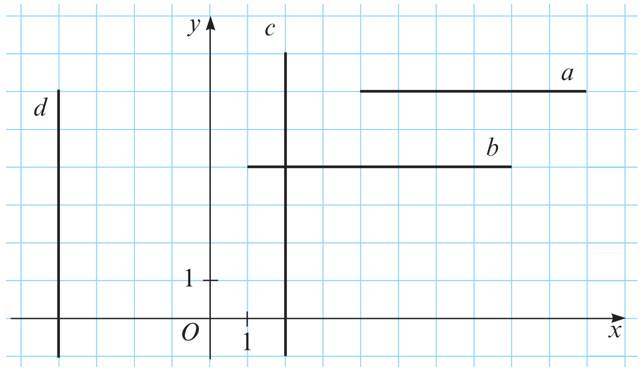
13. Даны точки $A(-2;\, 4)$ и $B(0;\, 2)$. Найдите координаты точки C, если:
а) отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ противоположно направленные и имеют один и тот же модуль;
б) векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{OC}$ равны (точка O – начало прямоугольной системы координат);
в) векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{OC}$ коллинеарные, одинаково направлены, а модуль вектора $\overrightarrow{OC}$ в два раза больше модуля вектора $\overrightarrow{AB}$ (точка O – начало прямоугольной системы координат).

14. Найдите действительные числа m и n, при которых равны векторы:
а) $\vec{a}(2m-1;\, 8)$ и $\vec{b}(9;\, 3n-1)$; б) $\vec{a}(10;\, -4n+5)$ и $\vec{b}(-m+7;\, 13)$;
в) $\vec{a}(m+6;\, 11-n)$ и $\vec{b}(-3m+14;\, n-11)$.

15. Найдите координаты вектора, модуль которого равен 16, и который образует с осью Ox угол величиной: а) 60°; б) 30°; в) 45°.

3

16. Рассмотрите рисунок. Запишите формулы, задающие параллельный перенос, при котором:
а) прямая a переходит в прямую b;
б) прямая c переходит в прямую d.

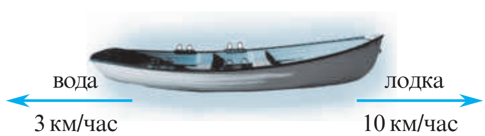


17. Даны точки $A(-2; 1)$, $B(4; 4)$, $C(-3; 1)$. Найдите координаты точки D, если:
а) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$; б) $2|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$ и векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ одинаково направлены;
в) $|\overrightarrow{CD}|=2|\overrightarrow{AB}|$ и векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ противоположно направлены.

18. Даны точки $A(2; 4)$, $B(6; -4)$, $C(-8; -1)$. Покажите, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ перпендикулярны.

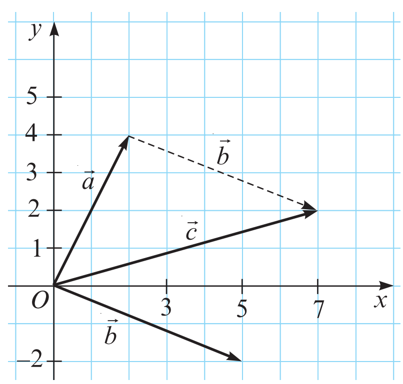
§2. Операции с векторами

2.1. Сложение векторов



Суммой векторов $\vec{a}(a_1; a_2)$ и $\vec{b}(b_1; b_2)$ называется вектор $\vec{c}(a_1+b_1; a_2+b_2)$.
Обозначаем: $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$.

1 Изобразите в одной и той же прямоугольной системе координат векторы $\vec{a}(2; 4)$, $\vec{b}(5; -2)$ и $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$.



Изображаем

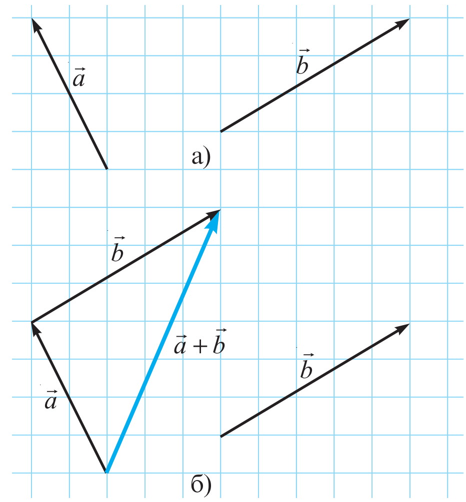
Помним, что $\vec{c}(2+5; 4-2)=\vec{c}(7; 2)$.

На рисунке изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Вектор $\vec{c}$ еще называется **результирующим вектором** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Результирующий вектор векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно изобразить, применив правило треугольника.

Правило треугольника

Чтобы изобразить результирующий вектор (сумму) двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, изображаем второй вектор (то есть, $\vec{b}$) так, чтобы его начало совпало с концом первого вектора (то есть, $\vec{a}$), затем соединяем начало первого вектора с концом второго вектора.



Применяем

2 Изобразите сумму векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, представленных на рисунке (2).

Решение:

Применим правило треугольника (рис. б):

1. перемещаем вектор $\vec{b}$ так, чтобы его начало совпало с концом вектора $\vec{a}$;
2. соединим начало вектора $\vec{a}$ с концом вектора $\vec{b}$ (в новом положении).

• Перечертите рисунок а), затем изобразите вектор $\vec{b}+\vec{a}$. Что вы заметили?

Свойства сложения векторов

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

1° Коммутативность → $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{c}$.

2° Ассоциативность → $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

3° Существование нейтрального элемента → $\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

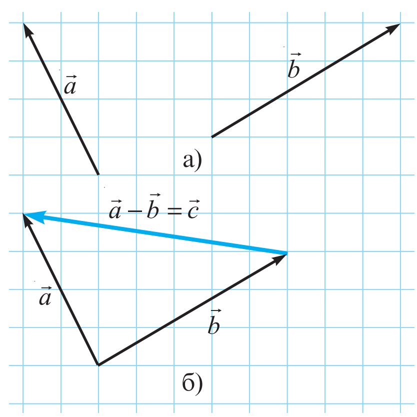
• Докажите свойство 2°, применив координаты вектора.

2.2. Разность векторов

Разностью векторов $\vec{a}(a_1;\, a_2)$ и $\vec{b}(b_1;\, b_2)$ называется вектор $\vec{c}(a_1-b_1;\, a_2-b_2)$. Обозначаем: $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$.

Замечание. Очевидно, что вектор $\vec{c}$ является разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если и только если $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$.

Применяем



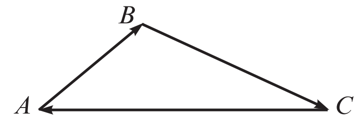
3 Изобразите разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то есть, $\vec{a}-\vec{b}$, изображенных на рисунке а).

Решение:

Обозначим $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$. Так как $\vec{a}$ это сумма векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$, следует, что вектор $\vec{a}$ имеет общее начало с вектором $\vec{b}$ и общий конец с вектором $\vec{c}$:

1. Сводим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в общее начало;
2. соединяем конец вектора $\vec{b}$ с концом вектора $\vec{a}$.

Замечания. 1. Если ABC – треугольник, то $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$.



2. Если $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – три ненулевых вектора таких, что $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$, то существует треугольник со сторонами $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{c}|$.

2.3. Умножение вектора на действительное число

Если $\vec{a}(a_1;\, a_2)$, а k – действительное число, то через $k\vec{a}$ обозначим вектор $(ka_1;\, ka_2)$.

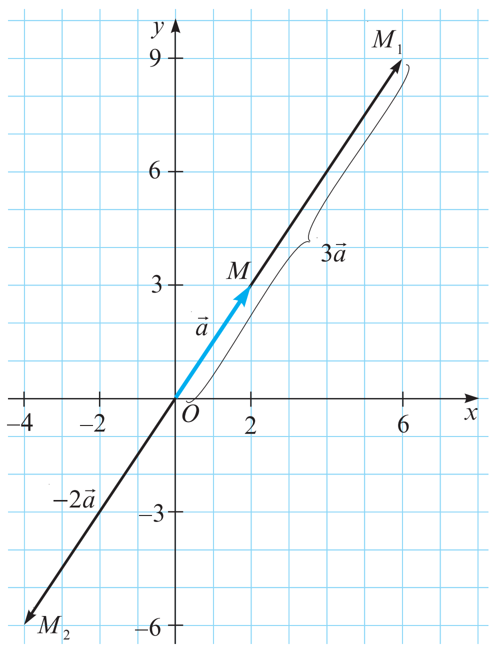
1 Дан вектор $\vec{a}(2;\,3)$. Изобразите векторы $\vec{a}$, $\vec{u}=3\vec{a}$ и $\vec{v}=-2\vec{a}$.

Решаем

$3\vec{a}=\vec{u}=(3\cdot 2;\,3\cdot 3)=\vec{u}=(6;\,9)$.

$-2\vec{a}=\vec{v}=(-2\cdot 2;\,-2\cdot 3)=\vec{v}=(-4;\,-6)$.

На рисунке изображены векторы $\overrightarrow{OM}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OM_1}=3\vec{a}$, $\overrightarrow{OM_2}=-2\vec{a}$.



Замечания. Пусть $\vec{a}$ – вектор и k – действительное число.

1. Векторы $\vec{a}$ и $k\vec{a}$ коллинеарные.

2. Векторы $\vec{a}$ и $k\vec{a}$ одинаково направлены при $k>0$ и противоположно направлены при $k<0$.

3. Для любого ненулевого натурального числа k и любого вектора $\vec{a}$ имеет место соотношение:

$$k\vec{a}=\underbrace{\vec{a}+\vec{a}+\ldots+\vec{a}}_{k\text{ раз}}.$$

4. Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два коллинеарных вектора, то существует действительное число k такое, что $\vec{b}=k\vec{a}$.

• Применив координаты векторов, докажите, что для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и для любых действительных чисел k, t имеют место ***свойства умножения векторов на действительные числа***:

$1^\circ.\ k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$; $\quad 2^\circ.\ (k+t)\vec{a}=k\vec{a}+t\vec{a}$; $\quad 3^\circ.\ (kt)\vec{a}=k(t\vec{a})$.

Применяем

2 Определите, являются ли точки $A(-5;\,2)$, $B(-1;\,1)$, $C(7;\,-1)$ коллинеарными.

Решение:

Точки A, B, C коллинеарные, если и только если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ коллинеарные.

Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ являются коллинеарными, если и только если существует действительное число k такое, что $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{AB}(-1-(-5);\ 1-2) = \overrightarrow{AB}(4;\ -1)$;

$\overrightarrow{BC}(7-(-1);\ -1-1) = \overrightarrow{BC}(8;\ -2)$;

$k\overrightarrow{BC}(k\cdot 8;\ k\cdot(-2)) = k\overrightarrow{BC}(8k;\ -2k)$.

Следовательно, получим систему $\begin{cases} 8k = 4, \\ -2k = -1, \end{cases}$ решением которой является $k = 0{,}5$.

Ответ: Да, точки A, B, C являются коллинеарными.

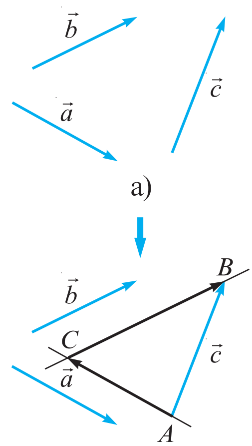
2.4. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам

1 Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два неколлинеарных вектора (рис. а). Покажем, что любой вектор $\vec{c}$ можно задать формулой $\vec{c} = k_1\vec{a} + k_2\vec{b}$, где k_1 и k_2 – два действительных числа.

Решение:

1) Пусть $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$. Проведем через точки A и B прямые, параллельные соответственно векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Пусть C – точка их пересечения (рис. б). Тогда,

$$\vec{c} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}. \qquad (*)$$



а)

б)

2) Согласно замечанию 4 из раздела 2.3, так как векторы $\vec{a}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарные, так же как и векторы $\vec{b}$ и $\overrightarrow{CB}$, то существуют действительные числа k_1 и k_2 такие, что:

$$\overrightarrow{AC} = k_1\vec{a},\ \overrightarrow{CB} = k_2\vec{b}. \qquad (**)$$

3) Подставим $(**)$ в $(*)$:

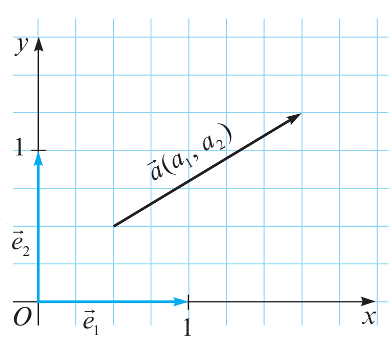
$\vec{c} = \overrightarrow{AB} = k_1\vec{a} + k_2\vec{b}$, c.c.t.d. ▶

Замечание. Соотношение $\vec{c} = k_1\vec{a} + k_2\vec{b}$, рассмотренное в задаче, называется **разложением вектора** $\vec{c}$ по двум неколлинеарным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2 Рассмотрите рисунок.

Даны векторы $\vec{e}_1(1, 0)$, $\vec{e}_2(0, 1)$, $\vec{a}(a_1, a_2)$.

Запишите разложение вектора $\vec{a}$ по векторам $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$.



Решение:

Так как векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ неколлинеарные, то необходимо найти действительные числа k_1 и k_2 такие, что

$$\vec{a} = k_1\vec{e}_1 + k_2\vec{e}_2. \qquad (*)$$

Распишем соотношение $(*)$.

$\vec{a}(a_1,\ a_2) = k_1\vec{e}_1(1,\ 0) + k_2\vec{e}_2(0,\ 1)$.

Обозначим $k_1\vec{e}_1$ через $\vec{u}$ и $k_2\vec{e}_2$ через $\vec{v}$.

Получим $\vec{a}(a_1,\ a_2)=\vec{u}(k_1,\ 0)+\vec{v}(0,\ k_2)$ или $\vec{a}(a_1,\ a_2)=\vec{c}(k_1,\ k_2)$, где $\vec{c}=\vec{u}+\vec{v}$.

Следовательно, $k_1=a_1$, $k_2=a_2$, то есть $\vec{a}(a_1,\ a_2)=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2$.

Замечание. Векторы $\vec{e}_1(1,\ 0)$ и $\vec{e}_2(0,\ 1)$ называются **единичными векторами**.

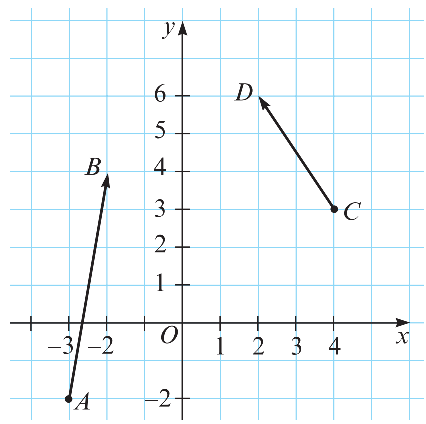
2.5. Скалярное произведение двух векторов

Скалярным произведением векторов $\vec{a}(a_1;\ a_2)$ и $\vec{b}(b_1;\ b_2)$ называется $a_1b_1+a_2b_2$, обозначаем $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

Примеры

1. Скалярным произведением векторов $\vec{a}(1;\ -4)$ и $\vec{b}(2;\ 3)$ является число $1\cdot 2+(-4)\cdot 3=-10$. Значит, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-10$.

2. Найдем скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, изображенных на рисунке 1.



Решение:

Имеем $A(-3;\ -2)$, $B(-2;\ 4)$, $C(4;\ 3)$, $D(2;\ 6)$.

$\overrightarrow{AB}(-2-(-3);\ 4-(-2))=\overrightarrow{AB}(1;\ 6)$,

$\overrightarrow{CD}(2-4;\ 6-3)=\overrightarrow{CD}(-2;\ 3)$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=1\cdot(-2)+6\cdot 3=16$.

Ответ: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=16$.

Замечания. **1.** Если два вектора лежат на перпендикулярных прямых, то их скалярное произведение равно 0.

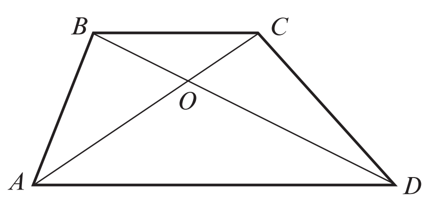
2. Если скалярное произведение двух векторов равно 0, то их направления перпендикулярны.

3. $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|$, для любого вектора $\vec{a}$.

Упражнения и задачи

1

1. Рассмотрите рисунок и найдите:



а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$;

б) $\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}$;

в) $\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OD}$.

2. Рассмотрите рисунок предыдущего упражнения и найдите:

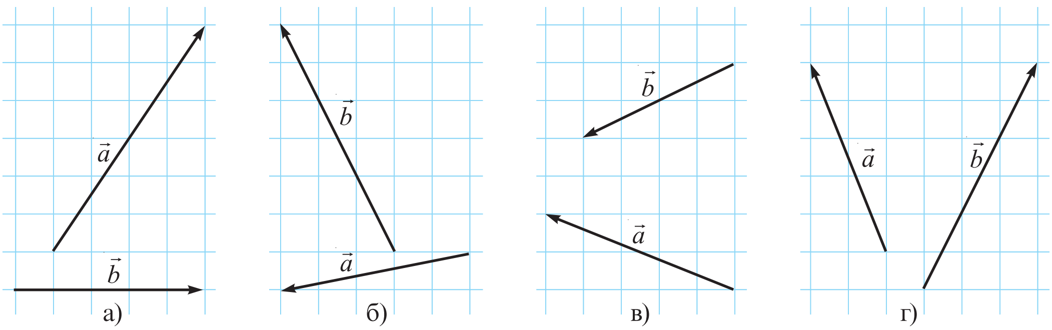
а) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{OD}$; б) $\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BO}$; в) $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DO}$, $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BO}$.

3. Даны векторы $\vec{a}(-3; \sqrt{5})$, $\vec{b}(0{,}8; -6)$. Найдите координаты вектора:
а) $\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{b}-\vec{a}$; в) $2\vec{a}$; г) $0{,}5\vec{b}$; д) $3\vec{a}-2\vec{b}$.

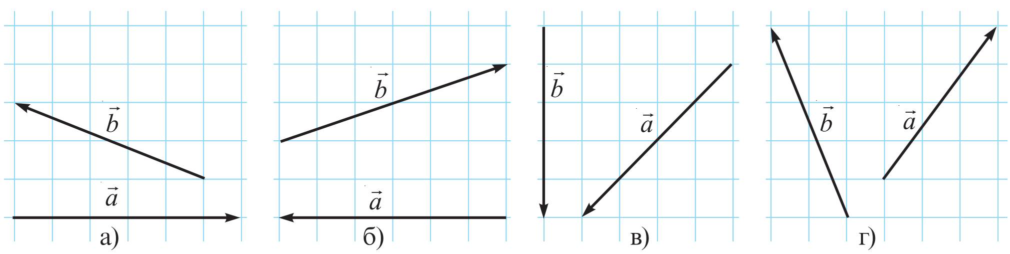
4. Даны векторы $\vec{a}(12; 16)$, $\vec{b}\left(\frac{2}{3}; -9\right)$. Найдите координаты вектора:
а) $\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{a}-\vec{b}$; в) $0{,}25\vec{a}$; г) $3\vec{b}$; д) $6\vec{b}+2\vec{a}$.

5. Даны векторы $\vec{a}(2; 1)$, $\vec{b}(-1; 3)$. Найдите модуль вектора:
а) $2\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{a}-2\vec{b}$; в) $3\vec{a}-3\vec{b}$; г) $-5\vec{a}+4\vec{b}$.

6. Перечертите рисунок, затем постройте сумму векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



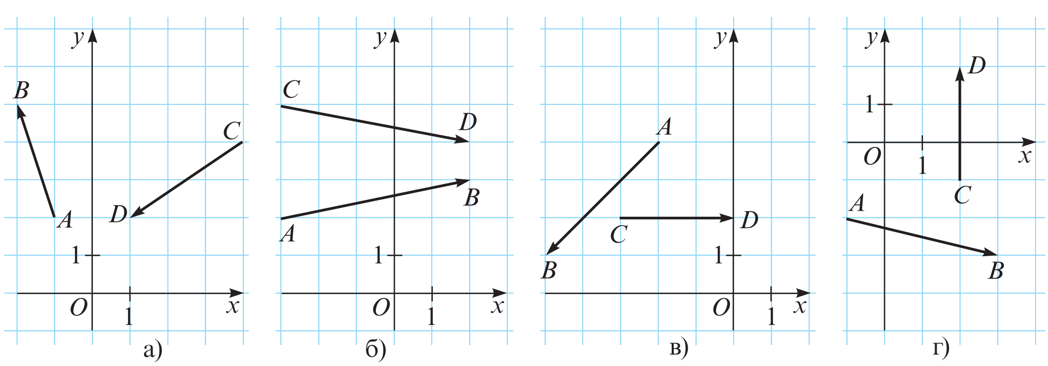
7. Перечертите рисунок, затем постройте разность $\vec{a}-\vec{b}$.



8. Для каждого рисунка из упражнения 7 постройте векторы $2\vec{a}$ и $-2\vec{b}$.

9. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:
а) $\vec{a}(3; 1)$, $\vec{b}(0; 5)$; б) $\vec{a}(2; -4)$, $\vec{b}(6; 2)$;
в) $\vec{a}(\sqrt{2}; 3)$, $\vec{b}(3\sqrt{2}; 1)$; г) $\vec{a}\left(-8; \frac{2}{3}\right)$, $\vec{b}\left(\frac{3}{4}; 9\right)$.

10. Рассмотрите рисунок. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$:



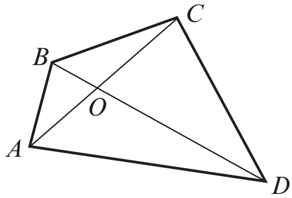
2

11. Рассмотрите рисунок и найдите:

а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$;

б) $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}$;

в) $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}$.



12. Точки M и N соответственно являются серединами сторон AB и AC треугольника ABC. Заполните пропуски: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+$ ___, $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+$ ___.

Следовательно, $2\overrightarrow{MN}=$ ___.

13. Найдите вектор $\vec{x}$, зная, что:

а) $\vec{x}+\vec{a}(-5;\ 3)=\vec{b}(3;\ 2)$;

б) $\vec{a}(-1;\ 6)-2\vec{x}=\vec{b}(9;\ 10)$;

в) $3\vec{x}+\vec{a}(4;\ 8)=\vec{b}(-8;\ 23)$;

г) $\vec{a}(7;\ 13)+\vec{x}=2\vec{x}-\vec{b}(0;\ 5)$.

14. Определите, являются ли точки A, B и C коллинеарными, зная, что:

а) $A(5;\ 4)$, $B(2;\ 2)$, $C(11;\ 8)$;

б) $A(10;\ -2)$, $B(-3;\ 1)$, $C(2;\ 0)$;

в) $A(-5;\ -2)$, $B(10;\ 3)$, $C(4;\ 1)$;

г) $A(6;\ 0)$, $B(2;\ 3)$, $C(-1;\ -1)$.

15. Найдите значение m, при котором векторы $\vec{a}(3;\ 2)$ и $\vec{b}(m-1;\ 6-2m)$ лежат на перпендикулярных прямых.

16. Докажите, что прямые AB и CD перпендикулярны, зная, что:

а) $A(-1;\ 2)$, $B(-2;\ 5)$, $C(1;\ 2)$, $D(4;\ 3)$;

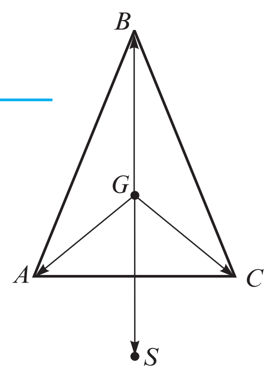
б) $A(2;\ 3)$, $B(-3;\ 2)$, $C(-3;\ 3)$, $D(-2;\ 0)$;

в) $A(-2;\ 4)$, $B(-5;\ 1)$, $C(-3;\ 2)$, $D(0;\ -1)$;

г) $A(3;\ -3)$, $B(-1;\ -2)$, $C(2;\ -1)$, $D(3;\ 3)$.

3

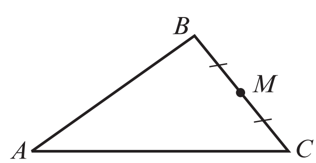
17. Точка G является центром тяжести равнобедренного треугольника ABC с основанием AC, а точка S такая, что $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GS}$. Докажите, что $AGCS$ – ромб.



18. Докажите, что для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеет место соотношение $|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$.

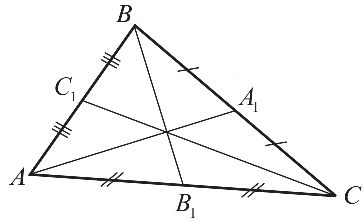
19. Точка M – середина стороны BC треугольника ABC. Докажите, что $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$.

(*Указание*. „Дополните“ треугольник ABC до параллелограмма.)



20. Точка M – точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Докажите, что $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$.

21. Пусть точки A_1, B_1, C_1 – середины сторон треугольника ABC (см. рисунок).
Докажите, что $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = 0$.



22. Докажите, что для любого треугольника ABC существует другой треугольник, стороны которого параллельны и соответственно конгруэнтны медианам треугольника ABC.
(*Указание*. Примените замечание 2 из раздела 2.1.)

23. Найдите векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$, если:

а) $\begin{cases} \vec{x} + \vec{y} = \vec{a}(-2;\ 6); \\ 2\vec{x} - \vec{y} = \vec{b}(5;\ 0); \end{cases}$ б) $\begin{cases} \vec{x} - \vec{y} = \vec{a}(-3;\ 7); \\ 3\vec{x} + 2\vec{y} = \vec{b}(16;\ 1); \end{cases}$ в) $\begin{cases} -\vec{x} + 2\vec{y} = \vec{a}(12;\ -3); \\ 4\vec{x} - \vec{y} = \vec{b}(-6;\ -2). \end{cases}$

24. Точка G – центр тяжести треугольника ABC. Докажите, что $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
(*Указание.* Примените соотношение из упражнения **21** и соотношение $\overrightarrow{GA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MA}$, где M – точка стороны BC.)

25. Дан параллелограмм $ABCD$. Заполните пропуски:

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \boxed{}$. (1) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \boxed{}$. (2)

Возведя каждое из соотношений (1) и (2) в квадрат, получим:

$\overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}^2 = \boxed{}$. (3) $\overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}^2 = \boxed{}$. (4)

Сложив соотношения (3) и (4), получим $2AB^2 + 2AD^2 = \boxed{}$.

26. Докажите, что для любых действительных чисел a, b, c направление вектора $\vec{v}(a,\ b)$ перпендикулярно прямой $ax + by = c$.

Упражнения и задачи на повторение

1

1. Найдите образы точек A, B, C при параллельном переносе, заданном формулами $x_1 = x + 4$ и $y_1 = y - 3$, если:

а) $A(-1;\ 0)$, $B(0;\ 2)$, $C(-1;\ 3)$; б) $A(1;\ 3)$, $B(-1;\ 7)$, $C(2;\ -6)$;
в) $A(4;\ 4)$, $B(12;\ 5)$, $C(0;\ 8)$.

2. Запишите формулы, задающие параллельный перенос, при котором:
а) точка $A(4;\ 10)$ переходит в точку $A_1(10;\ 4)$;
б) точка $B(-5;\ 8)$ переходит в точку $B_1(8;\ 2)$;
в) точка $O(0;\ 0)$ переходит в точку $O_1(7;\ -6)$.

3. При параллельном переносе точка $A(0;\ -1)$ переходит в точку $A_1(1;\ 3)$. В какую точку перейдет:
а) точка $B(2;\ 4)$; б) начало прямоугольной системы координат;
в) точка $C(5;\ 4)$; г) точка, симметричная точке $D(3;\ 2)$ относительно $O(0;\ 0)$?

4. Найдите длину отрезка AB, если:
а) $A(7;4)$, $B(3;1)$; б) $A(5;2)$, $B(-1;2)$; в) $A(4;-1)$, $B(8;2)$; г) $A(4;3)$, $B(0;1)$.

5. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если:
а) $A(5;3)$, $B(5;4)$; б) $A(0;-9)$, $B(1;1)$;
в) $A(0;8)$, $B(-8;0)$; г) $A(10;-3)$, $B(2;1)$.

6. Даны точки $A(2;1)$, $B(4;5)$ и $C(1;-3)$. Найдите координаты точки D, зная, что $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

7. Найдите модуль вектора AB, зная, что:
а) $A(1;0)$, $B(2;1)$; б) $A(-4;3)$, $B(6;27)$;
в) $A(9;-9)$, $B(18;3)$; г) $A(-17;-22)$, $B(1;58)$.

8. Найдите вектор, противоположный вектору с координатами:
а) $(5;3)$; б) $(-7;2)$; в) $(6;8)$; г) $(0;-25)$.

9. Найдите координаты конца вектора, у которого:
а) начало в точке $A(3;3)$ и координаты $(1;-1)$;
б) начало в точке $B(5;0)$ и координаты $(-2;7)$;
в) начало в точке $C(-4;9)$ и координаты $(3;-4)$;
г) начало в точке $D(9;-4)$ и координаты $(-5;0)$.

10. Найдите сумму векторов:
а) $(6;2)$ и $(-5;4)$; б) $(16;2)$ и $(1;-1)$; в) $(4;8)$ и $(4;-3)$; г) $\left(\frac{3}{4};0\right)$ и $\left(-\frac{1}{2};7\right)$.

11. Найдите разность векторов из упражнения **10**.

12. Найдите скалярное произведение векторов из упражнения **10**.

13. Даны точки $A(3;2)$, $B(-5;3)$.
а) Найдите координаты векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, где $O(0;0)$.
б) Найдите координаты середины отрезка AB.
в) Найдите координаты векторов $2\overrightarrow{AB}$, $0{,}5\overrightarrow{OA}$, $4\overrightarrow{AB}$.

14. Дан ромб $ABCD$. Определите:
а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}$; г) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$.

2

15. Найдите значения x, если:
а) $\vec{a}=(x;10)$ и $|\vec{a}|=26$; б) $\vec{a}=(10;x)$ и $|\vec{a}|=12{,}5$;
в) $\vec{a}=(x;8)$ и $|\vec{a}|=4\sqrt{13}$; г) $\vec{a}=(-9;x)$ и $|\vec{a}|=3\sqrt{13}$.

16. Даны векторы $\overrightarrow{AB}(3;-2)$, $\overrightarrow{BC}(-4{,}5;3)$. Докажите, что точки A, B, C коллинеарные.

17. Установите, являются ли коллинеарными векторы:
а) $\vec{a}(1;-3)$, $\vec{b}(1;3)$; б) $\vec{a}(0;-1)$, $\vec{b}(1;0)$;
в) $\vec{a}(3;-2)$, $\vec{b}(-3;2)$; г) $\vec{a}(4;-2)$, $\vec{b}(-2;1)$.

18. Даны точки $A(1;-2)$, $B(-1;1)$, $C(2;3)$. Найдите длины сторон треугольника.

19. При каких значениях x перпендикулярны векторы:
а) $\vec{a}(3;2)$, $\vec{b}(x;-1)$; б) $\vec{a}(5;x)$, $\vec{b}(0;-3)$; в) $\vec{a}(x;-6)$, $\vec{b}(4;5)$?

3

20. Даны точки $A(-1;\ 2)$, $B(1;\ -2)$, $C(2;\ 0)$, $D(1;\ 6)$.
а) Докажите, что $AD \parallel BC$.
б) Найдите площадь $ABCD$.

21. Даны точки $A(3;\ 5)$, $B(-3;\ 1)$. Найдите координаты точки C, лежащей на оси Ox, если известно, что треугольник ABC – равнобедренный, с основанием $[AB]$.

22. Определите вид треугольника ABC (по сторонам), если:
а) $A(-1;\ -1)$, $B(6;\ 0)$, $C(2;\ 3)$;
б) $A(3;\ -1)$, $B(1;\ 2)$, $C\left(2+\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}+\sqrt{3}\right)$.

23. Определите вид четырехугольника $ABCD$, если:
а) $A(3;\ 2)$, $B(8;\ 6)$, $C(3;\ 6)$, $D(8;\ 2)$;
б) $A(6;\ 0)$, $B(5;\ 6)$, $C(1;\ 3)$, $D(2;\ -3)$.

Проверочная работа

Время выполнения работы: 45 минут

Вариант 1

1. Образом точки $A(7;\ -4)$ при параллельном переносе является точка $A_1(1;\ 3)$. Найдите образ точки $B(-3;\ 5)$. (2)

2. Найдите модуль вектора, с началом в точке $A(-9;\ 20)$ и концом $B(3;\ -15)$. (2)

3. Являются ли точки $A(12;\ 2)$, $B(-8;\ -2)$, $C(2;\ 0)$ коллинеарными? (3)

4. Точки $A(-2;\ 1)$, $B(1;\ -4)$, $C(6;\ -3)$ являются вершинами параллелограмма $ABCD$. Найдите координаты точки D. (3)

Вариант 2

1. Образом точки $A(-3;\ 6)$ при параллельном переносе является точка $A_1(7;\ 2)$. Найдите образ точки $B(-1;\ 8)$.

2. Найдите модуль вектора, с началом в точке $A(20;\ -3)$ и концом $B(-4;\ 4)$.

3. Являются ли точки $A(-2;\ 10)$, $B(4;\ -5)$, $C(2;\ 0)$ коллинеарными?

4. Точки $A(8;\ 4)$, $B(-2;\ 3)$, $C(4;\ -1)$ являются вершинами параллелограмма $ABCD$. Найдите координаты точки D.

Ответы и указания

Алгебра

Глава 1. Повторение и дополнения

§1. **1.** Например, $-\sqrt{25}\in\mathbb{R}$, $-\sqrt{25}\in\mathbb{Z}_-$, $-\sqrt{25}\in\mathbb{Q}_-$, $-\sqrt{25}\in\mathbb{R}_-$. **2.** а) Л; б) Л; в) Л; г) И; д) И; е) Л; ж) И; з) И. **5.** а) 1) $\approx 3{,}5$; 2) $\approx 3{,}46$; 3) $\approx 3{,}464$. **7.** а) Л; б) Л; в) Л; г) Л; д) И; е) И. **9.** а) 7,8; б) 6; г) 5,48; е) $\sqrt{22}$. **10.** $-4{,}5$; $-\sqrt{20}$; -1; $\sqrt{9}$; 3,27; $|4{,}28|$; $|-6{,}(2)|$. **12.** а) $\mathbb{Z}$; в) $\mathbb{I}_-$; г) $\mathbb{Q}$; д) $\mathbb{N}$; е) $\{0\}$. **14.** а) $\sqrt{19}-4$; б) $\sqrt{10}-2$; в) $2\sqrt{2}-\sqrt{7}$; г) $\sqrt{22}-3\sqrt{2}$. **15.** б) $\begin{cases}1-x, \text{ если } x\le 1\\ -1+x, \text{ если } x>1;\end{cases}$ в) $\begin{cases}3x-6, \text{ если } x\ge 2\\ -3x+6, \text{ если } x<2.\end{cases}$ **17.** 2) а) $\left\{x \,\middle|\, -1\frac{2}{5}<x<2\right\}$; в) $\{x\,|-6{,}5<x<\sqrt{10}\}$; д) $\{x\,|-2<x<5\}$; е) $\{x\,|\,x<\sqrt{2} \text{ или } x>\sqrt{5}\}$. **19.** 28. **20.** *Указание.* Примените формулы $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$. **22.** а) „=”; б) „>”; в) „=”; г) „<”. **24.** 18.

§2. **2.** 2) 350; 5) 642; 14,4; 6) 0,225; 1035; 14,4. **4.** а) $D_{108}=\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 54, 108\}$; $D_{54}=\{1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54\}$; в) $(108, 54)=54$; г) $[108, 54]=108$. **5.** б) $-81{,}4$. **6.** а) $\approx 21{,}26$; в) $\approx -1{,}22$; д) $\approx 6{,}93$. **7.** б) $\approx 5{,}49$. **10.** а) -1 и 0; б) 3 и 4; в) 5 и 6; г) -23 и -22. **12.** 3 761 плитка. **13.** д) $-1+\sqrt{3}$; $-0{,}5(1+\sqrt{3})$; е) $-2-\sqrt{5}$; $-2+\sqrt{5}$. **15.** а) $[-4{,}5;\ \sqrt{5})$; $(0;\ 2)$; г) $(\sqrt{7};\ 2013)$; $\{15\}$. **17.** в) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}$; г) $0{,}5\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{7}$. **19.** $4{,}77888\cdot 10^{24}$ кг. **22.** а) Например, $(4+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})$; г) например, $2\sqrt{15}+\sqrt{15}$; д) например, $(-1+\sqrt{5})+(1-\sqrt{5})$. **24.** а) -10; б) 6 и соответственно 1; в) например, 2,5; г) -3. **25.** в) $[-1{,}7;\ 0)\cup(-1;\ \sqrt{7}]$; г) $[-\sqrt{11};\ -\sqrt{3}]\cup[\sqrt{2};\ \sqrt{21}]$. **26.** в) $A\cup B=\mathbb{Z}$; $A\cap B=\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$; $A\setminus B=\mathbb{Z}\setminus\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$; $B\setminus A=B\setminus\mathbb{Z}=[-4,\ 5)\setminus\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. **27.** а), б) *Указание.* Примените формулы $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ и $\sqrt{x^2}=|x|$, $x\in\mathbb{R}$. **28.** а), б) *Указание.* Примените формулы $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ и $\sqrt{x^2}=|x|$, $x\in\mathbb{R}$. **29.** а) $S=\{1{,}5;\ 1;\ -2\sqrt{5}\}$. **31.** *Указание.* Примените формулы $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ и $\sqrt{x^2}=|x|$, $x\in\mathbb{R}$. **32.** г) *Указание.* Рассмотрите случаи: $a<b$, $a=b$ и $a>b$. **33.** в) $4+4+4-4:4=11$.

Проверочная работа

Вариант 1. **1.** а) И, Л, И, Л; б) –1993,6; в) $-498{,}4$; г) $3\sqrt{3}-4$. **2.** а) 155 леев; б) в первый месяц. **3.** $3{,}57\cdot 10^3$ м.

Вариант 2. **1.** И, Л, И, И; б) 2005,9; в) 501,475; г) $3-2\sqrt{2}$. **2.** а) 120 км; б) за первый час. **3.** $195\cdot 10^7$ бит.

Глава 2. Степени и корни

§1. **4.** а) x^{12}; б) a^8; в) $64y^5$; г) a^5b^{11}. **7.** д) $\frac{25}{4}$; е) 9; ж) $\frac{9}{25}$; з) $-\frac{7}{16}$. **16.** а) 12; б) $9\frac{1}{4}$; в) $5\frac{29}{64}$; г) $-7\frac{1}{12}$. **17.** а) 2; б) 4; в) 6; г) 5; д) 10; е) $\frac{1}{9}$; ж) 3. **18.** а) $x^{-2}y$; б) a^4b^4; в) 1; г) $1{,}25ab^2$.

19. в) $\left(\dfrac{2y^2}{x}\right)^{-5}$; г) $(5a^{-5}b^{-1})^3$. **21.** 5,34 kg. **22.** а) x^5; б) x^4; в) x^3; г) x^{13}. **23.** а) $2\frac{1}{3}$; б) $\frac{3}{5}$.
24. а) ab; б) $\frac{a}{b}$; в) a^3b^3; г) $\frac{a^2}{b^3}$. **26.** а) $\frac{y-x}{x^2y^2}$; б) $x+y$; в) $\frac{1+a}{1-a}$; г) $\frac{a-1}{a}$. **27.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

§2. **1.** з) $3\frac{1}{3}$; и) $1\frac{2}{3}$; к) $2\frac{1}{2}$. **3.** в) 9; г) 6; д) 8; е) 110. **5.** а) $a\geq 0$; б) $a\geq -2$; в) $a\leq 1$; г) $a>1$. **6.** а) 2 и 3; б) 4 и 5; в) 6 и 7; г) 12 и 13. **8.** а) 1; б) 0; в) 5; г) 7. **10.** а) 44; б) 35; в) 7,2; г) $\frac{6}{13}$; д) $\frac{4}{45}$; е) 51; ж) $\frac{1}{7}$; з) 12. **11.** а) 36; б) 60; в) 42; г) 135; д) 5; е) 15; ж) 7; з) 45. **12.** а) $6\sqrt{2}$; б) $4\sqrt{3}$; в) $5\sqrt{3}$; г) $3\sqrt{10}$; д) $\sqrt{6}$; е) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; ж) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$; з) $\sqrt{3}$. **13.** а) $\sqrt{45}$; б) $\sqrt{75}$; в) $\sqrt{28}$; г) $-\sqrt{18}$; д) $\sqrt{108}$; е) $\sqrt{3}$; ж) $-\sqrt{5}$; з) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. **15.** а) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$; б) $\frac{5\sqrt{2}}{6}$; в) $\frac{4\sqrt{3}}{5}$; г) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$; д) $\frac{7\sqrt{2}}{9}$; е) $\frac{3\sqrt{17}}{34}$; ж) $\frac{2\sqrt{21}}{7}$; з) $\frac{\sqrt{14}}{21}$. **16.** а) $x\in[0;+\infty)$; б) $x\in(-\infty;0)$; в) $x\in(0;+\infty)$; г) $x\in\mathbb{R}$; д) $x\in\mathbb{R}^*$; е) $x\in\varnothing$; ж) $x\in[1;+\infty)$; з) $x\in\mathbb{R}$. **17.** а) 1; б) 6. **18.** а) $2\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) 21; г) 16; д) $7+2\sqrt{3}$; е) 1; ж) 0; з) $\sqrt{15}$. **19.** а) 2,38; б) 0,123; в) 26,32; г) 3,504. **21.** а) 1,2; б) 20; в) 40; г) 70. **22.** а) $\sqrt{11}$; б) 1; в) 3; г) $\frac{2}{19}$. **23.** а) $\sqrt{15}$; б) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\frac{2}{3}$. **24.** а) $-4ab^5\sqrt{2a}$; б) $3(a-b)^2\cdot\sqrt{3(a-b)}$; в) $-2(a-3)\cdot\sqrt{-2(a-3)}$; г) $(x-2)(5-x)^2\cdot\sqrt{(x-2)(5-x)}$. **25.** а) $-\sqrt{3a^2}$; б) $\sqrt{x^3}$; в) $-\sqrt{-y^3}$; г) $\sqrt{(a-b)^3}$; д) $-\sqrt{(y-x)^3}$; е) $-\sqrt{2(a-1)}$. **26.** а) $-\frac{a^4b^6}{c}$; б) x^2y^8; в) m^4n^7; г) $x-3$; д) $\sqrt{3}$; е) -1. **27.** а) $2(\sqrt{6}-1)$; б) $\frac{1+\sqrt{7}}{2}$; в) $2\sqrt{5}+1$; г) $2\sqrt{2}-3$; д) $\frac{13-5\sqrt{5}}{2}$; е) $3+\sqrt{6}$. **28.** $\sqrt{2012}+\sqrt{2014}<2\sqrt{2013}$. **29.** а) 4; б) $2\sqrt{5}$. **30.** а) $\sqrt{6}-1$; б) $2+\sqrt{3}$. **31.** а) $2+\sqrt{3}$; б) $(\sqrt{5}+\sqrt{7-\sqrt{2}})(-1-\sqrt{2})$; в) $\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{30}}{12}$. **32.** а) $\sqrt{5}-1$; б) 9.

Упражнения и задачи на повторение

2. а) a^{-14}; б) x^3. **4.** а) 180; б) 24; в) 2,6; г) 21; д) 2; е) 3. **5.** а) $9\sqrt{5}$; б) $7-4\sqrt{3}$; в) 1; г) $11-22\sqrt{2}$. **6.** а) $-6xy\sqrt{y}$; б) $\frac{a^3}{5b}$; в) $-\frac{1}{2}\sqrt{x}$. **9.** $x\in(-\infty;0)$; $y\in(-\infty;0)$. **10.** $a=0$ и $b\in[0;+\infty)$ или $b=0$ и $a\in[0;+\infty)$. **11.** а) $\sqrt{\frac{a}{b}}$; б) $\frac{2\sqrt{b}}{b}$. **12.** а) $\frac{2b^2+a}{a^2b^4}$; б) $\frac{a^4}{1+2a^2+a^4}$. **13.** 1. **14.** а) 0; б) 0. **15.** 2.

Глава 3. Алгебраические выражения

§1. **3.** а) $9{,}5\sqrt{7}+12\sqrt{3}-7\sqrt{10}$; б) $\sqrt{15}+16\sqrt{2}$. **4.** а) $5{,}7x+29y-2$; б) $-\frac{17{,}8}{4}a+\frac{13}{5}b+\sqrt{7}$; в) $4\sqrt{3}t-7{,}(2)z-\sqrt{7}tz$; г) $-1+6ab^2-100ab$. **5.** а) $4{,}12x^2y=4x^2y+0{,}12x^2y$; б) $-3\sqrt{2}tz=$ $=-\sqrt{2}tz-\sqrt{2}tz-\sqrt{2}tz$; в) $6{,}(15)ab=6ab+0{,}(15)ab=6ab+\frac{5}{33}ab$; г) $-\frac{2}{7}xy^2=-\frac{1}{7}xy^2-\frac{1}{7}xy^2$. **6.** а) $(-21)x^3y^4z^4$; б) $14a^4b^2$; в) $-a^4x^2y$; г) $-30t^3z^4$. **7.** а) $13xy^{-1}$; б) $\left(-\frac{1}{3}\right)a^{-1}b^2$; в) $-\sqrt{3}tz$; г) $4{,}6a^{-1}t$. **8.** а) $9x^2y^4$; б) $25a^8b^4$; в) $\dfrac{1}{-\frac{1331}{125}t^3z^3}$. **9.** а) Л; б) Л; в) Л; г) И; д) Л; е) Л; ж) И; з) Л.

10. а) m^2+mn; б) z^2-zy; в) $3ab-6ac$; г) $-2\sqrt{2}x+2y$; д) $1{,}7x^2+5{,}1xy$; е) $\sqrt{14}a+7$. **11.** а) $(-12)x^3y^6+32x^2y^2z$; б) $-65a^3b^4+130a^2b^2c$; в) $-\sqrt{98}t^2z+\sqrt{147}t^3z^3$; г) $12a^3b^3-10a^2b$. **12.** а) 9 см^2; б) 19 см^2. **13.** а) $10x^2-21y^2-1xy-2x+3y$; б) a^3-b^3; в) a^3+b^3; г) $x^3+x^2y-y^2x-y^3$; д) a^3+8; е) x^3+1. **14.** а) $7ab(b+2a)$; б) $0{,}8xy(-4{,}5xy^2+x^3y^4)$; в) $\sqrt{17}xy(2y^3-x)$; г) $tz(-15z-\sqrt{5}t)$; д) $(x-5)(3-y)$; е) $(a-1)(2{,}5a+1)$.
16. а) $7x^2y-3\sqrt{7}x^2+2\sqrt{7}xy-xy+y^2-7x^2y^2$; б) $\dfrac{5x^4y-245+x^6y^2-x^4y^6}{7}$; в) $99a^2-175b^2$; г) $-x^6-3x^3+9+27x^{-3}$. **17.** а) $-\dfrac{3}{49}a^2x^3y^3$; б) $\dfrac{7}{4}ax^2y^{-2}$; в) $\sqrt{6}a^{-2}bc^4$; г) $\dfrac{50}{9}t^{-4}z^8$. **19.** а) $-6a$; б) $-100x$. **21.** Второй шахматист. **22.** а) $x\cdot x\cdot(x^2-0{,}7x-x+0{,}7)$. **23.** $2\sqrt{3}$. **24.** а) 5; б) –2; в) 0; г) 1. **25.** а) Л; б) И. **27.** а) 1260; б) 168; в) 1584. **28.** а) 3,5 км; б) 7 км; в) 10,5 км; г) 14 км. **32.** а) $S=\{0;\ 4\}$; б) $S=\{0;\ 1\}$. **34.** $\sqrt{a+1}-1$.

§2. **4.** а) Л; б) Л; в) И; г) Л; д) И; е) И; ж) Л; з) Л; и) И. **5.** а) $(\sqrt{3}+2x)^2=3+4\sqrt{3}x+4x^2$; б) $(2{,}5x+\sqrt{2}y)^2=6{,}25x^2+2\cdot 2{,}5x\cdot\sqrt{2}y+2y^2$; в) $(a^2-2b^3)^2=a^4-4\cdot a^2\cdot b^3+4b^6$; г) $(t^2-\sqrt{3}z^4)^2=t^4-2\cdot t^2\cdot\sqrt{3}z^4+3z^8$. **6.** а) $(x-\sqrt{11})^2=x^2-2\sqrt{11}x+11$; б) $(-x-\sqrt{11})^2=x^2+2\sqrt{11}x+11$; в) $(-x+\sqrt{11})^2=x^2-2\sqrt{11}x+11$; г) $(x+\sqrt{11})^2=x^2+2\sqrt{11}x+11$; д) $(\sqrt{11}-x)^2=11-2\sqrt{11}x+x^2$; е) $(\sqrt{11}+x)^2=11+2\sqrt{11}x+x^2$.
8. а) И; б) Л; в) Л; г) И; д) Л; е) И. **15.** а) 10; б) $8\sqrt{10}+18$; в) $-24-\dfrac{8\sqrt{3}}{5}$; г) $1{,}4\sqrt{11}+11{,}49$. **18.** а) $(120+40\sqrt{5})$ см^2; б) $(24+6\sqrt{15})$ см^2; в) $(645-100\sqrt{5})$ см^2; г) $(10\,200-1\,000\sqrt{8})$ см^2. **19.** а) 44 см^2; б) 90 см^2. **31.** б) 0, 1 или 4. **32.** а) $S=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$; в) $S=\left\{\dfrac{3}{4}\right\}$. **35.** а) $\dfrac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$; б) $\dfrac{4\sqrt{3}+6\sqrt{2}+\sqrt{30}}{12}$. **41.** а) 2; б) 2.

§3. **1.** а) $(x-5)^2$; б) $(4a-1)^2$; в) $(6ab+1)^2$; г) $(x+8)^2$; д) $(8xy-1)^2$; е) $(1+9x)^2$. **2.** а) И; б) И; в) Л; г) Л. **4.** а) $(1+x)^3$; б) $(b+4)^3$; в) $(10+t)^3$; г) $(x+2y)^3$. **5.** а) $13(2xy-3z)$; б) $-11xy(11x-y)$; в) $2{,}5a^3b^2(5-a)$; г) $\sqrt{2}t(2t-5)$. **6.** а) $a^3(6+a^2b)(36-6a^2b+a^4b^2)$; б) $x^6(5+x^2y)(25-5x^2y+x^4y^2)$; в) $t^3(3+z)(9-3z+z^2)$. **7.** а) $a^3(b-a)(b^2+ab+a^2)$; б) $t^3(t^4-2z)(t^8+2zt^4+4z^2)$; в) $(xy)^3(x-y)(x^2+xy+y^2)$. **8.** а) $(a-\sqrt{7})(a+\sqrt{7})(a+\sqrt{5})$; б) $(xy-2)(3x-y)$. **9.** а) $4tz$; б) $a(a-b)(a+b)$; в) $(x^2+5)(x+6)(x-1)$; г) $(x-y)^2(x+y)^2$. **10.** а) $(x-3)(x-1)$; б) $(x+6)(x+4)$; в) $a(a-2b-3)$; г) $a^2(b-2)(b-3)$. **13.** 5. **14.** а) $13=7^2-6^2$. **15.** а) 0; б) 4; в) 0; г) –5. **17.** а) $x^{-3}(3-4x^{-1}y)(9+12y+16x^{-2}y^2)$; б) $t^3(8t^3+0{,}1z^2)(64t^6-0{,}8t^3z^2+0{,}01z^4)$; в) $(1+5ab^5)(1-5ab^5+25a^2b^{10})$.
18. а) $t^3z^{-9}(2t^2z-1)(4t^6z^2+2t^3z+1)$; б) $a^{15}(9a^2b^3-0{,}2)(81a^4b^6+1{,}8a^2b^3-0{,}04)$; в) $x^3\left(\dfrac{x}{4}-\dfrac{2y^8}{3}\right)\left(\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{xy^8}{6}+\dfrac{4y^{16}}{9}\right)$. **19.** 11,12. **22.** а) $(t^2+t+1)^2$; б) $(x^2+3x+1)^2$.

§4. **6.** а) $\dfrac{10}{3}$; б) –5,25. **7.** а) 1; б) $\dfrac{1}{a-1}$; в) $\dfrac{8}{3-2p}$.

Упражнения и задачи на повторение

1. а) $7{,}5xy+25$; б) $14{,}75a^2b^3-3{,}6ab-0{,}7$; в) $-5a^2-28a-15$; г) $10{,}96x^2-24{,}4xy+29y^2$. **2.** а) И; б) Л; в) Л; г) И. **4.** а) 1; б) 8. **5.** а) $(x+5)(x-5)$; б) $(2+9t)(2-9t)$; в) $(2+a)(4-2a+a^2)$; г) $(c+2x)(c^2-2xc+4x^2)$; д) $\left(\frac{1}{3}+x^{-1}\right)\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{3}x^{-1}+x^{-2}\right)$; е) $-(c+3x)(c^2-3xc+9x^2)$; ж) $(0{,}2+yz^3)(0{,}04-0{,}2yz^3+y^2z^6)$; з) $(5m^{-1}-n^{-2})(25m^{-2}+5m^{-1}n^{-2}+n^{-4})$. **6.** а) a^9-1; б) m^3-1; в) a^6+1; г) $8a^3+27b^3$. **7.** а) $\frac{a-4}{2}$; б) $\frac{a+3}{5}$. **8.** а) $S=\left\{-\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right\}$; б) $S=\{-8;8\}$; в) $S=\{-0{,}6;0{,}6\}$; г) $S=\{-10;10\}$. **15.** а) $(a-b)(1-a-b)$; б) $(x+y)(x-y-1)$; в) $(x+y)(1-x^2+xy-y^2)$; г) $(a-b)(a^2+ab+b^2-1)$. **16.** а) $\frac{(x-1)^2}{x^3+1}$; б) $-\frac{x-1}{x^2+x+1}$. **17.** а) $(3x-1)(21x^2-6x+1)$; б) $\left(\frac{1}{4}t+1\right)\left(\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{2}t+1\right)$; в) $-z(z+2)(z^4+4z^3+4z^2+6z+3)$. **20.** $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2+(\sqrt{3})^2$. **21.** $12\,098^3$.

Глава 4. Уравнения и неравенства. Системы

§1. **5.** а) $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$; б) $S=\{5\}$; в) $S=\{5\}$; г) $S=\{10{,}5\}$; д) $S=\left\{\frac{1}{8}\right\}$; е) $S=\varnothing$. **6.** а) $S=\{2\sqrt{3}\}$; б) $S=\varnothing$. **7.** а) $S=\{1{,}2\}$; б) $S=\varnothing$. **8.** а) $x=10$; б) $x=3$; в) $x=35$. **11.** $x=7$. **12.** $y=3$. **13.** а) $S=\{5\}$; б) $S=\{2{,}5\}$; в) $S=\{0\}$; г) $S=\{-3\}$; д) $S=\{1\}$; е) $S=\{5\}$; ж) $S=\{\sqrt{5}+\sqrt{3}\}$; з) $S=\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$. **16.** а) $S=\{-4;4\}$; б) $S=\{-5;5\}$; в) $S=\{-7;7\}$; г) $S=\{-3;3\}$; д) $S=\{3\}$; е) $S=\varnothing$. **17.** 2 кг. **18.** 4 км/ч. **19.** а) $a=-0{,}04$; б) $a=3$; в) $a=0$; г) $a=1$. **20.** $a=23$. **21.** а) $S=\{-2;5\}$; б) $S=\{3;4\}$; в) $S=\left\{\frac{2}{3};2\right\}$; г) $S=\left\{-\frac{1}{2};1\right\}$; д) $S=\varnothing$; е) $S=[11;+\infty)$. **22.** а) $S=\{-m\}$; б) $S=\varnothing$ при $m=0$, $S=\left\{\frac{5}{m}\right\}$ при $m\neq 0$; в) $S=\mathbb{R}$ при $m=0$, $S=\{2\}$ при $m\neq 0$; г) $S=\varnothing$ при $m=2$, $S=\left\{\frac{1}{m-2}\right\}$ при $m\neq 2$; д) $S=\mathbb{R}$ при $m=0$, $S=\{-3\}$ при $m\neq 0$; е) $S=\mathbb{R}$ при $m=-1$, $S=\{m-1\}$ при $m\neq -1$. **23.** 16 км/ч, 20 км/ч; 12 км. **24.** 350 леев.

§2. **4.** а) $y=-2x+5$; б) $x=-0{,}5y+2{,}5$. **6.** $y=-0{,}2$. **8.** а) Нет; б) нет; в) да; г) нет. **9.** а) $S=\{(4;2)\}$; б) $S=\{(0;4)\}$; в) $S=\{(4;2)\}$; г) $S=\{(5;1)\}$. **10.** а) $S=\{(2;9)\}$; б) $S=\{(1;3)\}$; в) $S=\{(2;7)\}$; г) $S=\{(5;2)\}$. **11.** а) $S=\{(3;7)\}$; б) $S=\{(2;5)\}$; в) $S=\{(2;0)\}$; г) $S=\varnothing$. **13.** $b=3$. **14.** $a=3$. **17.** а) $S=\{(3;2)\}$; б) $S=\{(6;1)\}$; в) $S=\{(0{,}2;0{,}4)\}$; г) $S=\{(6;12)\}$. **19.** 1,6 кг риса; 2,4 кг пшена. **20.** 35 лет; 9 лет. **21.** 6 комнат с 2 кроватями; 10 комнат с 3 кроватями. **22.** По 600 леев. **23.** 8 миллионов леев; 5 миллионов леев. **24.** а) $S=\{(2;3)\}$; б) $S=\{(-2;4)\}$; в) $S=\{(3;-7)\}$. **26.** а) $x+y-2=0$; б) $4x-y=0$. **27.** а) $m=3$; б) $m=-3$. **28.** а) $a=-3$; б) $a=\pm 12$. **29.** Направление BC – 24 машины; направление BD – 12 машин; направление DE – 14 машин; направление CE – 22 машины.

30. а) 8 миллионов леев; 5 миллионов леев; б) 14 миллионов леев; 12 миллионов леев. **31.** 10 л 20%-го раствора; 20 л 50%-го раствора.

§3. **4.** а) $\{-1; 0\}$; б) $\{1; 2; 3; 4\}$; в) $\{2; 3\}$. **7.** а) $S=[3; +\infty)$; б) $S=(-\infty; 10)$; в) $S=\left(-\infty; -\frac{3}{7}\right]$; г) $S=[-9; +\infty)$. **9.** а) $S=(-\infty; -3)$; б) $S=\left[-\frac{6}{11}; +\infty\right)$; в) $S=\left(-\infty; -\frac{5}{9}\right]$; г) $S=\varnothing$; д) $S=(3; 6]$. **13.** а) $S=\left[1\frac{5}{24}; +\infty\right)$; б) $S=\left(-\infty; -\frac{3}{11}\right)$; в) $S=\left(2\frac{2}{3}; +\infty\right)$. **14.** а) $x\in\left(-\infty; -\frac{13}{15}\right]$; б) $x\in(-\infty; 1{,}2)$. **15.** а) $y\in\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$; б) $y\in\left(-\infty; 72\frac{2}{3}\right]$; в) $y\in\left[-119\frac{1}{3}; +\infty\right)$. **16.** 0. **17.** а) $x\in[1{,}6; +\infty)$; б) $x\in(3{,}75; +\infty)$. **18.** а) $S=\varnothing$; б) $S=(-24; -1)$; в) $S=\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$; г) $S=\left(-\frac{1}{5}; 5\right)$. **19.** а) $x\in\varnothing$; б) $x\in\left[-4; \frac{1}{4}\right)$. **20.** а) $a\in(-\infty; 0)$; б) $a\in(0; +\infty)$; в) $a\in(0; +\infty)$; г) $a\in(-\infty; 0)$. **21.** а) $5\pi<l<5{,}2\pi$; б) $2{,}5\pi<l<2{,}6\pi$. **24.** а) $S=(-\infty; 4]$; б) $S=(-\infty; -3)$; в) $S=(-\infty; 1{,}6)$. **25.** 1) $a\in(2; +\infty)$; 2) $a=2$; 3) $a\in(-\infty; 2)$; 4) $a\in\varnothing$. **26.** а) $S=[-2; -1)$; б) $S=(-\infty; -3)\cup(3; 4]$; в) $S=[-7; -5)\cup(5; 7]$. **27.** Больше 21 л, но меньше 28,75 л. *Указание*. Чтобы найти температуру разбавленной воды, воспользуйтесь формулой: $t=\frac{v_1\cdot t_1+v_2\cdot t_2}{v_1+v_2}$.

§4. **6.** а) $S=\{-2; 2\}$; б) $S=\{0; 25\}$; в) $S=\varnothing$; г) $S=\{0\}$; д) $S=\{0; -1\}$; е) $S=\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$; ж) $S=\{0; 3\}$; з) $S=\left\{0; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$; и) $S=\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$. **7.** а) $\Delta=121$, $S=\{-2; 9\}$; б) $\Delta=1$, $S=\left\{1; \frac{2}{3}\right\}$; в) $\Delta=1$, $S=\left\{1\frac{2}{3}; 2\right\}$; г) $\Delta=0$, $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$; д) $\Delta=-11$, $S=\varnothing$; е) $\Delta=16$, $S=\{-1; 3\}$; ж) $\Delta=25$, $S=\left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right\}$; з) $\Delta=0$, $S=\left\{-\frac{1}{5}\right\}$; и) $\Delta=53$, $S=\left\{\frac{-7-\sqrt{53}}{2}; \frac{-7+\sqrt{53}}{2}\right\}$. **9.** а) $x\approx-0{,}2$ или $x\approx6{,}2$; б) $x\approx-3{,}7$ или $x\approx-0{,}3$; в) $x\approx-0{,}7$ или $x\approx2{,}7$. **10.** а) $S=\left\{\frac{2}{3}; 4\right\}$; б) $S=\{-1; 2\}$; в) $S=\left\{0; 4\frac{1}{4}\right\}$; г) $S=\left\{\frac{-8-\sqrt{73}}{3}; \frac{-8+\sqrt{73}}{3}\right\}$; д) $S=\{10-4\sqrt{10}; 10+4\sqrt{10}\}$; е) $S=\left\{\frac{1}{6}; 1\right\}$. **11.** а) $x=3$; б) $x=10$. **14.** з) $S=\{-\sqrt{3}; 5\}$; и) $S=\{3-\sqrt{15}; 5\}$. **15.** а) $(x-7)(x-3)$; б) $(2x-3)(3x-1)$; в) $(x+3)(3x-2)$; г) $(-2x-1)(x-2)$; д) невозможно; е) $2\left(x+1-\frac{\sqrt{14}}{2}\right)\left(x+1+\frac{\sqrt{14}}{2}\right)$. **16.** а) $\frac{x+1}{5x+1}$; б) $\frac{x+1}{x}$; в) $\frac{x-1}{x-4}$. **17.** 1 сек и 3 сек. **18.** 30 лин. ед. **19.** а) $S=\{-1; 1\}$; б) $S=\{-1; 1\}$; в) $S=\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$; г) $S=\left\{-\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}; \sqrt{3}\right\}$. **20.** а) $m=2$, $x_2=3$; б) $m=-27$, $x_2=-\frac{9}{2}$. **21.** а) $m=\pm6$;

б) $m=0,\ m=\frac{4}{9}$; в) $m=\frac{1}{2}$; г) $m=20\pm 6\sqrt{5}$. **23.** а) $S=\{-1\}$; б) $S=\{-3;\ 3\}$; в) $S=\{-5;\ 5\}$; г) $S=\{-3\sqrt{7};\ 7\}$. **24.** а) 169; б) $\frac{13}{14}$; в) 141; г) 113. **25.** а) $a=-12$; б) $a=3$.

Упражнения и задачи на повторение

2. а) $S=\left(\frac{1}{6};\ \frac{1}{6}\right)$; б) $S=\varnothing$; в) $S=(2;\ -1)$. **3.** а) $S=[2;\ +\infty)$; б) $S=(-\infty;\ 1)$. **4.** а) $S=(2;\ 5)$; б) $S=(-\infty;\ 2)$; в) $S=\varnothing$. **6.** а) $S=\left\{-2;\ \frac{3}{2}\right\}$; б) $S=\left\{-2;\ \frac{2}{3}\right\}$; в) $S=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$; г) $S=\left\{0;\ \frac{7}{2}\right\}$; д) $S=\{-6;\ 5\}$; е) $S=\{-4;\ 5\}$. **9.** а) $S=(-2;\ 6)$; б) $S=(3;\ 2)$. **10.** а) $S=(2;\ 1)$; б) $S=(2;\ 1)$. **11.** 18. **13.** $S=(-\infty;\ 0{,}9]$. **14.** а) $S=[-1{,}5;\ 2]$; б) $S=\left[\frac{1}{4};\ \frac{7}{4}\right)$. **15.** $x\in[-2{,}8;\ 5)$. **16.** а) $S=\{-5;\ 3\}$; б) $S=\{-2;\ 4\}$; в) $S=\left\{1;\ \frac{5}{3}\right\}$; г) $S=\{-2;\ 3{,}2\}$. **18.** а) $-1{,}006$; б) $-\frac{100}{103}$. **19.** $m=-\frac{1}{3}$. **20.** Сметана – 210 г, мука – 390 г, сахар – 170 г, масло – 30 г. **21.** 11 км. **22.** Не меньше $\frac{2}{3}$ кг и не больше $2\frac{4}{5}$ кг. **23.** 10 команд. **24.** а) $a\in\left(3\frac{1}{8};\ +\infty\right)$; б) $a\in\left\{-\frac{1}{7};\ 0;\ 1\right\}$.

Глава 5. Функции. Последовательности

§1. **2.** б) $\{2\}$; в) $\{2, 3, 4, 5, 6\}$. **3.** $s(t)=80t$. **4.** $A(x)=8x$. **5.** б) 2) $D(f)=\mathbb{R}$; $E(f)=[0,+\infty)$. **7.** а) $A(2;3)$, $B(-1;4)$, $C(4;0)$, $D(3;-1)$, $E(-2;-2)$. **9.** б) 1) а) ± 2; б) $\sqrt{2}$; в) ± 3. **10.** 1) а) $A\notin G_f$; 2) а) $O\in G_f$; 3) а) $B\notin G_f$. **13.** а) $E(f)=\left\{-\frac{3}{4};-1;-\frac{3}{2};-3;3;\frac{3}{2};1;\frac{3}{4}\right\}$. **14.** б) $D(f)=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$; г) $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. **18.** а) $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{-2;\ 6\}$; б) $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$. **19.** а) –2; б) 2.

§2. **1.** а) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-4x$; $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-2{,}5$; $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x-5$; $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x-1$. **3.** а) 2; б) –1; в) –1,5; г) 0; д) 0; е) 10. **4.** в) II и IV; г) I и III. **5.** а) $\frac{1}{10}$; б) $-\sqrt{3}$; в) 2,1; г) $0{,}5\sqrt{2}$. **6.** а) Нет; б) да; в) нет; г) да. **8.** а) Острый; б) тупой; в) острый; г) тупой. **9.** Задает функцию, но не I степени. **10.** Прямая пропорциональность. **12.** а) $R(x)=50-4{,}5x$; б) $D(R)=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$. **13.** а) 1) $\frac{1}{5}$; 3) $f(x)>0$ при $x\in\left(-\infty;\ \frac{1}{5}\right)$; $f(x)<0$ при $x\in\left(\frac{1}{5};+\infty\right)$; 4) острый; 5) не является строго возрастающей. **14.** б) 1) 0; 3) $g(x)>0$ при $x\in(-\infty;\ 0)$; $g(x)<0$ при $x\in(0;+\infty)$; 4) тупой; 5) не является строго возрастающей. **15.** а) $f(x)=-1{,}5x+3$. **16.** б) $f(x)=-0{,}2x$. **19.** $f(x)=x+4$.

§3. **1.** $f(x)=\frac{1}{x}$; $f(x)=\frac{5}{x}$; $f(x)=-\frac{7}{x}$. **4.** а) Л; б) И; в) Л; г) Л; д) Л; е) И. **5.** а) II и IV; б) I и II. **6.** б) 1) Убывающая; 2) $f(x)>0$ при $x\in(-\infty;\ 0)$; $f(x)<0$ при $x\in(0;+\infty)$; 3) II и III. **8.** а) Нет; б) да; в) да; г) нет. **10.** а) $f(x)=-\frac{36}{x}$; б) $f(x)=\frac{32}{x}$.

§4. **1.** $x \in \left\{2{,}25;\ \frac{100}{9};\ 25;\ 49;\ 8{,}91\right\}$. **3.** а) Л; б) И; в) Л; г) Л; д) И. **4.** а) Да; б) да; в) да; г) нет. **6.** а) 7; б) 0,2; в) 11; г) 25. **7.** $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ..., 99\}$. **11.** а) $S = \{4\}$; б) $S = \{4\}$; в) $S = \{4\}$; г) $S = \varnothing$.

§5. **1.** 1, 3, 5, 7, 9. **2.** 0, 3, 6, 9, 12. **3.** $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}$. **4.** а) 2, –1, –4, –7, –10; б) 0, 2, 6, 12, 20; в) 1, $\frac{4}{3}$, 2, $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{3}$; г) –3, +3, –3, +3, –3. **5.** а) x_{n-1}, x_n; б) x_{n+2}, x_{n+3}. **6.** $c_3 = \frac{3}{4}$, $c_7 = \frac{3}{8}$, $c_{100} = \frac{3}{101}$. **8.** 2, 7, 22, 67, 202. **9.** а) 7, 15, 27, 35, 39. **10.** а) –2, +2, –2, +2, –2; б) 0, –1, –2, –3, –4. **11.** б) $b_3 = \frac{8}{7}$, $b_7 = \frac{64}{7}$, $b_{12} = \frac{2^9}{3}$. **12.** в). **13.** а) Да; б) да; в) нет. **14.** 4 отрицательных члена. **15.** в) 1, 1, 2, 3, 5; г) 3, 1, –3, –11, –27. **19.** а) $a_1 = 5$, $a_{n+1} = (-1)^{n+1} a_n$, $n \in \mathbb{N}^*$. **20.** $c_n = (2n-1)^2$, $n \in \mathbb{N}^*$. **22.** Да.

Упражнения и задачи на повторение

2. б). **5.** б) $f(1) = f(-2) = f(5) = f(10) = 2{,}(3)$; г) $f(1) = 1$; $f(-2)$ не существует; $f(5) = \sqrt{5}$; $f(0{,}1) = \sqrt{0{,}1}$. **6.** а) И; б) Л; в) Л; г) Л. **7.** а) $D(f) = \mathbb{R}_+$; б) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$; в) $D(f) = \mathbb{R}$; г) $D(f) = [2, +\infty)$; д) $D(f) = \mathbb{R}_+^*$; е) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. **8.** а) 12; б) –5; в) $-\frac{8}{11}$; г) 10 000. **9.** 2, 1, 4, 2, 8. **10.** а) –1, 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26. **11.** 17. **13.** $m = 4n$. а) 400; б) $D(f) = \mathbb{N}$, $E(f) = \{0, 4, 8, 16, 32, ...\}$. **17.** а) 1) Например, 2; 2) например, –3; б) 1) например, $\sqrt{2}$; 2) например, –1,2; в) 1) например, 5; 2) например, –8; е) 1) например, –2; 2) например, 7. **19.** а) 1) Например, 3; 2) например, –5; г) 1) например, –3; 2) например, 5. **20.** а) 5; б) 10; в) 12. **21.** а) $x = y = \frac{1}{4}$; б) не имеет; в) $x = y = 0$; г) $x = y = -\sqrt{5}$. **23.** $x_9 = -45$. **24.** Начиная с номера 21. **25.** а) 64; б) 6. **26.** Не принадлежит. **28.** а) $f(f(-2)) = 20$; $f(f(f(0))) = 7$; б) $x = 0{,}25$.

Глава 6. Элементы теории вероятности и математической статистики

§1. **3.** а) Случайно; б) случайно; в) невозможно; г) невозможно; д) достоверно; е) невозможно. **4.** а) A более возможно, чем B; б) A менее возможно, чем B; в) A менее возможно, чем B. **5.** Углы, треугольники. **9.** а) 15 шаров; б) 18 шаров; в) 19 шаров; г) 11 шаров; д) 19 шаров.

§2. **1.** а) Один шанс из шести; в) ни одного шанса. **2.** 0,5. **3.** а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{5}{6}$; д) 0. **4.** $\frac{1}{15}$. **5.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{6}$. **7.** а) $\frac{1}{5}$; б) $\frac{1}{4}$; в) $\frac{11}{20}$. **9.** *Указание.* Подсчитайте, сколько простых чисел (четных, нечетных) среди первых 90 натуральных чисел. **11.** $\frac{13}{18}$. **12.** $P(b) = \frac{14}{31}$; $P(f) = \frac{17}{31}$. **14.** $P(A) = P(B) = \frac{1}{6}$. **15.** $P = \frac{2}{25}$.

Упражнения и задачи на повторение

3. $P(v) = \frac{1}{3}$; $P(r) = \frac{2}{3}$. **4.** Одна грань желтая и пять красных граней. **6.** б) $\frac{2}{25}$. **7.** 0,98. **8.** $\frac{1}{9}$. **9.** 0,1. **10.** 13 яблок. **12.** Урна пункта б).

Геометрия

Глава 1. Повторение и дополнения

§1. **3.** а) 24 дм = 240 см; б) 890 мм = 8,9 дм; в) 7,5 м = 750 см; г) 64900 см = 0,649 км. **4.** 44°, 136°, 136°. **5.** а) 90°, 90°; б) 40°, 50°; в) 18°, 162°; г) 50°, 50°. **6.** а) $2\frac{1}{3}$; б) $\frac{4}{7}$. **7.** а) $\beta = 155°$. **8.** а) Да; б) нет; в) да. **10.** а) 62 см; б) $24\sqrt{5}$ см. **11.** а) 2; б) 1; в) 0; г) 0. **13.** а) $\alpha = 54°$; б) $\alpha = 55°30'$. **14.** 20°, 40°, 120°. **23.** а) $PM = 12$ см, $PN = 15$ см. **24.** а) 20π см; б) 10π см; в) 24π см; г) 4π см. **25.** В10 раз. **26.** $18\sqrt{3}$ см. **27.** а) 60°, 60°, 120°, 120°; б) 6 углов величиной 60°. **28.** 36 см². **29.** 80 см. **31.** 15 см.

§2. **2.** а) Л; б) И; в) И; г) Л. **7.** а) Например, $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{27} \notin \mathbb{Q}$, а $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27} = 9 \in \mathbb{Q}$. **15.** Истинно. **16.** *На листе бумаги записано ровно девять ложных высказываний.* **17.** *Ты Правдолюб?*

Глава 2. Четырехугольники

§1. **3.** а) 2; б) 3; в) 4; г) 7. **4.** а) 720; б) 900°; в) 1080°; г) 1440°. **5.** а) 27,(4) см; б) $35\sqrt{3}$ см. **6.** а) 120°, 80°; б) 70°, 90°. **7.** а) 90° каждый; б) 108° каждый; в) 120° каждый; г) 144° каждый. **8.** Параллельны. **9.** 11 см, 12 см, 13 см, 14 см. **10.** а) Да; б) нет; в) нет. **11.** а) 48°, 72°, 96°, 144°; б) 40°, 60°, 120°, 140°; в) 60°, 80°, 100°, 120°. **12.** а) 162°, 108°, 54°, 36°; б) 180°, 90°, 60°, 30°. **13.** а) 5; б) 9; в) 14; г) 35.

§2. **2.** а) 16 см; б) $30\sqrt{5}$ см. **3.** а) 32,8 см; б) 30,(6) см. **5.** а) Истинно; б) Истинно; в) Ложно; г) Ложно. **6.** 35°, 145°, 145°. **7.** 30°, 30°, 150°, 150°. **8.** 80°, 80°, 100°, 100°. **9.** 5 см. **10.** 6 см. **11.** 22 см, 24 см, 26 см, 28 см. **12.** 90 см. **13.** 4,5 см. **14.** 15 см, 20 см. **15.** 48 см². **16.** а) $D(6; -2)$; б) $D(5; -8)$; в) $D(1; -4)$.

§3. **2.** а) 90°, 90°, 70°, 110; б) 90°, 90°, 40°, 140°. **3.** а) 80°, 80°, 100°, 100°; б) 110°, 110, 70°, 70°. **4.** а) 6 см; б) $4\sqrt{7}$ см; в) 7,8(3) см. **5.** а) 14 см; б) 10 см. **6.** 20 см, 20 см, 20 см, 40 см. **7.** а) 64 см; б) 74 см. **8.** а) 41 см; б) $7\sqrt{5}$ см. **9.** 20 см. **10.** 12 см и 18 см. **11.** 51 см. **12.** 60° , 60°, 120°, 120°. **14.** 14 см.

Упражнения и задачи на повторение

2. а) 5; б) 6; в) 9; г) 15. **3.** а) 9; б) 12; в) 20; г) 17. **4.** а) 105°; б) 80°. **7.** а) $4\sqrt{2}$ см; б) 80 см². **8.** $A_2B_2 = 14$ см, $A_3B_3 = 17$ см. **9.** а) $A(-4; -6)$; $B(-3; 2)$; б) $C(-1; -1)$; $D(-5; 1)$. **10.** 96 см². **11**. 60 см². **12.** а) 50 см²; б) 48 см². **13.** а) 360°; б) 360°; в) 360°. **14.** Параллелограмм.

Глава 3. Подобие треугольников

§1. **1.** а) Нет; б) да; в) нет; г) да. **2.** а) Да; б) да.

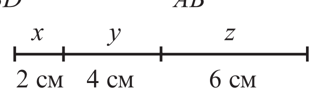
3. а)

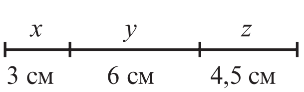
4	6	10	12	9
12	18	30	36	27

; б)

0,2	1	1,8	2	3,2	2,4
1	5	9	10	16	12

. **6.** а) $\frac{AB}{CD} = 0,(5)$; б) $\frac{AC}{AD} = \frac{4}{7}$; в) $\frac{BC}{BD} = 0,4375$; г) $\frac{AD}{AB} = 4,2$. **7.** а) 2,(3); б) $\frac{4}{7}$; в) 1,75; г) 0,3. **8.** а) 9,6 см; б) 5 см; в) 0,(3).

10. 

$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$. **11.** 

$\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$.

12. а) $C(4;3)$, $D(7;5)$; б) $O(0;0)$, $C(3;-1)$. **13.** а) Нет; б) да. **14.** а) 3,04; б) 6,4; в) 2,88. **16.** а) $AC=BD=1{,}25$ см, $CD=2{,}5$ см; б) $AC=CD=BD=2{,}(6)$ см. **17.** а) 4,5; б) 9,3.

§2. **2.** а) $\Delta ABC \sim \Delta CDE$; б) $\Delta ABC \sim \Delta EDC$. **3.** а) $\Delta AFE \sim \Delta DFB$; б) $\Delta ABF \sim \Delta DEF$, $\Delta BCD \sim \Delta BED$. **4.** а) $m(\angle A)=55°$, $m(\angle C)=35°$; б) $m(\angle A)=m(\angle B)=70°$, $m(\angle C)=40°$; в) $m(\angle A)=m(\angle B)=m(\angle C)=60°$. **5.** а) Истинно; б) Ложно; в) Истинно. **6.** а) 33 см; б) $\sqrt{5}$. **7.** $\Delta AOD \sim \Delta COB$. **8.** $\Delta BMC \sim \Delta ENF$, $\Delta AMB \sim \Delta DNE$. **9.** $\Delta ABC \sim \Delta EDC \sim \Delta DBA \sim \Delta EAD$. **10.** а) 4; б) 7. **11.** а) 67,5 м; б) 80 м. **12.** 12 см, 16 см, 24 см. **13.** а) 10; б) 8. **14.** а) $\Delta AEF \sim \Delta CBD$; б) $\Delta ABC \sim \Delta DFE$; в) $\Delta ADE \sim \Delta BCF$.

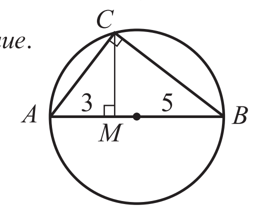
Упражнения и задачи на повторение

3. $MM_1=10$ см, $NN_1=20$ см, $KK_1=30$ см. **4.** а) Одно из решений равно 4 см; б) одно из решений равно 6 см. **5.** $k=3$. **6.** $m(\angle BAK)=30°$, $m(\angle AKB)=74°$. **7.** 15 см. **8.** 10 см. **9.** $k=2$ или $k=\frac{1}{2}$. **11.** 4 см. **12.** 4 см, 6 см, 9 см и 6 см, 9 см, 13,5 см. **13.** В 9 раз. **14.** 120°.

Глава 4. Метрические отношения в прямоугольном треугольнике

§1. **2.** а) 6 см; б) 12 см; в) $6\sqrt{5}$ см. **3.** а) 12 см; б) 8 см; в) 12,5 см. **4.** а) $6\sqrt{5}$ см и $12\sqrt{5}$ см; б) $4\sqrt{21}$ см и $8\sqrt{7}$ см; в) 3 см и $3\sqrt{2}$ см. **5.** 50 см и 72 см. **6.** 18 см и 98 см.

7. а) *Указание.*



ΔABC – прямоугольный,
$AM=3$ см,
$MB=5$ см,
$CM=\sqrt{15}$ см.

10. $5\sqrt{2}$ см. **11.** 12 см. **12.** 8 см. **13.** а) 4,5 см; б) 4,5 см. **14.** $6\sqrt{5}$ см, $12\sqrt{5}$ см.

§2. **1.** а) 26 см; б) 25 см; в) 8 см; г) 6 см. **2.** 34 см. **3.** $\sqrt{7}$ см. **4.** 20 см. **5.** а) $5\sqrt{58}$ см; б) 74 см. **6.** а) $5\sqrt{3}$ см; б) 18 см. **7.** а) 13; б) $\sqrt{10}$; в) $6\sqrt{5}$; г) $5\sqrt{5}$. **8.** а) $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ см; б) 2 см. **9.** а) Да; б) нет; в) да; г) да. **10.** 208 см. **11.** 34 см. **12.** $\sqrt{7}$ см. **13.** 50 см. **15.** 40 см.

§3. **1.** а) $\sin\alpha=0{,}8$, $\cos\alpha=0{,}6$, $\mathrm{tg}\alpha=\frac{4}{3}$, $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{3}{4}$; б) $\sin\alpha=\frac{5}{13}$, $\cos\alpha=\frac{12}{13}$, $\mathrm{tg}\alpha=\frac{5}{12}$, $\mathrm{ctg}\alpha=2{,}4$; в) $\sin\alpha=\frac{10}{\sqrt{149}}$, $\cos\alpha=\frac{7}{\sqrt{149}}$, $\mathrm{tg}\alpha=1\frac{3}{7}$, $\mathrm{ctg}\alpha=0{,}7$; г) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}$, $\cos\alpha=0{,}75$, $\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sqrt{7}}{3}$, $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{3\sqrt{7}}{7}$. **2.** а) $AC=13$, $AB=12$; б) $MK=14$, $MN=7\sqrt{3}$; в) $FG=1{,}8$, $EG=\frac{9\sqrt{26}}{5}$; г) $QR=8$, $PR=4\sqrt{13}$. **7.** а) 60°; б) 60°. **9.** а) $\sin^2 A+\cos^2 A=1$, $\sin^2 C+\cos^2 C=1$; б) $\frac{\sin A}{\cos A}=\mathrm{tg}A=0{,}75$, $\frac{\sin C}{\cos C}=\mathrm{tg}C=1{,}(3)$; в) $\frac{\cos A}{\sin A}=\mathrm{ctg}A=1{,}(3)$, $\frac{\cos C}{\sin C}=\mathrm{ctg}C=0{,}75$; г) $\frac{1}{\cos^2 A}=1+\mathrm{tg}^2 A=1{,}5625$, $\frac{1}{\cos^2 C}=1+\mathrm{tg}^2 C=2{,}(7)$; д) $\frac{1}{\sin^2 A}=1+\mathrm{ctg}^2 A=2{,}(7)$, $\frac{1}{\sin^2 C}=1+\mathrm{ctg}^2 C=1{,}5625$. **10.** а) $BC=20$ см, $AB=48$ см, $AC=52$ см; б) $AB=7{,}2$ см, $BC=9{,}6$ см, $AC=12$ см; в) $AB=12$ см, $BC=12{,}6$ см, $AC=17{,}4$ см; г) $AB=23{,}4$ см, $BC=8{,}8$ см, $AC=25$ см. **11.** а) Истинно; б) Ложно; в) Истинно; г) Истинно.

15. а) $\sin M = 0{,}6$, $\cos M = \sin K = 0{,}8$, $\mathrm{tg} M = \mathrm{ctg} K = 0{,}75$, $\mathrm{ctg} M = \mathrm{tg} K = 1{,}(3)$;

б) $\cos M = \sin K = \frac{12}{13}$, $\mathrm{tg} M = \mathrm{ctg} K = \frac{5}{12}$, $\mathrm{ctg} M = \mathrm{tg} K = 2{,}4$, $\cos K = \frac{5}{13}$;

в) $\sin M = \cos K = \frac{5}{13}$, $\cos M = \sin K = \frac{12}{13}$, $\mathrm{tg} M = \mathrm{ctg} K = \frac{5}{12}$, $\mathrm{ctg} M = 2{,}4$;

г) $\sin M = \cos M = \sin K = \cos K = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\mathrm{tg} M = \mathrm{tg} K = \mathrm{ctg} K = 1$.

16. а) $\sin 71° \approx 0{,}95$; б) $\cos 36° \approx 0{,}80$; в) $\mathrm{tg}\, 65° \approx 2{,}14$; г) $\mathrm{ctg}\, 50° \approx 0{,}84$. **17.** 1.

Упражнения и задачи на повторение

1. а) F; б) D; в) $[AF]$; г) $[CD]$. **2.** а) 36 см; б) 42 см. **3.** а) $8\sqrt{13}$ см и $12\sqrt{13}$ см; б) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ см и 0,75 см. **4.** 10 см и 24 см. **5.** 5 см и 6 см. **6.** $9\sqrt{3}$ см. **7.** а) $9\sqrt{3}$ м; б) $6\sqrt{5}$ м. **8.** $3\sqrt{3}$ см. **9.** $6\sqrt{3}$. **10.** а) 20 см; б) 14 см. **11.** 15 см. **12.** $\frac{9\sqrt{11}}{5}$ см. **13.** $2\sqrt{5}$ см и $4\sqrt{5}$ см. **14.** $BD = 4\sqrt{5}$ см, $DC = 2\sqrt{29}$ см. **15.** 12. **16.** 1 случай: 30 см, $30\sqrt{3}$ см; 2 случай: $60 + 30\sqrt{3}$ см и $90 + 60\sqrt{3}$ см; 3 случай: $60 - 30\sqrt{3}$ см и $90 - 60\sqrt{3}$ см. **17.** 20.

Глава 5. Векторы на плоскости

§1. **1.** а) $A_1(-2; 7)$, $B_1(-5; 10)$, $C_1(1; -1)$; б) $A_1(-1; 14)$, $B_1(-6; 12)$, $C_1(-11; 0)$; в) $A_1(-3; 9)$, $B_1(1; -4)$, $C_1(-14; 12)$. **3.** а) $x_1 = x + 3$, $y_1 = y - 3$; б) $x_1 = x - 5$, $y_1 = y + 4$; в) $x_1 = x + 1$, $y_1 = y - 6$. **4.** а) $M_1(-2; 7)$; б) $N_1(1; 4)$; в) $K_1(-2; 2)$; г) $P_1(-6; 10)$. **5.** а) $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{EN}$, $\overrightarrow{PE}$, $\overrightarrow{DK}$, $\overrightarrow{KC}$; б) $\overrightarrow{ME}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{EK}$, $\overrightarrow{PD}$; в) $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PD}$, $\overrightarrow{EC}$; г) $\overrightarrow{KN}$, $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{EB}$. **8.** а) (3; 4); б) (5; 12); в) (11; 60); г) (35; 12). **9.** а) 5; б) 13; в) 61; г) 37. **10.** а) 13; б) 17; в) 25; г) 41. **11.** а) $A(-2; 9)$, $B(1; 8)$, $C(-3; 8)$; б) $A(1; 17)$, $B(6; 3)$, $C(4; 7)$; в) $A(-2; 4)$, $B(1; 15)$, $C(-11; 13)$. **12.** а) Существует; б) не существует; в) существует. **13.** а) $C(-2; 4)$; б) $C(2; -2)$; в) $C(4; -4)$. **14.** а) $m = 5$, $n = 3$; б) $m = -3$, $n = -2$; в) $m = 2$, $n = 11$. **15.** а) $(8; 8\sqrt{3})$; б) $(8\sqrt{3}; 8)$; в) $(8\sqrt{2}; 8\sqrt{2})$. **16.** а) $x_1 = x + a$, $y_1 = y - 2$, где $a \in \mathbb{R}$; б) $x_1 = x - 6$, $y_1 = y + a$, где $a \in \mathbb{R}$. **17.** а) $D(3; 4)$; б) $D(9; 7)$; в) $D(-15; -7)$. **18.** *Указание*. Докажите, что $|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$.

§2. **1.** а) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}$; в) $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DA}$, $\vec{0}$. **2.** а) $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AO}$; б) $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{OD}$; в) $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$. **3.** а) $(-2{,}2; -6 + \sqrt{5})$; б) $(3{,}8; -6 - \sqrt{5})$; в) $(-6; 2\sqrt{5})$; г) $(0{,}4; -3)$; д) $(-10{,}6; 3\sqrt{5} + 12)$. **4.** а) $\left(12\frac{2}{3}; 7\right)$; б) $\left(11\frac{1}{3}; 25\right)$; в) (3; 4); г) (2; −27); д) (28; −22). **5.** а) $\sqrt{34}$; б) $\sqrt{41}$; в) $\sqrt{117}$; г) $7\sqrt{5}$. **9.** а) 5; б) 4; в) 9; г) 0. **10.** а) −3; б) 24; в) −9; г) −3. **11.** а) $\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{CD}$; в) $\overrightarrow{DA}$. **12.** $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC}$. **13.** а) (8; −1); б) (−5; −2); в) (−4; 5); г) (7; 18). **14.** а) Да; б) нет; в) да; г) да. **15.** 9. **16.** *Указание*. Докажите, что направления векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ перпендикулярные.
23. а) $\vec{x}(1; 2)$, $\vec{y}(-3; 4)$; б) $\vec{x}(2; 3)$, $\vec{y}(5; -4)$; в) $\vec{x}(0; -1)$, $\vec{y}(6; -2)$.
25. $2AB^2 + 2AD^2 = AC^2 + BD^2$.

Упражнения и задачи на повторение

4. а) 5; б) 6; в) 5; г) $2\sqrt{5}$. **6.** $D(3; 1)$. **7.** а) $\sqrt{2}$; б) 26; в) 15; г) 82. **9.** а) $A_1(4; 2)$; б) $B_1(3; 7)$; в) $C_1(-1; 5)$; г) $D_1(4; -4)$. **15.** а) 24; б) 7,5; в) 12; г) 6. **19.** а) $\frac{2}{3}$; б) 0; в) 7,5. **20.** б) 12. **21.** $C(2; 0)$. **22.** а) Равнобедренный; б) равносторонний. **23.** а) Прямоугольник; б) параллелограмм.

Содержание

Алгебра

Геометрия